На правах рукописи

Журавлева Виктория Владимировна

Диофантовы приближения с числами Пизо

01.01.06 — математическая логика, алгебра, теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических
наук Н.Г. Мощевитин

Москва 2014

Работа выполнена на кафедре теории чисел механико-математического факультета ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, проф. МОЩЕВИТИН Николай Германович, профессор кафедры теории чисел механико-математического факультета ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, проф. ЖУРАВЛЕВ Владимир Георгиевич, профессор кафедры математического анализа физико–математического факультета ФГБОУ ВПО «Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых»
	кандидат физико-математических наук, проф. ДУБИЦКАС Артурас, ведущий научный сотрудник кафедры теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета
Ведущая организация:	Хабаровское отделение ФГБУН Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук

Защита диссертации состоится 3 марта 2015 года в 16:00 на заседании диссертационного совета Д002.077.03 на базе ФГБУН Института проблем передачи информации имени А.А. Харкевича РАН, расположенного по адресу: 127051, г. Москва, Большой Каретный переулок, д. 19, стр. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБУН Института проблем передачи информации имени А.А. Харкевича РАН.

Автореферат разослан декабря 2014 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д002.077.03,
созданного на базе ФГБУН Института проблем
передачи информации имени А.А. Харкевича РАН,
доктор физико-математических наук А.Н. Соболевский

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Настоящая диссертация посвящена вопросам распределения степеней чисел Пизо и некоторых рекуррентных последовательностей, связанных с числами Пизо. Задачи, касающиеся диофантовых свойств и равномерного распределения экспоненциальных последовательностей, возникали у Г. Вейля, А.Я. Хинчина, А. Туэ, Г. Харди, К.Л. Зигеля, Дж.В.С. Касселса, К. Малера, А.О. Гельфонда, Н.М. Коробова и других математиков.

Рассматриваемым в настоящей диссертации числам Пизо (иногда называемым числами Пизо-Виджаярагхавана) посвящена глава из книги Касселса[1] «Введение в теорию диофантовых приближений». Обзор классических и современных результатов представлен в книге «Pisot and Salem numbers»[2]. Несмотря на свое название, числа Пизо-Виджаярагхавана до работ Ш. Пизо[3] и Т. Виджаярагхавана[4] появлялись в работах А. Туэ[5] и Г. Харди[6].

Напомним, что целое алгебраическое число α называется числом Пизо, если оно само больше 1, а его сопряженные лежат строго внутри единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Особый интерес математиков к этим числам вызван их диофантовыми свойствами, а именно тем, что их степени — это «почти целые» числа в том смысле, что расстояние от α^n до ближайшего целого числа стремится к нулю.

Несомненно, наиболее известным числом Пизо является золотое сечение $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Один из результатов настоящей диссертации как раз связан с последовательностью $\left\|\xi\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n\right\|$, где $\|\cdot\|$ — это расстояние до ближайшего целого.

Точного описания множества чисел Пизо, вообще говоря, нет. Два наименьших числа Пизо были найдены К. Зигелем[7]. В дальнейшем, его работу продолжили Ш. Пизо и Ж. Дюфреснуа, найдя все числа Пизо, меньшие золотого сечения[8]. Также они доказали, что именно $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ является наименьшей предельной точкой этого множества.

Как известно[9], для типичного вещественного числа α последовательность дробных долей $\{\alpha^n\}$ равномерно распределена. Но если α — число Пизо, то это не так. Вопросы распределения последовательностей вида $\{\xi\alpha^n\}$, где $\{\cdot\}$ — это дробная часть, α — число Пизо, а ξ — некоторое действительное число, имеют особую специфику. Именно эти вопросы и рассматриваются в настоящей диссертации.

Последовательности вида $\xi\alpha^n$, где $\alpha > 1$, являются частным случаем более общего класса так называемых лакунарных последовательностей. Например, из общего результа-

---

[1] Cassels J.W.S. *An introduction to Diophatine approximations*, Cambridge Univ. Press (1957).

[2] Bertin M.J., Decomps-Guilloux A., Grandet-Hugot M., Pathiaux-Delefosse M., Schreiber J.P. Birkhauser (1992).

[3] Pisot C. *Sur une propriété caractéristique de certains entiers algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris 202 (1936), 892–894.

[4] Vijayaraghavan T. *On the fractional parts of the powers of a number (II)*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 37 (1941), 349–357.

