САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.938

Тихомиров Сергей Борисович

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С РАЗЛИЧНЫМИ СВОЙСТВАМИ ОТСЛЕЖИВАНИЯ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Научный консультант
д. ф.-м. н., проф.
С.Ю. Пилюгин

Санкт-Петербург – 2015

Работа выполнена в *исследовательской лаборатории им. П.Л. Чебышева при Санкт-Петербургском Государственном Университете.*

Официальные оппоненты:

профессор, доктор физико-математических наук Гринес Вячеслав Зигмундович, заведующий кафедрой высшей математики Нижегородской государственной сельскохозяйственной академии.

профессор, доктор физико-математических наук Ильяшенко Юлий Сергеевич, профессор факультета математики НИУ "Высшая школа экономики"

профессор, доктор физико-математических наук Оселедец Валерий Иустинович, профессор кафедры высшей математики Военной академии ракетных войск стратегического назначения им. Петра Великого

Ведущая организация:

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Защита состоится 16 февраля 2016 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета *Д 002.077.03* при *при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН*, расположенном по адресу: *127051, г. Москва, Большой Каретный переулок, д.19 стр. 1.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН.*

Автореферат разослан «____» ____________ 2015 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

доктор физико-математических наук *Соболевский А. Н.*

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Настоящая диссертация посвящена исследованию связи между свойством отслеживания для действий порожденных диффеоморфизмами, векторными полями и более сложными группами с такими формами гиперболичности как структурная устойчивость, Ω-устойчивость и частичная гиперболичность.

Задача об отслеживании псевдотраекторий в самом общем виде связана со следующим вопросом: при каких условиях для любой псевдотраектории динамической системы можно найти близкую к ней траекторию? Изучение данной задачи было начато Аносовым [15] и Боуэном [17]. Современное состояние теории отслеживания в значительной степени отражено в монографиях [30, 35] и обзоре [37].

Псевдотраектории возникают естесственным образом при компьютерном моделировании траекторий диффеоморфизмов и векторных полей. Действительно, если диффеоморфизм f (векторное поле X) обладает свойством отслеживания, то приближенные траектории, полученные при компьютерном моделировании (а следовательно являющиеся псевдотраекториями) соответсвующей динамической системы, отражают поведение точных траекторий на неограниченном промежутке времени.

Свойство отслеживания играет важную роль в теории динамических систем: ясно, что если диффеоморфизмы f_1, f_2 (векторные поля X_1, X_2) близки в C^1 метрике, то точные траектории диффеоморфизма f_2 (векторного поля X_2) будут псевдотраекториями диффеоморфизма f_1 (векторного поля X_1), следовательно, свойство отслеживания является слабым аналогом структурной устойчивости [35]. Так же ясно, что если диффеоморфизм f или векторное поле X обладает свойством отслеживания, то множество неблуждающих точек [32] и множество цепно-рекуррентных точек [33] соответствующей динамической системы совпадают.

Хотя наиболее очевидной мотивацией для изучения свойства отслеживания является обоснование компьютерного моделирования, исходно оно было введено при изучении цепно-рекуррентных множеств и в теории структурной устойчивости.

Хорошо известно, что динамическая система обладает свойством отслеживания в окрестности гиперболического множества [15, 17]. Это утверждение часто называют леммой об отслеживании. Структурно устойчивые диффеоморфизмы (и векторные поля) обладают свойством отслеживания на всем многообразии [34, 40, 43]. Отметим, что для теории структурной устойчивости важен сам факт близости псевдотраектории и точной траектории. Для компьютерного моделирования важны количественные характеристики этой близости, а так же необходимо рассматривать псевдотраектории конечной длины.

Несмотря на то, что нетрудно построить примеры негиперболических систем, обладающих свойством отслеживания (см. например, [36, 39]), в современной теории динамических систем сложилось неформальное мнение, что свойство отслеживания и гиперболичность почти равносильны. В то же время численное моделирование показывает хорошие результаты для гораздо более широкого класса систем.

Хаммел, Гребоджи и Йорк [22, 23] рассматривали вопрос о длине отслеживаемых псевдотраекторий. В данных работах при помощи компьютерного моделирования было изучено несколько конкретных псевдотраекторий логистического тбражения и отображения Эно. На основании результатов численных экспериментов была выдвинута гипотеза об ожидаемой длине отслеживаемых псевдотраекторий.

На момент начала данного исследования был изучен вопрос о структуре внутренности множества диффеоморфизмов, обладающих свойством отслеживания в C^1-топологии. Было доказано [38, 42], что диффеоморфизмы, обладающие стандартным или орбитальным свойствами отслеживания вместе со всеми своими C^1-малыми возмущениями, являются структурно устойчивыми.

Так же следует упомянуть, что Абденур и Диац [14] предположили, что для C^1-типичного диффеоморфизма свойство отслеживания и структурная устойчивость эквивалентны; они доказали эту гипотезу для ручных (tame) диффеоморфизмов.

Без перехода к C^1-внутренностям полное описание множества диффеоморфизмов, обладающих свойством отслеживания в терминах гиперболичности и трансверсальности (структурной устойчивости), было получено лишь для вариационного отслеживания [36].

Важной задачей является описание множество периодических траекторий динамических систем, обладающих свойством отслеживания [27]. В связи с этим логично изучить свойство периодического отслеживания, в котором рассматривается отслеживание периодических псевдотраекторий, периодическими траекториями. Хотя это свойство было введено ранее, до сих пор неизвестно, верно ли, что любой диффеоморфизм, обладающий свойством отслеживания, так же обладает свойством периодического отслеживания [28].

В качетсве поддержки парадигмы эквивалентности отслеживания и гиперболичности Бонатти, Диац и Туркат [16] построили контрпример частично гиперболических диффеоморфизмов, не обладающих свойством отслеживания. Хирш, Пью и Шуб [24] показали, что при некоторых дополнительных условиях (экспансивность по площадкам и совместная интегрируемость) центральное слоение частично-гиперболических диффеоморфизмов устойчиво. При этом на момент написания диссертации не было известно свойство отслеживания, которым бы обладали частично гиперболические диффеоморфизмы.

Основное отличие задачи об отслеживании для потоков от аналогичной задачи для дискретных динамических систем состоит в необходимости репараметризации отслеживающих траекторий. Так же дополнительная трудность возникает ввиду возможности приближения точки покоя точками, лежащими на замкнутых траекториях. Как и в случае диффеоморфизмов, векторные поля обладают свойством отслеживания в окрестности гиперболического множества

[15] и структурно устойчивые векторные поля обладают свойством отслеживания на всем многообразии [34].

Описанные выше различия существенно затрудняют изучение свойства отслеживания. Например, в контексте C^1-внутренностей на момент написания диссетации было показано, что C^1-внутренность множества векторных полей без точек покоя, обладающих свойством отслеживания, состоит лишь из структурно устойчивых векторных полей [29], что намного слабее, чем соответсвующие результаты для диффеоморфизмов. При этом оставался открытым вопрос, является ли отсутсвие точек покоя принципиально важным предположением или недостатком выбранной техники.

В определении отслеживания можно накладывать различные ограничения на репараметризации. При этом остается непонятным, оказывают ли эти ограничения существенное влияние на понятие свойства отслеживания [26].

Параллельно с классической теорией динамических систем (изучающей действия групп Z и R) разрабатывалась качественная теория действий более сложных групп (см. например книгу [19] и обзор [20]). Тем не менее свойство отслеживания для дейтсвий абелевых групп было введено лишь в 2003 году в статье автора диссертации [10].

