На правах рукописи

УДК 512.815.6

Буфетов Алексей Игоревич

СЛУЧАЙНЫЕ РАЗБИЕНИЯ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2015

Работа выполнена на факультете математики Национального исследовательского университета “Высшая школа экономики”.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Ольшанский Григорий Иосифович,
профессор базовой кафедры
Института проблем передачи
информации на факультете математики
Высшей школы экономики

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
Исмагилов Раис Сальманович,
профессор кафедры ФН-1 “Высшая
математика“ФГБОУ ВПО “Московский
государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана“

кандидат физико-математических наук
Наумов Алексей Александрович,
младший научный сотрудник факультета
Вычислительной математики и кибернетики
ФГБОУ ВПО “Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова“,

Ведущая организация: ФГБУН “Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова РАН“

Защита диссертации состоится 2 июня 2015 г. в 17:00 на заседании диссертационного совета Д002.077.03 при Институте проблем передачи информации им. А.А.Харкевича РАН, расположенном по адресу: 127051, г. Москва, Большой Каретный переулок, 19, стр.1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института проблем передачи информации им. А.А.Харкевича РАН.

Автореферат разослан   апреля 2015 года

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 002.077.03,
доктор физико-математических наук   А.Н. Соболевский

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Асимптотическая теория представлений изучает свойства представлений “больших” групп; фундаментальными примерами таких групп служат бесконечная симметрическая группа и бесконечномерная унитарная группа. Для подобных групп не применимы многие методы и конструкции классической теории представлений. Тем не менее, в результате работ А.М. Вершика, С.В. Керова, Г.И. Ольшанского, А.Ю. Окунькова, А.М. Бородина и других математиков была построена теория представлений “больших” групп, выявляющая как тесные параллели с классической теорией представлений конечных и компактных групп, так и новые эффекты, не имеющие аналога в классическом случае. Одной из наиболее интересных особенностей этой теории является наличие большого количества взаимосвязей с разными областями математики, такими как алгебраическая комбинаторика, случайные матрицы, свободная вероятность, теория интегрируемых систем и другими.

Бесконечная симметрическая группа может быть определена как (индуктивный) предел последовательности симметрических групп растущего размера; аналогично, бесконечномерная унитарная группа может быть определена как (индуктивный) предел последовательности унитарных групп растущей размерности. В связи с этим возникает естественный вопрос: как связаны характеры бесконечных объектов и классические характеры конечных симметрических групп (или компактных унитарных групп) ? Оказывается, эта взаимосвязь может быть описана с помощью вероятностных мер на комбинаторных объектах — разбиениях, и предельных теорем вероятностного характера, описывающих предельное поведение этих мер с ростом размеров групп.

Данная работа посвящена задачам асимптотической теории представлений, возникающим при анализе этих вероятностных мер. Полученные результаты естественным образом продолжают работы А.М. Вершика и С.В. Керова о характерах бесконечной симметрической группы, А.М. Бородина и П. Феррари о характерах бесконечномерной унитарной группы и связанной с ними динамики на комбинаторных объектах, С.В. Керова о взаимосвязи асимптотической теории представлений и теории случайных матриц. В то же время, в данной работе возникает новый тип вопросов — исследование предельного поведения представлений в контексте некоммутативной вероятности.

Степень разработанности темы исследования.

Пусть $S(n)$ — группа перестановок порядка n. Зададим последовательность

$$S(1) \subset S(2) \subset \cdots \subset S(n) \subset S(n+1) \subset \dots,$$

в которой вложение $S(n) \subset S(n+1)$ задается условием, что перестановки из S_n оставляют на месте $n+1$-ый элемент.

Бесконечной симметрической группой называется объединение этой цепочки групп:

$$S(\infty) := \bigcup_{n=1}^{\infty} S(n).$$

Характером бесконечной симметрической группы называется функция $\chi : S(\infty) \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1) Выполнено $\chi(e) = 1$, где e — единица группы $S(\infty)$.

2) Для любых $g, h \in S(\infty)$ выполнено $\chi(gh) = \chi(hg)$.

3) Для любого $k \in \mathbb{N}$ и любых $g_1, \ldots, g_k$ матрица $[\chi(g_i^{-1} g_j)]_{i,j=1}^{k}$ неотрицательно определена.

Легко видеть, что множество характеров $S(\infty)$ является выпуклым. Задача нахождения границы (множества экстремальных точек) этого множества была решена Э. Тома. Оказывается, что экстремальные характеры взаимно однозначно соответствует наборам параметров $\mathcal{P} = (\{\alpha_i\}, \{\beta_j\}, \gamma)$, где $\alpha_i, \beta_j, \gamma$ — вещественные числа, удовлетворяющие соотношениям

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \ldots \geq 0, \quad \beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3 \geq \ldots \geq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i + \beta_i) + \gamma = 1.$$

Хорошо известно, что неприводимые представления группы $S(n)$ параметризуются диаграммами Юнга из n клеток. Будем обозначать символом χ^{λ} нормированный (равный единице в единице группы) характер неприводимого представления $S(n)$, отвечающего диаграмме Юнга λ. Пусть $\mathbb{Y}_n$ — множество всех диаграмм Юнга из n клеток.

Для экстремального характера $\chi^{\mathcal{P}}$, отвечающего параметрам $\mathcal{P}$, существует разложение:

$$\chi^{\mathcal{P}}|_{S(n)} = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} M_n^{\mathcal{P}}(\lambda) \chi^{\lambda}.$$

Несложно показать, что коэффициенты $M_n^{\mathcal{P}}(\lambda)$ задают вероятностную меру на $\mathbb{Y}_n$. В связи с этим возникает вопрос: как выглядит случайная диаграмма Юнга (распределенная по мере $M_n^{\mathcal{P}}$) при $n \to \infty$?

