На правах рукописи
УДК 515.179.2

Басалаев Алексей Андреевич

Зеркальная симметрия для простых эллиптических особенностей с действием группы

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель
доктор физико–математических наук
С.К. Ландо.

Москва 2016

Работа выполнена на факультете математики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики.

Научный руководитель:
доктор физико–математических наук, Сергей Константинович Ландо, профессор факультета математики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики.

Официальные оппоненты:

- доктор физико–математических наук, Сабир Меджидович Гусейн–Заде, профессор механико–математического факультета Московского Государственного университета.
- доктор физико–математических наук Леонид Олегович Чехов, ведущий научный сотрудник отдела геометрии и топологии математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Ведущая организация: Институт математики им. С. Л. Соболева сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск.

Защита диссертация состоится ____ на заседании диссертационного совета Д 002.077.03 при Институте проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, расположенном по адресу: 127051, г. Москва, Большой Каретный переулок, 19, стр. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН и на сайте iitp.ru.

Автореферат разослан «______» ___________ 2016 года

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук _________________ А. Н. Соболевский

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования.

Зеркальная симметрия, идея которой пришла изначально из физики, является в настоящее время большим и интересным разделом математики. Определяемая изначально как соответствие между объектами одного и того же типа, например, между двумя многообразиями Калаби–Яу (см. [15, 4]), в настоящее время зеркальная симметрия обобщенно формулируется как некоторая связь между объектами, имеющими, вообще говоря, различное происхождение, и порой определенными различно (см. [23, 10, 21]).

Вне зависимости от выбора формулировки зеркальной симметрии важная роль в ней отведена теории особенностей. Идеологически, зеркальная симметрия является соответствием между А–моделью и Б–моделью некоторой суперсимметрической квантовой теории поля. Согласно подходу физиков (см. [4, 24]), Б–модель должна рассматриваться как некоторое семейство над базой $\mathcal{S}$, такое, что зеркальная симметрия имеет место только для некоторых "специальных точек" $s \in \mathcal{S}$. Каждая специальная точка задает свою "фазу" $N = 2$ суперсимметрической квантовой теории поля. Б–модель в такой точке должна быть зеркально симметричной некоторой А–модели, причем различным специальным точкам одной и той же "глобальной" Б–модели могут соответствовать различные А–модели. Мы будем следовать подходу Киодо–Руана [5], предложивших математически строгую программу глобальной зеркальной симметрии с Б–моделью, построенной по некоторой особенности. В таком случая глобальная Б–модель называется Б–моделью Ландау–Гинзбурга (см. [22]). В физике могут иметь приложения в первую очередь те примеры зеркальной симметрии, в которых А–модель задается теорией Громова–Виттена некоторого многообразия Калаби–Яу. Зеркальная симметрия такого типа называется кратко зеркальной симметрий типа CY–LG.

Последние исследования в физике предполагают более общее понимание Б–моделей Ландау–Гинзбурга, учитывающее также их группу симметрий (см. [8]). Такие Б–модели называются "орбифолдовыми". Однако (математическое) определение орбифолдовых Б–моделей является открытой проблемой.

Степень разработанности темы исследования.

В случае простых эллиптических особенностей зеркальная симметрия типа CY–LG была предъявлена в [20, 16, 17, 13]. Другим типом зеркальной симметрии, изученным в тех же статьях, является так называемая зеркальная симметрия типа Ландау–Гинзбург — Ландау–Гинзбург. Для пары (W, G), состоящей из многочлена W, задающего изолированную особенность, и группы G его симметрий, А–модель Ландау–Гинзбурга была построена в [7]. А–модели такого типа известны в настоящее время под именем теорий Фана–Джарвиса–Руана–Виттена (сокращенно FJRW). В отличие от Б–моделей, которые строятся с помощью теории особенностей, теории FJRW не являются глобальными и даже их пространство состояний определяется иначе.

Работа по построению “орбифолдовых” Б–моделей велась Р. Кауфманом ([11]) с физической точки зрения и М.Кравитцом ([12]) с математической точки зрения. Однако же в этих работах сделаны лишь первые шаги по направлению к зеркальной симметрии. Совершенно иной подход, приведший, впрочем, к тем же зеркальным гипотезам, что были сформулированы Кауфманом с физической точки зрения, был предложен В. Эбелингом и А. Такахаши в [6].

Цели и задачи диссертационной работы.

Основной целью данной работы является изучение глобальной зеркальной симметрии для орбифолдовых моделей Ландау–Гинзбурга.

Научная новизна.

Результаты диссертации являются новыми. Основные результаты диссертации это

(1) Аксиоматизация фробениусова многообразия орбифолдовых А– и Б–моделей Ландау–Гинзбурга
(2) Теорема о единственности фробениусова многообразия, удовлетворяющего аксиомам орбифолдовой Б–модели Ландау–Гинзбурга пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$
(3) Теорема о зеркальной симметрии типа CY–LG для пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$,
(4) Теорема о зеркальной симметрии типа LG–LG для пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$.

Теоретическая и практическая значимость.

Предложенная в данной диссертации аксиоматизация орбифолдовых А– и Б–моделей, подкрепленная доказанными примерами зеркальной симметрии для пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$, может быть использована для доказательства гипотезы зеркальной симметрии в ее полной формулировке. Также полученные результаты могут найти применение в построении эквивариантной теории плоских структур Саито, не существующей в настоящее время.

Методология и методы исследования.

