Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”

На правах рукописи

УДК 515.179.2

Басалаев Алексей Андреевич

Зеркальная симметрия для простых эллиптических особенностей с действием группы

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико–математических наук

Научный руководитель

доктор физико–математических наук

С.К. Ландо.

Москва, 2016

Оглавление

ГЛАВА 1

Введение

Актуальность темы исследования.

Зеркальная симметрия, идея которой пришла изначально из физики, является в настоящее время большим и интересным разделом математики. Определяемая изначально как соответствие между объектами одного и того же типа, как например двумя многообразиями Калаби–Яу (см. [**30, 8**]), в настоящее время зеркальная симметрия обобщенно формулируется как некоторая связь между объектами, имеющими различное происхождение, и порой определенными различно (см. [**48, 23, 46**]).

Однако же в любой из формулировок зеркальной симметрии важная роль отведена теории особенностей. Идеологически, зеркальная симметрия является соответствием между А–моделью и Б–моделью некоторой суперсимметрической квантовой теории поля. Согласно подходу физиков (см. [**8, 49**]), Б–модель должна рассматриваться как некоторое семейство над базой $\mathcal{S}$, т.ч. зеркальная симметрия имеет место только для некоторых "специальных точек" $s \in \mathcal{S}$. Каждая специальная точка задает свою "фазу" $N = 2$ суперсимметрической квантовой теории поля. Б–модель в такой точке должна быть зеркально симметричной некоторой А–модели, причем одной и той же "глобальной" Б–модели могу соответствовать различные А–модели. Мы будем следовать подходу Киодо–Руана [**10**], которые предложили математически строгую программу глобальной зеркальной симметрии с Б–моделью, построенной по некоторой особенности. В таком случая глобальная Б–модель называется Б–моделью Ландау–Гинзбурга (см. [**47**]). В физике могут иметь приложения в первую очередь те примеры зеркальной симметрии, в которых А–модель задается теорией Громова–Виттена некоторого многообразия Калаби–Яу. Зеркальная симметрия такого типа называется кратко зеркальной симметрий типа CY–LG.

Последние исследования в физике предполагают более общее понимание Б–моделей Ландау–Гинзбурга, учитывающее также их группу симметрий (см. [**20**]). Такие Б–модели называются "орбифолдовыми". Однако же (математическое) определение орбифолдовых Б–моделей является открытой проблемой.

Степень разработанности темы исследования.

В случае простых эллиптических особенностей зеркальная симметрия типа CY–LG была предъявлена в [**43, 34, 35, 27**]. Другим типом зеркальной симметрии, установленным в тех же статьях, является так называемая зеркальная симметрия типа Ландау–Гинзбург — Ландау–Гинзбург. Для пары (W, G), где многочлен W задает изолированную особенность, и G — его группа симметрий, А–модель Ландау–Гинзбурга была построена в [**16**]. А–модели такого типа известны в настоящее время под именем теорий Фан-Джарвис-Руан-Виттен (сокращенно FJRW). В отличие от Б–моделей, которые строятся с помощью теории особенностей, теории FJRW не являются глобальными и даже их пространство состояний определяется отличным образом.

Работа по построению "орбифолдовых" Б–моделей велась Р.Кауфманом в [**24**] с физической точки зрения и М. Кравитцом в [**26**] с математической точки зрения. Однако же лишь первые шаги по направлению к зеркальной симметрии были сделаны в этих работах. Совершенно иной подход, приведший, впрочем, к тем же зеркальным гипотезам, что были сформулированы Кауфманом с физической точки зрения, был предложен В. Эбелингом и А. Такахаши в [**15**].

Цели и задачи диссертационной работы.

Основной целью данной работы является изучение глобальной зеркальной симметрии для орбифолдовых моделей Ландау–Гинзбурга.

Научная новизна.

Результаты диссертации являются новыми. Основные результаты диссертации включают следующие:

(1) Аксиоматизация фробениусова многообразия орбифолдовых А– и Б–моделей Ландау–Гинзбурга,
(2) Теорема о единственности фробениусова многообразия, удовлетворяющего аксиомам орбифолдовой Б–модели Ландау–Гинзбурга пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$
(3) Теорема о зеркальной симметрии типа CY–LG для пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$,
(4) Теорема о зеркальной симметрии типа LG–LG для пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$.

Теоретическая и практическая значимость.

Предложенная в данной диссертации аксиоматизация орбифолдовых А– и Б–моделей, подкрепленная доказанными примерами зеркальной симметрии для пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$, может быть использована для доказательства гипотезы зеркальной симметрии в ее полной формулировке. Также полученные результаты имеют большую ценность для построения эквивариантной теории плоских структур Саито, не существующей по настоящее время.

Методология и методы исследования.