[5] Thue A. *Über eine Eigenschaft, die keine transzendente Grössen haben kann*, Kra. Vidensk Selsk. Skr. Mat. Nat. Kl. 2 (1912), No. 20, 1–15.

[6] Hardy G.H. *A problem of Diophantine approximation*, J. Indian Math. Soc. 11 (1919), 162–166.

[7] C.L. Siegel, *Algebraic Numbers whose Conjugates Lie in the Unit Circle.* Duke Math. J. **11** (1944) 597–602.

[8] Dufresnoy J., Pisot C. *Etude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité. Application à un ensemble fermé d'entiers algébriques*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) 72 (1955), 69–92.

[9] Kuipers L., Niederreiter H., *Uniform distribution of sequences.* John Wiley & Sons (1974).

та А.Я. Хинчина о лакунарных последовательностях[10] следует, что существует такое действительное ξ, что $\{\xi\alpha^n\}$ не только не равномерно распределены, но и не всюду плотны на отрезке $[0,1]$. Впоследствии В. Шмидт установил[11] [12], что множество таких ξ является выигрышным и имеет хаусдорфову размерность один.

В случае $\alpha = p/q$, где $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q \geq 2$ про последовательность $\{\xi\alpha^n\}$ известно совсем немного. Например, до сих пор не удается установить, существуют ли так называемые Z-числа Малера, то есть такие действительные числа ξ, что для всех целых $n \geq 0$ выполнено неравенство $0 \leq \{\xi(3/2)^n\} \leq 1/2$. Упомянутая проблема Малера[13] явяляется одной из наиболее интересных задач о распределении степеней рациональных чисел. Другая известная нерешенная гипотеза предполагает, что $\{(3/2)^n\}$ всюду плотны в отрезке $[0,1]$ и, более того, равномерно распределены.

Пожалуй, наиболее значимым на данный момент результатом в этом направлении является теорема, доказанная Л. Флатто, Д. Лагариасом и А. Поллингтоном[14], которая утверждает, что все дробные части последовательности $\{\xi(p/q)^n\}$ не могут лежать внутри определенного интервала длины $\frac{1}{p}$. Оригинальное доказательство этого утверждения использует методы теории динамических систем. Более естественное комбинаторное доказательство было предложено А. Дубицкасом[15].

Впоследствии, используя сходные комбинаторные соображения Дубицкас смог доказать похожий результат для чисел Пизо[16]. А именно он доказал, что если α — число Пизо, а $\xi \notin \mathbb{Q}(\alpha)$, то разница между нижней и верхней предельной точками последовательности дробных частей $\{\xi\alpha^n\}$ не превосходит $\frac{1}{d(\alpha)}$, где $d(\alpha)$ — это некоторая константа, зависящая только от числа Пизо α.

Цели работы. Получение точных оценок для распределения по модулю 1 последовательностей $\{\xi\alpha^n\}$, где α — это число Пизо.

Методы исследования. В работе использованы элементарные методы теории чисел, методы математического анализа, подходы, связанные с комбинаторикой слов, и компьютерные вычисления.

Научная новизна. Полученные результаты являются новыми и получены автором самостоятельно. Основными результатами данной работы можно считать следующие:

- Исследованы приближения действительных чисел рациональными числами со знаменателями, являющимися членами последовательности Фибоначчи. А именно найдено число, наиболее удаленное от этих рациональных чисел.

- Найдено точное значение величины $L(\alpha)$, то есть такое максимальное число, что существует такое действительное число ξ, что все предельные точки последователь-

[10] Khintchine A., *Über eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen*, Rend. Circ. Mat. Palermo. 50 (1926), 170–195.

[11] Schmidt W.M. *On badly approximable numbers and certain games*, Trans. Amer. Math. Soc. 123 (1966), 178–199.

[12] Schmidt W.M. *Diophantine approximations*, Lect. Not. Math. 785 (1980).

[13] Mahler K. *An unsolved problem on the powers of 3/2*, J. Austral. Math. Soc. 8 (1968), 313–321.

[14] Flatto L., Lagarias J.C., Pollington A.D. *On the range of fractional parts* $\{\xi(p/q)^n\}$, Acta Arith. 70 (1995), 125–147.

[15] Dubickas A. *On the fractional parts of rational powers*, Int. J. Number Theory 5 (2009), 95–111.

