

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

Рабочая программа дисциплины (модуля)

по дисциплине:	Методы выпуклой оптимизации
по направлению:	Прикладные математика и физика
магистерская программа:	Телекоммуникационные сети и системы Физтех-школа радиотехники и компьютерных технологий Кафедра проблем передачи информации и анализа данных
курс:	1
квалификация:	Магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (Осенний) - Дифференцированный зачёт

Программу составил: А.В. Назин, доктор физико-математических наук, профессор

Аннотация

В курсе предполагается, что студенты уже знакомы с элементами выпуклого анализа (в частности, с преобразованием Лежандра–Фенхеля и понятием субградиента выпуклой функции) и теорией вероятностей. Изучается метод зеркального спуска (МЗС) при возможности наблюдать градиент, а иногда и значение целевой функции (оракул 1-го порядка), представляющий собой нетривиальное обобщение стандартного градиентного метода. Показывается эффективность МЗС в классе выпуклых целевых функций с замкнутым выпуклым множеством ограничений. Подход распространяется как на детерминированные, так и на стохастические выпуклые задачи, а также на минимаксные задачи с выпукло-вогнутой целевой функцией. В качестве примеров рассматривается стохастическая задача о многоруком бандите (с доказательствами верхней и нижней границ), а также задача о нахождении главного собственного вектора стохастической матрицы (задача PageRank), и задача бинарной классификации (обучение с учителем). Курс носит теоретический характер и направлен на строгие постановки и математические доказательства.

Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Введение в выпуклую оптимизацию. Краткий обзор задач и методов. Примеры.

Введение: выпуклые множества и функции. Задача выпуклой оптимизации (в n -мерном пространстве). Примеры: машинное обучение, классификация с учителем, регрессия.

Элементы выпуклого анализа: теоремы о разделении, об опорной гиперплоскости, определение и существование субградиента. Условия оптимальности 1-го порядка.

Модель черного ящика. Понятия об оракуле, его сложности, о методе оптимизации и его сложности. Обзор методов и результатов.

2. Метод центра тяжести и метод эллипсоидов: свойства и сложность.

Метод центра тяжести. Доказательство верхней границы. Сложность метода.

Метод эллипсоидов, его свойства и сложность.

3. Метод зеркального спуска (МЗС) для задачи стохастической оптимизации.

Идея метода зеркального спуска (МЗС). Параметры метода: исходная и двойственная нормы, потенциал отображения сопряженного пространства и условие Липшица на градиент. Примеры (с доказательствами).

Задача выпуклой стохастической оптимизации на заданном компакте с оракулом 1-го порядка. МЗС и его анализ. Понятие прокси-функции, преобразование Лежандра-Фенхеля. Параметр сильной выпуклости. Связь МЗС с методом стохастической аппроксимации.

Частный случай параметров МЗС; полностью рекуррентный алгоритм ЗС (АЗС), его верхняя граница и сложность. Доказательства.

Адаптивный АЗС (по обобщенной температуре), его верхняя граница и сложность. Другие варианты прямо-двойственных методов. Обсуждение.

4. Применение МЗС к задачам о многоруком бандите, PageRank, бинарной классификации с учителем и др.

Задача о многоруком бандите. Применение оптимизационного подхода и МЗС. Получение верхней границы. Сравнение с известной информационной нижней границей.

Задача PageRank как оценивание главного собственного вектора стохастической матрицы.

Сведение к задаче выпуклой оптимизации и применение МЗС.

Задача бинарной классификации с учителем: применение МЗС для минимизации ошибки классификации на выпуклой оболочке «простых» правил разделения.

Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Немировский А.С., Юдин Д.Б. Сложность задач и эффективность методов оптимизации. М.: Наука, 1979. - 384 с.
2. Нестеров Ю.Е. Введение в выпуклую оптимизацию. М.: МЦНМО, 2010. - 262 с.
3. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. - 472 с.
4. Юдицкий А.Б., Назин А.В., Цыбаков А.Б., Ваятис Н. [Рекуррентное агрегирование оценок методом зеркального спуска с усреднением](#) // Проблемы передачи информации. 2005. № 41:4. С. 78-96.
5. Bubeck S. Theory of Convex Optimization for Machine Learning. [arXiv:1405.4980v1](#), May 2014.

Дополнительная литература

1. Tutorial: Mirror Descent Algorithms for Large-Scale Deterministic and Stochastic Convex Optimization. Arkadi Nemirovski. <http://www.ttic.edu/colt2012/download/COLT-Mirror-Descent-Tutorial.pdf>
2. Назин А.В., Поляк Б.Т. Рандомизированный алгоритм нахождения собственного вектора стохастической матрицы с применением к задаче PageRank // Автоматика и телемеханика. 2011. Вып. 2. С. 131-141.
3. Cesa-Bianchi N., Lugosi G. Prediction, Learning, and Games. Cambridge University Press, 2006.
4. Auer P., Cesa-Bianchi N., Freund Y., Schapire R. The nonstochastic multiarmed bandit problem. SIAM Journal on Computing. 2002. 32:48–77.
5. Kiwiel K.C. Proximal Minimization Methods with Generalized Bregman Functions, SIAM J. Control Optim., 1997. Vol. 35. N 4. P. 1142–1168.
6. Beck A., Teboulle M. Mirror Descent and Nonlinear Projected Subgradient Methods for Convex Optimization, Oper.Research Letters, 2003. Vol. 31. N 3. P. 167-175.

7. Tremba A., Nazin A. Extension of a saddle point mirror descent algorithm with application to robust Page-Rank, 0863.pdf. In *Proc. 52nd IEEE Conference on Decision and Control*, Florence, Italy, 2013, pp. 3691–3696. ISBN: 978-1-4673-5716-6.