Пусть λ_i — длина i-ой строки диаграммы Юнга, и пусть λ'_j — длина j-ого столбца. А.М. Вершик и С.В. Керов [19] показали, что для длин строк случайных диаграмм Юнга выполнен следующий закон больших чисел:

$$\frac{\lambda_i^{\mathcal{P}}(n)}{n} \xrightarrow[prob]{} \alpha_i, \qquad \frac{\lambda_j'^{\mathcal{P}}(n)}{n} \xrightarrow[prob]{} \beta_j.$$

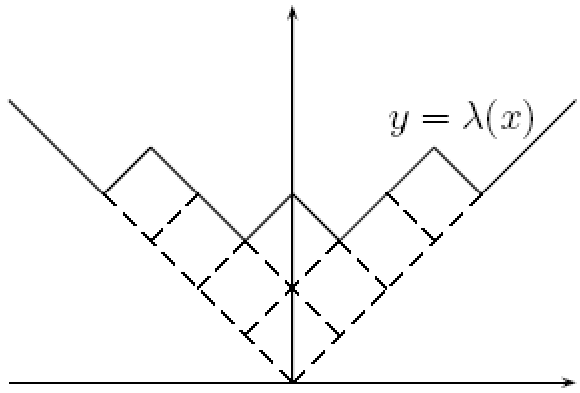

Рис. 1. Функция $\lambda(x)$, сопоставляемая диаграмме Юнга $\lambda = (4, 2, 1, 1)$.

В первой главе делается следующий шаг в изучении вероятностных мер $M_n^{\mathcal{P}}$ — доказывается центральная предельная теорема для длин строк и столбцов.

Одним из наиболее интересных примеров мер на диаграммах Юнга является *мера Планшереля*, возникающая как $M_n^{\mathcal{P}_0}$ для набора параметров $\mathcal{P}_0$, отвечающего $\gamma = 1$ и всем другим параметрам равным 0. Для этой меры А.М. Вершик и С.В Керов [24] доказали, что случайная диаграмма Юнга λ имеет глобальную предельную форму.

Более подробно, каждой диаграмме Юнга λ можно сопоставить функцию $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, как показано на рисунке 1. Для случайной диаграммы Юнга распределенной по мере Планшереля А.М. Вершик и С.В Керов [24] и, независимо, Ф. Логан и Л.А. Шепп [20] доказали, что

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \lambda(\sqrt{n}x) - \Omega(x) \right| = 0, \qquad \text{по вероятности,}$$

для некоторой детерминированной предельной функции $\Omega(x)$, которую мы будем называть *кривой Вершика-Керова.*

Теорема Керова [11] дает описание глобальных флуктуаций случайной функции $\lambda(x)$ вокруг кривой $\Omega(x)$. Оказывается, что эти флуктуации могут быть описаны с помощью некоторого гауссовского процесса.

Вторая глава данной диссертации посвящена схожему типу вопросов, возникающих для бесконечномерной унитарной группы и одного из ее экстремальных характеров — так называемого одностороннего планшерелевского характера. В этом контексте результат о предельной форме был получен Ф. Бианом [2], а результат о флуктуациях вокруг предельной формы — А.М. Бородиным и П. Феррари [5]. Однако, основным объектом изучения второй главы являются некоммутативные случайные величины.

Более подробно, вероятностные результаты, описывающие глобальное поведение случайной диаграммы Юнга, могут быть интерпретированы как предельное поведение некоторых случайных величин, определенных на некоммутативном вероятностном пространстве. Сами эти величины коммутируют, поэтому результат может быть сформулирован в терминах классической теории вероятностей. Однако, возникает вопрос: а каково предельное поведение некоммутативных случайных величин, определенных на некоммутативном вероятностном пространстве? Во второй главе мы доказываем центральную предельную теорему для некоторого семейства некоммутирующих случайных величин. Особенностью данной теоремы является тот факт, что допредельные некоммутирующие величины стремятся к коммутативному пределу, который может быть проинтерпретирован с помощью классической теории вероятностей.

Третья глава диссертации посвящена связи асимптотической теории представлений и теории случайных матриц. Следуя С.В. Керову ([14], [15], [16]), каждой симметричной матрице сопоставляется кусочно-линейная функция, которую естественно считать *обобщенной диаграммой Юнга.* Мы исследуем асимптотическое поведение этой обобщенной диаграммы Юнга для широкого класса случайных матриц — вигнеровских матриц. Оказывается, что в пределе (рост размера матрицы к бесконечности) возникает кривая $\Omega(x)$ — кривая Вершика-Керова ! Это указывает на тесную взаимосвязь между диаграммами Юнга, распределенными по мере Планшереля, и вигнеровскими случайными матрицами. Результаты иного типа, показывающие схожесть этих вероятностных моделей, были получены в работах [1], [6], [12].

Цель работы.

Найти асимптотическое поведение экстремальных характеров бесконечной симметрической группы. Провести подробное исследование возникающей вероятностной модели. Найти асимптотическое поведение элементов универсальной обертывающей алгебры бесконечномерной унитарной группы в планшерелевском представлении. Описать предельный объект в этой модели. Исследовать рост диаграммы разбиения спектра двух последовательных вигнеровских матриц.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

(1) Доказана центральная предельная теорема для экстремальных характеров бесконечной симметрической группы

(2) Установлена взаимосвязь между вероятностными мерами на диаграммах Юнга, порожденными экстремальными характерами бесконечной симметрической группы, и вероятностной моделью с независимыми испытаниями.
(3) Исследовано асимптотическое поведение элементов универсальной обертывающей алгебры бесконечномерной унитарной группы. Доказана центральная предельная теорема для возникающих некоммутативных случайных величин. Описан предельный объект — семейство гауссовских свободных полей.
(4) Доказан закон больших чисел для диаграмм разделения корней вигнеровских и уишартовских матриц.

Личный вклад автора. Результаты первой и третьей главы получены диссертантом лично. Результаты второй главы получены в соавторстве с А.М. Бородиным.

Методы исследования. Центральное место в работе занимают алгебраические и комбинаторные методы, такие как техника вычислений в алгебрах симметрических и сдвинуто-симметрических функций, методы перечислительной и алгебраической комбинаторики. Автором разработан новый метод асимптотического анализа вероятностных мер на диаграммах Юнга; также была разработана новая техника вычислений в универсальной обертывающей алгебре бесконечномерной унитарной группы.

Теоретическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в асимптотической теории представлений, в исследовании вероятностных комбинаторных моделей, в теории случайных матриц, в алгебраической комбинаторике, в теории свободной вероятности и в моделях статистической механики.

Апробация диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на

- научно-исследовательском семинаре Добрушинской математической лаборатории, Институт проблем передачи информации РАН, 2013 г.
- научно-исследовательском семинаре "Эргодическая теория и математическая физика", механико-математический факультет МГУ, неоднократно в 2011-2013 г.
- научно-исследовательском семинаре "Теория представлений и вероятность", математический факультет ВШЭ, неоднократно в 2012-2014 г.
- научно-исследовательском семинаре "Характеристические классы", математический факультет ВШЭ, 2013 г.

- научно-исследовательском семинаре “Динамические системы”, механико-математический факультет МГУ, 2013 г.
- научно-исследовательском семинаре “Интегрируемая теория вероятностей”, Массачусеттский Технологический Институт, 2013-2014 г.
- научно-исследовательском семинаре “Семинар факультета математики”, университет г. Утрехт, 2011 г.
- научно-исследовательском семинаре “Теория вероятностей”, Будапештский технологический университет, 2012 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах автора — [3], [4], [8], [9], — 4 из которых опубликованы в научных журналах из списка, рекомендованного ВАК. Личный вклад автора составляет 4.76 п.л.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы из 59 наименований. Общий объем диссертации составляет 105 страниц.

Благодарности. Автор глубоко благодарен своему научному руководителю Г.И. Ольшанскому за постановки задач и постоянное внимание к работе. Автор глубоко благодарен А.М. Бородину за многочисленные полезные обсуждения.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** изложена краткая история вопроса, показана актуальность рассматриваемых задач. Сформулирована цель работы, аргументирована научная новизна исследований, представлены выносимые на защиту результаты.

1. В **главе 1** доказывается центральная предельная теорема для экстремальных характеров бесконечной симметрической группы и подробно изучаются возникающие вероятностные меры на диаграммах Юнга. Пусть экстремальный характер группы $S(\infty)$ отвечает набору параметров $\mathcal{P}$, который удовлетворяет следующим неравенствам:

$$(1)\quad \alpha_i > \alpha_{i+1} \text{ для всех } i \text{ таких, что } \alpha_i \neq 0, \qquad \beta_j > \beta_{j+1} \text{ для всех } j \text{ таких, что } \beta_j \neq 0.$$

Тогда выполнена следующая теорема:

Теорема 1 (Центральная предельная теорема). *Пусть $\mathcal{P}$ — произвольный набор параметров, удовлетворяющий условию* (1)*, и $K, L > 0$ таковы, что $\alpha_1 > \alpha_2 >$*

$\cdots > \alpha_K > 0$ *и* $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_L > 0$. *Тогда:*

$$\Big(\frac{\lambda_1^{\mathcal{P}}(n) - \alpha_1 n}{\sqrt{n}}, \frac{\lambda_2^{\mathcal{P}}(n) - \alpha_2 n}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{\lambda_K^{\mathcal{P}}(n) - \alpha_K n}{\sqrt{n}}, \frac{\lambda_1'^{\mathcal{P}}(n) - \beta_1 n}{\sqrt{n}},$$
$$\dots, \frac{\lambda_L'^{\mathcal{P}}(n) - \beta_L n}{\sqrt{n}}\Big) \xrightarrow[Law]{} Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_k, Z_1', \dots, Z_L'),$$

где Z *— многомерная гауссова случайная величина с моментами*

$$\mathbf{E}Z_i = 0, \quad \mathbf{E}Z_i' = 0,$$
$$\mathbf{E}Z_i^2 = \alpha_i - \alpha_i^2, \quad \mathbf{E}Z_i'^2 = \beta_i - \beta_i^2,$$
$$\mathbf{E}Z_iZ_j = -\alpha_i\alpha_j, \quad \mathbf{E}Z_i'Z_j' = -\beta_i\beta_j, \quad \mathbf{E}Z_iZ_j' = -\alpha_i\beta_j.$$

Мы получаем более точную информацию про случайные величины $\lambda_i^{\mathcal{P}}(n), \lambda_j'^{\mathcal{P}}(n)$ с помощью комбинаторных методов. Дадим необходимые определения и сформулируем полученный результат.

Пусть $\mathcal{A}$ — алфавит, состоящий из дискретной части — множеств $L_e = \{x_1, x_2, \dots\}$ и $L_o = \{y_1, y_2, \dots\}$, и непрерывной части G, которую будем считать отрезком. Введем на $\mathcal{A}$ вероятностную меру μ_1, сопоставляя букве x_i вероятность α_i, букве y_j — вероятность β_j и считая, что на G задана мера Лебега с условием $\mu_1(G) = \gamma$; зададим на $\mathcal{A}^n$ бернуллиевскую меру $\mu_n = \mu_1^{\otimes n}$. Обозначим символом $N_{x_i}(n)$ случайную величину, равную числу букв x_i в случайном слове $w \in \mathcal{A}^n$, выбранном по мере μ_n, а символом $N_{y_j}(n)$ — число букв y_j в этом слове. Будем считать, что на $\mathcal{A}$ введено некоторое линейное упорядочение p. Как было показано в [18], с помощью обобщенного RSK-алгоритма можно построить отображение $\phi_p : \mathcal{A}^n \to \mathbb{Y}_n$, такое, что мера μ_n под действием ϕ_p переходит в меру $M_n^{\mathcal{P}}$. В силу этого можно считать, что величины $\lambda_i^{\mathcal{P}}(n), \lambda_j'^{\mathcal{P}}(n)$ заданы на вероятностном пространстве $(\mathcal{A}^n, \mu_n)$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{P}$ *— произвольный набор параметров, удовлетворяющий условию* (1)*, и* $K, L > 0$ *таковы, что* $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_K > 0$ *и* $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_L > 0$. *Определим функции*

$$\epsilon_1(n) := \lambda_1^{\mathcal{P}}(n) - N_{x_1}(n),$$
$$\epsilon_2(n) := \lambda_2^{\mathcal{P}}(n) - N_{x_2}(n),$$
$$\vdots$$
$$\epsilon_K(n) := \lambda_K^{\mathcal{P}}(n) - N_{x_K}(n),$$
$$\epsilon_1'(n) := \lambda_1'^{\mathcal{P}}(n) - N_{y_1}(n),$$
$$\vdots$$
$$\epsilon_L'(n) := \lambda_L'^{\mathcal{P}}(n) - N_{y_L}(n).$$