[16] Dubickas A. *Arithmetical properties of powers of algebraic numbers*, Bull. London Math. Soc. 38 (2006), 70–80.

ности дробных частей $\{\xi\alpha^n\}$ лежат на отрезке $[L(\alpha), 1-L(\alpha)]$ для положительных коэффициентов минимального многочлена числа Пизо α; для знакопеременных коэффициентов минимального многочлена числа Пизо α; для двух наименьших чисел Пизо.

- Получены оценки для чисел Пизо степени, не превосходящей 4, и для чисел Пизо, не превосходящих золотого сечения.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, и разработанные в ней методы могут быть применены в задачах теории диофантовых приближений, касающихся распределения экспоненциальных последовательностей. Кроме того, полученные результаты могут использоваться в учебном процессе в рамках специальных курсов и специальных семинаров.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались автором на следующих конференциях:

- «27th Journée Arithmétiques» — Вильнюс, Литва (27 июня — 1 июля 2011);
- «Diophantine Analysis» — Астрахань, Россия (30 июля — 3 августа 2012);
- «Palanga Conference in Combinatorics and Number Theory» — Паланга, Литва (1—7 сентября 2013);
- «Moscow Workshop on Combinatorics and Number Theory» — Москва (Долгопрудный), Россия (27 января — 2 февраля 2014);

и научно-исследовательских семинарах:

- «Московский семинар по теории чисел» (рук. Ю.В. Нестеренко, Н.Г. Мощевитин), МГУ;
- «Арифметика и геометрия» (рук. Н.Г. Мощевитин, О.Н. Герман), МГУ;
- «Арифметика, геометрия и теория кодирования» (рук. А.И. Зыкин), лаборатория Понселе НМУ и сектор 4.1 ИППИ РАН;
- «Современные проблемы теории чисел» (рук. С.В. Конягин, И.Д. Шкредов), МИАН;
- кафедральный семинар кафедры теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета (рук. А. Лауринчикас).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 3 статьи в ведущих российских и зарубежных рецензируемых изданиях [1] — [3], а также электронный препринт на сервере arXiv.org [4]. Список работ приводится в конце автореферата.

Структура и обьем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, приложения и библиографии. Общий объем диссертации составляет 92 страницы. Библиография включает 43 наименования.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** дан краткий исторический обзор, обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, представлены выносимые на защиту научные положения.

В **первой главе** мы доказываем следующий основной результат.

Теорема 1. *Пусть $\xi \in \mathbb{R}$, а последовательность $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ — это последовательность Фибоначчи. Тогда*

$$\inf_{n\in N} ||\xi F_n|| \leq \frac{\varphi - 1}{\varphi + 2},$$

где $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, причем равенство достигается при $\xi = \frac{1}{\varphi+2}$.

Напомним, что последовательность Фибоначчи $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ определяется следующими рекуррентными соотношениями:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ \text{при } n > 1.$$

В частности, в процессе доказательства теоремы 1 мы устанавливаем равенства

$$\max_{\xi\in\mathbb{R}} \min_{1\leq k\leq 2} ||\xi F_k|| = \frac{1}{2}, \quad \max_{\xi\in\mathbb{R}} \min_{1\leq k\leq 3} ||\xi F_k|| = \frac{1}{3},$$

$$\max_{\xi\in\mathbb{R}} \min_{1\leq k\leq 4} ||\xi F_k|| = \frac{1}{4}, \quad \max_{\xi\in\mathbb{R}} \min_{1\leq k\leq 5} ||\xi F_k|| = \frac{1}{4},$$

$$\max_{\xi\in\mathbb{R}} \min_{1\leq k\leq N} ||\xi F_k|| = \frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2} + F_{2n+4}} \quad \text{при } N \geq 6, \text{ где } n = \left[\frac{N-2}{4}\right].$$

Вторая глава посвящена оценкам и равенствам для величины

$$L(\alpha) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} ||\xi\alpha^n||$$

в ряде общих случаев.

