

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова
Российской Академии Наук

191023 Санкт-Петербург, наб. р.Фонтанки, 27
тел. (812) 312-40-58, факс (812) 310-53-77
e-mail: admin@pdmi.ras.ru

12.05.2014 № 11102/33/02-2121

На _____ от _____

«УТВЕРЖДАЮ»

Директор ФГБУН Санкт-
Петербургского отделения
Математического института
им. В.А. Стеклова Российской
академии наук, член-
корреспондент РАН



С.В.Кисляков

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертацию А. О. Солдатенкова «Геометрия гиперкомплексных многообразий», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Диссертационная работа посвящена изучению гиперкомплексных многообразий. Эта теория находится на пересечении нескольких математических дисциплин, в первую очередь алгебры, комплексной дифференциальной геометрии и теории представлений, и тесно связана с каждой из них. Так, при изучении гиперкомплексных многообразий и их подмногообразий с голономией в специальной линейной группе над телом кватернионов автор использует ряд оригинальных алгебро-геометрических конструкций (например, пространства твисторов), а при изучении голоморфных лагранжевых расслоений -- кватернионный комплекс Дольбо. Представления групп голономий играют

центральную роль в классификации гиперкомплексных многообразий, как однородных, так и неоднородных. Работа Солдатенкова вносит существенный вклад в развитие как алгебро-геометрических, так и теоретико-представленческих аспектов дифференциальной геометрии гиперкомплексных многообразий.

Понятие гиперкомплексного многообразия возникло в работах Обаты в середине 1950-х годов. Обата изучал эти многообразия с дифференциально-геометрической точки зрения. Позднее, после работ Богомолова, Бовиля и Фуджики в конце 1970-х, и в 1980-х, было осознано значение гиперкомплексных многообразий для алгебраической геометрии. Специальный тип гиперкомплексных многообразий – гиперкэлеровы многообразия – возникает в классификации комплексных алгебраических многообразий с тривиальным каноническим расслоением. Кроме того, некоторые классы гиперкомплексных многообразий очень важны для некэлеровой комплексной геометрии, так как они дают важные примеры многообразий, не допускающих кэлеровой метрики. В конце 1980-х годов гиперкомплексные многообразия также стали использоваться в работах по математической физике, связанных с изучением сигма-моделей.

Первая глава диссертации является подготовительной. В ней диссертант дает обзор теории гиперкомплексных многообразий и вводит необходимые определения и обозначения.

Во второй главе диссертации изучается голономия связности Обаты на группе Ли $SU(3)$ с гиперкомплексной структурой. Гиперкомплексная структура – это тройка интегрируемых почти-комплексных структур, которые удовлетворяют кватернионным соотношениям. Гиперкомплексные структуры на компактных группах Ли были построены в работе Джойса. Эти гиперкомплексные структуры являются левоинвариантными и вопрос об их построении сводится к изучению соответствующей алгебры Ли.

Как показал в своих работах Обата, любое гиперкомплексное многообразие обладает канонической связностью в касательном расслоении. Эту связность принято называть связностью Обаты. При этом возникает естественный вопрос о том, чему равна группа голономии данной связности. Ответ на этот вопрос в общем случае неизвестен. Из определения связности Обаты следует, что группа

голономии должна быть подгруппой в группе всех кватернионно-линейных преобразований $GL(n,H)$. Известно, что для некоторых важных классов гиперкомплексных многообразий (например, для гиперкомплексных нильмногообразий) группа голономии является собственной подгруппой в $GL(n,H)$. До недавнего времени было неизвестно, может ли группа голономии совпадать с $GL(n,H)$ в каких-либо примерах. Ответ на этот вопрос получен во второй главе диссертации: доказано, что группа голономии связности Обаты на группе $SU(3)$ совпадает с $GL(2,H)$. Этот результат важен как с точки зрения теории гиперкомплексных многообразий, так и с точки зрения общей теории неприводимых групп голономии связностей без кручения.