Цели и задачи диссертационной работы: Целью данного исследования было изучение количественных аспектов свойства отслеживания. В диссертации рассматриваются действия, порожденные диффеоморфизмами, векторными полями, а так же действиями конечно порожденных групп.

Для достижения цели подробно рассматривались следующие задачи.

- Изучение количественных характеристик близости псевдотраекторий и траекторий у диффеоморфизмов и векторных полей

- Изучение свойств псевдотраекторий конечной длины.

- Изучение структруктуры C^1-внутренности векторных полей, обладающих различными свойствами отслеживания.

- Изучение зависимости свойства отслеживания от типа репараметризаций отслеживающих траекторий.

- Изучение свойства отслеживания для частично гиперболических диффеоморфизмов.

- Изучение свойства отслеживания для действий конечно-порожденных групп.

Научная новизна. Результаты работы являются новыми и получены автором лично. Основные из них следующие:

- Впервые систематически изучаются липшицево и липшицево периодическое свойство отслеживания. Показано, что липшицево свойство отслеживания равносильно структурной устойчивости, а липшицево периодическое свойство отслеживания равносильно Ω-устойчивости. Данный результат позволяет полностью охарактеризовать множество диффеоморфизмов, обладающих липшицевым и липшицевым периодическим свойством отслеживания. В доказательстве разработана технология изучения свойства отслеживания при помощи неоднородного разностного уравнения.

- Рассматриваются псевдотраектории конечной длины с полиномиальной зависимостью между размером скачков псевдотраектории и точностью отслеживания точной траекторией. Введено понятие гельдерова отслеживания на конечных интервалах и приведена оценка сверху на длину отслеживаемых псевдотраекторий, которая в точности согласуется с выдвинутой ранее гипотезой Хаммел, Йорка, Гребоджи [22, 23]. В доказательстве впервые определяется понятие решений медленного роста для неоднородного разностного уравнения, и оно характеризуется в терминах экспоненциальной дихотомии.

- Рассматриваются линейные косые произведения над отображением сдвига с ненулевой экспонентой Ляпунова в слое. Приводятся оценки на точность отслеживания типичной псевдотраектории конечной длины. Этот результат позволяет предположить, что многомерный аналог гипотезы Хаммел, Йорка, Гребоджи [22, 23] о длине типичных отслеживаемых псевдотраекторий не верен. В доказательстве задача об отслеживании сводится к задаче о разорении игрока для случайных блужданий.

- Показано, что липшицево и липшицево периодическое свойства отслеживания для векторных полей эквивалентны структурной и Ω-устойчивости соответственно. Несмотря на схожесть формулировки со случаем диффеоморфизмов, техника в этом случае существенно модифицирована. Это вызвано двумя факторами: различной природой отслеживания в окрестностях точек покоя и замкнутых траекторий и возможностью накапливания точек, лежащих на замкнутых траекториях, к точкам покоя.

- Построен пример не структурно устойчивого векторного поля на 4-х мерном многообразии $S^2 \times S^2$, обладающего свойством отслеживания вместе со всеми C^1-малыми возмущениями. Этот пример демонстрирует принципиальное отличие случая векторных полей от случая диффеоморфизмов и показывает новый механизм отслеживания для псевдотраекторий у не структурно устойчивых векторных полей. Этот пример так же показывает, что предположение об отсутсвии точек покоя в работе [29] является существенным.

- Показано, что построенный пример является в некотором роде единственным. А именно, доказано:

  – На многообразиях размерности не выше 3 векторные поля, обладающие ориентированным свойством отслеживания вместе со всеми своими C^1-малыми возмущениями, являются структурно устойчивыми.

  – Векторные поля, обладающие ориентированным свойством отслеживания вместе со всеми своими C^1-малыми возмущениями и не содержащие полулокальной конструкции специального вида (B-системы) являются структурно устойчивыми.

  – Векторные поля, обладающие ориентированным свойством отслеживания вместе со всеми своими C^1-малыми возмущениями, являются Ω-устойчивыми.

- Построен пример векторного поля обладающего ориентированным, но не обладающего стандартным свойством отслеживания. Эти свойства отслеживания отличаются лишь ограничениями накладываемыми на репараметризацию отслеживающей траектории. Вопрос о наличие такого векторного поля был поставлен Комуро в 1984 году [26].

- Введено понятие центрального отслеживания. Показано, что любой частично гиперболический диффеоморфизм обладает центральным свойством отслеживания, т. е. любая псевдотраектория может быть отслежена псевдотраекторией со скачками вдоль центрального слоения. Это утверждение можно трактовать как лемму об отслеживании для частично гиперболических систем. Отметим, что в теореме не предполагается липшицевость центрального слоения.

- Введено свойство отслеживания для действий конечно порожденных групп. Продемонстрировано, что свойство отслеживания зависит не только от гиперболичности действий отдельных элементов, но и от структуры группы. А именно:

  – Доказано, что для нильпотентных групп, если действие одного из элементов обладает свойством отслеживания и экспансивностью, то все действие обладает свойством отслеживания.

  – Приведен пример действия разрешимой группы, где наличие свойства отслеживания зависит от количественных характеристик гиперболичности действий отдельных элементов.

– Доказано, что у свободной группы нет линейных действий, обладающих свойством отслеживания.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Представленные методы могут быть применены для исследования отслеживания и структурной устойчивости динамических систем, а также при интерпритации результатов компьютерного моделирования. Результаты работы могут быть использованы при чтении спецкурсов по динамическим системам и численным методам, а также в научно-исследовательской работе.

Методология и методы исследования. В диссертации используются методы из теории дифференциальных уравнений, функционального анализа, геометрии, топологии и теории групп. Автором разработан метод изучения свойства отслеживания при помощи неоднородного разностного уравнения, описаны новые геометрические механизмы возникновения свойства отслеживания.

Степень достоверности и апробация результатов. С материалами диссертации автор выступал на следующих научных семинарах:

- Санкт-Петербургский государственный университет, семинар под руководством профессора С. Ю. Пилюгина;
- Санкт-Петербургское отделение математического института РАН им. Стеклова, семинар под руководством профессора А. М. Вершика;
- Санкт-Петербургское отделение математического института РАН им. Стеклова, семинар математического общества Санкт-Петербурга;
- Московский государственный университет, механико-математический факультет, семинар под руководством профессора Ю. С. Ильяшенко;
- Московский государственный университет, механико-математический факультет, семинар под руководством профессоров А. А. Давыдова и А. М. Степина;

- Институт РАН им. Стеклова, семинар под руководством академика Д. В. Аносова и профессора Ю. С. Ильяшенко;
- Свободный Университет Берлина, Германия, семинар под руководством профессора Б. Фидлера;
- Университет штата Пенсильванияи, США, семинар под руководством профессора А. Катка;
- Северо-Ззападный университет, США, семинар под руководством профессоров А. Вилкинсон, Дж. Франкс, К. Бернс;
- Университет Стони-Брукса, США, семинар под руководством М. Любича;
- Университет Калифорнии, Ирвайн, США, семинар под руководством А. Городецкого;
- Университет Парижа 13, Франция, семинар под руководством С. Кровизье;
- Государственный Университет Пекина, семинар под руководством Л. Вена и Ш. Гана;
- Университет штата Миссури, США, семинар под руководством профессоров Ю. Латушкина и К. Чикони;
- Институт Макса Планка, Лейпциг, Германия, семинар под руководством Ю. Йоста.