Для того, чтобы сделать “соответствие” зеркальной симметрии математически строгим, мы будем рассматривать А–модели и Б–модели в общем классе фробениусовых многообразий, введенных и детально изученных Б.А. Дубровиным. Мы используем теории модулярных форм и эллиптических кривых, теорию чисел и различные аспекты алгебраической независимости, а также классическую теорию особенностей.

Степень достоверности и апробация результатов.

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- “4th Workshop on Combinatorics of moduli spaces, cluster algebras and topological recursion”, г. Москва, 26–31 Мая 2014 г.,
- “Symposium on singularities and their topology”, Ганновер, Германия, 14–17 Июля 2014 г.,

- Научно–исследовательский семинар “Geometry and Mathematical Physics”, университет Амстердама, Нидерланды, 9 Декабря 2014 г.,
- Oberwolfach Workshop “Mirror Symmetry, Hodge Theory and Differential Equations”, Обервольфах, Германия, 19–25 Апреля 2015 г.,
- Научно–исследовательский семинар “Характеристические классы и теория пересечений”, факультет математики НИУ ВШЭ, 2014–2015 гг..

Публикации.

Материалы диссертации опубликованы в 2 печатных работах, из них 2 статьи в рецензируемых журналах, входящих в список ВАК.

Личный вклад автора.

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. В частности раздел 2 главы 8 является результатом совместной работы с проф. А. Такахаши. Все представленные в диссертации основные результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 8 глав и библиографии. Общий объем диссертации P страниц, из них p_1 страницы текста. Библиография включает 50 наименований на 2 страницах.

Краткое содержание работы

Содержание главы 1.

В первой главе формулируются гипотезы зеркальной симметрии, доказательству частного случая которых посвящена данная диссертация. В ней вводятся основные понятия и определяются объекты диссертации. В частности, даются определения Фробениусовой структуры, плоской структуры Саито особенности и теории Громова–Виттена. Также, следуя [3], для всякого многочлена $W(x_1,\dots,x_N) \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_N]$ мы определяем двойственный многочлен W^T следующим образом. Определим матрицу $R = \{r_{ij}\}$ равенством

$$W(x_1,\dots,x_N) = \sum_{i=1}^{M} a_i \prod_{j=1}^{N} x_j^{r_{ij}}.$$

С помощью матрицы R определим двойственный многочлен W^T следующим образом.

Определение. Квазиоднородный многочлен W задает *обратимую особенность*, если соответствующая ему матрица R является квадратной и обратимой над $\mathbb{Q}$. Квазиоднородный многочлен $W^T(x_1, \ldots, x_N)$, определенный равенством

$$W^T(x_1, \ldots, x_N) := \sum_{i=1}^{N} a_i \prod_{j=1}^{N} x_j^{r_{ji}},$$

называется *двойственным* к W по Берглюнду–Хубшу.

Мы также будем предполагать, что оба многочлена W и W^T задают изолированные особенности в начале координат $0 \in \mathbb{C}$. Для всякого многочлена $W(\mathbf{x})$ рассмотрим следующие группы его симметрий.

Определение.

- *Максимальная диагональная группа симметрий* многочлена W — это группа
$$G_W := \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in (\mathbb{C}^*)^N \mid W(\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_N x_N) = W(\mathbf{x}) \right\}.$$
Ее подгруппу $\mathrm{SL}_W \subseteq G_W$ определим равенством $\mathrm{SL}_W = G_W \cap \mathrm{SL}_N$.
- Пусть $W(\mathbf{x})$ квазиоднороден с весами $q_1, \ldots, q_N \in \mathbb{Q}$. Определим оператор $J_W := (e^{2\pi i q_1}, \ldots, e^{2\pi i q_N})$. Порожденная им циклическая группа будет обозначаться через G_0:
$$G_0 := \langle J_W \rangle.$$
- Для всякой подгруппы $G \subseteq G_W$ определим *двойственную к ней группу*:
$$G^T := \mathrm{Hom}(G_W/G, \mathbb{C}^*).$$

Пусть многочлен W задает обратимую особенность с некоторой группой симметрий G, т.ч. $G_0 \subseteq G$. Предположим также, что многочлен W удовлетворяет условию Калаби–Яу: $\sum q_i = 1$. Рассмотрим теорию Громова–Виттена орбифолда $X_{W,G}$:

$$X_{W,G} := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^N \mid W(\mathbf{x}) = 0 \right\} \Big/ (G/G_0).$$

Гипотеза 0.1 (зеркальная симметрия типа CY–LG). *Для всякого обратимого многочлена W с группой симметрий $G \subseteq \mathrm{SL}_W$ существует семейство структур фробениусовых многообразий для пары (W, G), фиксируемое примитивной формой ζ_G. Существует также выбор примитивной формы ζ_∞ в "специальной точке", такой, что потенциал соответствующей Фробениусовой структуры совпадает с точностью до линейной замены переменных с фробениусовым потенциалом теории Громова–Виттена орбифолда X_{W^T, G^T}.*

Выбор примитивной формы, устанавливающий приведенную выше зеркальную симметрию, называется примитивной формой в LCSL.