Для того, чтобы сделать "соответствие" зеркальной симметрии математически строгим, мы будем рассматривать А–модели и Б–модели в общем классе фробениусовых многообразий, которые были предложены и детально изученны Б.А. Дубровиным. В разных прикладных задачах автором используются теория модулярных форм и эллиптических кривых, теория чисел и аспекты алгебраической независимости, а также классическая теория особенностей.

Степень достоверности и апробация результатов.

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- “4th Workshop on Combinatorics of moduli spaces, cluster algebras and topological recursion”, г. Москва, 26–31 Мая 2014 г.,
- “Symposium on singularities and their topology”, г. Ганновер, 14–17 Июля 2014 г.,
- Научно–исследовательский семинар “Geometry and Mathematical Physics”, университет г. Амстердам, 9 Декабря 2014 г.,
- “Oberwolfach Workshop Mirror Symmetry, Hodge Theory and Differential Equations”, Обервольфах, 19–25 Апреля 2015 г.,
- Научно–исследовательский семинар “Характеристические классы и теория пересечений”, факультет математики ВШЭ, 2015–2014 гг..

ГЛАВА 2

Гипотезы зеркальной симметрии

Для того, чтобы сделать "соответствие" зеркальной симметрии математически строгим, мы должны рассматривать А–модели и Б–модели как элементы некоторого общего класса. Таким классом являются фробениусовы многообразия, предложенные и детально изученные Б.А. Дубровиным. В полной объёме теория фробениусовых многообразий изложена в классических книгах [**11, 12, 19, 32**], статье К.Саито [**40**], см. также её современное переосмысление в [**41**].

Фробениусовы многообразия. Пусть M — некоторая открытая область в $\mathbb{C}^n$. Пусть для всех точек $p \in M$ на касательном пространстве T_pM к M в точке p определена невырожденная билинейная форма η_p,

$$\eta_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{C}.$$

Пусть $t_1, \ldots, t_n$ — некоторые координаты на M. Вектора $\partial/\partial t_i$ образуют базис пространства T_pM в каждой точке $p \in M$; обозначим через η_{ij} компоненты билинейной формы η в этом базисе.

Рассмотрим комплекснозначную функцию $\mathcal{F} = \mathcal{F}(t_1, \ldots, t_n)$ на M. В дальнейшем будем полагать, что функция $\mathcal{F}$ представлена сходящимся рядом по $t_1, \ldots, t_n$. Будем говорить, что функция $\mathcal{F}(\mathbf{t})$ удовлетворяет *уравнению WDVV* если для каждых 4 фиксированных индексов i, j, k, l, $1 \leq i, j, k, l \leq n$ справедливо равенство

$$\sum_{p,q} \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial t_i \partial t_j \partial t_p}\ \eta^{pq}\ \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial t_q \partial t_k \partial t_l} = \sum_{p,q} \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial t_i \partial t_k \partial t_p}\ \eta^{pq}\ \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial t_q \partial t_j \partial t_l}, \tag{2.1}$$

где $\eta^{ij} := \sum_{p,q} \eta_{pq} \delta^{pi} \delta^{qj}$.

Пусть E — некоторое векторное поле на M, заданное в координатах следующим образом:

$$E := \sum_{k=1}^{n} \left(d_k t_k \frac{\partial}{\partial t_k} + r_k \frac{\partial}{\partial t_k} \right), \quad d_k, r_k \in \mathbb{Q};$$

здесь мы предполагаем, что $r_k \neq 0$ только если $d_k = 0$. Это векторное поле называется *эйлеровым полем.* Будем говорить, что функция $\mathcal{F}$ имеет *конформную размерность* $d \in \mathbb{Q}$ по отношению к векторному полю E, если верно следующее:

$$E \cdot \mathcal{F} = (3 - d)\mathcal{F} + \text{ квадратичные члены.} \tag{2.2}$$

Пусть также для всяких двух индексов i, j верно:

$$\eta_{ij} = \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial t_1 \partial t_i \partial t_j}.$$

Определение. Функция $\mathcal{F}$, удовлетворяющая приведенным выше условиям, называется *фробениусовым потенциалом* конформной размерности d.

С помощью функции $\mathcal{F}$ определим на касательных пространствах T_pM структуру алгебры. Пусть $c_{ij}^k(\mathbf{t})$ — структурные константы умножения $\circ : T_pM \times T_pM \to T_pM$, т.ч. $c_{ij}^k(\mathbf{t}) := \sum_p c_{ijp}(\mathbf{t})\eta^{pk}$, где

$$c_{ijk}(\mathbf{t}) := \frac{\partial^3 F}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k}, \quad 1 \le i, j, k \le n.$$

Структурные константы $c_{ij}^k(\mathbf{t})$ определяют коммутативное умножение по построению, в то время как ассоциативность алгебры с таким умножением эквивалентна тому, что функция $\mathcal{F}(\mathbf{t})$ удовлетворяет уравнению WDVV.