Результаты диссертации были представлены на следующих конференциях:

2014 – Международная конференция “Beyond Uniform Hyperbolicity”, Бедлево, Польша;

– Международная конференция “Dynamics, Biffurcation and Strange Attractors”, Нижний Новгород, Россия;

2013 – Международная конференция “Montevideo Dynamical Systems Conference”, Монтевидео, Уругвай;

– Международная студенческая школа “ICTP-ESF School and Conference in Dynamical Systems”, Триест, Италия;

– Международная конференция “Joint Mathematical Meeting of MAA and AMS”, Бостон, США;

2012 – Международная конференция “Flows on surfaces, symbolic dynamics and dynamics in moduli spaces,” Москва, Россия;

– Семинар “Dynamical Systems and Related Topics”, Пенсильвания, США;

– Шестая международная конференция “Differential and Functional Differential Equations”, Москва, Россия;

– Студенческая школа “Meeting on Differentiable Dynamics”, ICTP, Триест, Италия;

– Студенческая школа и конференция “Computational Methods in Dynamics”, ICTP, Триест, Италия;

– Международная конференция “Beyond Uniform Hyperbolicity 2011”, Марсель, Франция;

– Семинар “Topologia e Dinamica”, Рио-де-Жанейро, Бразилия;

– Семинар “Partial Hyperbolicity at IM-UFRJ”, Рио –де- Жанейро, Бразилия;

2011 – Международная конференция “Bicentennial Workshop on Dynamical Systems”, Чили;

– Международная конференция “J. Palis’ 70th birthday conference”, Бразилия;

2010 – Семинар NCTS Dynamics Day, Тайвань;

- Семинар “Dynamical Systems and Related Topics”, Пенсеильвания, США;
- Международный семинар “Global Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity” Пекин, Китай;
- Семинар “Dynamical Systems and Related Topics”, Мэрилэнд, США;

2009 – Студенческая школа “School and Workshop on Dynamical Systems”, ICTP, Триест, Италия;

2008 – Рабочая сессия МИАН-ПОМИ, Динамические системы, Москва, Россия;
- Международная конференция “Nonlinear Dynamics and Chaos: Advances and Perspectives”, Абердин, Великобритания.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 13 печатных работах, из них 11 статей в рецензируемых журналах и 2 статьи на сайтах рецензируемых журналов.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 5 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 257 страниц, из них 247 страницы текста, включая 6 рисунков и 1 таблицу. Библиография включает 124 наименований на 10 страницах.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Пусть M – гладкое замкнутое многообразие класса C^∞ с римановой метрикой dist. Обозначим через T_xM касательное пространство многообразия M в точке $x \in M$. Пусть, $|v|$ — норма вектора $v \in T_xM$, порожденная метрикой dist. Обозначим через $B(r, x)$ открытый шар в M радиуса r с центром в точке $x \in M$ и через $B_T(r, x)$ открытый шар в T_xM радиуса r с центром в начале координат. Если A — некоторое подмножество метрического пространства, то будем обозначать через $B(r, A)$ объединение всех шаров радиуса r с центрами в точках множества A. Через $\mathrm{Cl}\, A$ будем обозначать замыкание множества A.

В **Главе 1** изучается свойство отслеживания для диффеоморфизмов.

Обозначим через $\mathrm{Diff}^1(M)$ пространство диффеоморфизмов M, снабженное C^1-топологией. Для множества $P \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ обозначим через $\mathrm{Int}^1(P)$ его C^1-внутренность.

Рассмотрим диффеоморфизм $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$.

Определение 1. Для интервала $I = (a, b)$ при $a = \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, $b = \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ и $d > 0$ последовательность точек $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ называется d-псевдотраекторией, если выполнены следующие соотношения:

$$\mathrm{dist}(y_{k+1}, f(y_k)) < d, \quad k \in \mathbb{Z}, k, k+1 \in I.$$

Чаще всего мы будем рассматривать псевдотраектории, определенные на всей оси.

Определение 2. Будем говорить, что f обладает стандартным свойством отслеживания (StSh — standard shadowing property), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что для любой d-псевдотраектории $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ найдется такая точная траектория $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, что

$$\mathrm{dist}(x_k, y_k) < \varepsilon, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

В этом случае мы будем говорить, что псевдотраектория $\{y_k\}$ ε-отслеживается траекторией $\{x_k\}$.

Определение 3. Будем говорить, что f обладает липшицевым свойством отслеживания (LipSh — Lipschitz shadowing property), если найдутся такие L, d_0, что для любых $d < d_0$ и d-псевдотраектории $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ найдется такая точная траектория $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, что при $\varepsilon = Ld$ выполнены неравенства (1).

В диссертации важную роль будут играть понятия структурной устойчивости, Ω-устойчивости и диффеоморфизмов Аносова (см., например, [25, 32]]).

В [40, 43] доказана следующая теорема (см. также [31], Appendix A).

Теорема 1. *Любой структурно устойчивый диффеоморфизм обладает липшицевым свойством отслеживания.*

Нетрудно понять, что если диффеоморфизм обладает липшицевым свойством отслеживания, то он обладает и стандартным свойством отслеживания.

Отметим, что стандартное свойство отслеживания сохраняется под действием топологического сопряжения, а гиперболичность и трансверсальность не сохраняются. Поэтому нет надежды описать множество диффеоморфизмов, обладающих стандартным свойством отслеживания, в терминах гиперболичности и трансверсальности и структурной устойчивости.

Ситуация принципиально меняется, если рассмотреть C^1-внутренность множеств, обладающих тем или иным свойством отслеживания. Ниже мы приводим теоремы, которые позволяют полностью описать структуру C^1-внутренности множеств диффеоморфизмов, обладающих тем или иным свойством отслеживания. При этом существуют примеры не структурно устойчивых диффеоморфизмов, обладающих стандартным свойством отслеживания [35, 36, 39].

Сакай в [42] доказал следующую теорему.

Теорема 2. C^1*-внутренность множества диффеоморфизмов, обладающих стандартным свойством отслеживания, совпадает с множеством структурно устойчивых диффеоморфизмов.*

В данной диссертации впервые рассматривается следующее понятие:.

Определение 4. Будем говорить, что диффеоморфизм f обладает гельдеровым свойством отслеживания на конечных интервалах с показателями $\theta \in (0,1)$, $\omega > 0$ (FinHolSh(θ,ω) – finite Hölder shadowing), если найдутся такие $d_0, L, C > 0$, что для любых $d < d_0$ и d-псевдотраектории $\{y_k\}_{k\in[0,Cd^{-\omega}]}$ найдется такая точная траектория $\{x_k\}_{k\in[0,Cd^{-\omega}]}$, что

$$\mathrm{dist}(x_k, y_k) < Ld^{\theta}, \quad k \in [0, Cd^{-\omega}].$$

Нетрудно показать, что для $\theta \in (0,1)$ и $\omega > 0$ выполнены включения

$$\mathrm{SS} \subset \mathrm{LipSh} \subset \mathrm{HolSh}(\theta) := \mathrm{FinHolSh}(\theta, +\infty) \subset \mathrm{FinHolSh}(\theta,\omega) \subset \mathrm{StSh},$$

где SS обозначает множество структурно устойчивых диффеоморфизмов, LipSh, StSh, FinHolSh обозначает множества диффеоморфизмов, обладающих соответствующими свойствами отслеживания.

В параграфе 1.1 мы вводим понятие неоднородного разностного уравнения, решений медленного роста и экспоненциальной дихотомии. Эти понятия будут играть решающую роль в доказательстве утверждений в главе 1 и будут существенно использоваться в доказательстве утверждений в главе 2. Также в этом параграфе мы сформулируем утверждения, связывающие неоднородное разностное уравнение со свойством отслеживания.

В параграфе 1.2 мы докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- f *обладает липшицевым свойством отслеживания;*
- f *структурно устойчив.*

Отметим интересное следствие Теоремы 3.