Гипотеза 0.2 (зеркальная симметрия типа LG–LG). *Для всякого обратимого многочлена W с группой симметрий $G \subseteq \mathrm{SL}_W$ существует семейство структур фробениусовых многообразий для пары (W, G), фиксируемое примитивной формой ζ_G. Существует также фробениусова структура для пары (W^T, G^T) и выбор примитивной формы ζ_∞ в "специальной точке", такой, что потенциал соответствующей фробениусовой структуры совпадает с точностью до линейной замены переменных с фробениусовым потенциалом пары (W^T, G^T).*

Гипотеза 0.3 (соответствие CY/LG). *Существует действие группы на пространстве всех фробениусовых структур, такое, что для некоторого элемента этой группы R имеет место равенство:*

$$\hat{R} \cdot \mathcal{F}^A_{W^T,G^T} = \mathcal{F}^{GW}_{X_{W^T,G^T}},$$

где $\hat{R}$ обозначает действие элемента R на потенциале фробениусовой структуры.

Содержание главы 2.

Данная глава посвящена фробениусовым многообразиям и зеркальной симметрии с тривиальной группой $G = \{\mathrm{id}\}$ для простых эллиптических особенностей. В частности мы рассматриваем особенности $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$, заданные многочленами

$$\begin{aligned} \tilde{E}_6: \quad & W_\sigma(\mathbf{x}) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \sigma x_1 x_2 x_3, \\ \tilde{E}_7: \quad & W_\sigma(\mathbf{x}) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^2 + \sigma x_1^2 x_2^2, \\ \tilde{E}_8: \quad & W_\sigma(\mathbf{x}) = x_1^6 + x_2^3 + x_3^2 + \sigma x_1^4 x_2. \end{aligned} \tag{1}$$

где $\sigma \in \mathbb{C}$ — комплексный параметр. Примитивная форма ζ таких особенностей имеет следующий простой вид ([19]):

$$\zeta = \zeta(\sigma) = \frac{d^3\mathbf{x}}{\pi_A(\sigma)},$$

где $\pi_A(\sigma)$ — решение уравнения Пикара–Фукса, задаваемого семейством эллиптических кривых $\{W_\sigma(\mathbf{x}) = 0\}$. Такое решение не единственно и, соответственно, разный выбор решения π_A дает разные примитивные формы, задающие априори разные фробениусовы структуры для одной фиксированной особенности $W_\sigma(\mathbf{x})$.

Несколько разделов второй главы посвящены именно вопросу выбора примитивной формы простой эллиптической особенности и фробениусовым структурам, которые по ним строятся.

Для таких пар $(W_\sigma, \{\mathrm{id}\})$ гипотезы зеркальной симметрии были доказаны в работах Сатаке–Такахаши, Такахаши–Шираиши, Миланов–Руан и Миланов–Шень ([20, 20, 16, 17]).

Теорема 0.1 (Теорема 3.6 в [20], Теорема 6.6 в [16] и Теорема 1.5 в [17]). *Для простой эллиптической особенности $\tilde{E}_N$ имеют место следующие изоморфизмы:*

$$M_{\tilde{E}_6} \cong M^{GW}_{\mathbb{P}^1_{3,3,3}}, \quad M_{\tilde{E}_7} \cong M^{GW}_{\mathbb{P}^1_{4,4,2}}, \quad M_{\tilde{E}_8} \cong M^{GW}_{\mathbb{P}^1_{6,3,2}},$$

которые доказывают зеркальную симметрию CY–LG. Зеркальная симметрия LG–LG устанавливается следующим изоморфизмом:

$$M_{\tilde{E}_N} \cong M^{\mathrm{FJRW}}_{\tilde{E}_N, G_{max}} \quad N = 6, 7, 8,$$

где FJRW обозначает теорию Фана–Джарвиса–Руана–Виттена.

Данная теорема утверждает также существование подходящей примитивной формы для всех приведенных выше изоморфизмов. В частности для особенности $\tilde{E}_8$ такая примитивная форма имеет вид

$$\zeta_{LCSL} = \frac{d^3\mathbf{x}}{\pi_\infty(\sigma)}, \quad \text{где} \quad \pi_\infty = {}_2F_1\left(\frac{1}{12}, \frac{7}{12}; 1; 1 + \frac{4}{27}\sigma^3\right).$$

Содержание главы 3.

Отдельная глава посвящена теории Громова–Виттена так называемых эллиптических орбифолдов. Это четыре орбифолда $\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}$, $\mathbb{P}^1_{3,3,3}$, $\mathbb{P}^1_{4,4,2}$, $\mathbb{P}^1_{6,3,2}$, получаемые факторизацией эллиптической кривой по действию конечных групп порядков 2,3,4,6 соответственно. Сатаке и Такахаши обнаружили в [20], что фробениусов потенциал орбифолда $\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}$ имеет следующий явный вид (при определенном выборе базиса в кольце когомологий):

$$\mathcal{F}_0^{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}(t_{-1}, t_0, t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{t_0^2 t_{-1}}{2} + \frac{t_0}{4}\sum_{i=1}^{4}(t_i)^2 - (t_1^2 t_3^2 + t_2^2 t_4^2)\frac{1}{16}X_3^\infty(t_{-1})$$
$$- (t_1^2 t_4^2 + t_2^2 t_3^2)\frac{1}{16}X_4^\infty(t_{-1}) - (t_3^2 t_4^2 + t_1^2 t_2^2)\frac{1}{16}X_2^\infty(t_{-1}) - \frac{1}{64}\sum_{i=1}^{4}(t_i)^4 \gamma^\infty(t_{-1}),$$

