На правах рукописи

Девятов Ростислав Андреевич

Действия групп на компактных однородных пространствах с открытой орбитой

Специальность:
01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Москва — 2014

Работа выполнена на факультете математики национального исследовательского университета "Высшая Школа Экономики".

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент Сергей Александрович Локтев.
Официальные оппоненты:
Александр Николаевич Панов, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и геометрии Самарского государственного университета;
Ирина Михайловна Парамонова, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Московского института открытого образования.

Ведущая организация: Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Защита состоится 2 июня 2015 г. в 16:00

на заседании диссертационного совета Д 002.077.03 на базе ИППИ РАН Большой Каретный пер., д. 19, стр. 1, Москва, ГСП-4, 127994.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИППИ РАН.

Автореферат разослан "____" апреля 2015 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук ______________ Соболевский А. Н.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена изучению действий различных групп с открытой орбитой на некоторых компактных однородных пространствах. Все алгебраические многообразия рассматриваются над полем комплексных чисел.

Однородное пространство алгебраической группы G — это алгебраическое многообразие X, снабжённое транзитивным действием группы G. Основные результаты об однородных пространствах аффинных алгебраических групп содержатся в книгах[1] и[2] Любое однородное пространство изоморфно (точнее, G-эквивариантно изоморфно) фактору группы G по некоторой подгруппе P (обычно обозначаемому G/P). В случае, когда группа G связна и редуктивна, можно показать, что многообразие G/P полно (или, что то же, компактно в классической топологии) тогда и только тогда, когда подгруппа P параболическая, т. е. содержит некоторую борелевскую подгруппу. В частности, в этом случае группа P содержит центр группы G, поэтому он тривиально действует на многообразии G/P, и многообразие G/P также является однородным пространством связной полупростой части группы G. Поэтому далее мы будем говорить о многообразиях вида G/P, где G — некоторая связная полупростая алгебраическая группа, а $P \subseteq G$ — некоторая параболическая подгруппа.

Компактными однородными пространствами являются многие классические и хорошо известные многообразия, такие как, например, проективные пространства и их произведения (многообразия Сегре) и гладкие проективные квадрики. Более сложный пример однородных пространств — полные и частичные многообразия флагов, т. е. многообразия, параметризующие цепочки вложенных подпространств фиксированных размерностей в заданном векторном пространстве. Для всех перечисленных классов многообразий посчитаны их пространства когомологий и найдены клеточные разбиения[3]. Наличие действия связной редуктивной группы позволяет применять для изучения этих многообразий структурную теорию простых алгебр Ли.

Наличие действия определённой группы с открытой орбитой (или,

[1] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, "Семинар по группам Ли и алгебраическим группам", Наука, М., 1988

[2] А. Л. Онищик, "Топология транзитивных групп преобразований", Физматлит, М., 1995

[3] И. Н. Бернштейн, И. М. Гельфанд, С. И. Гельфанд, "Клетки Шуберта и когомологии пространств G/P", *УМН*, **28**:3(171) (1973), 3–26

как говорят, локально транзитивного действия) также является удобным инструментом для изучения свойств многообразий. К многообразиям с локально транзитивным действием некоторой группы относятся многие хорошо известные классы многообразий, например, торические многообразия. Основные сведения о торических многообразиях содержатся в книге[4]. Известна полная классификация торических многообразий, они параметризуются некоторыми комбинаторными (целочисленными) данными, а именно так называемыми рациональными полиэдральными веерами. Более сложным примером многообразий, допускающих локально транзитивное действие некоторой группы, служат сферические многообразия, т. е. многообразия с действием связной редуктивной группы G, на которых (некоторая, или, что равносильно, любая) борелевская подгруппа действует с открытой орбитой. Сведения о сферических многообразиях собраны, например, в[5] и[6]. Для обоих этих классов многообразий множество орбит на самом деле конечно.

Ясно, что сама группа G действует на многообразии G/P с открытой орбитой (и даже ровно с одной орбитой), но можно рассмотреть действие группы G на многообразии $(G/P)^n = G/P \times \ldots \times G/P$ и попытаться выяснить, имеет ли оно открытую орбиту и конечно ли множество орбит. Отметим, что многообразие $(G/P)^n$ также является однородным пространством связной полупростой алгебраической группы, а именно группы $G \times \ldots \times G$ (n прямых сомножителей). Неформально говоря, существование открытой орбиты означает, что "почти любой" набор из n точек многообразия G/P можно перевести в "почти любой другой" набор, а конечность множества орбит означает, что любой набор из n точек можно "привести к одному из конечного числа фиксированных видов". Для небольших значений n легко указать группу, действие которой на многообразии G/P с открытой орбитой равносильно действию группы G на многообразии $(G/P)^n$ с открытой орбитой.