Определение 5. Напомним, что диффеоморфизм f обладает свойством разделения траекторий, если найдется такое число $a > 0$, что если $x, y \in M$ и

$$\operatorname{dist}(f^k(x), f^k(y)) < a, \quad k \in M.$$

то $x = y$.

Следствие 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- *f обладает свойством разделения траекторий и липшицевым свойством отслеживания;*
- *f является диффеоморфизмом Аносова.*

Результаты изложенные в параграфе 1.2 опубликованы в [9].

В параграфе 1.3 мы докажем следующую теорему.

Теорема 4. *Диффеоморфизм $f \in C^2$, обладающий* $\mathrm{FinHolSh}(\theta, \omega)$ *при*

$$\theta > 1/2, \quad \theta + \omega > 1$$

является структурно устойчивым.

Эта теорема дает верхнюю оценку на длину отслеживаемых псевдотраекторий для не структурно устойчивых диффеоморфизмов. Отметим, что ранее Хаммел, Гребоджи, Йорк на основании результатов численного моделирования предположили [22, 23], что

Гипотеза 1. *Типичное диссипативное отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ удовлетворяет* $\mathrm{FinHolSh}(1/2, 1/2)$.

Эта гипотеза позволяет предположить, что Теорема 4 не может быть улучшена.

Опишем связь этих результатов с другими задачами в теории динамических систем.

Теорема 4 имеет интересное следствие даже для случая бесконечных псевдотраекторий. Следующая теорема является непосредственным следствием Теоремы 4.

Теорема 5. *Диффеоморфизм $f \in C^2$, обладающий* $\mathrm{HolSh}(\theta) = \mathrm{FinHolSh}(\theta, +\infty)$ *при $\theta > 1/2$, является структурно устойчивым.*

Следует также отметить связь Теоремы 5 с вопросом, предложенным Катком:

Вопрос 1. *Верно ли, что любой диффеоморфизм, сопряженный с диффеоморфизмом Аносова посредством гельдерова гомеоморфизма, сам является диффеоморфизмом Аносова?*

Недавно было показано, что в общем случае ответ на Вопрос 1 отрицательный, в то же время имеет место следующий положительный результат [21].

Теорема 6. *C^2-диффеоморфизм, сопряженный диффеоморфизму Аносова посредством гельдерова гомеоморфизма h, сам является диффеоморфизмом Аносова, если произведение гельдеровых показателей h и h^{-1} больше* $1/2$.

Нетрудно показать, что диффеоморфизмы, гельдерово сопряженные структурно устойчивым, обладают гельдеровым свойством отслеживания. Таким образом, следствием Теоремы 5 является следующее утверждение, обобщающее Теорему 6.

Следствие 2. *C^2-диффеоморфизм, сопряженный структурно устойчивому диффеоморфизму посредством гельдерова гомеоморфизма h, сам является структурно устойчивым, если произведение Гельдеровых показателей h и h^{-1} больше* $1/2$.

Результаты изложенные в параграфе 1.3 опубликованы в [13].

В параграфе 1.4 мы рассматриваем более подробно свойство отслеживания в специальном случае.

Рассмотрим пространство $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, наделенное стандартной вероятностной мерой ν и метрикой dist. Для последовательности $\omega = \{\omega^i\} \in \Sigma$ обозначим черещ $t(\omega)$ 0-ой элемент последовательности $t(\omega) = \omega^0$. Определим "отображение сдвига" $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ следующим образом: $(\sigma(\omega))^i = \omega^{i+1}$.

Рассмотрим пространство $Q = \Sigma \times \mathbb{R}$. Наделим Q мерой прямого произведения $\mu = \nu \times \mathrm{Leb}$ и максимальной метрикой.

Зафиксируем $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующим соотношениям

$$0 < \lambda_0 < 1 < \lambda_1, \quad \lambda_0 \lambda_1 \neq 1. \tag{2}$$

Рассмотрим отображение $f : Q \to Q$, определенное следующим образом:

$$f(\omega, x) = (\sigma(\omega), \lambda_{t(\omega)} x).$$

Для $q \in Q$, $d > 0$, $N \in \mathbb{N}$ обозначим через $\Omega_{q,d,N}$ множество псевдотраекторий длины N, начинающихся в $q_0 = q$. Если предположить, что q_{k+1} выбирается случайным образом в $B(d, f(q_k))$ по отношении к мере μ, то $\Omega_{q,d,N}$ наделяется структурой Марковского процесса. Эта конструкция наделяет $\Omega_{q,d,N}$ вероятностной мерой P. Аналогичная конструкция для бесконечных псевдотраекторий была описана в [45]. Для $\varepsilon > 0$ обозначим через $p(q, d, N, \varepsilon)$ вероятность псевдотраектории из $\Omega_{q,d,N}$ быть ε-отслеживаемой. Отметим, что это событие измеримо, поскольку оно открыто.

Пусть $q = (\omega, x)$, $\tilde{q} = (\omega, 0)$. Для любых $d, \varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $p(q, d, N, \varepsilon) = p(\tilde{q}, d, N, \varepsilon)$. Определим

$$p(d, N, \varepsilon) := \int\limits_{\omega \in \Sigma} p((\omega, 0), d, N, \varepsilon) d\nu.$$

Число $p(d, N, \varepsilon)$ является вероятностью d-псевдотраектории быть ε-отслеживаемой.

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 7. *Для любых $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих (2) найдутся такие $\varepsilon_0 > 0$ и $c_0 > 0$, что для любых $\varepsilon < \varepsilon_0$ выполнено следующее:*

1. *Если* $c < c_0$, *то* $\lim_{N\to\infty} p(\varepsilon/N^c, N, \varepsilon) = 0$;

2. *Если* $c > c_0$, *то* $\lim_{N\to\infty} p(\varepsilon/N^c, N, \varepsilon) = 1$;

Замечание 1. *Аналог Гипотезы 1 для отображения* f *позволяет предположить, что значение* $p(\varepsilon/N, N, \varepsilon)$ *близко к 1. Значит в случае когда* $c_0 > 1$ *Гипотеза 1 не выполнена. В диссертации (Замечание 1.4.1) приведен пример таких параметров.*

Результаты изложенные в параграфе 1.4 опубликованы в [3].

В последнее время возник интерес к структуре множества периодических траекторий у диффеоморфизмов, обладающих свойством отслеживания. В связи с этим в параграфе 1.5 мы рассматриваем следующее понятие.

Определение 6. Будем говорить, что f обладает периодическим свойством отслеживания, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что для любой периодической d-псевдотраектории $\{y_k\}$ найдется такая периодическая траектория $\{x_k\}$, что

$$\mathrm{dist}(x_k, y_k) < \varepsilon, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Обозначим через PerSh (periodic shadowing property) множество диффеоморфизмов обладающих периодическим свойством отслеживания.

Определение 7. Будем говорить, что f обладает липшицевым периодическим свойством отслеживания, если найдутся такие $L, d_0 > 0$, что для любой периодической d-псевдотраектории $\{y_k\}$ с $d < d_0$ найдется такая периодическая траектория $\{x_k\}$, что

$$\mathrm{dist}(x_k, y_k) < Ld, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Обозначим через LipPerSh множество диффеоморфизмов, обладающих липшицевым периодическим свойством отслеживания.

Обозначим через ΩS множество Ω-устойчивых диффеоморфизмов. В диссертации доказана следующая теорема.

Теорема 8. $\mathrm{Int}^1(\mathrm{PerSh}) = \mathrm{LipPerSh} = \Omega S$.

Результаты изложенные в параграфе 1.5 опубликованы в [6].

