Повторяющиеся игры

Лекция 16

Белецкий Антон

НИУ ВШЭ

2020

Отличия от однократных игр

Часто возникают игры, многократно повторяющиеся между одними и теми же партнерами. Интуиция подсказывает, что люди иначе ведут себя с теми, с кем ожидают поддерживать долговременные отношения. Повторяющиеся игры являются способом формализовать подобные ситуации.

Отличия от однократных игр

Часто возникают игры, многократно повторяющиеся между одними и теми же партнерами. Интуиция подсказывает, что люди иначе ведут себя с теми, с кем ожидают поддерживать долговременные отношения. Повторяющиеся игры являются способом формализовать подобные ситуации.

- *Предательства и наказания*. В однократных играх отсутствует возможность наказать игрока за предательство.

Отличия от однократных игр

Часто возникают игры, многократно повторяющиеся между одними и теми же партнерами. Интуиция подсказывает, что люди иначе ведут себя с теми, с кем ожидают поддерживать долговременные отношения. Повторяющиеся игры являются способом формализовать подобные ситуации.

- *Предательства и наказания*. В однократных играх отсутствует возможность наказать игрока за предательство.
- *Репутация*, заработанная в прошлых раундах, может изменить результат будущих игр в в сторону, выгодную игроку.

Длительность

- Игры с заранее определенным числом раундов
- Бесконечно повторяющиеся игры (в этом случае игру называют еще *суперигрой*)
- Игры с рандомизированным числом раундов (более сложный вариант)

Наблюдения

- Для возможности наказания противника необходима информация о его действиях в прошлом
- Для простоты будем считать, что вся информация о стратегиях и выигрышах во всех предыдущих раундах доступна

Стратегии

У игроков появляется возможнось реагировать на то, как действуют остальные, то есть стратегии в каждом раунде зависят от траектории игры в предыдущих раундах.

Стратегии

У игроков появляется возможнось реагировать на то, как действуют остальные, то есть стратегии в каждом раунде зависят от траектории игры в предыдущих раундах.
Если исходная (однократная) игра имела вид $(N, (S_i), (u_i))$, то в повторяющейся игре стратегия игрока для $(t+1)$-ого раунда — это функция

$$f_i^{t+1} : S_N^t \to S_i$$

(S_N^t — это множество всех возможных историй игры до раунда t включительно).

Траектория развития игры — последовательность ходов

Полная стратегия игрока — это набор из стратегий для каждого раунда (f_i^t).
Последовательность ходов определяется индуктивно по профилям стратегий для каждого игрока:

$$s_i^1 = f_i^1,\ s_i^2 = f_i^2(s_N^1),\ \dots\ s_i^k = f_i^k(s_N^1,\ \dots\ s_N^{k-1})$$

Выигрыши

- Конечные игры — сумма выигрышей по раундам (или средний выигрыш)

Выигрыши

- Конечные игры — сумма выигрышей по раундам (или средний выигрыш)
- Бесконечные игры
  - Средний выигрыш — $\lim_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T} \frac{u_i(s_N^t)}{T}$. Если не сходится, то обычно берут нижний предел
  - Дисконтированный выигрыш. Фиксируем дисконт $\delta < 1$, и будем считать выигрыш равным $(1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u_i(s_N^t)$

Повторяющаяся дилемма заключенных

Таблица выигрышей имеет вид:

	C	E
C	$2, 2$	$0, 3$
E	$3, 0$	$1, 1$

- В однократной игре стратегия E доминирующая, поэтому каждому игроку будет выгодно переключиться на нее.

Повторяющаяся дилемма заключенных

Таблица выигрышей имеет вид:

	C	E
C	$2,2$	$0,3$
E	$3,0$	$1,1$

- В однократной игре стратегия E доминирующая, поэтому каждому игроку будет выгодно переключиться на нее.
- Двукратная игра: во втором раунде каждому выгодно использовать E. Но тогда и в первом раунде стратегии E выгоднее (нет влияния на будущее).

Повторяющаяся дилемма заключенных

Таблица выигрышей имеет вид:

	C	E
C	$2,2$	$0,3$
E	$3,0$	$1,1$

- В однократной игре стратегия E доминирующая, поэтому каждому игроку будет выгодно переключиться на нее.
- Двукратная игра: во втором раунде каждому выгодно использовать E. Но тогда и в первом раунде стратегии E выгоднее (нет влияния на будущее).
- По индукции — конечное количество раундов.