Вопрос о существовании открытой орбиты для максимальной параболической подгруппы P был решён в работе[7], и в этой же работе был поставлен вопрос о существовании открытой орбиты для произвольных

---

[4] W. Fulton, "Introduction to toric varieties", *Ann. of Math. Stud.* **131**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993

[5] M. Brion, "Spherical Varieties", *Highlights in Lie Algebraic Methods*, 3–24, Progress in Mathematics **295**, Birkhauser, 2012

[6] N. Perrin, "On the geometry of spherical varieties", *Transformation Groups* **19**:1 (2014), 171–223

[7] V.L. Popov, "Generically multiple transitive algebraic group actions", *Algebraic groups and homogeneous spaces*, 481–523, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2007

параболических подгрупп. Следуя этой работе, назовём максимальное число n, такое что группа G действует на многообразии $(G/P)^n$ с открытой орбитой, *максимальной степенью локальной транзитивности* действия $G : G/P$. Для связных простых групп G типа A максимальная степень локальной транзитивности может, в зависимости от группы G и подгруппы P, быть сколь угодно большой. Для связных простых групп G остальных типов она никогда не бывает больше 4. В связи с этим вопрос о нахождении максимальной степени локальной транзитивности для немаксимальных параболических подгрупп P в случаях, когда связная полупростая группа G содержит связные простые компоненты типа A, более сложен, чем тот же вопрос в случае, когда группа G не содержит связных простых компонент типа A, и остаётся, по-видимому, открытым. Для случая, когда группа G не содержит связных простых компонент типа A, максимальная степень локальной транзитивности вычисляется в диссертации.

Вопрос о конечности числа орбит действия группы G на многообразии $(G/P)^n$ оказывается связан с теорией сферических многообразий. Именно, известно, что если многообразие X с действием группы G сферическое, то (любая) борелевская подгруппа группы G действует на нём с конечным числом орбит, см.[8] и[9]. Таким образом, если многообразие $(G/P)^{n-1}$ сферическое, то группа G действует на многообразии $(G/P)^n$ с конечным числом орбит. Из результатов диссертации следует, что верно и обратное, а именно, если группа G действует на многообразии $(G/P)^n$ с конечным числом орбит, то $n = 3$, и многообразие $G/P \times G/P$ сферическое. В случае конкретных типов связных простых групп G, а именно A и C, в работах[10] и[11] рассматривалась более общая задача о том, для каких наборов $P^{(1)}, \ldots, P^{(n)}$ параболических подгрупп группы G множество G-орбит на многообразии $G/P^{(1)} \times \ldots \times G/P^{(n)}$ конечно.

Обозначим m-мерную коммутативную унипотентную группу за $(\mathbf{G}_a)^m$. Действия группы $(\mathbf{G}_a)^m$ (или, что то же, m-мерного векторного пространства, рассматриваемого как группа с операцией сложения) на различных многообразиях изучались в работе[12]. В частности, там по-

---

[8] M. Brion, "Quelques propriétés des espaces homogènes sphériques", *Manuscripta Math.* **55**:2 (1986), 191–198

[9] Э. Б. Винберг, "Сложность действий редуктивных групп", *Функц. анализ и его прил.* **20**:1 (1986), 1–13

[10] P. Magyar, J. Weyman, A. Zelevinsky, "Multiple flag varieties of finite type", *Adv. Math.* **141**:1 (1999), 97–118

[11] P. Magyar, J. Weyman, A. Zelevinsky, "Symplectic multiple flag varieties of finite type", *J. Algebra* **230**:1 (2000), 245–265

[12] B. Hasset, Yu. Tschinkel, "Geometry of equivariant compactifications of G_a^n", *International Mathematics Research Notices*, **1999**:22 (1999), 1211–1230

лучена классификация таких действий на проективных пространствах и на поверхностях Хирцебруха. Там же была поставлена общая задача о классификации всех полных (компактных в классической топологии) m-мерных многообразий, допускающих локально транзитивное действие группы $(\mathbf{G}_a)^m$ вместе с действием этой группы на них, по аналогии с тем, как это было ранее сделано с торическими многообразиями. В работе[13] найдены все компактные однородные пространства связных редуктивных групп, допускающие хотя бы одно локально транзитивное действие группы $(\mathbf{G}_a)^m$, и поставлена задача о классификации таких действий на грассманианах. В работе[14] доказано, что на неособой m-мерной проективной квадратичной гиперповерхности (которая является однородным пространством группы SO_{m+2}) имеется ровно одно такое действие. В диссертации получена классификация всех действий группы $(\mathbf{G}_a)^m$ на всех компактных однородных пространствах.