В главах 2, 3 изучаются свойства отслеживания для векторных полей.

Мы будем рассматривать не только само множество векторных полей, обладающих тем или иным свойством отслеживания, но и его C^1-внутренность, т.е. множество таких векторных полей, которые сами обладают свойством отслеживания и любое их малое (в C^1-метрике) возмущение также обладает свойством отслеживания. Обозначим через $F(M)$ пространство C^1-гладких векторных полей на многообразии M, снабженное C^1-топологией. Для векторного поля X будем обозначать через $\phi(t, x)$ поток, порожденный X.

Для множества $P \subset F(M)$ будем обозначать через $\mathrm{Int}^1(P)$ его C^1-внутренность. Для векторного поля X обозначим через $\mathrm{Per}(X)$ множество его точек покоя и замкнутых траекторий. Для гиперболической траектории p будем обозначать через $W^s(p)$ и $W^u(p)$ ее устойчивое и неустойчивое многообразие, соответственно. Перейдем к определению свойств отслеживания для потоков.

Определение 8. Отображение (необязательно непрерывное) $g : \mathbb{R} \to M$ назовем d-псевдотраекторией, если выполнены неравенства

$$\mathrm{dist}(g(t+\tau), \phi(\tau, g(t))), \quad t \in \mathbb{R}, |\tau| < 1.$$

Для определения свойства отслеживания для случая векторных полей нам понадобится понятие репараметризации.

Определение 9. Назовем репараметризацией возрастающий гомеоморфизм $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Обозначим множество репараметризаций через Rep. Для $\varepsilon > 0$ обозначим через $\mathrm{Rep}(\varepsilon)$ множество репараметризаций, удовлетворяющих неравенству

$$\left| \frac{h(t_1) - h(t_2)}{t_1 - t_2} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Определение 10. Будем говорить, что векторное поле X и поток ϕ обладают (стандартным) свойством отслеживания, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что для любой d-псевдотраектории $g(t)$ найдется такая репараметризация $h \in \mathrm{Rep}(\varepsilon)$ и точка $x \in M$, что будут выполнены неравенства

$$\mathrm{dist}(g(t), \phi(h(t), x)) < \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Множество векторных полей, обладающих стандартным свойством отслеживания, будем обозначать через StSh (standard shadowing).

Мы используем то же обозначение StSh, что и для диффеоморфизмов. В дальнейшем из контекста всегда будет понятно, рассматривается ли сейчас случай диффеоморфизмов или векторных полей. Отметим, что понятие репараметризации необходимо в определении свойства отслеживания. Действительно, если неравенства (3) в Определении 10 заменить на неравенства

$$\mathrm{dist}(g(t), \phi(t, x)) < \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R},$$

то многие "хорошие" векторные поля перестанут обладать свойством отслеживания. В качестве примера подобного векторного поля можно рассмотреть векторное поле на многообразии M, у которого есть гиперболическая притягивающая замкнутая траектория [35].

Введем несколько других видов свойства отслеживания.

Определение 11. Будем говорить, что векторное поле X и поток ϕ обладают липшицевым свойством отслеживания, если существуют константы $L, d_0 > 0$, обладающие следующим свойством: для любых $d < d_0$ и d-псевдотраектории $g(t)$ можно указать такую точку $x \in M$ и репараметризацию $h \in \mathrm{Rep}(Ld)$, что выполнены неравенства

$$\mathrm{dist}(g(t), \phi(h(t), x)) < Ld, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Множество векторных полей, обладающих липшицевым свойством отслеживания, будем обозначать через LipSh (Lipschitz shadowing).

Определение 12. Будем говорить, что векторное поле X и поток ϕ обладают ориентированным свойством отслеживания, если по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что для любой d-псевдотраектории $g(t)$ найдется такая репараметризация $h \in \mathrm{Rep}$ и точка $x \in M$, что будут выполнены неравенства (3). Таким образом мы не требуем близости отображения h к тождественному. Множество векторных полей, обладающих ориентированным свойством отслеживания, будем обозначать через OrientSh (oriented shadowing).

Ясно, что

$$\mathrm{LipSh} \subset \mathrm{StSh} \subset \mathrm{OrientSh}\,.$$

Введенное выше стандартное свойство отслеживания равносильно понятию the strong pseudo orbit tracing property (POTP), введенному Комуро [26]; ориентированное свойство отслеживания равносильно the normal POTP введенному Комуро [26] и the pseudo orbit tracing property, введенному Томасом [44]. Отметим, что все три свойства отслеживания определяют разные понятия. Примеры векторных полей, лежащих в множестве и $\mathrm{StSh} \setminus \mathrm{LipSh}$, хорошо известны и достаточно просты. В диссертации впервые построен пример векторного поля, лежащего в $\mathrm{OrientSh} \setminus \mathrm{StSh}$ (см. параграф 2.4). Ранее Комуро показал, что ориентированное и стандартное свойство отслеживания равносильны для векторных полей без точек покоя [26]. В той же статье он поставил вопрос: верно ли это утверждение в общем случае [26, Замечание 5.1]?

Обозначим через SS множество структурно устойчивых векторных полей. Пилюгин доказал, что верна следующая теорема [34].

Теорема 9. $\mathrm{SS} \subset \mathrm{LipSh}$

В **главе 2** рассматриваются векторные поля с липшицевым и периодическим свойствами отслеживания.

В параграфе 2.1 доказана следующая теорема.

Теорема 10. *Векторное поле X обладает липшицевым свойством отслеживания тогда и только тогда, когда X структурно устойчиво.*

Определение 13. Будем говорить, что векторное поле X и соответствующий поток ϕ обладают свойством разделения траекторий, если найдутся такие константы $a, \delta > 0$ что если неравенства

$$\operatorname{dist}(\phi(t,x), \phi(\alpha(t),x)) < a, \quad t \in \mathbb{R}$$

выполнены для точек $x, y \in M$ и возрастающего гомеоморфизма $\alpha \in \mathrm{Rep}$, удовлетворяющего $\alpha(0) = 0$, то $x = \phi(\tau, y)$, где $|\tau| < \delta$.

В качестве следствия из Теоремы 10 в параграфе 2.1 мы докажем следующее.

Следствие 3. *Векторное поле X, обладающее свойствами разделения траекторий и липшицева свойства отслеживания является аносовским.*

В параграфе 2.2 изучается связь между Ω-устойчивостью и периодическим свойством отслеживания.

Определение 14. Мы говорим, что векторное поле X обладает липшицевым периодическим свойством отслеживания (LipPerSh), если найдутся такие $L, d_0 > 0$, что если $g(t)$ является периодической d-псевдотраекторией при $d < d_0$, то $g(t)$ может быть Ld-отслежена замкнутой траекторией.

Теорема 11. *Векторное поле X обладает липшицевым периодическим свойством отслеживания тогда и только тогда, когда оно Ω-устойчиво.*

Результаты изложенные в главе 2 опубликованы в [8].

В **главе 3** мы охарактеризуем множество $\mathrm{Int}^1(\mathrm{OrientSh})$.

При описании множества $\mathrm{Int}^1(\mathrm{OrientSh})$ важную роль играют системы, обладающие описанной ниже структурой. Будем говорить, что матрица A принадлежит классу K, если все ее собственные числа имеют ненулевые вещественные части. Обозначим через K_2^+ множество вещественных матриц K, для которых найдется такая пара комплексно сопряженных чисел $a_1 \pm b_1 i$ с $a_1 > 0$, что если $c_1 > 0$ – собственное число матрицы A, то $c_1 > a_1$. Обозначим через K_2^- множество таких матриц A, что $-A \in K_2^+$.