Билинейная форма η вместе с умножением $\circ$ задают структуру *фробениусовой алгебры* на касательном пространстве к M в каждой точке $p \in M$:

$$\eta\left(\frac{\partial}{\partial t_i} \circ \frac{\partial}{\partial t_j}, \frac{\partial}{\partial t_k}\right) = \eta\left(\frac{\partial}{\partial t_i}, \frac{\partial}{\partial t_j} \circ \frac{\partial}{\partial t_k}\right).$$

Определение. Набор η, $\circ$, построенный по фробениусову потенциалу $\mathcal{F}$ задает структуру n–мерного *фробениусова многообразия* на M. Число d называется *конформной размерностью* многообразия, а координаты $\mathbf{t}$ на M — *плоскими координатами.* Касательное пространство к M в начале координат $\mathbf{t}$ называется *пространством состояний* фробениусова многообразия.

Иногда мы имеем только лишь функцию $\mathcal{F}$, задающую плоскую метрику, удовлетворяющую уравнению WDVV и условию квазиоднородности по отношению к некоторому эйлерову полю E, но без свойства аналитичности и без явного пространства M. В таких случаях функция $\mathcal{F}$ может все равно определять структуру фробениусова многообразия (или же росток), которую мы будем называть *формальной.* Примеры таких фробениусовых многообразий возникают, например, из теорий Громова–Виттена, для которых аналитичность потенциала является открытым вопросом.

Обозначение 2.1. *Структура алгебры на T_pM, заданная структурными константами $c_{ij}^k \mid_{\mathbf{t}=0}$, называется фробениусовой алгеброй в нуле и обозначается через $TM \mid_{\mathbf{t}=0}$ (где указание на точку $p \in M$ может быть опущено, если мы полагаем, что $\mathbf{t}$ являются координатами в окрестности точки p).*

Симметрии уравнения WDVV. Пусть функция $\mathcal{F}(\mathbf{t})$ является решением уравнения WDVV. Очевидно, что для $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ и замены переменных $\tilde{\mathbf{t}} = C\mathbf{t}$, функция $\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{t}})$ также является решением уравнения WDVV. Такие замены переменных мы будем называть *симметриями* уравнения WDVV.

Рассмотрим два фробениусовых многообразия, потенциалы которых связаны симметрией уравнения WDVV. Для $C \notin \mathrm{O}(n, \mathbb{C})$ спаривание, определенное функцией $\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{t}})$, не совпадает со спариванием, определенным потенциалом $\mathcal{F}(\mathbf{t})$, и две фробениусовы структуры различаются! В дальнейшем мы будем использовать понятие изоморфизма фробениусовых многообразий с точки зрения симметрий уравнения WDVV.

Определение. Два фробениусовых многообразия M и M' назовем *изоморфными*, если их потенциалы $\mathcal{F}(\mathbf{t})$ и $\mathcal{F}'(\tilde{\mathbf{t}})$ связаны линейной заменой переменных $\tilde{\mathbf{t}} = C\mathbf{t}$ с $C \in \mathrm{O}(n, \mathbb{C})$:

$$\mathcal{F}(\mathbf{t}) = \mathcal{F}'(C\mathbf{t}).$$

Заметим, что симметрии уравнения WDVV не сводятся к тем, которые задаются линейными заменами переменных (см. Приложение Б в [**11**]).

Плоские структуры Саито. Пусть $W : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, определенная в некоторой окрестности начала координат $0 \in \mathbb{C}^N$. Будем полагать, что W отображает начало координат $\mathbb{C}^N$ в нуль $0 \in \mathbb{C}$ и имеет изолированную особенность в точке $0 \in \mathbb{C}$. Другими словами, росток гиперповерхности $X_0 := \{W = 0\} \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ в начале координат имеет изолированную особую точку. Обозначим через $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ некоторые координаты в $\mathbb{C}^N$ и через $\mathbb{C}\{\mathbf{x}\}$ кольцо сходящихся степенных рядов от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Рассмотрим *локальную алгебру* особенности W

$$\mathcal{L}_W := \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_N\}/(\partial_{x_1} W, \ldots, \partial_{x_N} W).$$

Пусть $\mu := \dim \mathcal{L}_W$ — *число Милнора* особенности W. Тот факт, что функция $W(\mathbf{x})$ определяет изолированную особенность, эквивалентен конечности числа μ. *Универсальной разверткой* особенности W называется функция $F : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^\mu \to \mathbb{C}$ определенная следующим образом:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{s}) := W(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{\mu} s_k \phi_k(\mathbf{x}),$$

где $\phi_i(\mathbf{x})$ образуют базис локальной алгебры $\mathcal{L}_W$. Мы также полагаем, что $\phi_1(\mathbf{x})$ является единицей локальной алгебры.