Цель работы

Пусть G — связная полупростая алгебраическая группа над полем $\mathbb{C}$, а $P \subset G$ — некоторая параболическая подгруппа. Тогда однородное пространство G/P является проективным многообразием, в частности, оно компактно в классической топологии. Выберем в группе G связные простые подгруппы $G^{(1)}, \ldots, G^{(s)}$, так чтобы группа G была локально изоморфна их произведению (как иногда говорят, разложим группу G в почти прямое произведение связных простых подгрупп). Пусть $P^{(i)} = P \cap G^{(i)}$. Тогда подгруппы $P^{(i)}$ однозначно определяют подгруппу P.

В каждой простой группе $G^{(i)}$ выберем борелевскую подгруппу $B^{(i)} \subseteq P^{(i)}$ и максимальный тор $T^{(i)} \subset B^{(i)}$. Эти данные определяют систему корней $\Psi^{(i)}$ и множество простых корней $\Delta^{(i)} = \{\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{\operatorname{rk} G^{(i)}}^{(i)}\}$. Группа $P^{(i)}$ является пересечением нескольких максимальных (по включению) параболических подгрупп, а все максимальные параболические подгруппы, содержащие группу $B^{(i)}$, находятся во взаимно-однозначном соответствии с простыми корнями α_j. Пусть группа $P^{(i)}$ равна пересечению максимальных подгрупп, соответствующих корням $\alpha_{p_{i,1}}, \ldots, \alpha_{p_{i,k_p}}$. Таким образом, подгруппа P определяется конечным набором индексов $p_{1,1}, \ldots, p_{1,k_1}, \ldots, p_{s,1}, \ldots, p_{s,k_s}$. Заметим, что поскольку все борелевские

[13] I. V. Arzhantsev, "Flag varieties as equivariant compactifications of $\mathbb{G}_a^n$", *Proc. Amer. Math. Soc.* **139**:3 (2011), 783–786

[14] Е. В. Шаройко, "Соответствие Хассета-Чинкеля и автоморфизмы квадрики", *Матем. сб.* **200**:11 (2009), 145–160

подгруппы сопряжены, то это описание не зависит от выбора подгрупп $B^{(i)}$.

Цель работы — исходя из этого описания подгруппы P, ответить на следующие вопросы:

1. Предположим, что среди групп $G^{(i)}$ нет групп типа A. Для каких n группа G действует на многообразии $(G/P)^n$ с открытой орбитой, т. е. локально транзитивно?

2. Для каких n группа G действует на многообразии $(G/P)^n$ с конечным числом орбит? (Группа G — любая связная полупростая.)

3. Как параметризуются локально транзитивные действия коммутативной унипотентной группы размерности $\dim(G/P)$ на многообразии G/P?

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Для случаев, когда G — связная полупростая группа, не содержащая связных простых компонент типа A, получена полная классификация таких параболических подгрупп P и таких чисел $n \in \mathbb{N}$, что группа G действует на многообразии $(G/P)^n$ с открытой орбитой.

2. Получена полная классификация троек (G, P, n), где G — связная полупростая алгебраическая группа, P — её параболическая подгруппа и $n \in \mathbb{N}$, таких что группа G действует на многообразии G/P с конечным числом орбит.

3. Получена полная классификация локально транзитивных действий m-мерной коммутативной унипотентной группы на многообразии G/P, где G — связная полупростая алгебраическая группа, P — её параболическая подгруппа и $m = \dim(G/P)$.

4. Пусть L — связная редуктивная алгебраическая группа, а V — её конечномерное представление. Получена полная классификация коммутативных ассоциативных умножений на пространстве V, таких что все операторы умножения нильпотентны и каждый оператор умножения совпадает с оператором действия некоторого элемента алгебры Lie L.

Методы исследования

В диссертации используются методы алгебраической геометрии, теории алгебр Ли и теории алгебраических групп.

Теоретическая и практическая ценность

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы для дальнейшего изучения компактных однородных пространств и эквивариантных компактификаций коммутативной унипотентной группы.