где $X_k^\infty(\tau)$ — логарифмические производные тета–констант Якоби: $X_k^\infty(\tau) := 2\frac{\partial}{\partial\tau}\log\vartheta_k$, для $2 \le k \le 4$. Важным свойством этих функций является то, что они являются решением системы уравнений Альфана:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau}(X_2^\infty(\tau) + X_3^\infty(\tau)) = 2X_2^\infty(\tau)X_3^\infty(\tau), \\ \dfrac{d}{d\tau}(X_3^\infty(\tau) + X_4^\infty(\tau)) = 2X_3^\infty(\tau)X_4^\infty(\tau), \\ \dfrac{d}{d\tau}(X_4^\infty(\tau) + X_2^\infty(\tau)) = 2X_4^\infty(\tau)X_2^\infty(\tau). \end{cases}$$

Сатаке и Такахаши заметили, что для всякой другой тройки функций $\{X_2(\tau), X_3(\tau), X_4(\tau)\}$, также являющейся решением системы Альфана, подставляя $X_k(\tau)$ вместо $X_k^\infty(\tau)$ в выражении для потенциала $\mathcal{F}_0^{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}$, мы получаем новые фробениусовы структуры. Мы используем в дальнейшем этот факт для построения семейства фробениусовых многообразий пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$.

В дальнейшем нам будет важен фробениусов потенциал теории Громова–Виттена $\mathbb{P}^1_{6,3,2}$. Однако этот фробениусов потенциал еще не вычислен явно. С помощью некоторых утверждений о квазимодулярности коэффициентов этого фробениусова потенциала (обнаруженных в [18]) и некоторой теоремы единственности ([9]) в главе 3 приводятся первые члены ряда Фурье фробениусова потенциала теории Громова–Виттена $\mathbb{P}^1_{6,3,2}$.

Содержание главы 4.

Напомним, что частью гипотез о зеркальной симметрии были также предположения о существовании определенных фробениусовых структур, ассоциированных с парой (W,G) и (W^T,G^T). В данной главе мы предлагаем аксиоматическое определение этих фробениусовых структур. Будем предполагать, что многочлен W задает обратимую особенность. Для всякого $g \in G \subseteq G_W$ определим множество $\mathrm{Fix}(g) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N \mid g \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}\}$ и натуральное число N_g равенством $N_g := \dim \mathrm{Fix}(g)$. Обозначим через W_g ограничение многочлена W на подпространство неподвижных точек элемента $g \in G$:

$$W_g := W\mid_{\mathrm{Fix}(g)}, \quad W_g : \mathbb{C}^{N_g} \to \mathbb{C}.$$

Также для всякого $g \in G$ обозначим через $\mathcal{L}_{W_g}$ локальную алгебру особенности W_g, а через η_g резидуальное спаривание особенности W_g, ограниченное на $(\mathcal{L}_{W_g})^G$. Пусть также ζ — некоторая примитивная форма Саито особенности W и $G \subseteq \mathrm{SL}_W$. В главе 4 мы определяем фробениусово многообразие $M_{(W,G),\zeta}$ аксиоматически.

Определение. *Фробениусовым многообразием Б–модели Ландау–Гинзбурга* (W,G), согласованным с примитивной формой ζ, называется фробениусово многообразие, удовлетворяющее следующим аксиомам.

- Для $G = \{id\}$ выполнено:

$$M_{(W,G),\zeta} = M_{(W,\{id\}),\zeta} \cong M_{W,\zeta}.$$

- Пространство состояний:

$$\mathcal{T}M_{(W,G),\zeta}\mid_{\mathbf{t}=0} \cong \ \mathcal{H} := \bigoplus_{g\in G} (\mathcal{L}_{W_g})^G.$$

- Спаривание фробениусовой структуры $M_{(W,G),\zeta}$ совпадает в плоских координатах со спариванием $\eta^{\mathcal{H}}$ на $\mathcal{H}$.

$$u,v \in \mathcal{H} \Rightarrow \eta^{\mathcal{H}}(u,v) = \begin{cases} \eta_g(u,v), \text{ для } u \in (\mathcal{L}_{W_g})^G, v \in (\mathcal{L}_{W_{g^{-1}}})^G, \\ 0 \quad \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

- Ограничение $M_{(W,G),\zeta}$ на $(\mathcal{L}_W)^G$ изоморфно G–инвариантной части фробениусовой структуры Саито особенности W:

$$M_{(W,G),\zeta}\mid_{\mathcal{L}_W^G} \ \cong (M_{W,\zeta})^G.$$

- Существует понятие замены примитивной формы для $M_{(W,G),\zeta}$, которое согласовано с заменой примитивной формы Саито в ограничении на $(\mathcal{L}_W)^G$.
- Существует понятие "специальной точки" в пространстве примитивных форм.
- Пусть $\mathcal{F}(\mathbf{t})$ — потенциал фробениусовой структуры. Пусть e — единица группы G и элементы $g_i \in G$ для всех $1 \le i \le k$ таковы, что $g_1 \cdot \dots \cdot g_k \neq e \in G$. Тогда выполнено:
$$\frac{\partial^k \mathcal{F}}{\partial t_{g_1,i_1} \dots \partial t_{g_k,i_k}} \mid_{\mathbf{t}=0} = 0 \quad \forall i_1, \dots, i_k.$$

Ввиду того, что в приведенную выше систему аксиом входит также примитивная форма самой особенности W, мы имеем семейство фробениусовых многообразий для всякой пары (W,G). Однако из данной аксиоматизации не следует, что при всякой фиксированной примитивной форме ζ фробениусово многообразие $M_{(W,G),\zeta}$ единственно.