Определение 15. Мы будем говорить, что векторное поле X принадлежит классу B, если у него есть две гиперболические точки покоя p_1 и p_2 (не обязательно различные), обладающие следующими свойствами:

1. матрица $DX(p_1) \in K_2^+$,
2. матрица $DX(p_2) \in K_2^-$,
3. существует траектория нетрансверсального пересечения многообразий $W^s(p_1)$ и $W^u(p_2)$.

В параграфе 3.1 доказаны следующие теоремы:.

Теорема 12. $\mathrm{Int}^1(\mathrm{OrientSh}) \setminus B = \mathrm{SS}$.

Теорема 13. *Если* $\dim M \leq 3$, *то выполнено равенство* $\mathrm{Int}^1(\mathrm{OrientSh}) = \mathrm{SS}$.

Результаты изложенные в параграфе 3.1 опубликованы в [1, 2, 11].

В параграфе 3.2 построен пример векторного поля, показывающий, что исключение векторных полей класса B существенно в Теореме 12.

Теорема 14. *На многообразии* $S^2 \times S^2$ *существует векторное поле* $X \in \mathrm{Int}^1(\mathrm{OrientSh}) \setminus \mathrm{SS}$.

Этот результат следует считать основным результатом данной главы. Отметим, что из Теоремы 12 следует, что $X \in B$.

Результаты изложенные в параграфе 3.2 опубликованы в [11].

В параграфе 3.3 показано, что

Теорема 15. $\mathrm{Int}^1(\mathrm{OrientSh}) \subset \Omega S$.

Отсюда следует, что пример из Теоремы 14 обязан удовлетворять Аксиоме A' и нарушать условие трансверсальности.

Результаты изложенные в параграфе 3.3 опубликованы в [4].

В параграфе 3.4 мы показываем, что множества StSh и OrientSh не совпадают.

Теорема 16. *На многообразии $S^2 \times S^2$ существует векторное поле $X \in \mathrm{OrientSh} \setminus \mathrm{StSh}$.*

Результаты изложенные в параграфе 3.4 опубликованы в [12].

Результаты глав 1-3 в сжатой форме представлены в Таблице 1.

	Диффеоморфизмы	Векторные поля
C^1	$\mathrm{Int}^1(\mathrm{StSh}) = \mathrm{SS}$ $\mathrm{Int}^1(\mathrm{PerSh}) = \Omega S$	$\mathrm{Int}^1(\mathrm{OrientSh}) \neq \mathrm{SS}$ $(\dim M > 3)$ $\mathrm{Int}^1(\mathrm{OrientSh} \setminus B) = \mathrm{SS}$ $\mathrm{Int}^1(\mathrm{OrientSh}) \subset \Omega S$ $\mathrm{Int}^1(\mathrm{OrientSh}) = \mathrm{SS}$ $(\dim M \leq 3)$ $\mathrm{OrientSh} \neq \mathrm{StSh}$
Условие Липшица	$\mathrm{LipSh} = \mathrm{SS}$ $\mathrm{LipPerSh} = \Omega S$ $f \in C^2, \mathrm{FinHolSh}(\alpha, \omega)$ $\alpha, \omega > 1/2 \Rightarrow f \in \mathrm{SS}$	$\mathrm{LipSh} = \mathrm{SS}$ $\mathrm{LipPerSh} = \Omega S$

Таблица 1. Связь между свойством отслеживания и структурной устойчивостью

Отметим, что равенство $\mathrm{Int}^1(\mathrm{StSh}) = \mathrm{SS}$ для случая диффеоморфизмов было получено Сакаем в 1994 году. Остальные результаты получены автором диссертации (часть результатов получена в соавторстве) в 2008 – 2015 годах.

В кандидатской диссертации были получены равенства $\mathrm{Int}^1(\mathrm{OrientSh} \setminus B) = \mathrm{SS}$ и $\mathrm{Int}^1(\mathrm{OrientSh}) = \mathrm{SS}$ $(\dim M \leq 3)$ для случая векторных полей. Эти результаты включены в докторскую диссертацию поскольку они используются в доказательстве включения $\mathrm{Int}^1(\mathrm{OrientSh}) \subset \Omega S$ (Теорема 15). Остальные результаты из этой таблицы не рассматривались в кандидатской диссертации.

Для полноты сравенения результатов кандидатской диссертации и докторской диссертации отметим, что в кандидатской дисертации для случая векторных полей было доказано равество $\mathrm{Int}^1(\mathrm{LipSh}) = \mathrm{SS}$. В докторской диссертации доказано гораздо более общее утверждение $\mathrm{LipSh} = \mathrm{SS}$. Отметим, что доказательства основаны на принципиально различных методах. Общая схема доказательства равенства $\mathrm{Int}^1(\mathrm{LipSh}) = \mathrm{SS}$ следующая:

1. при помощи C^1-малого возмущения векторное поле линеаризуется в окрестностях точек покоя и замкнутых траекторий;

2. доказывается, что линеаризованное векторное поле обладает свойством отслеживания только если соответсвующая точка покоя или замкнутая траектория гиперболична;

3. используя технику, во многом схожую с пунктами (1), (2) доказывается трансверсальность пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий точек покоя и закнутых траекторий;

4. таким образом доказывается включение $\mathrm{Int}^1(\mathrm{LipSh}) \subset \mathrm{KS}$, где KS – множество систем Купки-Смейла;

5. равенство $\mathrm{Int}^1(\mathrm{KS}) = \mathrm{SS}$, доказанное Ганом в 1998 году завершает доказательство включения $\mathrm{Int}^1(\mathrm{LipSh}) \subset \mathrm{SS}$; обратное включение хорошо известно.

Доказательство утверждения $\mathrm{LipSh} = \mathrm{SS}$ основано на технике неоднородных разностных уравенений, разработанной в докторской диссертации, и теории Сакера-Селла.

В кандидатской диссертации автора, также изучалось обритальное свойство отслеживания, которое не рассматривается в докторской диссертации.

В **главе 4** рассматривается свойство отслеживания для частично гиперболических диффеоморфизмов.

Пусть f – частично гиперболический диффеоморфизм с соответсвующим разбиением касательного пространства

$$T_xM = E_x^s \oplus E_x^c \oplus E_x^u.$$

Обозначим

$$E_x^{cs} := E_x^s \oplus E_x^c, \quad E_x^{cu} := E_x^u \oplus E_x^c.$$

Определение 16. Частично гиперболический диффеоморфизм f называется динамически когерентным, если оба распределения E^{cs} и E^{cu} однозначно интегрируемы. В таком случае распределение E^c тоже интегрируемо, и соответствующее слоение W^c является подслоением обоих W^{cs} и W^{cu}.

В работах [18, 41] подробно рассматривается, сколь часто выполнено условие динамической когерентности. В дальнейшем в главе 4 мы предполагаем, что f динамически когерентен.

Обозначим через $\tau_c(\cdot, \cdot)$ расстояние во внутренней метрикеи многообразия W^c. Обозначим $W_\varepsilon^c(x) = \{y \in W^c(x) : \mathrm{dist}_c(x, y) < \varepsilon\}$.

Мы предлагаем нижеследующее обобщение свойства отслеживания для динамически когерентных диффеоморфизмов.

Определение 17. (см., например, [24]) Будем называть ε-псевдотраекторию $\{y_k\}$ центральной, если для любого $k \in \mathbb{Z}$ выполнены включения $y_{k+1} \in W^c(y_k)$ (см. Рис. 1).