Апробация результатов

Основные результаты диссертации докладывались:

- На второй школе-конференции "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов", механико-математический факультет МГУ, г. Москва (2011).
- На семинаре по алгебраической геометрии в Freie Universität Berlin, г. Берлин, Германия (2011).
- На совместном семинаре лаборатории Понселе и сектора алгебры и теории чисел ИППИ "арифметика, геометрия и теория кодирования", г. Москва (2014).

Публикации

Все результаты диссертации содержатся в трёх единоличных работах, опубликованных в журналах из списка ВАК. Часть результатов также содержится в опубликованных тезисах доклада на конференции. Список публикаций приведён в конце автореферата.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из четырёх глав, включая введение. Общий объём диссертации составляет 120 страниц. Список литературы включает 27 наименований.

Краткое содержание работы

Глава 1 — введение, в ней формулируются задачи, которые будут решаться в диссертации и кратко описываются методы, которые будут использоваться для их решения. Также во введении перечислены некоторые ранее известные задачи, связанные с задачами, решаемыми в диссертации.

В главе 2 вводятся необходимые обозначения и устанавливаются соглашения, используемые в дальнейшем. Также в главе 2 доказываются вспомогательные факты о структуре алгебраической группы на группе автоморфизмов алгебраического многообразия, в частности, компактного однородного пространства. Например, проверяется существование "категорной группы автоморфизмов" в смысле следующего определения: Алгебраическая группа H вместе с действием на алгебраическом многообразии X называется *категорной группой автоморфизмов многообразия* X, если для любой группы H_1, алгебраически действующей на многообразии X, существует единственный морфизм алгебраических групп $f\colon H_1 \to H$, такой что для любой точки $x \in X$ и для любого элемента $h \in H_1$ выполнено $h \cdot x = f(h) \cdot x$.

Глава 3 посвящена действиям группы G на многообразии $(G/P)^n$. В первом параграфе задачи о наличии открытой орбиты и о конечности множества орбит сводятся к случаю, когда группа G простая.

Во втором параграфе рассматривается задача о наличии открытой орбиты. Как уже было сказано выше, для максимальных параболических подгрупп эта задача была решена раньше, поэтому мы рассматриваем только случай, когда подгруппа P немаксимальная, а группа G не типа A. Обозначим максимальную параболическую подгруппу, соответствующую i-му простому корню группы G, за P_i. Обозначим также $P_{i_1,\dots,i_k} = P_{i_1} \cap \ldots \cap P_{i_k}$. В этих условиях и обозначениях доказывается следующая теорема:

Теорема. *Пусть G — связная простая алгебраическая группа, не являющаяся локально изоморфной группе SL_{l+1}, $P \subset G$ — некоторая немаксимальная параболическая подгруппа, и $n \in \mathbb{N}$. Тогда диагональное действие группы G на кратном многообразии флагов $(G/P)^n$ локально транзитивно тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий*

1. $n \leq 2$.

2. $n = 3$ и пара (G, P) перечислена в следующей таблице:

Тип группы G	*P (с точностью до сопряжения)*
$D_l, l \geq 5$ *нечётно*	$P_{1,l-1}, P_{1,l}$
$D_l, l \geq 4$ *чётно*	$P_{1,l-1}, P_{1,l}, P_{l-1,l}$

В третьем параграфе с использованием ранее известных фактов решается задача о конечности множества G-орбит на многообразии G/P. Её решение можно сформулировать в виде следующих теоремы и следствия.

Теорема. *Пусть G — связная простая алгебраическая группа и $P \subset G$ — параболическая подгруппа, $n \in \mathbb{N}$. Если $n \leq 2$, то множество G-орбит на многообразии $(G/P)^n$ всегда конечно. Если $n \geq 3$, то следующие условия эквивалентны.*

1. *Множество G-орбит на многообразии G/P конечно.*
2. *$n = 3$, P — максимальная параболическая подгруппа, и группа G действует на многообразии $G/P \times G/P \times G/P$ с открытой орбитой.*
3. *$n = 3$, и многообразие $G/P \times G/P$ сферическое.*

Следствие. *Пусть G — связная простая алгебраическая группа и $P \subset G$ — параболическая подгруппа. Пусть $n \geq 3$. Тогда диагональное действие группы G на многообразии $(G/P)^n$ имеет конечное число орбит тогда и только тогда, когда $n = 3$ и пара (G, P) с точностью до сопряжения перечислена в следующей таблице:*

Тип группы G	P
A_l	*любая максимальная*
$B_l, l \geq 3$	P_1, P_l
$C_l, l \geq 2$	P_1, P_l
$D_l, l \geq 4$	P_1, P_{l-1}, P_l
E_6	P_1, P_6
E_7	P_7