Тогда существует константа $C = C(K, L)$ (не зависящая от n) такая, что

$$\mathbf{E}|\epsilon_i(n)| < C, \quad \mathbf{E}|\epsilon'_j(n)| < C, \quad i = 1, \dots, K, \quad j = 1, \dots, L.$$

2. В **главе 2** рассматривается некоторое семейство экстремальных характеров бесконечномерной унитарной группы. Для них была получена центральная предельная теорема нового типа. Для формулировки основного результата нам потребуется дать ряд определений.

2.1 Пусть I — произвольное конечное множество натуральных чисел. Пусть $U(I) = (u_{ij})_{i,j \in I}$ — группа унитарных матриц формата $I \times I$. Будем обозначать множество $\{1, 2, \dots, N\}$ символом $\overline{1, N}$. Определим цепочку вложенных групп

$$U(\{1\}) \subset U(\{1,2\}) \subset \dots U(\overline{1,N}) \subset U(\overline{1,N+1}) \subset \dots,$$

в которой вложение $U(\overline{1,k}) \subset U(\overline{1,k+1})$ определяется равенствами $u_{i,k+1} = u_{k+1,i} = 0$, $1 \le i \le k$, $u_{k+1,k+1} = 1$. *Бесконечномерной унитарной группой* называется объединение этой цепочки групп

$$U(\infty) = \bigcup_{N=1}^{\infty} U(\overline{1,N}).$$

Сигнатурой (также называемой *старшим весом*) длины N называется множество из N невозрастающих целых чисел $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \dots \ge \lambda_N$. Пусть $\mathbb{GT}_N$ — множество всех таких сигнатур. Будем говорить, что сигнатуры $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ и $\mu \in \mathbb{GT}_{N-1}$ *перемежаются* и писать $\mu \prec \lambda$, если выполнено условие $\lambda_i \ge \mu_i \ge \lambda_{i+1}$ для всех $1 \le i \le N-1$. Определим также множество $\mathbb{GT}_0$, которое состоит из одного элемента, обозначаемого символом $\varnothing$. Будем считать, что $\varnothing \prec \lambda$ для любого $\lambda \in \mathbb{GT}_1$.

Графом Гельфанда-Цетлина называется граф $\mathbb{GT}$, множеством вершин которого является $\bigcup_{N=0}^{\infty} \mathbb{GT}_N$, а ребро проводится между двумя сигнатурами λ и μ тогда и только тогда, когда выполнено либо $\lambda \prec \mu$, либо $\mu \prec \lambda$. *Путем* между сигнатурами $\kappa \in \mathbb{GT}_K$ и $\nu \in \mathbb{GT}_N$, $K < N$, называется последовательность

$$\kappa = \lambda^{(K)} \prec \lambda^{(K+1)} \prec \dots \prec \lambda^{(N)} = \nu, \quad \lambda^{(i)} \in \mathbb{GT}_i.$$

Пусть $\mathrm{Dim}_N(\nu)$ — число путей с началом в $\varnothing$ и концом в $\nu \in \mathbb{GT}_N$. *Бесконечным путем* называется бесконечная последовательность

$$\varnothing \prec \lambda^{(1)} \prec \lambda^{(2)} \prec \dots \prec \lambda^{(k)} \prec \lambda^{(k+1)} \prec \dots.$$

Обозначим символом $\mathbf{P}$ множество всех бесконечных путей, и введем на этом множестве топологию, индуцированную топологией прямого произведения $\prod_{N \ge 0} \mathbb{GT}_N$.

Для каждого $N = 0, 1, 2, \ldots$ пусть M_N — вероятностная мера на $\mathbb{GT}_N$. Назовем набор $\{M_N\}_{N=0}^{\infty}$ *когерентной системой мер*, если для любого $N \geq 0$ и любого $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ выполнено

$$M_N(\lambda) = \sum_{\nu:\lambda\prec\nu} M_{N+1}(\nu)\frac{\mathrm{Dim}_N(\lambda)}{\mathrm{Dim}_{N+1}(\nu)}.$$

По заданной когерентной системе мер $\{M_N\}_{N=0}^{\infty}$ определим вероятностную меру на цилиндрическом множестве пространства $\mathbf{P}$, задаваемом фиксированными первыми N сигнатурами, формулой

$$P(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(N)}) = \frac{M_N(\lambda^{(N)})}{\mathrm{Dim}_N(\lambda^{(N)})}. \tag{2}$$

Заметим, что эта вероятность зависит только от $\lambda^{(N)}$. Из свойства когерентности следует, что так определенные меры цилиндров согласованы и определяют борелевскую вероятностную меру на $\mathbf{P}$.

Хорошо известно, что неприводимые (комплексные) представления группы $U(N)$ параметризуются сигнатурами длины N, и что $\mathrm{Dim}_N(\lambda)$ равняется размерности неприводимого представления группы $U(N)$, отвечающего сигнатуре λ. Пусть χ^λ — обычный характер этого представления (т.е. функция на группе, задаваемая вычислением следа оператора в представлении), нормированный на $\mathrm{Dim}_N(\lambda)$.