Пусть α — это число Пизо. Минимальный многочлен для α обозначим

$$P(x) = x^d - a_1x^{d-1} - a_2x^{d-2} - \ldots - a_kx^{d-k} - \ldots a_{d-1}x - a_d, \qquad \text{где } a_i \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Рассмотрим последовательность $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, которая удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$x_n = a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \ldots + a_kx_{n-k} + \ldots + a_{d-1}x_{n-d+1} + a_dx_{n-d}. \tag{2}$$

Положим

$$L(X) := \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} ||\xi x_n||.$$

Легко показать, что если $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет (2), то

$$L(X) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_n \to 0 \text{ при } n \to \infty, \\ L(\alpha), & \text{если } x_n \nrightarrow 0 \text{ при } n \to \infty. \end{cases}$$

В случае когда $x_n \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$, последовательность $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ является лакунарной последовательностью. Из уже упомянутого результата А.Я. Хинчина следует, что $L(\alpha) > 0$.

Очевидно, что если сумма коэффициентов минимального многочлена для числа Пизо есть число нечетное, то

$$L(\alpha) = \frac{1}{2}.$$

В следующей теореме 2 мы устанавливаем простейшую общую оценку сверху на величину $L(\alpha)$, аналогичную теореме 1.2 Дубицкаса[17] в случае $d = 1$.

Теорема 2. *Пусть α — это число Пизо, а его минимальный многочлен — это $P(x)$. Пусть также $\sum_{i=1}^{d} a_i$ — четное число. Тогда*

$$L(\alpha) \leq \frac{\sum_{i=1}^{d} |a_i|}{2\sum_{i=1}^{d} |a_i| + 2}.$$

Далее мы доказываем общую оценку снизу для величины $L(\alpha)$.

Положим

$$s_{j,t} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \equiv j \pmod t}}^{d} a_i, \qquad \text{при } j = 1 \dots t.$$

В частности,

$$s_{1,1} = \sum_{i=1}^{d} a_i,$$

$$s_{1,2} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ — нечетное}}}^{d} a_i, \qquad s_{2,2} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ — четное}}}^{d} a_i.$$

Последовательность $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется периодической по модулю 1, если существует такое целое число t, что $\{x_n\} = \{x_{n+t}\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Целое число t с таким условием называется длиной периода этой последовательности.

Основным инструментом при доказательстве теоремы 3, которую мы формулируем ниже, являются следующие леммы о существовании периодических последовательностей. Возможно, эти леммы могут иметь самостоятельный интерес.

Лемма 2.2. *Пусть $\sum_{i=1}^{d} x_i$ — четное. Пусть последовательность $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет (2). Пусть также*

$$x_i = \frac{s_{1,1} - 2}{2s_{1,1} - 2}, \quad \text{если } i \in [1, \dots, d].$$

Тогда последовательность X является периодической по модулю 1.
Длина периода равна 1.

[17] Dubickas A. *Distribution of some quadratic linear recurrence sequences modulo 1*, Carpathian Journal of Mathematics 30 (1) (2014), 79–86.

Лемма 2.3. *Пусть* $\sum_{i=1}^{d} x_i$ *— четное. Пусть последовательность* $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет (2). Пусть также*

$$x_i = \begin{cases} \frac{s_{1,2}-s_{2,2}}{2(s_{1,2}-s_{2,2}+1)}, & \text{если } i \text{ — нечетное, } i \in [1, \ldots, d]; \\ \frac{s_{1,2}-s_{2,2}+2}{2(s_{1,2}-s_{2,2}+1)}, & \text{если } i \text{ — четное, } i \in [1, \ldots, d]. \end{cases}$$

Тогда последовательность X является периодической по модулю 1.
Длина периода равна 2.

Лемма 2.4. *Пусть* $\sum_{i=1}^{d} x_i$ *— четное. Пусть последовательность* $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет (2). Пусть также*

$$x_i = \begin{cases} \frac{(s_{1,4}-s_{3,4})^2-(s_{1,4}-s_{3,4})+(s_{2,4}-s_{4,4}+1)^2-(s_{2,4}-s_{4,4}+1)}{2(s_{1,4}-s_{3,4})^2+2(s_{2,4}-s_{4,4}+1)^2}, & \text{если } i \equiv 1 \pmod 4, \ i \in [1, \ldots, d]; \\ \frac{(s_{1,4}-s_{3,4})^2-(s_{1,4}-s_{3,4})+(s_{2,4}-s_{4,4}+1)^2+(s_{2,4}-s_{4,4}+1)}{2(s_{1,4}-s_{3,4})^2+2(s_{2,4}-s_{4,4}+1)^2}, & \text{если } i \equiv 2 \pmod 4, \ i \in [1, \ldots, d]; \\ \frac{(s_{1,4}-s_{3,4})^2+(s_{1,4}-s_{3,4})+(s_{2,4}-s_{4,4}+1)^2+(s_{2,4}-s_{4,4}+1)}{2(s_{1,4}-s_{3,4})^2+2(s_{2,4}-s_{4,4}+1)^2}, & \text{если } i \equiv 3 \pmod 4, \ i \in [1, \ldots, d]; \\ \frac{(s_{1,4}-s_{3,4})^2+(s_{1,4}-s_{3,4})+(s_{2,4}-s_{4,4}+1)^2-(s_{2,4}-s_{4,4}+1)}{2(s_{1,4}-s_{3,4})^2+2(s_{2,4}-s_{4,4}+1)^2}, & \text{если } i \equiv 0 \pmod 4, \ i \in [1, \ldots, d]. \end{cases}$$