Определение. Пусть группа G такова, что $G_0 \subseteq G \subseteq G_W$. *Фробениусовым многообразием орбифолдовой A–модели Ландау–Гинзбурга пары* (W,G) называется фробениусово многообразие $M^A_{W,G}$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

- Для всякого $h \in G$ положим $\mathcal{H}_h := \Omega^{N_h}(\mathbb{C}^{N_h})/(dW_h \wedge \Omega^{N_h-1})$, тогда
$$\mathcal{T}M^A_{W,G} \mid_{\mathbf{t}=0} \cong \mathcal{H}_{W,G} := \left(\bigoplus_{h \in G} \mathcal{H}_h \right)^G .$$
- Потенциал $\mathcal{F}(\mathbf{t})$ фробениусовой структуры $M^A_{W,G}$ имеет разложение в ряд с рациональными коэффициентами.
- Фробениусово многообразие $M^A_{W,G}$ связано с фробениусовой структурой теории Громова–Виттена X_W некоторым действием на пространстве всех фробениусовых многообразий, соответствующим замене примитивной формы для $G = G_W$.

В дальнейших главах мы демонстрируем состоятельность данной аксиоматики, доказывая с ее помощью все гипотезы о зеркальной симметрии для пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$.

Содержание главы 5.

Глава 5 полностью посвящена доказательству гипотезы зеркальной симметрии типа CY–LG для пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$. В частности мы рассматриваем многочлен $W_\sigma(\mathbf{x}) = x^6 + y^3 + z^2 + \sigma x^4 y$ с действием циклической группы $G = \langle h \rangle$, где для $\xi^3 = 1, \xi \neq 1$, мы полагаем
$$h : (x, y, z) \to (\xi x, \xi^2 y, z).$$
Первая теорема данной диссертации о зеркальной симметрии утверждает:

Теорема. *Пусть ζ_{LCSL} — примитивная форма особенности $\tilde{E}_8$ в LCSL (см. теорему о зеркальной симметрии с $G = \{\mathrm{id}\}$). Тогда потенциал фробениусова многообразия орбифолдовой Б–модели $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$ с примитивной формой, согласованной с ζ_{LCSL}, имеет* *вид:*

$$\mathcal{F}^{\mathbb{Z}_3} = \frac{1}{2}t_{\mathbf{1},0}^2 t_{\mathbf{1},3} + t_{\mathbf{1},0}\left(\frac{t_{\mathbf{1},1}^2}{12} + \frac{t_{\mathbf{1},2}^2}{4}\right) + t_{\mathbf{1},0}t_h t_{h^2} + \frac{1}{36}t_{\mathbf{1},1}^4 f_1(t_{\mathbf{1},3})$$
$$+ \frac{1}{18}t_{\mathbf{1},1}^2 t_{\mathbf{1},2}^2 f_2(t_{\mathbf{1},3}) + \frac{1}{9}t_{\mathbf{1},1}t_{\mathbf{1},2}^3 f_0(t_{\mathbf{1},3}) + t_{\mathbf{1},2}^4\left(\frac{1}{12}f_1(t_{\mathbf{1},3}) + \frac{1}{18}f_2(t_{\mathbf{1},3})\right)$$
$$+ t_h t_{h^2}\left(\frac{2}{9}t_{\mathbf{1},1}^2 f_2(t_{\mathbf{1},3}) + 2t_{\mathbf{1},2}^2 f_1(t_{\mathbf{1},3}) - \frac{2}{3}t_{\mathbf{1},1}t_{\mathbf{1},2}f_0(t_{\mathbf{1},3})\right) + t_h^2 t_{h^2}^2\left(\frac{2}{3}f_2(t_{\mathbf{1},3}) + 2f_1(t_{\mathbf{1},3})\right)$$
$$+ \left(t_h^3 + t_{h^2}^3\right)\left(t_{\mathbf{1},1}f_0(t_{\mathbf{1},3}) + t_{\mathbf{1},2}(3f_1(t_{\mathbf{1},3}) - f_2(t_{\mathbf{1},3}))\right),$$

где функции f_0,f_1,f_2 заданы явно:

$$\begin{cases} f_0(\tau) := \frac{1}{8}X_3^\infty(\tau) - \frac{1}{8}X_4^\infty(\tau), \\ f_1(\tau) := -\frac{1}{12}X_2^\infty(\tau) - \frac{1}{48}X_3^\infty(\tau) - \frac{1}{48}X_4^\infty(\tau), \\ f_2(\tau) := -\frac{3}{16}X_3^\infty(\tau) - \frac{3}{16}X_4^\infty(\tau). \end{cases}$$

Из этой теоремы вытекает теорема о зеркальной симметрии типа CY–LG.

Теорема. *Фробениусово многообразие Б–модели Ландау–Гинзбурга пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$ изоморфно фробениусову многообразию теории Громова–Виттена орбифолда $\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}$.*

Доказательство основано на аксиомах Б–модели Ландау–Гинзбурга пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$, предложенных в предыдущей главе, явных вычислениях части фробениусова потенциала теории Громова–Виттена орбифолда $\mathbb{P}^1_{6,3,2}$ и анализе некоторых дифференциальных уравнений.

Напомним, что гипотезы зеркальной симметрии предполагают наличие семейства фробениусовых структур для пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$. Приведенная выше теорема идентифицирует всего лишь одну фробениусову структуру (которую мы обозначаем аббревиатурой LCSL) из этого семейства. Для того, чтобы построить все семейство, мы используем некоторое техническое утверждение, которое анализируется в следующей главе.