В третьей главе диссертации изучаются некоторые вопросы, касающиеся структуры комплексных подмногообразий в гиперкомплексных многообразиях. Солдатенков ограничивается изучением гиперкомплексных многообразий с голономией $SL(n,H)$ и с НКТ-метрикой (это специальный класс метрик, представляющий собой кватернионный аналог кэлеровых метрик). Диссертант исследует так называемое твисторное семейство комплексных структур на гиперкомплексном многообразии. Это семейство параметризуется точками комплексной проективной прямой. Рассматриваются общие элементы этого семейства, то есть такие элементы, которые лежат в дополнении к некоторому счетному подмножеству проективной прямой. Доказано, что для общей комплексной структуры соответствующее комплексное многообразие не имеет дивизоров, а все подмногообразия коразмерности два являются трианалитическими. Результаты такого рода были ранее получены Вербицким для гиперкэлеровых многообразий и играют ключевую роль при изучении структуры пространства модулей таких многообразий. Поэтому вполне вероятно, что результаты, полученные в третьей главе диссертации, также найдут применение при изучении более широкого класса гиперкомплексных многообразий, рассмотренных диссертантом.

Четвертая глава посвящена изучению голоморфных лагранжевых расслоений на гиперкомплексных многообразиях с голономией $SL(n,H)$. Голоморфные лагранжевые расслоения – это классический объект изучения для комплексной симплектической геометрии. В четвертой главе объяснено, что понятие голоморфного лагранжева подмногообразия (и, следовательно,

голоморфного лагранжева расслоения) имеет смысл для гиперкомплексных $SL(n, H)$ -многообразий, несмотря на то, что такие многообразия в общем случае не обладают голоморфной симплектической структурой. Доказано, что если гиперкомплексное многообразие обладает НКТ-метрикой, то база лагранжева расслоения кэлерова. Эта теорема применяется к исследованию вопроса о том, всегда ли гиперкомплексное многообразие обладает некоторой НКТ-метрикой. Ответ на этот вопрос отрицателен – в четвертой главе построены примеры лагранжевых расслоений над некэлеровыми базами. При этом тотальные пространства таких расслоений не допускают НКТ-метрик. Результат о базе голоморфных лагранжевых расслоений является интересным обобщением аналогичных теорем, имеющихся для гиперкэлеровых многообразий.

Замечания. Помимо нескольких мелких опечаток, главное замечание состоит в том, что три основных главы диссертации посвящены трем разным задачам. Тем не менее, это не является существенным недостатком, поскольку рассматриваемые задачи связаны между собой единой тематикой геометрии гиперкэлеровых многообразий. Отдельные места работы воспринимались бы понятнее, если бы сопровождались соответствующими иллюстрациями. Вышесказанное, однако, не умаляет положительные стороны работы.

Заключение. Диссертационная работа А.О.Солдатенкова посвящена актуальным проблемам теории гиперкомплексных многообразий и имеет теоретический характер. В ней получены новые научные результаты, представляющие существенный вклад в комплексную алгебраическую и дифференциальную геометрию, а также в теорию представлений кватернионных линейных групп.

Результаты диссертации опубликованы в трех печатных работах в ведущих рецензируемых изданиях. Все результаты снабжены подробными доказательствами и прошли апробацию на многих авторитетных отечественных и международных конференциях и семинарах. Результаты изложены полно и строго, автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Результаты диссертации могут быть рекомендованы для использования в работе специалистов по комплексной и гиперкомплексной геометрии и ее

приложениям, работающим в МИ РАН, ПОМИ РАН, ИМ СО РАН, МГУ, НИУ-ВШЭ, Петербургском, Новосибирском и Самарском университетах.

На основании вышесказанного можно считать, что диссертация А.О. Солдатенкова «Геометрия гиперкомплексных многообразий» удовлетворяет паспорту специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел, а ее автор Андрей Олегович Солдатенков заслуживает ученой степени кандидата физико-математических наук.

Отзыв ведущей организации составили ведущий научный сотрудник ПОМИ РАН, доктор ф.-м. наук П.Г. Зограф и старший научный сотрудник ПОМИ РАН, кандидат ф.-м. наук Н.Е. Мнев.

В.н.с. ПОМИ РАН, д.ф.-м.н.

П.Г. Зограф

С.н.с. ПОМИ РАН, к.ф.-м.н.

Н.Е. Мнев

Отзыв заслушан и утвержден на заседании Лаборатории теории представлений и динамических систем ПОМИ РАН 8-го мая 2014 года, протокол заседания № 2.

Заведующий лабораторией,
г.н.с. ПОМИ РАН, д.ф.-м.н., профессор

А.М. Вершик