Характером группы $U(\infty)$ называется функция $\chi : U(\infty) \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1) $\chi(e) = 1$, где e — единица группы $U(\infty)$ (нормированность);

2) $\chi(ghg^{-1}) = \chi(h)$, где h, g — произвольные элементы $U(\infty)$ (центральность);

3) матрица $\chi(g_i g_j^{-1})_{i,j=1}^n$ эрмитова и неотрицательно определена для любых $g_1, \ldots, g_n \in U(\infty)$ (положительная определенность);

4) ограничение χ на $U(\overline{1,N})$ является непрерывной функцией для каждого N (непрерывность).

Пусть χ — произвольный характер группы $U(\infty)$. Оказывается, что ограничение этого характера на группу $U(N)$ может быть разложено по χ^λ

$$\chi|_{U(N)} = \sum_{\lambda\in\mathbb{GT}_N} M_N(\lambda)\chi^\lambda,$$

и что коэффициенты разложения $M_N(\lambda)$ образуют когерентную систему мер на $\mathbb{GT}$. Обратно, по любой когерентной системе мер на $\mathbb{GT}$ можно таким образом построить характер группы $U(\infty)$.

2.2 Пусть $\mathfrak{gl}(I) = (g_{ij})_{i,j\in I}$ — комплексифицированная алгебра Ли группы $U(I)$, пусть $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(I))$ — ее универсальная обертывающая алгебра, и пусть $Z(\mathfrak{gl}(I))$ — центр

$\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(I))$. Обозначим символом

$$\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\infty)) = \bigcup_{N\geq 1} \mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\overline{1,N}))$$

универсальную обертывающую алгебру группы $U(\infty)$.

Существует канонический изоморфизм

$$D_I : \mathcal{U}(\mathfrak{gl}(I)) \to \mathcal{D}(I),$$

где $\mathcal{D}(I)$ — это алгебра левоинвариантных дифференциальных операторов на $U(I)$ с комплексными коэффициентами. Пусть $\{x_{ij}\}$ — матричные координаты. Для любого характера χ определим *состояние* на $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\infty))$ по формуле

$$(3) \qquad \langle X\rangle_\chi = D_I(X)\chi(x_{ij})|_{x_{ij}=\delta_{ij}}, \quad \text{для любого } X \in \mathcal{U}(\mathfrak{gl}(I)),$$

причем это определение согласовано для различных возможных выборов множества I.

Будем обозначать элементы сигнатур, параметризующих неприводимые представления группы $U(I)$, символами $\lambda_1^I, \dots, \lambda_{|I|}^I$. Известно, что существует канонический изоморфизм $Z(\mathfrak{gl}(I)) \to \mathbb{A}(I)$, где $\mathbb{A}(I)$ —алгебра сдвинуто-симметрических функций от переменных $\lambda_1^I, \dots, \lambda_{|I|}^I$ (см. [22]). Для любого центрального элемента значение соответствующей функции на сигнатуре равняется значению (скалярного) оператора, которым становится этот элемент в представлении, отвечающем этой сигнатуре.

Аналогично предыдущему разделу, ограничение характера χ на $U(I)$ порождает вероятностную меру на сигнатурах длины $|I|$. Оказывается, что состояние элемента из $Z(\mathfrak{gl}(I))$ равняется математическому ожиданию соответствующей ему функции из $\mathbb{A}(I)$ по возникающей вероятностной мере на сигнатурах.

Возможно вычислять состояние $\langle\,\cdot\,\rangle_\chi$ как математическое ожидание и на более широком вероятностном пространстве. Рассмотрим цепочку множеств $\dots \subset \overline{1,k} \subset \overline{1,k+1} \subset \dots$. Пусть $\mathcal{Z}$ — подалгебра в $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\infty))$, порождаемая множеством центров $Z(\mathfrak{gl}(\overline{1,k}))$, $k = 1, 2, \dots$. Каждому элементу из $Z(\mathfrak{gl}(\overline{1,k}))$ можно сопоставить функцию на множестве бесконечных путей в $\mathbb{GT}$, выбирая сигнатуру длины k из пути и применяя изоморфизм $Z(\mathfrak{gl}(\overline{1,k})) \to \mathbb{A}(\overline{1,k})$. Таким образом, алгебра $\mathcal{Z}$ естественно вкладывается в алгебру функций на $\mathbf{P}$. Обозначим вероятностную меру на пространстве $\mathbf{P}$, возникающую из когерентной системы мер, соответствующих характеру χ, символом μ_χ. Тогда состояние $\langle\,\cdot\,\rangle_\chi$ любого элемента из $\mathcal{Z}$ равняется математическому ожиданию соответствующей ему функции на вероятностном пространстве $(\mathbf{P}, \mu_\chi)$.

2.3 В дальнейшем нас будет интересовать *односторонний планшерелевский характер* с растущим параметром. Этот характер определяется формулой

$$\chi(U) = \exp\left(\gamma L \sum_{i=1}^{\infty}(x_{ii} - 1)\right), \tag{4}$$

где $U = [x_{ij}]_{i,j\geq 1}$, $\gamma > 0$ — фиксированное число, а L — растущий параметр. Будем обозначать символом μ_γ вероятностную меру на множестве $\mathbf{P}$, порождаемую этим характером (см. раздел 2.1), а символом $\langle \cdot \rangle_\gamma$ — состояние, отвечающее этому характеру (см. раздел 2.2).

Ограничим функцию (4) на $U(I)$ и разложим ее по нормированным неприводимым характерам группы $U(I)$. Несложно убедиться, что вероятностная мера на сигнатурах длины $|I|$, возникающая при этом, задается формулой

$$P_I^{\gamma L}(\lambda) := \begin{cases} e^{-\gamma L|I|}\dfrac{(\gamma L)^{\lambda_1+\cdots+\lambda_{|I|}}}{(\lambda_1+\cdots+\lambda_{|I|})!}\dim\lambda\,\mathrm{Dim}_{|I|}\,\lambda, & \text{если } \lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_{|I|}\geq 0; \\ 0, & \text{при других } \lambda, \end{cases} \tag{5}$$

где $\dim\lambda$ — размерность неприводимого представления симметрической группы $S_{|\lambda|}$, соответствующего диаграмме Юнга λ (= числу стандартных таблиц Юнга формы λ). Заметим, что эта вероятностная мера сосредоточена на неотрицательных сигнатурах, т.е. на разбиениях или диаграммах Юнга.