Содержание главы 6.

Б.А. Дубровин определил структуру фробениусова многообразия на пространстве разветвленных накрытий сферы. Такие фробениусовы многообразия носят в настоящее время название гурвиц-фробениусовых многообразий. В данной главе доказывается следующая теорема, опубликованная автором в [1].

Пусть z — координата на эллиптической кривой $\mathcal{E}_{2\omega_1,2\omega_2}$, имеющей периоды $2\omega_1, 2\omega_2$. Рассмотрим пространство функций $\mathcal{H}_{1,(2,2,2,2)} := \{\lambda : \mathcal{E}_{2\omega_1,2\omega_2} \to \mathbb{P}^1\}$, имеющих следующий общий вид.

$$\lambda(z) := \sum_{i=1}^{4}\left(\wp(z-a_i; 2\omega_1, 2\omega_2)u_i + \frac{1}{2}\frac{\wp'(z-a_i; 2\omega_1, 2\omega_2)}{\wp(z-a_i; 2\omega_1, 2\omega_2)}s_i\right) + c,$$

где $\omega_1, \omega_2, a_i, u_i, s_i, c$ — параметры отображения λ. Рассмотрим также подпространство $\mathcal{H}^R_{1,(2,2,2,2)} \subset \mathcal{H}_{1,(2,2,2,2)}$ состоящее из таких λ, что:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 0, \quad a_2 = \omega_1 + \omega_2, \quad a_3 = \omega_1, \quad a_4 = \omega_2, \\
&s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0.
\end{aligned}
$$

Теорема (Теорема 1 в [1])**.** *Пространство* $\mathcal{H}^R_{1,(2,2,2,2)}$ *имеет структуру фробениусова многообразия, изоморфную фробениусовой структуре теории Громова–Виттена орбифолда* $\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}$.

Доказательство теоремы техническое.

Содержание главы 7.

В этой главе мы возвращаемся к вопросу построения семейства фробениусовых структур для пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$. Заметим, однако, что использованные методы могут быть также применены для более общих случаев (W_σ, G), где W_σ задает простую эллиптическую особенность.

Напомним, что при $G = \{\mathrm{id}\}$ семейство фробениусовых структур было построено К.Саито в помощью т.н. примитивных форм. По настоящий момент теория примитивных форм для орбифолдовых моделей Ландау–Гинзбурга еще не построена. Ввиду этого в главе 7 мы предлагаем рассмотреть эффект от изменения примитивной формы только в классе фробениусовых многообразий. С помощью зеркальной симметрии типа CY–LG, доказанной в теореме , мы имеем в явном виде фробениусов потенциал одного представителя всего семейства пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$. В главе 7 мы предлагаем некоторое действие $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}$ (где $\tau_0 \in \mathbb{H}$, $\omega_0 \in \mathbb{C}^*$ — параметры) на пространстве фробениусовых структуры, эквивалентное замене примитивной формы при $G = \{\mathrm{id}\}$.

Напомним также, что фробениусова структура пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$, задающая зеркальную симметрию типа LG–LG, в соответствии с гипотезой зеркальной симметрии, должна быть согласована с примитивной формой в *специальной точке*. Такое понятие также не определено для орбифолдовых моделей Ландау–Гинзбурга. Аналогично зеркальной симметрии с тривиальной группой симметрии мы предлагаем называть специальными те точки, для которых $\tau_0 \in \mathbb{Q}\sqrt{-D}$ для некоторого $D \in \mathbb{N}_+$.

$$
\begin{array}{lcr}
(W, \{id\}) & \leftrightarrow & (W, G) \\
\text{замена примитивной формы} & \leftrightarrow & \text{действие } \mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)} \\
\text{специальная точка} & \leftrightarrow & \tau_0 \in \mathbb{Q}\sqrt{-D}, \quad D \in \mathbb{Z}_+.
\end{array}
$$

В следующих разделах мы мотивируем использование действия $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}$ для замены примитивной формы.

Для простой эллиптической особенности W_σ рассмотрим семейство эллиптических кривых $E_\sigma := \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3 \mid W_\sigma(\mathbf{x}) = 0\}$. Поскольку примитивная форма ζ простой эллиптической особенности фиксируется выбором решения уравнения Пикара–Фукса кривой

$\mathcal{E}_\sigma$ для всякого σ, для классификации всех примитивных форм необходимо и достаточно классифицировать все решения π_A соответствующего уравнения Пикара–Фукса. Заметим, что все решения π_A могут быть представлены в виде

$$\pi_A(\sigma) := \int_{A_\sigma} \mathrm{res}_{E_\sigma} \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{dW_\sigma}$$

для некоторого фиксированного класса $A_\sigma \in H_1(E_\sigma)$. Фиксируем одно такое решение π_∞, тогда все остальные решения могут быть получены действием группы $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ на пространстве гомологий кривой E_σ. В главе 7 мы продолжаем это действие до действия на фробениусовых структурах $\mathcal{H}_{1;(2,2,2,2)}$ и теории Громова–Виттена орбифолда $\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}$. В первом случае действие возникает канонически из определения пространства Римана–Гурвица. Теорема об изоморфизме фробениусовых структур из главы 6 продолжает это действие на теорию Громова–Виттена орбифолда $\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}$. Идея такого действия была разработана автором в совместной работе с А.Такахаши [2]. Получаемое действие эквивалентно следующему действию на пространстве решений системы Альфана:

$$X_k^A(t) := \frac{\det(A)}{(ct+d)^2} X_k \left(\frac{at+b}{ct+d}\right) - \frac{c}{ct+d}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}).$$

