

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертационной работе **Бычкова Бориса Сергеевича**
«Стратификация пространств функций на комплексных кривых»,
представленной на соискание ученой степени кандидата физико-
математических наук по специальности 01.01.06 – математическая
логика, алгебра и теория чисел

Предметом диссертации Б.С.Бычкова является исследование стратификации пространств Гурвица – то есть пространств мероморфных функций на алгебраических кривых данного рода с заданным дивизором полюсов и с нулевой суммой критических значений. Свое название они получили в честь Адольфа Гурвица, которому принадлежит основополагающая работа в этом направлении (1891 г.). Исследование пространств Гурвица – естественное продолжение исследований Римана в области аналитических функций, собственно и приведшее к понятию римановой поверхности (алгебраической кривой). Развитие этого направления в рамках алгебры, анализа и геометрии связано с именами Г.Вейля, А.Гротендика, Г.Белого. В частности, А.Гротендиком введено понятие детского рисунка – важного объекта исследования в данной диссертации. Никого не должно обманывать наивное название этого объекта. Детский рисунок – это вложенный граф, являющийся полным комбинаторно-геометрическим инвариантом пары Белого – римановой поверхности и мероморфной функции на ней с не более чем тремя критическими значениями. Детский рисунок позволяет также наглядно представить себе некоторые свойства пары Белого, о чем ярко и эмоционально писал Гротендик: «Такому рисунку сопоставляются тонкие арифметические инварианты, непредсказуемо изменяющиеся после добавления каждого штриха». Совокупность детских рисунков несет на себе действие группы Галуа, связанной с парой Белого, что свидетельствует об их фундаментальной связи с алгебраической теорией чисел. Большой вклад в классификацию детских рисунков внесли А.К.Звонкин, Г.Б.Шабат и его ученики.

Теория пространств Гурвица – область математики, в которой связаны воедино вопросы алгебры, анализа, комбинаторики, теории групп и геометрии.

Современный интерес к пространствам Гурвица во многом связан с их приложениями в квантовой физике, а именно в топологической и конформной теории поля. Значительная часть современных работ связана с исследованием производящих функций для обобщенных чисел Гурвица. При этом открыто удивительное явление: ряд этих функций является решением интегрируемых иерархий типа Тоды, Кортвега-де-Фриза и Кадомцева-Петвиашвили. Характерно, что первое в серии этих открытий сделано физиком, а именно одним из лидеров мировой теоретической и математической физики Е.Виттенем. Это еще раз подчеркивает прикладное значение исследований пространств Гурвица и их тесную связь с теоретической (математической) физикой. С производящими функциями этого типа связана третья группа результатов, полученных в диссертации, касающаяся производящих функций для обобщенных чисел Гурвица.

Актуальность исследований, представленных в диссертации Б.С.Бычкова, таким образом не вызывает сомнений.

Введение и автореферат диссертации дают краткий, но содержательный очерк развития исследований пространств Гурвица, содержат ясную формулировку постановки задач и полученных результатов.

Первая глава диссертации, небольшая по объему, является вводной. В ней даются все необходимые определения, связанные с пространствами Гурвица, их стратификацией и пополнением. Формулируется задача Гурвица (перечисление классов изоморфизма разветвленных накрытий сферы Римана) – отправная точка исследований в диссертации. Вводятся понятия комбинаторной теории групп и комбинаторной геометрии, связанные с разветвленными накрытиями сферы. Определяется компактификация пространств Гурвица, совместимая с компактификацией Делиня-Мамфорда.

Вторая глава, и начало третьей главы, содержат основные результаты диссертации.