Предположим, что функция $W(\mathbf{x})$ *квазиоднородна*. Это означает, что существуют рациональные числа $q_1, \ldots, q_N \in \mathbb{Q}_{>0}$, такие, что:

$$W(\lambda^{q_1} x_1, \ldots, \lambda^{q_N} x_N) = \lambda W(\mathbf{x}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}.$$

Припишем переменной x_i вес q_i, а всякому моному $\phi(\mathbf{x}) = x_1^{a_1} \dots x_N^{a_N}$ (рациональную) степень $\deg(\phi) := \sum a_i q_i$. В локальном кольце квазиоднородной функции можно выбрать базис, состоящий из мономов, и мы будем предполагать ниже, что универсальная развертка $F(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ построена по такому базису. Припишем *веса* переменным s_k по правилу

$$\deg s_k := 1 - \deg \phi_k(\mathbf{x}).$$

Пусть $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^\mu$ и $B \subset \mathbb{C}^N$ некоторые полноразмерные шары достаточно малого радиуса с центрами в начале координат. Мы выбираем радиус шара B так, что $F(\mathbf{x}, 0)$ имеет только одну критическую точку $\mathbf{x} = 0$ и радиус шара $\mathcal{S}$ так, что для всякого фиксированного $\mathbf{s} \in \mathcal{S}$ росток гиперповерхности $X_\mathbf{s} := \{F(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = 0\} \in (\mathbb{C}^N, 0)$ имеет только изолированные особые точки, полученные деформацией особенности X_0. Будем называть шар $\mathcal{S}$ *базой* развертки особенности. Положим $X := B \times \mathcal{S}$. В дальнейшем мы будем рассматривать развертку F как росток функции в $(X, 0)$. Определим проекцию:

$$p : X \to \mathcal{S}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{s}) \to (\mathbf{s}).$$

Пусть $\mathcal{C}$ — *критическое множество* развертки F, т.е. $\mathcal{C} := \{(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in B \times \mathcal{S} \mid \partial_{x_1} F(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \dots = \partial_{x_N} F(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = 0\}$. Тогда множество $\mathcal{C}$ является носителем пучка

$$\mathcal{O}_\mathcal{C} := \mathcal{O}_{X,0}/(\partial_{x_1} F, \dots, \partial_{x_N} F).$$

Пучок $p_* \mathcal{O}_\mathcal{C}$ наделен естественным послойным умножением. Для всяких двух элементов $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{s}), \psi(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathcal{O}_\mathcal{C}$ обозначим через $\phi, \psi \in p_* \mathcal{O}_\mathcal{C}$ соответствующие классы вычетов по модулю $(\partial_{x_1} F, \dots, \partial_{x_N} F)$. Тогда умножение на $p_* \mathcal{O}_\mathcal{C}$ имеет вид:

$$\phi \circ_s \psi := \phi(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \quad \mod (\partial_{x_1} F, \dots, \partial_{x_N} F).$$

Ввиду универсальности развертки имеется следующий изоморфизм:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{S},0} \cong p_* \mathcal{O}_\mathcal{C}, \quad X \to \tilde{X} \cdot F, \tag{2.3}$$

где $\tilde{X}$ является вектором, касательным к $B \times \mathcal{S}$, таким, что $p(\tilde{X}) = X \in \mathcal{T}_{\mathcal{S},0}$. С помощью этого изоморфизма также и касательные пространства $T_s \mathcal{S}$ получают умножение, зависящее от точки $s \in \mathcal{S}$. Это умножение мы также будем обозначать символом $\circ_s$.

Зафиксируем форму объема $\omega = g(\mathbf{s}, \mathbf{x}) dx_1 \dots dx_N$; эта форма задает спаривание η на $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ следующим образом:

$$\eta_{kl}(\mathbf{s}) := \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^N} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial_{s_k} F \partial_{s_l} F}{\partial_{x_1} F \dots \partial_{x_N} F} \, \omega,$$

где Γ_ϵ это подмножество точек в X, заданное уравнениями $|\partial_{x_1} F| = \dots = |\partial_{x_N} F| = \epsilon$ для достаточно малых ϵ. Такое спаривание называется *резидуальным спариванием* и не зависит от выбора параметра ϵ. Определенное таким образом спаривание является невырожденным, однако его свойства существенно зависят от выбора формы объема.