Определение 18. Будем говорить, что частично гиперболический динамически когерентный диффеоморфизм f обладает центральным свойством отслеживания, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что для любой d-псевдотраектории $\{y_k\}$ найдется центральная ε-псевдотраектория $\{x_k\}$, удовлетворяющая неравенствам

$$\mathrm{dist}(x_k, y_k) < \varepsilon, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Определение 19. Будем говорить, что частично гиперболический динамически когерентный диффеоморфизм f обладает липшицевым центральным свойством отслеживания, если найдутся такие $L, d_0 > 0$, что для любых $d < d_0$ и d-псевдотраектории $\{y_k\}$ найдется Ld-центральная псевдотраектория, удовлетворяющая неравенствам (4), где $\varepsilon = Ld$.

Отметим, что из липшицевого центрального свойства отслеживания следует центральное свойство отслеживания. В диссертации доказан следующий аналог леммы об отслеживании для частично гиперболических диффеоморфизмов.

Теорема 17. *Частично гиперболический динамически когерентный диффеоморфизм f обладает липшицевым центральным свойством отслеживания.*

Доказательство основано на теореме Тихонова-Шаудера. Классические доказательства леммы об отслеживании [15, 17] основаны на принципе сжимающих отображений и не могут быть повторены в нашем случае, поскольку отображения голономий, соответствующие слоениям W^{cs}, W^{cu}, являются лишь гельдеровыми (но не липшицевыми) (см., например, [41]).

Результаты изложенные в главе 4 опубликованы в [5].

В **главе 5** рассматриваются действия конечно порожденных групп. Вводится понятие свойства отслеживания. Более подробно мы рассматриваем свойство отслеживания для действий нильпотентных, разрешимых и свободных групп.

Рассмотрим конечно порожденную (не обязательно абелеву) группу G и метрическое пространство Ω с метрикой dist.

Будем говорить, что отображение $\Phi : G \times \Omega \to \Omega$ является (левым) действием группы G, если выполнены следующие условия:

(G1) для любого $g \in G$ отображение $f_g = \Phi(g, \cdot)$ является гомеоморфизмом пространства Ω;

(G2) $\Phi(e, x) = x$ для любого $x \in \Omega$, где e – единичный элемент группы G;

(G3) $\Phi(g_1, \Phi(g_2, x)) = \Phi(g_1 g_2, x)$ для любых $g_1, g_2 \in G$, $x \in \Omega$.

Мы говорим, что действие является равномерно непрерывным, если для некоторого конечного симметричного порождающего множества $S \subset G$ группы

G отображения f_s равномерно непрерывны для всех $s \in S$. Отметим, что если Ω компактно, то любое действие конечно порожденной группы равномерно непрерывно. Зафиксируем конечное порождающее множество S группы G.

Определение 20. Для $d > 0$ будем говорить, что последовательность $\{y_g\}_{g \in G}$ является d-псевдотраекторией действия Φ (по отношению к порождающему множеству S), если

$$\mathrm{dist}(f_s(y_g), y_{sg}) < d, \quad g \in G, s \in S.$$

Определение 21. Будем говорить, что равномерно непрерывное действие Φ обладает свойством отслеживания на множестве $V \subset \Omega$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что для любой d-псевдотраектории $\{y_g\}$ найдется такая точка x_e, что

$$\mathrm{dist}(f_g(x_e), y_g) < \varepsilon, \quad g \in G.$$

В этом случае мы будем говорить, что $\{y_g\}$ ε-отслеживается точной траекторией $\{x_g = f_g(x_e)\}$. Если $V = \Omega$, мы будем говорить, что Φ обладает свойством отслеживания.

Отметим, что определение свойства отслеживания зависит от выбора порождающего множества S. Тем не менее, нижеследующее утверждение показывает, что если равномерно непрерывное действие обладает свойством отслеживания для одного симметричного конечного порождающего множества, то оно обладает свойством отслеживания для любого другого конечного порождающего множества.

Утверждение 1. *Рассмотрим два конечных симметричных порождающих множества S и S^{-1} группы G. Если равномерно непрерывное действие Φ обладает свойством отслеживания на множестве $V \subset \Omega$ по отношению к порождающему множеству S, то оно обладает свойством отслеживания на множестве V по отношению к порождающему множеству S'.*

Определение 22. Действие Φ обладает свойством разделения траекторий на множестве $U \subset \Omega$, если найдется такое $a > 0$, что если для некоторых точек x, y выполнены условия

$$\operatorname{dist}(f_g(x), f_g(y)) < a,$$

то $x = y$.

Отметим, что если для подгруппы $G_1 \leq G$ отображение $\Phi|_{G_1}$ обладает свойством разделения траекторий, то Φ также обладает свойством разделения траекторий.

Определение 23. Рассмотрим множества $U, V \subset \Omega$. Будем говорить, что равномерно непрерывное действие Φ является топологически аносовским по отношению к паре (U, V), если выполнены следующие условия:

1. найдется такое $\gamma > 0$, что $B(\gamma, V) \subset U$;

2. Φ обладает свойством отслеживания на V;

3. Φ обладает свойством разделения траекторий на U.

В параграфе 5.1 описаны необходимые понятия из теории групп.

В параграфе 5.2 доказана корректность определения свойства отслеживания, а именно доказано Утверждение 1.

В параграфе 5.3 рассматриваются действия нильпотентных групп. Доказана следующая теорема.

Теорема 18. *Рассмотрим равномерно непрерывное действие Φ конечно порожденной виртуально-нильпотентной группы G метрического пространства Ω. Предположим, что найдется такой элемент $g \in G$, что гомеоморфизм f_g является топологически аносовским по отношению к паре (U, V). Тогда действие Φ является топологически аносовским по отношению к паре (U, V).*

В параграфе 5.4 показано, что для линейных действий абелевой группы на C^m предположения Теоремы 18 являются так же необходимыми, а именно доказано, следующее:

Теорема 19. *Линейное действие Φ абелевой группы $G = \mathbb{Z}^n$ обладает свойством отслеживания на C^m тогда и только тогда, когда найдется такой элемент g, что линейное отображение f_g является гиперболичным.*

В параграфе 5.5 рассматриваются действия разрешимых групп. Показано, что Теорема 18 не может быть обобщена на случай разрешимых групп. Рассмотрим разрешимую группу $BS(1, n) =< a, b|ba = a^n b >$, где $n > 1$. Для любого $\lambda > 1$ рассмотрим действие Φ, порожденное отображениями

$$f_a(x) = Ax, \quad f_b(x) = Bx$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & n\lambda \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $BA = A^n B$, и, следовательно, действие Φ корректно определено. При $\lambda > 1$ отображение гиперболично, тем не менее выполнено следующее:

Теорема 20.

- *Если $\lambda \in (1, n]$, то действие Φ не обладает свойством отслеживания.*
- *Если $\lambda > n$, то действие Φ обладает свойством отслеживания.*

В параграфе 5.6 рассматриваются действия свободных групп. Доказана следующая теорема:

Теорема 21. *Любое линейное действие конечно порожденной свободной группы с хотя бы двумя порождающими элементами не обладает свойством отслеживания на евклидовом пространстве.*

Результаты изложенные в главе 5 опубликованы в [7, 10].