Глава 2 полностью посвящена детским рисункам и их обобщениям – мегакартам. Как указано выше, детский рисунок – это полный комбинаторно-геометрический инвариант пары Белого. Таким образом изучение детских рисунков эквивалентно изучению страта максимальной коразмерности пространства мероморфных функций на римановой поверхности, как раз и образованного парами Белого. Заметим, что перечисленные выше общие задачи теории пространств Гурвица в конечном счете сводятся к задачам классификации детских рисунков. Такая классификация не всегда возможна, в каждом случае для этого требуются особые причины. В данном случае автор использовал возможности, связанные с наличием дополнительных симметрий. Он получил явное и полное описание шестиреберных детских рисунков рода 3, имеющих нетривиальные автоморфизмы. Для каждого из них в явном виде найдены уравнение римановой поверхности и функция Белого. Следует заметить, что посчитаны даже не все детские рисунки рода 2, и что решение задачи при добавлении каждого следующего ребра, или увеличении рода требует больших теоретических и вычислительных усилий. Таким образом полученные результаты представляют большой интерес и практическую ценность.

Оставшаяся часть главы 2 посвящена исследованию следующего по сложности страта, образованного накрытиями с четырьмя точками ветвления. Каждому такому накрытию соответствует обобщение детского рисунка – мегакарта. Диссертантом разработан алгоритм перечисления мегакарт, и произведены вычисления, результатом которых является таблица мегакарт с указанием числа ребер, вершин, граней, рода и комбинаторного паспорта мегакарты. Все сказанное выше о сложности и практической ценности результатов классификации детских рисунков справедливо и в отношении этих результатов.

В третьей главе диссертации рассматриваются производящие функции обобщенных чисел Гурвица, и их связь с интегрируемыми иерархиями. Она состоит из двух параграфов, из которых первый содержит новое доказательство формулы для одного из видов обобщенных чисел Гурвица – чисел Буске-Мелу-

Шеффера. Во втором параграфе для полноты картины воспроизводятся результаты работы Гульдена-Джексона (2008) о разложении по родам производящей функции чисел Буске-Мелу-Шеффера. К сожалению, изложение в этом параграфе содержит ошибку, а именно, «скалярное произведение» на стр. 69 не является положительно определенным. Это никак не влияет на основные результаты диссертации, описанные выше.

В целом диссертационная работа содержит решение новой трудной задачи – классификацию шестиреберных детских рисунков рода 3 с нетривиальной группой автоморфизмов, и ряд других результатов по описанию стратов минимальной размерности пространств Гурвица.

Указанные выше недостатки не оказывают влияния на окончательную положительную оценку работы.

Текст диссертации написан аккуратно и достаточно четко, в частности мне удалось обнаружить только одну незначительную опечатку.

Основные результаты диссертации опубликованы своевременно и полно в четырех статьях автора, из них две без соавторов, и многократно докладывались на заседаниях ведущих научно-исследовательских семинаров страны, всероссийских и международных конференциях. Доказательства основных результатов достаточно полные. Автореферат правильно отражает содержание диссертации. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в научно-исследовательских институтах и высших учебных заведениях, в том числе в Математическом институте им. В.А.Стеклова РАН, МГУ им. М.В. Ломоносова, НИУ Высшая школа экономики, Институте теоретической и экспериментальной физики и многих других.

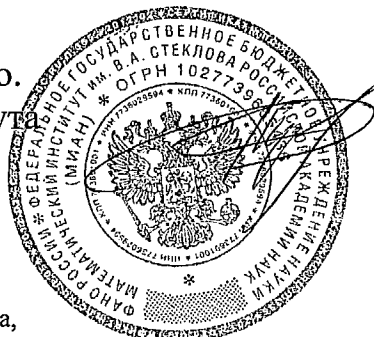
Считаю, что диссертационная работа "Стратификация пространств функций на комплексных кривых" полностью отвечает требованиям, предъявляемым ВАК к диссертациям, представленным на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел, а её автор – Борис Сергеевич Бычков заслуживает присуждения степени кандидата физико-математических наук.

Ведущий научный сотрудник
Отдела геометрии и топологии
Математического института
им. В.А.Стеклова РАН, д.ф.-м.н

О.К.Шейнман

26 сентября 2015 года.

Подпись д.ф.-м.н. О.К.Шейнмана заверяю.
Зам. директора Математического института
им. В.А.Стеклова РАН, член-корр. РАН



Д.В.Трещев