

## ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертацию Буфетова Алексея Игоревича "Случайные разбиения и асимптотическая теория представлений", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

В последние десятилетия в теории представлений возникло новое направление ---представления "Больших групп". Речь идет, в частности, о бесконечной симметрической группе и о бесконечномерных матричных группах; одно из ответвлений этой тематики --- это исследование асимптотического поведения представлений конечной симметрической группы (при больших значениях порядка группы) и конечномерных матричных групп (при больших значениях их размерности). К настоящему времени имеется ряд ярких результатов в этой области, вскрывающих её замечательные связи с разными разделами математики. Эта тематика вызывает большой интерес специалистов, и число работ в этой области нарастает. Это позволяет считать диссертацию Буфетова А.И. весьма своевременным и актуальным исследованием.

Первая глава диссертации посвящена асимптотике представлений симметрической группы. Основной объект теории её представлений --- это классические диаграммы Юнга. Анализ ветвлений представлений (разложение данного неприводимого представления на представления меньшей группы) привёл к весьма замечательному объекту --- графу Юнга и связанному с ним вероятностному пространству. Отсюда естественным образом возникли традиционные задачи теории вероятностей. Первая из этих задач --- вывод закона больших чисел --- была решена в работах Ф.Логана, Л.А.Шеппа, А.М.Вершика, С.В.Керова. Ими выведена "предельная" форма "типичной" диаграммы Юнга. Естественным образом возник вопрос о центральной предельной теореме. Она была получена Ферэ и Мелио в одном весьма частном случае (при нулевых значениях большинства параметров представления). В диссертации Буфетова А.И. содержится полное исследование проблемы. Подчеркнём, что внешнее сходство задачи о центральной предельной теореме для графа Юнга с аналогичной классической задачей обманчиво. Классическая задача весьма быстро сводится к традиционной задаче математического анализа о свёртках многих вероятностных мер на прямой. В случае графа Юнга объект исследования существенно сложнее; здесь от автора потребовался весьма тонкий анализ вероятностной картины, связанной с алгоритмом Робинсона-Шенстеда-Кнута. Неудивительно, что это полное решение задачи о центральной предельной теореме (результат первой главы) было получено далеко не сразу после закона больших чисел. Этот результат следует рассматривать как весьма важный вклад в современную асимптотическую теорию представлений.

Вторая глава посвящена бесконечномерной унитарной группе. Как и в первой главе, возникает ветвление представлений; ему соответствует граф Гельфанда-Цетлина с вероятностной мерой. Для целей вероятностного анализа "больших" диаграмм Юнга применяется "функция высоты" диаграмм. Это есть случайная функция на вероятностном пространстве. Ранее предшественники диссертанта обнаружили, что асимптотика её

отклонения от среднего значения описывается свободным гауссовым полем. В диссертации сделан новый существенный шаг в анализе этой случайной функции. Автор показывает, что она включается в обширное семейство случайных функций, которые естественным образом отождествляются с элементами универсальной обёртывающей алгебры. Таким образом, указанные функции становятся объектами некоммутативной теории вероятности. Это включение позволяет сделать принципиально новый шаг --- изучить асимптотическое поведение не только одной случайной функции, но и всего семейства. Этот анализ приводит к замечательному результату: упомянутые предельные величины оказываются элементами обширного гауссовского ансамбля случайных величин. Явное описание этого ансамбля (вычисление попарных корреляций) достигается как итог изобретательных вычислений и нетривиальных комбинаторных соображений. Это и приводит к центральной предельной теореме для класса представлений (названных планшерелевскими) бесконечномерной унитарной группы. Здесь важен не только окончательный результат. Заслуживает внимания приём, расширяющий возможности исследования наборов случайных величин, которые могут быть определены на разных вероятностных пространствах. Приём состоит во включении указанного набора в некоммутативную алгебру (естественным образом подобранную) случайных величин.

В третьей главе изучается явление перемежаемости спектров случайных матриц и их "урезаний" (полученных отбрасыванием строки и столбца). Соотношения между спектрами операторов такого рода - это классическая задача теории матриц и функционального анализа. Автор исследует предельную картину перемежаемости, используя язык "прямоугольных диаграмм Юнга", введённый С.В.Керовым. Замечательным образом эта картина описывается той же предельной кривой, которая возникла ранее в исследованиях Ф.Логана, Л.А.Шеппа, А.М.Вершика, С.В.Керова. Было бы весьма интересно показать, что это не есть случайное совпадение, и отыскать общий принцип, объединяющий эти результаты. Описанные результаты являются новыми; их следует отнести к важным достижениям современной асимптотической теории представлений. Представляют интерес не только явно сформулированные результаты (центральная предельная теорема для представлений бесконечной симметрической группы и бесконечномерной унитарной группы, анализ перемежаемости спектров случайных матриц), но и общие методы анализа, которые могут найти дальнейшее развитие.

Все положения диссертации полностью доказаны; их достоверность несомненна.

Работа изложена достаточно ясно и обстоятельно. Как правило, вычисления и доказательства предваряются объяснениями мотивировок, что уместно, ибо работа не может считаться "лёгким чтением". Мне кажется, однако, что в первой главе это пожелание выполнено не в полной мере: здесь доказательству предшествует достаточно длинная цепочка обозначений и терминов, роль которых становится понятной только после прочтения результата.

В нужных местах воспроизводятся необходимые результаты других авторов; исключение из этого правила составляет ссылка (без подробностей) на важное понятие специальной симметризации (стр. 49) (разумеется, заинтересованный читатель найдёт недостающее в литературе).

Результаты своевременно опубликованы (добавлю, в лучших математических журналах --- российских и зарубежных). Автореферат соответствует содержанию диссертации. Считаю, что диссертация А.И. Буфетова "Случайные разбиения и асимптотическая теория представлений" удовлетворяет всем требованиям "Положения о порядке присуждения учёных степеней" ВАК РФ, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор Буфетов Алексей Игоревич заслуживает присуждения ему степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 -математическая логика, алгебра и теория чисел.

Доктор физико-математических наук  
профессор МГТУ им. Н.Э. Баумана



Исмагилов Р.С.

Подпись Исмагилова Р.С. удостоверяю



**А. Г. МАТВЕЕВ**

**ЗАМ. НАЧ. УПРАВЛЕНИЯ КАДРОВ**

**ТЕЛ. 8499-263 67 69**



ФГБОУ ВПО "Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана", 105005, 2-я Бауманская улица, д.5, стр.1.  
тел:(8499)2636391, e-mail: ismagil@bmstu.ru