Таблица выигрышей имеет вид:

	C	E
C	$2,2$	$0,3$
E	$3,0$	$1,1$

- В однократной игре стратегия E доминирующая, поэтому каждому игроку будет выгодно переключиться на нее.
- Двукратная игра: во втором раунде каждому выгодно использовать E. Но тогда и в первом раунде стратегии E выгоднее (нет влияния на будущее).
- По индукции — конечное количество раундов.
- *Однако в случае суперигры ситуация коренным образом изменяется.*

Дилемма заключенных — суперигра

Таблица выигрышей имеет вид:

	C	E
C	$2,2$	$0,3$
E	$3,0$	$1,1$

Рассмотрим такую стратегию: играть C, пока соперник играет ее же, а иначе навсегда переключиться на E. Если оба игрока применяют ее, то средние выигрыши равны 2 для обоих.

Дилемма заключенных — суперигра

Таблица выигрышей имеет вид:

	C	E
C	$2, 2$	$0, 3$
E	$3, 0$	$1, 1$

Рассмотрим такую стратегию: играть C, пока соперник играет ее же, а иначе навсегда переключиться на E. Если оба игрока применяют ее, то средние выигрыши равны 2 для обоих.
Это равновесие: если игрок на t-том раунде сыграет E, то его последовательность выигрышей:

$$2,\ 2,\ 2,\ \dots\ 3,\ x_{t+1},\ x_{t+2},\ \dots\quad \forall s \in \mathbb{N}:\ x_{t+s} \leq 1$$

В итоге, средний выигрыш не превосходит 1.

Если игрок отклоняется в t-том раунде, то его выигрыш:

$$(1-\delta)(2+\delta+\delta^2+\ldots+2\delta^{t-1}+3\delta^t+x_{t+1}\delta^{t+1}+\ldots)\leq$$

$$\leq(1-\delta)(2+\delta+\delta^2+\ldots+2\delta^{t-1}+3\delta^t+\frac{\delta^{t+1}}{1-\delta})=$$

$$=(1-\delta)(2\frac{1-\delta^t}{1-\delta}+3\delta^t+\frac{\delta^{t+1}}{1-\delta})=$$

$$=2+\delta^t-2\delta^{t+1}=2+\delta^t(1-2\delta)$$

Видим, что при $\delta>\frac{1}{2}$ (достаточно дальновидный игрок) смена стратегии невыгодна.

Повторяющаяся дилемма заключенных — заключение

Резкая разница между конечной и бесконечной ситуацией основывается на предположении об очень высокой рациональностью игроков.
Если один игрок считает, что второй будет действовать, как в бесконечном случае, то второму выгодно не разубеждать его почти до самого конца, то есть конечный случай приближается к бесконечному.

Свойства средних выигрышей

- Средний выигрыш не может быть меньше гарантированного уровня (так как можно постоянно применять осторожную стратегию).

Свойства средних выигрышей

- Средний выигрыш не может быть меньше гарантированного уровня (так как можно постоянно применять осторожную стратегию).
- На самом деле, для любого набора стратегий (f_{-i}) существует стратегия f_i, достигающая выигрыша хотя бы $\beta_i = \min_{s_{-i}} \max_{s_i} u_i(s_i, s_{-i})$ (если игрок знает, как остальные игроки походят в раунде t, то он может выбрать стратегию, являющуюся наилучшим ответом на ходы остальных, и получить выигрыш не меньше β_i)
- Это означает, что выигрыши, достигаемые в равновесии, $x_i \geq \beta_i$

Свойства средних выигрышей

- Средний выигрыш не может быть меньше гарантированного уровня (так как можно постоянно применять осторожную стратегию).
- На самом деле, для любого набора стратегий (f_{-i}) существует стратегия f_i, достигающая выигрыша хотя бы $\beta_i = \min_{s_{-i}} \max_{s_i} u_i(s_i, s_{-i})$ (если игрок знает, как остальные игроки походят в раунде t, то он может выбрать стратегию, являющуюся наилучшим ответом на ходы остальных, и получить выигрыш не меньше β_i)
- Это означает, что выигрыши, достигаемые в равновесии, $x_i \geq \beta_i$
- С другой стороны, средние выигрыши лежат в выпуклой оболочке возможных выигрышей в исходной игре (так как являются их комбинациями)

Народная теорема

Народная теорема

Любой набор выигрышей, лежащий в выпуклой оболочке выигрышей исходной игры и индивидуально рациональный (то есть $x_i \geq \beta_i$), достигается в некотором равновесии.