Различные асимптотические свойства мер $P_{1,L}^{\gamma L}$ при $L\to\infty$ и близких к ним изучаются в работах [2], [5], [7], [21].

2.4 Пусть задано вероятностное пространство Ω и последовательность k-мерных случайных векторов $(\eta_n^1, \eta_n^2, \ldots, \eta_n^k)$ на нем, сходящаяся (в смысле сходимости моментов), к гауссовскому случайному вектору $(\eta^1, \ldots, \eta^k)$ с нулевым средним. Определим *состояние* на $*$-алгебре $L^1(\Omega)$ формулой

$$\langle\xi\rangle_\Omega := \mathbf{E}\xi, \qquad \xi\in L^1(\Omega).$$

Пусть дана произвольная $*$-алгебра $\mathcal{A}$ и состояние $\langle \cdot \rangle$ (линейный функционал, неотрицательный на элементах вида aa^*) на ней. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathcal{A}$.

Предположим теперь, что элементы $a_1, \ldots, a_k$ и состояние на $\mathcal{A}$ зависят от растущего параметра L, и пусть задана некоторая $*$-алгебра $\mathbf{A}$, порождаемая элементами $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, и состояние ϕ на ней. Будем говорить, что последовательность $(a_1, \ldots, a_k)$ сходится к $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ *в смысле состояний*, если

$$\langle a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_l}\rangle \xrightarrow[L\to\infty]{} \phi(\mathbf{a}_{i_1}\ldots\mathbf{a}_{i_l}), \tag{6}$$

причем это равенство выполняется для всех $l\in\mathbb{N}$ и наборов индексов $(i_1, i_2, \ldots, i_l) \in \{1, 2, \ldots, k\}^l$.

2.5 Пусть $A = \{a_n\}_{n\geq 1}$ — произвольная последовательность попарно различных натуральных чисел. Пусть $\mathbf{P}_A$ — копия пространства путей, отвечающая этой последовательности. По последовательности A определим *функцию высоты*

$$H_A : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 1} \times \mathbf{P}_A \to \mathbb{N}$$

по формуле

$$H_A(x, y, \{\lambda^{\{1,2,\dots,n\}}\}) = \sqrt{\pi} \left| \left\{ i \in \overline{1,[y]} : \lambda_i^{\{a_1,\dots,a_{[y]}\}} - i + \tfrac{1}{2} \geq x \right\} \right|,$$

где $\lambda_i^{\{a_1,\dots,a_{[y]}\}}$ — координаты сигнатуры длины $[y]$ из бесконечного пути. Снабдив $\mathbf{P}_A$ вероятностной мерой μ_γ, мы получим, что $H_A(x, y, \cdot) =: H_A(x, y)$ становятся случайными функциями на вероятностном пространстве $(\mathbf{P}_A, \mu_\gamma)$.

Пусть $\{A_i\}_{i\in\mathfrak{J}}$ — семейство последовательностей попарно различных натуральных чисел, проиндексированное произвольным множеством $\mathfrak{J}$. Введем обозначения

$$A_i = \{a_{i,n}\}_{n\geq 1}, \quad A_{i,m} = \{a_{i,1}, \dots, a_{i,m}\}.$$

Будем считать, что числа $a_{i,j} = a_{i,j}(L)$ зависят от растущего параметра L.

Назовем семейство $\{A_i\}_{i\in\mathfrak{J}}$ *регулярным*, если для любых $i, j \in \mathfrak{J}$ и любых $x, y > 0$ существует предел

$$\alpha(i, x; j, y) = \lim_{L\to\infty} \frac{|A_{i,[xL]} \cap A_{j,[yL]}|}{L}. \tag{7}$$

Пусть $\mathbb{H}$ — множество комплексных чисел с положительной мнимой частью. Возьмем набор копий $\mathbb{H}$, проиндексированных множеством $\mathfrak{J}$, и рассмотрим их объединение

$$\mathbb{H}(\mathfrak{J}) := \bigcup_{i\in\mathfrak{J}} \mathbb{H}_i.$$

Определим функцию $C : \mathbb{H}(\mathfrak{J}) \times \mathbb{H}(\mathfrak{J}) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ по формуле

$$C_{ij}(z, w) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\alpha(i, |z|^2; j, |w|^2) - zw}{\alpha(i, |z|^2; j, |w|^2) - z\bar{w}} \right|, \qquad i, j \in \mathfrak{J}, z \in \mathbb{H}_i, w \in \mathbb{H}_j.$$

Предложение 1. *Для любого регулярного семейства последовательностей на* $\mathbb{H}(\mathfrak{J})$ *существует обобщенный гауссовский процесс с ковариационным ядром* $C_{ij}(z, w)$. *Более подробно, для любого конечного семейства функций* $f_m(z) \in C_0^\infty(\mathbb{H}_{i_m})$ *и* $i_1, \dots, i_M \in \mathfrak{J}$ *матрица ковариаций*

$$cov(f_k, f_l) = \int_{\mathbb{H}} \int_{\mathbb{H}} f_k(z) f_l(w) C_{i_k i_l}(z, w) dz d\bar{z} dw d\bar{w} \tag{8}$$

положительно определена.

Обозначим полученный гауссовский процесс символом $\mathfrak{G}_{\{A_i\}_{i\in\mathfrak{J}}}$. Ограничение этого процесса на одну полуплоскость $\mathbb{H}_i$ является *гауссовским свободным полем* (см. [23]), поскольку

$$C_{ii}(z,w) = -\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{z-w}{z-\bar{w}}\right|, \qquad z,w\in\mathbb{H}_i, \quad i\in\mathfrak{J},$$

(по определению, гауссовское свободное поле — это процесс с ковариацией, задаваемой этой формулой).

