

## ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертационную работу  
*Солдатенкова Андрея Олеговича*  
«Геометрия гиперкомплексных многообразий»,  
представленную на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук по специальности  
01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Представленная диссертация посвящена исследованию геометрии гиперкомплексных многообразий.

Гиперкомплексная геометрия — это аналог комплексной алгебраической геометрии, когда поле комплексных чисел заменено на алгебру кватернионов. Основным объектом изучения являются гиперкомплексные многообразия, которые по определению представляют собой гладкие многообразия с тремя интегрируемыми почти-комплексными структурами  $I$ ,  $J$  и  $K$ , для которых верны кватернионные соотношения  $IJ = -JI = K$ . Гиперкомплексная структура задает действие алгебры кватернионов в касательном расслоении к многообразию, при этом каждый единичный мнимый кватернион определяет комплексную структуру.

Гиперкомплексные многообразия активно изучались в работах Обаты, Соммезе, Саламона, Джойса, Боера, Гранчарова, Верицкого и других авторов. Гиперкомплексная геометрия также важна для некоторых разделов математической физики. Обзор известных результатов о гиперкомплексных многообразиях приводится в первой главе диссертации.

Одним из важнейших свойств гиперкомплексных многообразий является существование канонической аффинной связности без кручения, которая сохраняет все три комплексных структуры. Существование и единственность такой связности были доказаны Обатой. Вторая глава диссертации посвящена изучению свойств связности Обаты на группе Ли  $SU(3)$  с левоинвариантной гиперкомплексной структурой. Автор изучает голономию связности Обаты на этом многообразии. Поскольку связность Обаты не сохраняет никакой римановой метрики, то изучение ее свойств представляет существенную сложность.

Другим важным аспектом геометрии гиперкомплексных многообразий является существование твисторных семейств. Множество единичных мнимых кватернионов является двумерной сферой, которую можно рассматривать как комплексную проективную прямую. Каждая точка этой сферы задает комплексную структуру на гиперкомплексном многообразии. Можно показать, что существует универсальное семейство для этих комплексных структур, расслоенное над проективной прямой. Оно и называется твисторным семейством. В третьей главе автор изучает общие элементы этого семейства. Под общим элементом в данном случае понимается точка на проективной прямой, лежащая в дополнении к некоторому счетному множеству.

Автор изучает структуру подмногообразий в общем комплексном многообразии из твисторного семейства.

Гиперкомплексные многообразия можно рассматривать как обобщение гиперкэлеровых многообразий, которые активно изучаются в алгебраической геометрии. Широко известны работы Мацуситы и Свана, в которых исследуются голоморфные лагранжевы расслоения на гиперкэлеровых многообразиях. Вербицкий заметил, что понятие голоморфного лагранжева расслоения имеет смысл для более общих гиперкомплексных многообразий. В отличие от гиперкэлерова случая, этот более общий случай практически не исследован. В четвертой главе автор получает некоторые результаты в этом направлении. Рассматриваются голоморфные лагранжевы расслоения на  $SL(n, \mathbb{H})$ -многообразиях с НКТ-метрикой, что является ослаблением условия гиперкэлеровости. Эти результаты используются в конце главы для построения примеров гиперкомплексных многообразий, не допускающих НКТ-метрики.

Перечислим основные результаты, полученные в диссертации.

1. Доказано, что связность Обаты на группе  $SU(3)$  с левоинвариантной гиперкомплексной структурой, построенной в работе Д.Джойса, имеет неприводимое представление голономии. Доказано, что группа голономии связности Обаты равна  $GL(2, \mathbb{H})$ .
2. Рассмотрено твисторное семейство гиперкомплексного  $SL(n, \mathbb{H})$ -многообразия с НКТ-метрикой. Доказано, что общее многообразие в твисторном семействе не содержит дивизоров, а все подмногообразия коразмерности два являются трианалитическими. В частности, общее подмногообразие в твисторном семействе не является алгебраическим.
3. Доказано, что база голоморфного лагранжева расслоения на гиперкомплексном  $SL(n, \mathbb{H})$ -многообразии с НКТ-метрикой является кэлеровой. Построены примеры гиперкомплексных многообразий, не допускающие НКТ-метрики.

Результаты, полученные в диссертации А. О. Солдатенкова могут найти применение в теории групп Ли, при изучении геометрии комплексных многообразий и лагранжевых расслоений, а также в математической физике. Диссертация А. О. Солдатенкова является законченным исследованием, имеющим существенное значение для этих разделов математики. При работе над диссертацией автор продемонстрировал свободное владение современными методами комплексной алгебраической геометрии и теории групп Ли.

Все результаты диссертационной работы А. О. Солдатенкова являются новыми и докладывались им на международных конференциях и на научно-исследовательских семинарах ведущих вузов и научных институтов России. Основное содержание работы опубликовано в виде статей в ведущих научных журналах. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Полученные автором результаты могут быть использованы специалистами по алгебраической и дифференциальной геометрии, а также теории групп Ли, работающими в Московском государственном университете, Независимом Московском университете, на факультете математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», в Санкт-Петербургском государственном университете, Новосибирском государственном университете, Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН, а также в других ведущих университетах и научных центрах в России и за рубежом.

Диссертация Солдатенкова Андрея Олеговича удовлетворяет всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» ВАК РФ, а ее автор заслуживает присуждения ему степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры высшей геометрии и топологии  
механико-математического факультета МГУ

  
Панов Тарас Евгеньевич

Подпись проф. Панова Т. Е.  
удостоверяю  
и.о. декана механико-математического факультета МГУ  
д.ф.-м.н., профессор



  
Чубариков Владимир Николаевич