Однако для действия на пространстве решений уравнения Пикара–Фукса достаточно ограничиться матрицами вида

$$\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)} := \begin{pmatrix} \dfrac{\bar{\tau}_0}{4\pi\omega_0 \mathrm{Im}(\tau_0)} & \omega_0\tau_0 \\ \dfrac{1}{4\pi\omega_0 \mathrm{Im}(\tau_0)} & \omega_0 \end{pmatrix} \quad \tau_0 \in \mathbb{H},\ \omega_0 \in \mathbb{C}^*.$$

В результате мы получаем семейство шестимерных фробениусовых структур $M_6^{(\tau_0,\omega_0)}$ действием $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}$ на фробениусовой структуре теории Громова–Виттена орбифолда $\mathbb{P}^1_{6,3,2}$. Будем обозначать через $X_k^{(\tau_0,\omega_0)}$ соответствующие функции, полученные действием $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}$ на тройке X_k^∞.

Содержание главы 8.

Следующая теорема доказывает гипотезу зеркальной симметрии типа LG–LG и гипотезу о соответствии CY/LG для пары $(\tilde{E}_8^T, \mathbb{Z}_3^T)$.

Теорема 0.2. *Фробениусово многообразие орбифолдовой A–модели Ландау–Гинзбурга пары $(\tilde{E}_8^T, \mathbb{Z}_3^T)$ изоморфно фробениусову многообразию $M_6^{(\sqrt{-1},\omega_0)}$, где*

$$\omega_0 := \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{4\pi^{\frac{3}{2}}}.$$

Глава 8 посвящена ее доказательству. Заметим, что ввиду результатов главы 7 для доказательства данной теоремы необходимо рассмотреть орбиту фробениусова многообразия теории Громова–Виттена орбифолда $\mathbb{P}^1_{6,3,2}$ под действием $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}$ для всех

$\tau_0 \in \mathbb{H}$, $\omega_0 \in \mathbb{C}*$. Поскольку одной из аксиом орбифолдовой А–модели Ландау–Гинзбурга является условии определенности фробениусова потенциала над $\mathbb{Q}$, в данной главе рассматриваются условия на τ_0,ω_0, гарантирующие, что потенциал $M_6^{(\tau_0,\omega_0)}$ определен над $\mathbb{Q}$.

Из явного вида системы Альфана следует, что потенциал $M_6^{(\tau_0,\omega_0)}$ определен над $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда $X_k^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau) \in \mathbb{Q}[[\tau]]$ для всех $2 \leq k \leq 4$, что, в свою очередь, имеет место тогда и только тогда, когда значения в нуле $X_k^{(\tau_0,\omega_0)}(0) \in \mathbb{Q}$ для всех $2 \leq k \leq 4$.

Заметим, что для всякой тройки $\{X_2^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau), X_3^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau), X_4^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau)\}$, являющейся решением системы Альфана, функция $\gamma^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau) := \frac{2}{3}\sum_{k=2}^4 X_k^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau)$ является решением уравнения Шази:

$$\gamma''' = 6\gamma\gamma'' - 9(\gamma')^2.$$

Классификация решений уравнения Шази вида $\gamma^{(\tau_0,\omega_0)}$, имеющих разложение над $\mathbb{Q}$, была получена автором вместе с А. Такахаши в [2]. Заметим, что $\pi\sqrt{-1}E_2(\tau) = 2\sum_{k=2}^4 X_k^{\infty}(\tau)$. С помощью данного равенства проблема классификации таких $\gamma^{(\tau_0,\omega_0)}$ имеет следующее решение:

Теорема 0.3. *Фиксируем $\tau_0 \in \mathbb{H}$ и $\omega_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *Функция $\gamma^{(\tau_0,\omega_0)}(t)$ имеет разложение в ряд над $\mathbb{Q}$;*

(ii) *Выполнено: $E_2^*(\tau_0) \in \mathbb{Q}\omega_0^2$, $E_4(\tau_0) \in \mathbb{Q}\omega_0^4$, $E_6(\tau_0) \in \mathbb{Q}\omega_0^6$;*

(iii) *Выполнено: $E_2^*(\tau_0) \in \mathbb{Q}\omega_0^2$ и эллиптическая кривая $\mathcal{E}_{\tau_0}$ определена над $\mathbb{Q}$;*

здесь E_2,E_4,E_6 — ряды Эйзенштейна, а $E_2^*(\tau) := E_2(\tau) - 3/(\pi\mathrm{Im}(\tau))$.

Данная теорема позволяет применить технику и методы теории чисел для доказательства гипотезы зеркальной симметрии. В частности, вопрос описания всех $\tau_0 \in \mathbb{H}$, таких, что выполнено условие (ii) приведенной выше теоремы, является открытой проблемой. Также заметим, что согласно главе 7 для доказательства зеркальной симметрии типа LG–LG достаточно ограничиться $\tau_0 \in \sqrt{-D}\mathbb{Q}$ для $D \in \mathbb{N}_+$. Это условие эквивалентно тому, что на эллиптической кривой $\mathcal{E}_{\tau_0}$ имеется так называемое комплексное умножение. С точностью до изоморфизма существует ровно 13 эллиптических кривых, имеющих комплексное умножение и определенных над $\mathbb{Q}$ (см. [14]).