Список публикаций

1. Пилюгин С. Ю., Тихомиров С. Б. Множества векторных полей с различными свойствами отслеживания псевдотраекторий // Доклады Академии наук. 2008. Т. 422, № 1. С. 30–31.
2. Тихомиров С. Б. Внутренности множеств векторных полей со свойствами отслеживания, соответствующими некоторым классам репараметризаций // Вестник Санкт-Петербургского Университета Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2008. Т. 41, № 4. С. 360–366.
3. Тихомиров С. Свойство отслеживания для линейных косых произведений // Записки научных семинаров ПОМИ. 2015. Т. 432. С. 261–274.
4. Gan S., Li M., Tikhomirov S. Oriented Shadowing Property and Ω-Stability for Vector Fields // Journal of Dynamics and Differential Equations. 2015. URL: `http://dx.doi.org/10.1007/s10884-014-9399-5`.
5. Kryzhevich S., Tikhomirov S. Partial hyperbolicity and central shadowing // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2013. Vol. 33, no. 7. P. 2901–2909.
6. Osipov A. V., Pilyugin S. Y., Tikhomirov S. B. Periodic shadowing and Ω-stability // Regul. Chaotic Dyn. 2010. Vol. 15, no. 2-3. P. 404–417.
7. Osipov A. V., Tikhomirov S. B. Shadowing for actions of some finitely generated groups // Dyn. Syst. 2014. Vol. 29, no. 3. P. 337–351.
8. Palmer K. J., Pilyugin S. Y., Tikhomirov S. B. Lipschitz shadowing and structural stability of flows // J. Differential Equations. 2012. Vol. 252, no. 2. P. 1723–1747.
9. Pilyugin S. Y., Tikhomirov S. Lipschitz shadowing implies structural stability // Nonlinearity. 2010. Vol. 23, no. 10. P. 2509–2515.
10. Pilyugin S. Y., Tikhomirov S. B. Shadowing in actions of some abelian groups // Fund. Math. 2003. Vol. 179, no. 1. P. 83–96.
11. Pilyugin S. Y., Tikhomirov S. B. Vector fields with the oriented shadowing property // J. Differential Equations. 2010. Vol. 248, no. 6. P. 1345–1375.

12. Tikhomirov S. An Example of a Vector Field with the Oriented Shadowing Property // Journal of Dynamical and Control Systems. 2015. URL: `http://dx.doi.org/10.1007/s10883-015-9272-9`.
13. Tikhomirov S. Holder shadowing on finite intervals // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 2015. Vol. 35. P. 2000–2016.

Цитированная литература

14. Abdenur F., Díaz L. J. Pseudo-orbit shadowing in the C^1 topology // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2007. Vol. 17, no. 2. P. 223–245.
15. Anosov D. V. On a class of invariant sets of smooth dynamical systems // Proc. 5th Int. Conf. on Nonlin. Oscill. 1970. Vol. 2. P. 39–45.
16. Bonatti C., Díaz L. J., Turcat G. Pas de “shadowing lemma” pour des dynamiques partiellement hyperboliques // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 2000. Vol. 330, no. 7. P. 587–592.
17. Bowen R. Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 470. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975. P. i+108.
18. Brin M. On dynamical coherence // Ergodic Theory Dynam. Systems. 2003. Vol. 23, no. 2. P. 395–401.
19. Feres R., Katok A. Ergodic theory and dynamics of G-spaces (with special emphasis on rigidity phenomena) // Handbook of dynamical systems, Vol. 1A. North-Holland, Amsterdam, 2002. P. 665–763.
20. Fisher D. Local rigidity of group actions: past, present, future // Dynamics, ergodic theory, and geometry. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007. Vol. 54 of Math. Sci. Res. Inst. Publ. P. 45–97.
21. Gogolev A. Diffeomorphisms Hölder conjugate to Anosov diffeomorphisms // Ergodic Theory Dynam. Systems. 2010. Vol. 30, no. 2. P. 441–456.
22. Hammel S. M., Yorke J. A., Grebogi C. Do numerical orbits of chaotic dynamical

processes represent true orbits? // J. Complexity. 1987. Vol. 3, no. 2. P. 136–145.

23. Hammel S. M., Yorke J. A., Grebogi C. Numerical orbits of chaotic processes represent true orbits // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 1988. Vol. 19, no. 2. P. 465–469.
24. Hirsch M. W., Pugh C. C., Shub M. Invariant manifolds. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 583. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. P. ii+149.
25. Katok A., Hasselblatt B. Introduction to the modern theory of dynamical systems. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Vol. 54 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications. P. xviii+802. ISBN: 0-521-34187-6. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.
26. Komuro M. One-parameter flows with the pseudo-orbit tracing property // Monatsh. Math. 1984. Vol. 98, no. 3. P. 219–253.
27. Koropecki A., Pujals E. R. Some consequences of the shadowing property in low dimensions // Ergodic Theory Dynam. Systems. 2014. Vol. 34, no. 4. P. 1273–1309.
28. Kościelniak P. On genericity of shadowing and periodic shadowing property // J. Math. Anal. Appl. 2005. Vol. 310, no. 1. P. 188–196.
29. Lee K., Sakai K. Structural stability of vector fields with shadowing // J. Differential Equations. 2007. Vol. 232, no. 1. P. 303–313.
30. Palmer K. Shadowing in dynamical systems. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000. Vol. 501 of Mathematics and its Applications. P. xiv+299. ISBN: 0-7923-6179-2. Theory and applications.
31. Palmer K. J. Exponential dichotomies and Fredholm operators // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 104, no. 1. P. 149–156.
32. Pilyugin S. Y. Vvedenie v grubye sistemy differentsialnykh uravnenii. Leningrad. Univ., Leningrad, 1988. P. 160. ISBN: 5-288-00051-4.
33. Pilyugin S. Y. The space of dynamical systems with the C^0-topology. Springer-Verlag, Berlin, 1994. Vol. 1571 of Lecture Notes in Mathematics. P. x+188. ISBN: 3-540-57702-5.

34. Pilyugin S. Y. Shadowing in structurally stable flows // J. Differential Equations. 1997. Vol. 140, no. 2. P. 238–265.
35. Pilyugin S. Y. Shadowing in dynamical systems. Springer-Verlag, Berlin, 1999. Vol. 1706 of Lecture Notes in Mathematics. P. xviii+271. ISBN: 3-540-66299-5.
36. Pilyugin S. Y. Variational shadowing // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2010. Vol. 14, no. 2. P. 733–737.
37. Pilyugin S. Y. Theory of shadowing pseudotrajectories in dynamical systems // Differ. Uravn. Protsessy Upr. 2011. no. 4. P. 96–112.
38. Pilyugin S. Y., Rodionova A. A., Sakai K. Orbital and weak shadowing properties // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2003. Vol. 9, no. 2. P. 287–308.
39. Pilyugin S. Y., Sakai K. C^0 transversality and shadowing properties // Tr. Mat. Inst. Steklova. 2007. Vol. 256, no. Din. Sist. i Optim. P. 305–319.
40. Robinson C. Stability theorems and hyperbolicity in dynamical systems // Proceedings of the Regional Conference on the Application of Topological Methods in Differential Equations (Boulder, Colo., 1976). Vol. 7. 1977. P. 425–437.
41. Rodriguez Hertz F., Rodriguez Hertz M. A., Ures R. A survey of partially hyperbolic dynamics // Partially hyperbolic dynamics, laminations, and Teichmüller flow. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007. Vol. 51 of Fields Inst. Commun. P. 35–87.
42. Sakai K. Pseudo-orbit tracing property and strong transversality of diffeomorphisms on closed manifolds // Osaka J. Math. 1994. Vol. 31, no. 2. P. 373–386.
43. Sawada K. Extended f-orbits are approximated by orbits // Nagoya Math. J. 1980. Vol. 79. P. 33–45.
44. Thomas R. F. Stability properties of one-parameter flows // Proc. London Math. Soc. (3). 1982. Vol. 45, no. 3. P. 479–505.
45. Yuan G.-C., Yorke J. A. An open set of maps for which every point is absolutely nonshadowable // Proc. Amer. Math. Soc. 2000. Vol. 128, no. 3. P. 909–918.