Народная теорема — идея доказательства

Сначала научимся реализовывать выигрыши вида $u_N(s_N) > \beta_N$.

- Стратегии наказания. Обозначим за s^*_{-i} набор стратегий игроков, который является худшим исходом для игрока i, то есть $s^*_{-i} = \arg\min_{s_{-i}} \max_{s_i} u_i(s_i, s_{-i})$. Тогда $\forall s'_i: \ u_i(s'_i, s_i) \leq \beta_i$.

Народная теорема — идея доказательства

Сначала научимся реализовывать выигрыши вида $u_N(s_N) > \beta_N$.

- Стратегии наказания. Обозначим за s^*_{-i} набор стратегий игроков, который является худшим исходом для игрока i, то есть $s^*_{-i} = \arg\min_{s_{-i}} \max_{s_i} u_i(s_i, s_{-i})$. Тогда $\forall s'_i :\ u_i(s'_i, s_i) \leq \beta_i$.
- Равновесные стратегии:
  - Использовать s_i (из которых состоит s_N) до тех пор, пока все остальные используют их же.
  - Если какой-то игрок использует другую стратегию, то начиная со следующего раунда все остальные переключаются на s^*_{-i}.

Народная теорема — идея доказательства

Сначала научимся реализовывать выигрыши вида $u_N(s_N) > \beta_N$.

- Стратегии наказания. Обозначим за s^*_{-i} набор стратегий игроков, который является худшим исходом для игрока i, то есть $s^*_{-i} = \arg\min_{s_{-i}} \max_{s_i} u_i(s_i, s_{-i})$. Тогда $\forall s'_i : \ u_i(s'_i, s_i) \leq \beta_i$.
- Равновесные стратегии:
    - Использовать s_i (из которых состоит s_N) до тех пор, пока все остальные используют их же.
    - Если какой-то игрок использует другую стратегию, то начиная со следующего раунда все остальные переключаются на s^*_{-i}.
- Это равновесие: отклоняться невыгодно, так как в равновесном состоянии все получают больше, чем β_N, а отклонившийся игрок начиная со следующего получает не больше, чем β_i, то есть его средний выигрыш уменьшается.

Народная теорема — идея доказательства

Остальные выигрыши — это выпуклые комбинации чистых выигрышей, рассмотренных только что.

- Если коэффициенты комбинации — рациональные числа: поочередно играем чистые компоненты в количествах, пропорциональных коэффициентам их вхождения в комбинацию, если кто-то отклоняется — бесконечно наказываем его.

Народная теорема — идея доказательства

Остальные выигрыши — это выпуклые комбинации чистых выигрышей, рассмотренных только что.

- Если коэффициенты комбинации — рациональные числа: поочередно играем чистые компоненты в количествах, пропорциональных коэффициентам их вхождения в комбинацию, если кто-то отклоняется — бесконечно наказываем его.
- Если коэффициенты вещественные — приближаем их рациональными со все большей точностью.

Народная теорема — комментарии

- В суперигре очень много равновесий, поэтому не очень понятно, какое из них реализуется.

Народная теорема — комментарии

- В суперигре очень много равновесий, поэтому не очень понятно, какое из них реализуется.
- Народная теорема верна также и для дисконтированного выигрыша, если дисконт близок к 1.

Народная теорема — комментарии

- В суперигре очень много равновесий, поэтому не очень понятно, какое из них реализуется.
- Народная теорема верна также и для дисконтированного выигрыша, если дисконт близок к 1.
- *Совершенная народная теорема*. Равновесия возникают за счет наказания игроков, нарушающих соглашения. Они неустойчивы, если стратегии наказания невыгодны остальным. Можно добиться совершенности равновесия, аккуратно добавив соглашения о наказании тех, кто уклоняется от стратегий наказния, и т. д.