Теорема 2.1 (К. Саито). *Для всякой гиперповерхностной квазиоднородной особенности существует форма объема $\zeta(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$, такая, что резидуальное спаривание плоско.*

Форма объема, существование которой гарантируется теоремой, называется *примитивной формой.*

Существование примитивной формы для всякой изолированной особенности (не обязательно квазиоднородной) было доказано М. Саито в [**42**] (см. также более подробное изложение в [**19**]), однако конструкция примитивной формы, предложенная К.Саито в [**39, 40**], может быть применена лишь в квазиоднородном случае. Теория примитивных форм Саито позволяет ввести на базе развертки $\mathcal{S}$ структуру фробениусова многообразия.

Теорема 2.2 (Теорема 7.5 в [**41**]). *Для всякой изолированной квазиоднородной особенности, задаваемой функцией $W : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$, и её примитивной формы Саито ζ, умножение $\circ_t$ и резидуальное спаривание η задают структуру фробениусова многообразия на базовом пространстве $\mathcal{S}$ универсальной развертки (размерности $\mu = \dim \mathcal{S}$).*

Эйлерово векторное поле E этой фробениусовой структуры однозначно определяется равенством:

$$(E(F))\mid_{\mathcal{C}} = F\mid_{\mathcal{C}} .$$

По сравнению с фробениусовыми структурами, построенными по теории Громова–Виттена, большим преимуществом структуры фробениусова многообразия, построенного на базовом пространстве развертки особенности, является то, что она определена для всякого $\mathbf{s} \in \mathcal{S}$ выбором подходящей примитивной формы "в точке s". Поэтому фробениусовы структуры Саито называются *глобальным* (мы проиллюстрируем это свойство на примере простых эллиптических особенностей в дальнейшем). Такое свойство является уникальным для данных фробениусовых структур и не выполняется для других стандартных примеров фробениусовых многообразий, таких, например, как теория Громова–Виттена.

Теория Громова–Виттена для орбифолдов. В работе [**1, 9**] авторы определили теорию Громова–Виттена для орбифолда $\mathcal{X}$. В данной работе мы ограничимся орбифолдами вида $\mathcal{X} = Y/G$, где Y — гладкое многообразие, а G — конечная группа, действующая на Y эффективно. Фиксируем некоторый класс $\beta \in H_2(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$. В [**1, 9**] авторы определяют пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathcal{X}, \beta)$, состоящее из стабильных отображений кривых рода g с n отмеченными точками в $\mathcal{X}$, имеющих степень β.

Основным объектом в орбифолдовой теории Громова–Виттена является *стек инерции* орбифолда $\mathcal{X}$. Рассмотрим диагональное отображение $\mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Стек инерции $\mathcal{I}\mathcal{X}$ определяется как следующее послойное произведением:

$$\mathcal{I}\mathcal{X} := \mathcal{X} \times_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} \mathcal{X}.$$

Другими словами, точками множества $\mathcal{I}\mathcal{X}$ являются пары (x, σ), где $x \in \mathcal{X}$ и $\sigma \in \mathrm{Aut}(x)$. В случае орбифолдов $\mathcal{X} = Y/G$, стек инерции имеет простую форму:

$$\mathcal{I}\mathcal{X} = \coprod_{(g)\in G_*} Y^g/C(g),$$

где G_* — множество всех классов сопряженности группы G и $C(g)$ — подгруппа в G, состоящая из всех элементов, коммутирующих с g. Действие подгруппы $C(g)$ коммутирует с действием $\langle g \rangle$, так как последнее действует тривиально на Y^g. Рассмотрим:

$$\overline{C(g)} := C(g)/\langle g \rangle, \quad \text{и} \quad \overline{\mathcal{I}}\mathcal{X} := \coprod_{(g)} Y^g/\overline{C(g)}.$$

Мы будем называть $\overline{\mathcal{I}}\mathcal{X}$ *строгим стеком инерции* орбифолда $\mathcal{X}$.

Определение. *Кольцом когомологий Чена–Руана* орбифолда $\mathcal{X}$ называется кольцо

$$H^*_{orb}(\mathcal{X}) := H^*(\overline{\mathcal{I}}\mathcal{X}, \mathbb{Q}).$$

Для каждого i ведем отображение $ev_i : \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathcal{X}, \beta) \to \overline{\mathcal{I}}\mathcal{X}$, сопоставляющее стабильному отображению кривой с n отмеченными точками в $\mathcal{X}$, его значение в i–ой отмеченной точке, $i = 1, \ldots, n$.