Тогда последовательность X является периодической по модулю 1.
Длина периода равна 4.

Дубицкас показал[17], что если существует периодическая по модулю 1 последовательность $X^* = (x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ с длиной периода равной t, удовлетворяющая (2), то

$$L(\alpha) \geq \min_{i=1,\ldots,t} ||x_i^*||.$$

Используя это утверждение и леммы 2.2-2.4, мы получаем следующую оценку снизу для $L(\alpha)$.

Теорема 3. *Пусть* α *— это число Пизо, а его минимальный многочлен — это* $P(x)$*. Пусть также* $\sum_{i=1}^{d} a_i$ *— четное. Тогда*

$$L(\alpha) \geq \max\left\{ \left\| \frac{s_{1,1}-2}{2s_{1,1}-2} \right\|, \left\| \frac{s_{1,2}-s_{2,2}}{2(s_{1,2}-s_{2,2})+2} \right\|, \frac{(s_{1,4}-s_{3,4})^2 - |s_{1,4}-s_{3,4}| + (s_{2,4}-s_{4,4}+1)^2 - |s_{2,4}-s_{4,4}+1|}{2(s_{1,4}-s_{3,4})^2 + 2(s_{2,4}-s_{4,4}+1)^2} \right\}. \quad (3)$$

Для некоторых случаев значение величины $L(\alpha)$ можно вычислить точно. На эту тему в главе 2 мы доказываем следующие две теоремы.

Теорема 4. *Пусть* $a_i \geq 0$*, если* i *— нечетное,* $a_i \leq 0$*, если* i *— четное, и* $\sum_{i=1}^{d} a_i$ *— четное. Тогда*

$$L(\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^{d} |a_i|}{2\sum_{i=1}^{d} |a_i| + 2}.$$

Теорема 5. *Пусть $a_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, d$ и $\sum_{i=1}^{d} a_i$ — четное. Пусть также $d > 1$ и $\alpha \neq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Тогда*

$$L(\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^{d} a_i - 2}{2\sum_{i=1}^{d} a_i - 2}.$$

Ранее Дубицкас доказал теорему 4 для случая $d = 1$ и теорему 5 для случая $d = 2$, $\alpha \neq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Легко видеть, что из теоремы 4 следует точность оценки в теореме 2.

В **третьей главе** мы подробно остановимся на значении $L(\alpha)$ для некоторых чисел Пизо.

Теорема 6. *Справедливы следующие утверждения.*

1) Если $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, то $L(\alpha) = \frac{1}{5}$;

2) Если α — наибольший корень уравнения $x^3 = x + 1$, то $L(\alpha) = \frac{1}{5}$;

3) Если α — наибольший корень уравнения $x^4 = x^3 + 1$, то $L(\alpha) = \frac{3}{17}$;

4) Если α — наибольший корень уравнения $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$, то $L(\alpha) = \frac{4}{13}$.

Доказательство этой теоремы опирается на компьютерные вычисления. Отметим, что для первых трех утверждений Дубицкас предложил альтернативные комбинаторные доказательства [17] [18].

Основной результат, касающийся чисел Пизо степени, не превосходящей 4, состоит в следующем.

Теорема 7. *Пусть α — это число Пизо степени ≤ 4. Пусть также α не является корнем ни одного из уравнений $x^2 - x - 1 = 0$, $x^3 - x - 1 = 0$, $x^4 - x^3 - 1 = 0$ или $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$. Тогда $L(\alpha) \geq \frac{1}{3}$.*

Из теорем 6, 7 легко можно получить следующие утверждения.