В главе 4 изучаются действия на многообразии G/P группы $(\mathbf{G}_a)^m$, где $m = \dim(G/P)$, с открытой орбитой. В первом параграфе эта задача сводится к случаю, когда группа G простая, присоединённая и пара (G, P) удовлетворяет некоторому техническому условию, так называемой неисключительности. Известно, что если группа G связная, простая, присоединённая и пара (G, P) неисключительная, то связная компонента единицы категорной группы автоморфизмов многообразия G/P (существование которой было проверено в главе 2) равна самой группе G. Затем цитируются уже известные результаты о том, когда при этих условиях существует хотя бы одно локально транзитивное действие группы $(\mathbf{G}_a)^m$.

Во втором параграфе задача о классификации локально транзитивных $(\mathbf{G}_a)^m$-действий сводится к задаче о классификации умножений на некотором векторном пространстве, обладающих некоторыми дополнительными свойствами. Именно, пусть дана связная редуктивная группа L и её конечномерное представление V. Умножение на пространстве V называется *согласованным с действием алгебры* $\mathfrak{l} = \operatorname{Lie} L$, если оно коммутативно, ассоциативно, все операторы умножения нильпотентны, и для любого $v \in V$ существует такой $x \in \mathfrak{l}$, что оператор умножения на вектор v равен оператору действия элемента x. Теперь выберем в группе G такую параболическую подгруппу P^-, что группа $P \cap P^-$ является подгруппой Леви в группе P. Пусть $\mathfrak{u}^-$ — алгебра Ли унипотентного радикала группы P^-. Тогда присоединённое действие группы G на своей алгебре Ли, ограниченное на подгруппу $P \cap P^-$, сохраняет подалгебру $\mathfrak{u}^-$. В параграфе 2 доказывается, что локально транзитивные действия $(\mathbf{G}_a)^m : (G/P)$ параметризуются умножениями на алгебре $\mathfrak{u}^-$, согласованными с действием алгебры $\operatorname{Lie}(P \cap P^-)$.

Затем, в третьем и четвёртом параграфах для произвольной связной редуктивной группы L и произвольного конечномерного представления V изучаются умножения, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{l} = \operatorname{Lie} L$. В третьем параграфе задача о классификации таких умножений сводится к случаю, когда группа L простая, а представление V неприводимое, и доказываются различные общие факты об умножениях, позволяющие, в частности, существенно ограничить множество представлений, на которых возможны ненулевые умножения, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{l}$. В четвёртом параграфе классифицируются умножения на конкретных представлениях, согласованные с действием конкретных алгебр. Результаты этой классификации можно сформулировать в виде следующих определений и теорем.

Определение. Пусть ω — невырожденная билинейная форма на конечномерном векторном пространстве V ($\omega\colon V \times V \to \mathbb{C}$). Тогда, если на пространстве V задано умножение, назовём трилинейную форму c, определённую как $c(u, v, w) = \omega(uv, w)$, где $u, v \in V$, *трилинейной формой, двойственной к умножению.*

Теорема. *Пусть $\mathfrak{l}$ — простая алгебра Ли, а V — некоторое её неприводимое представление, на котором можно ввести ненулевое умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$. Тогда имеет место одна из следующих двух возможностей:*

1. *$\mathfrak{l}$ — алгебра типа A_l, V — тавтологическое представление или двойственное к нему. Тогда любое коммутативное ассоциативное умножение, для которого все операторы умножения нильпотентны, согласовано с действием алгебры $\mathfrak{l}$.*

2. *$\mathfrak{l}$ — алгебра типа C_l ($l \geq 2$), V — тавтологическое представление. Тогда группа L сохраняет некоторую кососимметрическую билинейную форму ω на пространстве V, и трилинейные формы. двойственные к умножениям, согласованным с действием алгебры $\mathfrak{l}$ — это в точности такие полностью симметрические трилинейные формы c на пространстве V, что ядро $\ker c$ содержит некоторое лагранжево подпространство пространства V (т. е. существует такое лагранжево подпространство $V_1 \subset V$, что $c(V_1, V, V) = 0$).*

Определение. Пусть V — коммутативная унипотентная алгебра размерности $l+1$ ($l \in \mathbb{N}$), такая что все операторы умножения нильпотентны. Обозначим тензор структурных констант умножения на пространстве V за $c \in V^* \otimes V^* \otimes V$. Группа $SL_{l+1} = SL(V)$ действует на пространстве V, поэтому она действует и на пространстве $V^* \otimes V^* \otimes V$. Для тензора c имеется ровно две возможности.