"Перенесем" функцию $H_A(x,y)$ на $\mathbb{H}$ — определим функцию

$$H_A^{\Omega}(z) = H_A(Lx(z), Ly(z)), \qquad z\in\mathbb{H}.$$

В работе [5] было показано, что флуктуации

$$\mathcal{H}_i(z) := H_{A_i}^{\Omega}(z) - \mathbf{E}H_{A_i}^{\Omega}(z), \quad i\in\mathfrak{J},\ z\in\mathbb{H}_i, \tag{9}$$

при фиксированном i сходятся к гауссовскому свободному полю.

Основная цель главы 2 заключается в изучении *совместных* флуктуаций (9) для различных i. Мы будем понимать совместные флуктуации величин $\mathcal{H}_i$ следующим образом. Определим момент случайной функции высоты формулой

$$M_{i,y,k} := \int_{-\infty}^{\infty} x^k (H_{A_i}(Lx,Ly) - \mathbf{E}H_{A_i}(Lx,Ly))dx. \tag{10}$$

Оказывается, что функция $M_{i,y,k}$ принадлежит алгебре $\mathbb{A}(A_{i,[Ly]})$ и поэтому этой функции отвечает некоторый элемент из $Z(\mathfrak{gl}(A_{i,[Ly]}))$. Обозначим этот элемент также символом $M_{i,y,k}$. Отметим, что элементы $M_{i,y,k}$ при всех возможных значениях i,y,k лежат в одной объемлющей алгебре $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\infty))$ с определенным на ней состоянием $\langle\cdot\rangle_\gamma$. Поэтому мы можем говорить о сходимости этих элементов в смысле состояний (см. раздел 2.4). Нас интересует их предельное распределение при $L\to\infty$.

Мы доказываем, что совокупность $\{\mathcal{H}_i\}_{i\in\mathfrak{J}}$ сходится к обобщенному гауссовскому процессу $\mathfrak{G}_{\{A_i\}_{i\in\mathfrak{J}}}$. Определим соответствующие моменты процесса $\mathfrak{G}_{\{A_i\}_{i\in\mathfrak{J}}}$ формулой

$$\mathcal{M}_{i,y,k} = \int_{z\in\mathbb{H};y=\gamma|z|^2} x(z)^k \mathfrak{G}_{A_i}(z)\frac{dx(z)}{dz}dz.$$

Основным результатом главы 2 является следующая теорема.

Теорема 3. *При $L\to\infty$, моменты $\{M_{i,y,k}\}_{i\in\mathfrak{J},y>0,k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ сходятся в смысле состояний к моментам $\{\mathcal{M}_{i,y,k}\}_{i\in\mathfrak{J},y>0,k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$.*

Таким образом, в пределе при $L\to\infty$ некоммутативность исчезает (предельная алгебра $\mathbf{A}$ оказывается коммутативной), однако, случайные поля $\mathcal{H}_i$ для различных индексов i не становятся независимыми.

3 В **главе 3** мы исследуем предельное поведение обобщенных случайных разбиений, связанных со случайными матрицами Вигнера. Оказывается, что в пределе возникает кривая Вершика-Керова, что указывает на тесную взаимосвязь между этой моделью случайных матриц и асимптотической теорией представлений. Дадим все необходимые определения и сформулируем основной результат.

Рассмотрим две последовательности вещественных чисел $\{x_i\}_{i=1}^n$, $\{y_j\}_{j=1}^{n-1}$, таких что

$$x_1 \geq y_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_{n-1} \geq y_{n-1} \geq x_n. \tag{11}$$

Будем говорить, что такие последовательности $\{x_i\}_{i=1}^n$, $\{y_j\}_{j=1}^{n-1}$ *перемежаются.* Определим число

$$z_0 = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{j=1}^{n-1} y_j.$$

Следуя Керову, (см. [13]) определим *прямоугольную диаграмму Юнга* $w^{\{x_i\},\{y_j\}}(x)$, однозначно задаваемую следующими условиями:

1) $w^{\{x_i\},\{y_j\}}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — это непрерывная кусочно-линейная функция, такая что $\dfrac{\partial}{\partial x} w^{\{x_i\},\{y_j\}}(x) = \pm 1$, за исключением конечного числа точек, в которых эта функция достигает локальных экстремумов.

2) Точки $\{x_i\}_{i=1}^n$ являются локальными минимумами функции $w^{\{x_i\},\{y_j\}}(x)$, точки $\{y_j\}_{j=1}^{n-1}$ являются локальными максимумами функции $w^{\{x_i\},\{y_j\}}(x)$, и у этой функции не существует других локальных экстремумов.

3) Для достаточно больших $|x|$ выполнено $w^{\{x_i\},\{y_j\}}(x) = |x - z_0|$.

Пусть S является вещественной симметрической матрицей размера $N \times N$. Символом $\hat{S}$ обозначим ее подматрицу размера $(N-1) \times (N-1)$; она получается из S исключением N-ой строчки и столбца. Хорошо известно, что собственные значения матриц S и $\hat{S}$ перемежаются (см., например, [10, p.185]). Таким образом, каждой симметрической матрице мы можем сопоставить прямоугольную диаграмму Юнга построенную по собственным значениям S и $\hat{S}$.

Пусть $\{Z_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ — это семейство независимых, одинаково распределенных вещественных случайных величин с нулевым средним, таких что $\mathbf{E} Z_{11}^2 = 1$ и

$$\mathbf{E}|Z_{11}|^k < \infty, \qquad \text{для всех } k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Симметрическая $N \times N$ матрица X_N, определяемая с помощью формулы

$$X_N(i,j) = X_N(j,i) = Z_{ij}, \qquad \text{для } i \leq j,$$

называется *матрицей Вигнера.* Пусть $w_N^X(x)$ — это прямоугольная диаграмма Юнга, построенная с помощью собственных значений матриц X_N и $\hat{X}_N$. Отметим, что $w_N^X(x)$ является случайной функцией. Нас интересует асимптотическое предельное поведение функции $w_N^X(x)$ при $N \to \infty$.

Пусть

$$\Omega(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\left(x\arcsin(\tfrac{x}{2}) + \sqrt{4-x^2}\right), & |x| \le 2, \\ |x|, & |x| \ge 2, \end{cases}$$

— это кривая Вершика-Керова-Логана-Шеппа (см. [24] и [20]).