Пусть $\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_k} \in H^*_{orb}(\mathcal{X})$ — элементы кольца когомологий Чена–Руана. Определим k–точечные корреляторы рода g теории Громова–Виттена орбифолда $\mathcal{X}$ следующим образом:

$$\langle \gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_k} \rangle^{\mathcal{X}}_{g,k,\beta} := \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,k}(\mathcal{X},\beta)]^{vir}} ev_1^*\gamma_{i_1} \wedge \cdots \wedge ev_k^*\gamma_{i_k}.$$

Здесь $[\overline{\mathcal{M}}_{g,k}(\mathcal{X}, \beta)]^{vir}$ — некоторый фиксированный специальный класс гомологий пространства модулей стабильных отображений, называемый *виртуальным фундаментальным классом.*

Сгруппируем определенные таким образом числа в производящую функцию, называемую *потенциалом рода* g теории Громова–Виттена. Будем предполагать, что $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\mu}$ является базисом кольца $H^*_{orb}(\mathcal{X}, \mathbb{Q})$. Положим $\mathbf{t} := \sum_{i=1}^{\mu} \gamma_i t_i$, где t_i являются формальными параметрами. Потенциал рода g является следующей производящей функцией:

$$\mathcal{F}^{\mathcal{X}}_g(t_1, \ldots, t_\mu) := \sum_{n,\beta} \frac{1}{n!} \langle \mathbf{t}, \ldots, \mathbf{t} \rangle^{\mathcal{X}}_{g,n,\beta}.$$

Наиболее важным для нас будет потенциал рода ноль. Следствием топологических свойств пространства модулей кривых является следующее важное предложение.

Предложение 2.3 ([**1, 32**]). *Потенциал рода ноль $\mathcal{F}_0^{\mathcal{X}}$ определяет структуру формального фробениусова многообразия конформной размерности* $\dim(\mathcal{X})$ *с алгеброй в нуле, изоморфной $H^*_{orb}(\mathcal{X})$.*

Обозначение 2.2. *Фробениусово многообразие теории Громова–Виттена орбифолда $\mathcal{X}$ будем обозначать $M_{\mathcal{X}}^{GW}$ или просто $M_{\mathcal{X}}$.*

Двойственность Берглюнда–Хубша. Для всякого квазиоднородного многочлена W, зависящего от переменных $x_1, \ldots, x_N$, определим матрицу $R = \{r_{ij}\}$ равенством:

$$W(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^{M} a_i \prod_{j=1}^{N} x_j^{r_{ij}}.$$

С помощью матрицы R определим двойственный многочлен W^T, следуя Берглюнду–Хубшу.

Определение. Квазиоднородный многочлен W задает *обратимую особенность* если соответствующая матрица R является квадратной и обратимой над $\mathbb{Q}$. Квазиоднородный многочлен $W^T(x_1, \ldots, x_N)$, определенный равенством

$$W^T(x_1, \ldots, x_M) := \sum_{i=1}^{N} a_i \prod_{j=1}^{N} x_j^{r_{ji}},$$

называется *двойственным* к W по Берглюнду–Хубшу. Мы также будем предполагать, что оба многочлена W и W^T задают изолированные особенности в начале координат $0 \in \mathbb{C}$.

Конструкция Берглюнда–Хубша не гарантирует каких бы то ни было хороших свойств двойственного многочлена W^T, даже если исходный многочлен W обладает этими свойствами.

Симметрии обратимых особенностей. В дальнейшем мы будем рассматривать только квазиоднородные многочлены W, задающие обратимые особенности.

Определение.

- *Максимальная диагональная группа симметрий* многочлена W — это группа

$$G_W := \left\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in (\mathbb{C}^*)^N \mid W(\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_N x_N) = W(\mathbf{x})\right\}.$$

- Определим оператор

$$J_W := (e^{2\pi i q_1}, \ldots, e^{2\pi i q_N}).$$

  Порожденная им циклическая группа будет обозначаться через G_0:

$$G_0 := \langle J_W \rangle.$$

Несложно заметить, что $G_0 \subseteq G_W$. Естественно предположить, что особенности многочленов W и W^T являются в определенном смысле зеркально симметричными. Однако две такие особенности могут иметь разные числа Милнора, что делает невозможным в общем случае даже изоморфизм соответствующих локальных алгебр. Для определения зеркальной симметрии пары двойственных многочленов W и W^T рассмотрим пары (W, G) и (W^T, G^T), где G и G^T — группы симметрий особенностей, и G^T является в определенном смысле двойственной к G группой.

В зависимости от стороны зеркальной симметрии мы будем работать с двумя разными типами групп симметрий.

Определение. Группа G называется *А–допустимой* группой симметрий многочлена W, если:

$$G_0 \subseteq G \subseteq G_W.$$

Группа H называется *Б–допустимой* группой симметрий многочлена W, если:

$$H \subseteq \mathrm{SL}_W := G_W \cap \mathrm{SL}(\mathbb{C}^N).$$

Для А–допустимой группы G положим:

$$\tilde{G} := G/G_0. \tag{2.4}$$

Определение двойственной группы, которое соответствует предположениям зеркальной симметрии между (W, G) и (W^T, G^T), было впервые предложено Берглюндом и Хеннингсоном в [**7**].