1. С помощью действия группы SL_{l+1} на пространстве $V^* \otimes V^* \otimes V$ тензор c можно умножить на произвольный ненулевой скаляр. В этом случае будем называть алгебру V *масштабируемой.*

2. С помощью действия группы SL_{l+1} тензор c можно умножить лишь на конечное число различных скаляров. В этом случае будем называть алгебру V *немасштабируемой.*

Теорема. *Пусть $\mathfrak{l}$ — простая алгебра Ли, а V — некоторое её неприводимое представление. Пусть на пространстве V можно ввести ненулевое умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$. Тогда имеются ровно две возможности:*

1. *$\mathfrak{l}$ — алгебра типа A_l, и $V = V(\varpi_1)$ (тавтологическое представление) или $V = V(\varpi_l)$ (представление, двойственное к тавтологическому). Тогда классы эквивалентности умножений на V, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$, относительно действия группы L, параметризуются дизъюнктным объединением следующих двух множеств.*

(a) *Классы изоморфизма маситабируемых коммутативных ассоциативных $(l+1)$-мерных алгебр с нильпотентными операторами умножения.*

(b) *Классы изоморфизма пар, состоящих из немаситабируемой коммутативной ассоциативной алгебры A с нильпотентными операторами умножения и ненулевой кососимметрической формы старшей степени на алгебре A. (Здесь имеется в виду, что изоморфизм между двумя такими парами должен сохранять как мультипликативную структуру на алгебре, так и кососимметрическую форму.)*

2. *$\mathfrak{l}$ — алгебра типа C_l ($l \geq 2$), и $V = V(\varpi_1)$ (тавтологическое представление). Тогда классы эквивалентности умножений на V относительно действия группы L параметризуются симметрическими трилинейными формами на пространстве V/V_1, где V_1 — некоторое фиксированное лагранжево подпространство, рассматриваемыми с точностью до действия группы $GL(V/V_1)$ на пространстве V/V_1.*

Наконец, в пятом параграфе классифицируются все локально транзитивные $(\mathbf{G}_a)^m$-действия на многообразии G/P. Полученные результаты можно записать в виде следующей теоремы.

Теорема. *Пусть G — связная простая алгебраическая группа, и пусть $P \subset G$ — такая параболическая подгруппа, что (G, P) — неисключительная пара. Обозначим $m = \dim(G/P)$.*

Если G — группа типа A_l и подгруппа P с точностью до сопряжения равна P_1 или P_l, то локально транзитивные действия $(\mathbf{G}_a)^m : (G/P)$ с точностью до G-сопряжения и с точностью до автоморфизмов группы $(\mathbf{G}_a)^m$ параметризуются коммутативными ассоциативными m-мерными алгебрами с нильпотентными операторами умножения. Иначе, либо локально транзитивное действие $(\mathbf{G}_a)^m : (G/P)$ ровно одно с точностью до G-сопряжения и с точностью до автоморфизмов группы $(\mathbf{G}_a)^m$ (это верно тогда и только тогда, когда унипотентный радикал группы P коммутативен), либо локально транзитивных действий $(\mathbf{G}_a)^m : (G/P)$ нет вообще.

Благодарности

Автор благодарен научному руководителю Сергею Локтеву, Эрнесту Винбергу и Ивану Аржанцеву за привлечение внимания к задаче, внимание к работе и полезные обсуждения. Автор также благодарен Мишелю

Бриону, Валентине Кириченко и Льву Суханову за полезное обсуждение о группах автоморфизмов алгебраических многообразий.

Публикации по теме диссертации

[1] R. Devyatov, *Generically transitive actions on multiple flag varieties*, International Mathematics Research Notices, **2014**:11 (2014), 2972–2989.

[2] Р. А. Девятов, *Действия коммутативной унипотентной группы на многообразиях флагов и нильпотентные умножения*, УМН, **69**:5(419) (2014), 165–166.

[3] Р. А. Девятов, *Локальная транзитивность для кратных многообразий флагов*, Вторая школа-конференция "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов". Москва, Россия, 31 января – 5 февраля 2011 г. Тезисы докладов. Издательство механико-математического факультета МГУ, Москва, 2011, 23–26.

[4] R. Devyatov, *Unipotent commutative group actions on flag varieties and nilpotent multiplications*, Transformation Groups, **20**:1 (2015), 21–64.