Теорема 4. *При $N \to \infty$ выполнено*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{N}} w_N^X(x\sqrt{N}) - \Omega(x) \right| = 0, \qquad \textit{по вероятности.}$$

Перемежающиеся последовательности возникают естественным образом в различных областях математики. Они предоставляют полезную систему координат для диаграмм Юнга (см. [17],[11]). Также они возникают как корни двух последовательных ортогональных многочленов (см. [14]). Более общее понятие *перемежающихся мер* было изучено в [16].

Впервые кривая $\Omega(x)$ возникла в контексте асимптотической теории представлений. Эта кривая является предельной формой случайной диаграммы Юнга, распределенной по мере Планшереля (см. подробности в [24], [20], [25], и [11, Section 5]). После этого было показано, что кривая $\Omega(x)$ возникает в пределе при описании совместного предельного поведения корней двух последовательных ортогональных многочленов (см. [14]). Эта кривая также возникает как предельная кривая для эволюции непрерывных диаграмм Юнга (см. [15]), а также в теории случайных матриц.

Список литературы

[1] J. Baik, P.Deift, K.Johansson, *On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations*, J. Amer. Math. Soc. 12 (1999), 1119-1178

[2] P. Biane, *Approximate factorization and concentration for characters of symmetric groups*, Inter. Math. Res. Notices 2001 (2001), no. 4, 179–192.

[3] А. Бородин, А. Буфетов, “Центральная предельная теорема для планшерелевского представления бесконечномерной унитарной группы”, Записки семинаров ПОМИ, 403 (2012), 19-34; 1.22 п. л. (вклад автора – 0.61 п. л.)

[4] A. Borodin, A. Bufetov, “Plancherel representations of $U(\infty)$ and correlated Gaussian Free Fields”, *Duke Mathematical Journal*, vol. 163, no. 11 (2014), 2109-2158; `arXiv:1301.0511`; 4.2 п.л. (вклад автора – 2.1 п. л.)

[5] A. Borodin, P.L. Ferrari. *Anisotropic growth of random surfaces in 2+1 dimensions* , Preprint, 2008, arXiv:0804.3035.

[6] A. Borodin, A. Okounkov, G. Olshanski, *Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups*, J. Amer. Math. Soc. 13 (2000), 481-515

[7] A. Borodin, G. Olshanski. *Asymptotics of Plancherel-type random partitions.* Journal of Algebra, 313 (2007), no. 1, 40-60.

[8] A. Буфетов, “Центральная предельная теорема для экстремальных характеров бесконечной симметрической группы”, *Функциональный анализ и его приложения*, 46:2 (2012), 3-16; 1.11 п. л.

[9] A. Bufetov, “Kerov's interlacing sequences and random matrices”, *Journal of Mathematical Physics*, 54 (2013), no. 11, 113302, `arXiv:1211.1507`; 0.94 п. л.

[10] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York, 1985.

[11] V. Ivanov and G. Olshanski. *Kerov's central limit theorem for the Plancherel measure on Young diagrams.* In Symmetric Functions 2001: Surveys of Developments and Perspectives, volume 74 of NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry, pages 93–151, 2002.

[12] K. Johansson. *Discrete orthogonal polynomial ensembles and the Plancherel measure.* Ann. of Math. (2), 153:259–296, 2001.

[13] S.V. Kerov. Asymptotic Representation Theory of the Symmetric Group and its Applications in Analysis. D Sci. thesis, 1993

[14] S. Kerov, *Asymptotics of the separation of roots of orthogonal polynomials*, St. Petersburg Math. J. 5 (1994), 925-941.

[15] S. Kerov, *The differential model of growth of Young diagrams*, Proc. St. Petersburg Math. Soc. 4 (1996), 167–194.

[16] S. Kerov, *Interlacing measures*, In: Kirillov's seminar on representation theory (G. Olshanski, ed.), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 35–83.

[17] S. V. Kerov, *Anisotropic Young diagrams and Jack symmetric functions*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 34 (2000), no. 1, 51–64 (Russian); English translation: Funct. Anal. Appl. 34 (2000), 41–51.

[18] S.V.Kerov and A.M.Vershik. The characters of the infinite symmetric group and probability properties of the Robinson-Schensted-Knuth algorithm. SIAM J.Alg.Disc.Meth., Vol.7, No. 1, 1986

[19] S.V.Kerov and A.M.Vershik, Asymptotics theory of characters of the symmetric group. Funct.Anal.Appl. 15 : 246-255, 1982

[20] F. Logan and L. A. Shepp, *A variational problem for random Young tableaux*, Advances in Math. 26 (1977), 206–222.

[21] P.L. Méliot. *Kerov's central limit theorem for Schur-Weyl measures of parameter 1/2* , Preprint, 2010, `arXiv:1009.4034`.

[22] A. Okounkov, G. Olshanski. *Shifted Schur functions.* Algebra i Analiz **9** (1997), no. 2, 73–146, `arXiv:q-alg/9605042`.

[23] S. Sheffield. *Gaussian free fields for mathematicians*, Probability Theory and Related Fields, 2007, 139: 521–541.

[24] A. M. Vershik and S. V. Kerov, *Asymptotics of the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of Young tableaux*, Doklady AN SSSR 233 (1977), no. 6, 1024–1027; English translation: Soviet Mathematics Doklady 18 (1977), 527–531.

[25] A. M. Vershik, S. V. Kerov, *Asymptotic theory of characters of the symmetric group*, Function. Anal. i Prilozhen. 15 (1981), no. 4, 15–27; English translation: Funct. Anal. Appl. 15 (1985), 246–255.

[26] H. Weyl, *The classical groups. Their invariants and representations.* Princeton Univ. Press, 1939; 1997 (fifth edition).

[27] D. P. Zhelobenko, *Compact Lie groups and their representations*, Nauka, Moscow, 1970 (Russian); English translation: Transl. Math. Monographs 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973.