Определение. Для всякой подгруппы $G \subseteq G_W$ положим:

$$G^T := \mathrm{Hom}(G_W/G, \mathbb{C}^*).$$

Пример 2.4. Для всякой обратимой особенности W верно: $(G_W)^T = \{id\}$.

В работе [**26**] М. Кравитц дал комбинаторное построение двойственной группы G^T через образующие и соотношения, с помощью которого доказал следующее важное предложение.

Предложение 2.5 (Лемма 3.3 в [**26**]). *Пусть W задает обратимую особенность с некоторой А–допустимой группой симметрий G . Тогда верно:*

$$(G^T)^T = G \quad and \quad G^T \subseteq G_{W^T} \cap \mathrm{SL}(\mathbb{C}^N).$$

Таким образом, двойственная группа А–допустимой группы симметрий является Б–допустимой для двойственной особенности.

Пара (W^T, G^T) носит в настоящее время имя “Берглюнд–Хубш–Кравитц двойственной” паре (W, G).

Определение. Пусть многочлены W и W' задают обратимые особенности, а G и H являются их А– и Б–допустимыми группами симметрий соответственно. Тогда пары (W, G) и (W', H) называются *орбифолдовыми* А– и Б– моделями Ландау–Гинзбурга соответственно.

Зеркальная симметрия с тривиальной группой симметрий. Пусть многочлен W задает квазиоднородную обратимую особенность с весами $q_1, \ldots, q_N$. Предположим также, что W удовлетворяет условию Калаби–Яу $\sum q_i = 1$. В таком случае множество нулей многочлена является многообразием Калаби–Яу в некотором взвешенном проективном пространстве. Пусть $\tilde{G}_W$, как и выше (см. формулу (2.4)), — факторгруппа максимальной группы симметрий по подргуппе G_0. Рассмотрим теорию Громова–Виттена следующего орбифолда X_{W,G_W} :

$$X_{W,G_W} := \{W = 0\}/\tilde{G}_W.$$

Следующие утверждения называются гипотезами зеркальной симметрии (см. [**10**]).

Гипотеза 2.1 (зеркальная симметрия типа CY–LG). *С точностью до линейной замены переменных потенциал фробениусова многообразия теории Громова–Виттена орбифолда $X_{W^T,G_{W^T}}$ совпадает с потенциалом фробениусова многообразия особенности W с выбором примитивной формы ζ в специальной точке базового пространства развертки.*

Заметим, что такое соотношение между потенциалами влечет изоморфизм фробениусовых многообразий. Выбор примитивной формы ζ, использованный в изоморфизме зеркальной симметрии типа CY–LG, называется *примитивной формой LCSL.*

Гипотеза 2.2 (зеркальная симметрия типа LG–LG). *Существует структура фробениусова многообразия для пары (W^T, G_{W^T}), т.ч. с точностью до линейной замены переменных ее потенциал $\mathcal{F}^A_{W^T,G_{W^T}}(\boldsymbol{t})$ совпадает с потенциалом фробениусова многообразия особенности W с выбором примитивной формы ζ в специальной точке базового пространства развертки.*

Выбор примитивной формы ζ, задающий изоморфизм зеркальной симметрии типа LG–LG, называется *примитивной формой в точке Геппнера.*

В обеих гипотезах плоские структуры Саито возникают в качестве Б–моделей, тогда как А–модели разнятся, поэтому такая Б–модель носит называется *глобальной.* Следующая гипотеза предполагает, что две (априори различные) А–модели одной глобальной Б–модели определенным образом связаны.

Гипотеза 2.3 (соответствие CY/LG). *Существует действие группы на пространстве всех фробениусовых структур, такое, что для некоторого элемента этой группы R имеет место равенство:*

$$\hat{R} \cdot \mathcal{F}^{A}_{W^T, G_{W^T}} = \mathcal{F}^{GW}_{X_{W^T, G_{W^T}}},$$

где $\hat{R}$ обозначает действие элемента R на потенциале фробениусовой структуры.

Действие (некоторой группы) на пространстве всех фробениусовых структур (а более общо — на пространстве когомологических теорий поля) было построено А.Гивенталем в **[18]**. В действительности именно действие Гивенталя $\hat{R}$ и предполагается применить в соответствии CY/LG. Однако построенное Гивенталем действие сложно для явных вычислений и требует знания когомологической теории поля целиком, а не только ее фробениусова многообразия. В данной работе мы построим другое действие группы на пространстве фробениусовых структур определенного класса. Предложенное нами действие возникает естественно из анализа дифференциальных уравнений, однако оно не может быть нетривиально продолжено на пространство всех фробениусовых структур.