Таким образом для классификации шестимерных фробениусовых структур $M_6^{(\tau_0,\omega_0)}$, определенных над $\mathbb{Q}$, достаточно рассмотреть лишь 13 значений τ_0. В главе 8 доказывается, что только для $\tau_0 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\sqrt{-1}$ существует ненулевое число $\omega_0 \in \mathbb{C}^*$, такое, что все три числа $X_2^{(\tau_0,\omega_0)}$, $X_3^{(\tau_0,\omega_0)}$, $X_4^{(\tau_0,\omega_0)}$ рациональны.

Заметим, что полученное число ω_0 является периодом эллиптической кривой с модулем $\sqrt{-1}$. Такой период определен с точностью до множителя, однако в теореме о зеркальной симметрии типа LG–LG данное число строго фиксировано.

Список публикаций по теме диссертации из списка ВАК

1. A. Basalaev. “Orbifold GW theory as the Hurwitz–Frobenius submanifold”. *J. Geom. Phys.*, 77, (2014), pp. 30–42; 1,5 п.л..
2. A. Basalaev, A. Takahashi. “On rational Frobenius Manifolds of rank three with symmetries”. *J. Geom. Phys.*, 84, (2014), pp. 73–86; 1,5 п.л. (вклад автора — 1,3 п.л.).

Список литературы

[1] A. Basalaev. Orbifold GW theory as the Hurwitz–Frobenius submanifold. *J. Geom. Phys.*, 77, 2014, pp. 30–42.

[2] A. Basalaev, A. Takahashi. On rational Frobenius Manifolds of rank three with symmetries. *J. Geom. Phys.*, 84, 2014, pp. 73–86.

[3] P. Berglund, M. Henningson. Landau–Ginzburg orbifolds, mirror symmetry and the elliptic genus. *Nucl. Phys. B*, 433, 1995, pp. 311–332.

[4] P. Candelas, X. De La Ossa, P. Green, L. Parkes. A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory. *Nucl. Phys. B*, 359, 1991, pp. 21–74.

[5] A. Chiodo, Y. Ruan. A global mirror symmetry framework for the Landau-Ginzburg/Calabi-Yau correspondence. *preprint arXiv: 1307.0939*, 2013.

[6] W. Ebeling, A. Takahashi. Mirror Symmetry between Orbifold Curves and Cusp Singularities with Group Action. *Int. Math. Res. Not.*, 2013(10), 2013, pp. 2240–2270.

[7] H. Fan, T. Jarvis, Y. Ruan. The Witten equation, mirror symmetry, and quantum singularity theory. *Ann. Math.*, 178(1), 2013, pp. 1–106.

[8] K. Intriligator, C. Vafa. Landau–Ginzburg orbifolds. *Nucl. Phys. B*, 339(1), 1990, pp. 95–120.

[9] Y. Ishibashi, Y. Shiraishi, A. Takahashi. A Uniqueness Theorem for Frobenius Manifolds and Gromov–Witten Theory for Orbifold Projective Lines. *preprint arXiv:1209.4870*, 2012.

[10] L. Katzarkov, M. Kontsevich, T. Pantev. Hodge theoretic aspects of mirror symmetry. *Proc. Symp. Pure Math.*, 78, 2008, pp. 87–174.

[11] R. Kaufmann. Singularities with Symmetries, orbifold Frobenius algebras and Mirror Symmetry. *Contemp. Math.*, 403, 2006, pp. 1–46.

[12] M. Krawitz. FJRW rings and Landau-Ginzburg Mirror Symmetry. *preprint arXiv:0906.0796*, 2009.

[13] M. Krawitz, Y. Shen. Landau–Ginzburg/Calabi–Yau Correspondence of all Genera for Elliptic Orbifold $\mathbb{P}^1$. *preprint arXiv:1106.6270*, 2011.

[14] D. Lawden. Elliptic Functions and Applications. *Appl. Math. Sci.*, Springer, 1989.

[15] W. Lerche, C. Vafa, N. P. Warner. Chiral rings in $N = 2$ superconformal theories. *Nucl. Phys. B*, 324(2), 1989, pp. 427–474.

[16] T. Milanov, Y. Ruan. Gromov–Witten theory of elliptic orbifold $\mathbb{P}^1$ and quasi-modular forms. *preprint arXiv:1106.2321*, 2011.

[17] T. Milanov, Y. Shen. Global mirror symmetry for invertible simple elliptic singularities. *preprint arXiv:1210.6862*, 2012.

[18] T. Milanov, Y. Shen. The modular group for the total ancestor potential of Fermat simple elliptic singularities. *preprint arXiv:1401.2725*, 2014.

[19] K. Saito. Period mapping associated to a primitive form. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 19, 1983, pp. 1231–1264.

[20] Ikuo Satake, A. Takahashi. Gromov–Witten invariants for mirror orbifolds of simple elliptic singularities. *Ann. Inst. Fourier*, 61, 2011, pp. 2885–2907.

[21] A. Strominger. Mirror symmetry is T–duality. *Nucl. Phys. B*, 479(1-2), 1996, pp. 243–259.

[22] A. Varchenko, B. Blok. Topological Conformal Field Theories and the Flat Coordinates. *Mod. Phys. Lett. A*, 7(07), 1992, pp. 1467–1490.

[23] E. Witten. Mirror Manifolds And Topological Field Theory. *preprint arXiv:hep-th/9112056*, 1991.

[24] E. Witten. Phases of $N = 2$ theories in two dimensions. *Nucl. Phys. B*, 403(1-2), 1993, pp. 159–222.