Следствие 3.1. *Справедливы следующие утверждения*

1) Если α — число Пизо степени ≤ 3, то $L(\alpha) \geq \frac{1}{5}$;

2) Если α — число Пизо степени ≤ 4, то $L(\alpha) \geq \frac{3}{17}$.

Следствие 3.2. *Пусть α — это число Пизо степени, не превосходящей 4. Тогда*

1) $L(\alpha) = \frac{3}{17}$ тогда и только тогда, когда α — это корень $x^4 - x^3 - 1 = 0$;

2) $L(\alpha) = \frac{1}{5}$ тогда и только тогда, когда α — это корень $x^2 - x - 1 = 0$ или $x^3 - x - 1 = 0$;

3) $L(\alpha) = \frac{4}{13}$ тогда и только тогда, когда α — это корень $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$.

Для получения результатов о величине $L(\alpha)$, если α — число Пизо третьей степени, нам необходимо было точно описать множество

$$\Lambda_3(a_1) = \{(a_2, a_3) \in \mathbb{Z}^2 : P(x) = x^3 - a_1x^2 - a_2x - a_3 \text{ является минимальным многочленом для числа Пизо степени } 3\}.$$

А именно в диссертации доказано следующее.

Утверждение 3.5. *Имеет место равенство*

$$\Lambda_3(a_1) = \{(a_2, a_3) \in \mathbb{Z}^2 : a_1 + a_2 + a_3 > 1, a_1 - a_2 + a_3 > -1, a_2 > a_3^2 - a_1a_3 - 1, a_3 \neq 0\}.$$

---

[18] A. Dubickas, J. Jankauskas, *On the fractional parts of powers of Pisot numbers of length at most 4.* J. Number Theory **143**:1 (2014), 325–339.

В свете теоремы 3 и утверждения 3.5 мы разобьем $\Lambda_3(a_1)$ на три множества в зависимости от того, какая функция из теоремы 3 является максимальной.

На рисунке 1 представлено это разбиение при $a_1 = 9$:

1) синим цветом отмечена область $\Gamma_1(a_1)$, где максимальна $\frac{a_1-a_2+a_3}{2(a_1-a_2+a_3+1)}$;

2) красным цветом отмечена область $\Gamma_2(a_1)$, где максимальна $\frac{a_1+a_2+a_3-2}{2(a_1+a_2+a_3-1)}$;

3) зеленым цветом отмечена $\Gamma_3(a_1)$, где максимальна $\frac{(a_1-a_3)^2-|a_1-a_3|+(a_2+1)^2-|a_2+1|}{2(a_1-a_3)^2+2(a_2+1)^2}$.