Зеркальная симметрия с произвольной группой симметрий. Пусть многочлен W задает обратимую особенность с некоторой А–допустимой группой симметрий G. Предположим также, что многочлен W удовлетворяет условию Калаби–Яу $\sum q_i = 1$. Рассмотрим теорию Громова–Виттена орбифолда $X_{W,G}$:

$$X_{W,G} := \{W = 0\} / \tilde{G}.$$

Гипотеза 2.4 (зеркальная симметрия типа CY–LG). *Для всякого обратимого многочлена W с Б–допустимой группой симметрий G существует семейство структур фробениусовых многообразий для пары (W, G), фиксируемое примитивной формой ζ_G. Существует также выбор примитивной формы ζ_∞ в "специальной точке", такой, что потенциал соответствующей Фробениусовой структуры совпадает с точностью до линейной замены переменных с фробениусовым потенциалом теории Громова–Виттена орбифолда X_{W^T, G^T}.*

Как и прежде, выбор примитивной формы, устанавливающий приведенную выше зеркальную симметрию, называется примитивной формой в LCSL.

Гипотеза 2.5 (зеркальная симметрия типа LG–LG). *Для всякого обратимого многочлена W с Б–допустимой группой симметрий G существует семейство структур фробениусовых многообразий для пары (W, G), фиксируемое примитивной формой ζ_G. Существует также фробениусова структура для пары (W^T, G^T) и выбор примитивной* *формы ζ_∞ в "специальной точке", такой, что потенциал соответствующей фробениусовой структуры совпадает с точностью до линейной замены переменных с фробениусовым потенциалом пары (W^T, G^T).*

Гипотеза 2.6 (соответствие CY/LG). *Существует действие группы на пространстве всех фробениусовых структур, такое, что для некоторого элемента этой группы R имеет место равенство:*

$$\hat{R} \cdot \mathcal{F}^{A}_{W^T,G^T} = \mathcal{F}^{GW}_{X_{W^T,G^T}},$$

где $\hat{R}$ обозначает действие элемента R на потенциале фробениусовой структуры.

Естественным кандидатом на роль А–модели Ландау–Гинзбурга является теория FJRW. Однако эта теория не рассматривается на данный момент как некоторый канонический выбор А–модели и имеет некоторые существенные недостатки.

Изобразим идею глобальной зеркальной симметрии следующей диаграммой.

сторона А:	?теория FJRW (W^T, G^T)	?	теория Громова–Виттена $X_{W^T,G^T} := \{W^T = 0\}/\tilde{G}^T$
	0	p_k	∞
сторона Б:			

фробениусово многообразие (W, G)

Неразрешенные проблемы. Основной проблемой глобальной зеркальной симметрии является то, что для всякой пары (W, G) только лишь А–модель теории Громова–Виттена орбифолда $X_{W,G}$ является корректно заданной.

- Фробениусово многообразие Б–модели Ландау–Гинзбурга (W, G) не определено.
- Не существует понятия замены примитивной формы для Б–модели Ландау–Гинзбурга в случае нетривиальной группы симметрий G.
- Теория FJRW сложна для вычислений.

ГЛАВА 3

Глобальная зеркальная симметрия для простых эллиптических особенностей

Рассмотрим простые эллиптические особенности $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$, заданные следующими полиномами:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{E}_6: \quad W_\sigma(\mathbf{x}) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \sigma x_1 x_2 x_3,\\
&\tilde{E}_7: \quad W_\sigma(\mathbf{x}) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^2 + \sigma x_1^2 x_2^2,\\
&\tilde{E}_8: \quad W_\sigma(\mathbf{x}) = x_1^6 + x_2^3 + x_3^2 + \sigma x_1^4 x_2.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Все они имеют следующий вид:

$$W_\sigma(\mathbf{x}) = W(x_1, x_2, x_3) + \sigma\phi_{-1}$$

где

- $W(x_1, x_2, x_3) = x_1^{a_1} + x_2^{a_2} + x_3^{a_3}$ квазиоднородный полином с весами $q_i := 1/a_i$, удовлетворяющими условию $q_1 + q_2 + q_3 = 1$,
- $\phi_{-1} \in \mathcal{L}_W$ — элемент алгебры степени 1,
- $\sigma \in \mathbb{C}$ — комплексный параметр.

Простая эллиптическая особенность $W_\sigma(\mathbf{x})$ называется *обратимой*, если полином $W(x_1, x_2, x_3)$ обратим (см. определение во введении на стр. 11). Каждая простая эллиптическая особенность определяет эллиптическую кривую E_σ, называемую *эллиптической кривой в бесконечности*, задаваемую следующим образом:

$$E_\sigma := \{\mathbf{x} \in \mathbb{P}^2(c_1, c_2, c_3) \mid W_\sigma(\mathbf{x}) = 0\},$$

где $c_i = d/a_i$, а d является наименьшим общим частным весов a_1,a_2,a_3. