

Игры с неполной информацией

Рябов П.П.

ВШЭ, Москва
2020

- Игроки имеют типы T_i (тип игрока включает информированность, полезности и представления об остальных)
- (Ф-ция полезности) $u_i : A_N \times T_N \rightarrow \mathbb{R}$, где A_N – множество действий игроков
- (Представления игрока о других) $p_i : T_i \rightarrow \Delta(T_{-i})$, $p_i(t_i) := p(t_{-i}|t_i)$
- Данные (T_i, u_i, p_i) известны всем.
- Стратегия игрока $s_i : T_i \rightarrow A_i$

Пример

$$(p = \frac{1}{12}) \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A_2 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \end{array} & \left(\begin{array}{cc} (1, 1) & (1, 0) \\ (0, 0) & (0, 1) \end{array} \right) \end{array}$$

$$(p = \frac{1}{4}) \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A_2 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \end{array} & \left(\begin{array}{cc} (1, 0) & (1, 1) \\ (0, 1) & (0, 0) \end{array} \right) \end{array}$$

$$(p = \frac{1}{6}) \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A_2 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \end{array} & \left(\begin{array}{cc} (0, 1) & (0, 0) \\ (2, 0) & (1, 1) \end{array} \right) \end{array}$$

$$(p = \frac{1}{2}) \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A_2 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \end{array} & \left(\begin{array}{cc} (0, 0) & (0, 1) \\ (2, 1) & (1, 0) \end{array} \right) \end{array}$$

Пример

$$(p = \frac{1}{12}) \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} A_2 \\ B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \end{array} & \begin{pmatrix} (1, 1) & (1, 0) \\ (0, 0) & (0, 1) \end{pmatrix} \end{array}$$

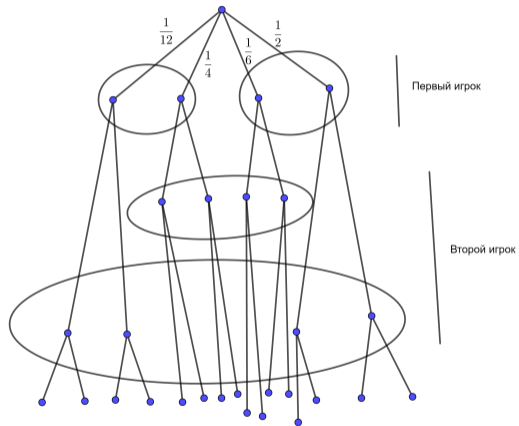
$$(p = \frac{1}{4}) \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} A_2 \\ B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \end{array} & \begin{pmatrix} (1, 0) & (1, 1) \\ (0, 1) & (0, 0) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(p = \frac{1}{6}) \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} A_2 \\ B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \end{array} & \begin{pmatrix} (0, 1) & (0, 0) \\ (2, 0) & (1, 1) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(p = \frac{1}{2}) \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} A_2 \\ B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \end{array} & \begin{pmatrix} (0, 0) & (0, 1) \\ (2, 1) & (1, 0) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} (\frac{1}{12})\{I, I\} & (\frac{1}{4})\{I, II\} \\ (\frac{1}{6})\{II, I\} & (\frac{1}{2})\{II, II\} \end{array}$$

Пример: Дерево игры



Пример: Смешанные стратегии

○ У первого игрока есть строго доминирующая стратегия: играть A_1 , если I ; играть B_1 , если II .

○ Если второй игрок оказался в ситуации I , то вероятность $\{I, I\}$ равна $\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$, а вероятность $\{II, I\} = \frac{2}{3}$.

Пусть второй игрок играет A_2 с вероятностью p , а B_2 с вероятностью $1 - p$.

Тогда его выигрыш рассчитывается по формуле

$\frac{1}{3}p \times 1 + \frac{1}{3}(1 - p) \times 0 + \frac{2}{3}p \times 0 + \frac{2}{3}(1 - p) \times 1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}p$. Следовательно, второму выгоднее играть B_2 .

○ Если второй оказался в ситуации II , то ему выгоднее играть A_2 .

Ожидаемый выигрыш игрока i в чистых стратегиях:

$$\sum_{t_i} \sum_{t_{-i}} p(t_i, t_{-i}) U_i(s_i, s_{-i}; (t_i, t_{-i}))$$

Theorem

В играх с неполной информацией с конечным множеством типов T_i Байесово равновесие существует в смешанных стратегиях.

Два игрока участвуют в аукционе первой цены. Хотим найти по оценке предмета v , равномерно распределённой для каждого игрока на отрезке $[0, 1]$, симметричное равновесие $b(v)$. То есть, стратегию $b(v)$, являющуюся оптимальным ответом на саму себя.

Будем искать $b(v)$ среди дифференцируемых монотонно возрастающих функций $b : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

Обозначим ответ на оценку v одного из игроков $b(v)$ за \tilde{b}

Тогда выигрыш игрока

$$(v - \tilde{b})P(b(v_2) < \tilde{b}) = (v - \tilde{b})P(v_2 < b^{-1}(\tilde{b})) = (v - \tilde{b})b^{-1}(\tilde{b})$$

Обозначим ответ на оценку v одного из игроков $b(v)$ за \tilde{b}

Тогда выигрыш игрока

$$(v - \tilde{b})P(b(v_2) < \tilde{b}) = (v - \tilde{b})P(v_2 < b^{-1}(\tilde{b})) = (v - \tilde{b})b^{-1}(\tilde{b})$$

$$\frac{d(\cdot)}{d\tilde{b}} = -b^{-1}(\tilde{b}) + (v - \tilde{b})\frac{1}{b'(b^{-1}(\tilde{b}))} = 0$$

Обозначим ответ на оценку v одного из игроков $b(v)$ за \tilde{b}

Тогда выигрыш игрока

$$(v - \tilde{b})P(b(v_2) < \tilde{b}) = (v - \tilde{b})P(v_2 < b^{-1}(\tilde{b})) = (v - \tilde{b})b^{-1}(\tilde{b})$$

$$\frac{d(\cdot)}{d\tilde{b}} = -b^{-1}(\tilde{b}) + (v - \tilde{b})\frac{1}{b'(b^{-1}(\tilde{b}))} = 0$$

$$v - \tilde{b} = b^{-1}(\tilde{b})b'(b^{-1}(\tilde{b}))$$

$$v - \tilde{b} = b^{-1}(\tilde{b})b'(b^{-1}(\tilde{b}))$$

$$\tilde{b} = b(v)$$

$$v - b(v) = b^{-1}(b(v))b'(b^{-1}(b(v)))$$

$$v - b(v) = vb'(v)$$

$$v - b(v) = vb'(v)$$

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{d}{dv}(vb(v))$$

Аукцион первой цены

$$v - b(v) = vb'(v)$$

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{d}{dv}(vb(v))$$

$$\frac{v^2}{2} = \text{const} + vb(v)$$

Пусть $b(0) = 0$

$$b(v) = \frac{v}{2}$$

Theorem (Роджер Майерсон)

- Найдено симметричное равновесие в игре
 - Игрок, оценивший предмет в 0, ничего не платит
 - Предмет выигрывает человек с максимальной оценкой
- ⇒ Средний выигрыш продавца в аукционе первой цены равен среднему выигрышу продавца в аукционе второй цены.

В. И. Данилов “Лекции по теории игр”

Н. Калинин Лекция 11(фрагмент)

А. В. Саватеев Аукцион первой цены

А. В. Саватеев Аукцион первой цены-2