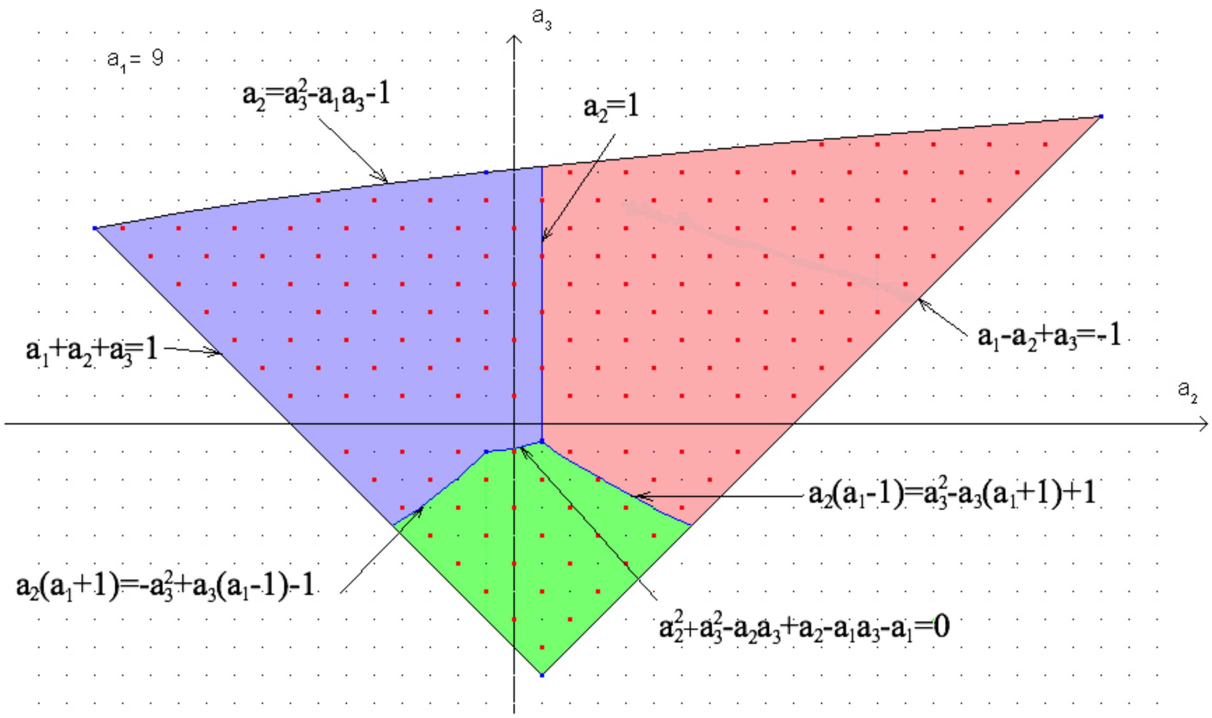

Рис. 1: Разбиение $\Lambda_3(a_1)$ на области $\Gamma_1(a_1)$, $\Gamma_2(a_1)$, $\Gamma_3(a_1)$

Случай $a_3 > 0$ полностью изучен в силу теорем 4 и 5. Для случая $a_3 < 0$ при условии $(a_1, a_2, a_3) \in \Gamma_1(a_1) \cup \Gamma(a_2)$ удается получить верхние оценки, используя методы Дубицкаса[18]. А именно, верна

Теорема 8. *Пусть α — это число Пизо, а его минимальный многочлен $P(x) = x^3 - a_1x^2 - a_2x - a_3$, причем $a_1 + a_2 + a_3$ — четное число. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) Если $a_2 < 0, a_3 < 0$ и $(a_1+1)a_2 + a_3^2 - a_3(a_1-1) + 1 \le 0$, то

$$L(\alpha) = \frac{a_1 - a_2 + a_3}{2(a_1 - a_2 + a_3 + 1)};$$

2) Если $a_2 > 0, a_3 < 0$ и $(a_1-1)a_2 - a_3^2 + a_3(a_1+1) - 1 \ge 0$, то

$$L(\alpha) = \frac{a_1 + a_2 + a_3 - 2}{2(a_1 + a_2 + a_3 - 1)}.$$

Итак, из теорем 4, 5 и 8 получаем

Следствие 3.4. *Пусть* α *— это число Пизо, а его минимальный многочлен* $P(x) = x^3 - a_1x^2 - a_2x - a_3$*, причем* $a_1 + a_2 + a_3$ *— четное число. Тогда*

1) Если $(a_1, a_2, a_3) \in \Gamma_1(a_1)$*, то*

$$L(\alpha) = \frac{a_1 - a_2 + a_3}{2(a_1 - a_2 + a_3 + 1)};$$

2) Если $(a_1, a_2, a_3) \in \Gamma_2(a_1)$*, то*

$$L(\alpha) = \frac{a_1 + a_2 + a_3 - 2}{2(a_1 + a_2 + a_3 - 1)}.$$

Все числа Пизо, меньшие золотого сечения, известны. Наш подход позволяет получить оценку снизу для $L(\alpha)$ для всех этих чисел.

Теорема 9. *Пусть* α *— это число Пизо, не превосходящее* $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$*. Тогда*

$$L(\alpha) \geq \frac{3}{17},$$

причем равенство достигается в случае, когда α *— наибольший корень уравнения* $x^4 = x^3 + 1$.

Некоторые результаты диссертации (утверждения 2-4 из теоремы 6) потребовали компьютерных вычислений. В **приложении** мы приводим компьютерные программы и их описания.

Список работ автора по теме диссертации

1. Zhuravleva V. *Diophatine approximations with Fibonacci numbers*, J. de Theor. des Nombres de Bordeaux 25 (2013), 499–520.

2. Журавлева В. *О двух наименьших числах Пизо*, Матем. заметки 94:5 (2013), 784–787.

3. Журавлева В. *Диофантовы свойства степеней некоторых чисел Пизо*, Матем. заметки 96:1 (2014), 147–151.

4. Zhuravleva V. *Diophantine approximations with Pisot numbers*, preprint at arXiv:1406.0518 (2014).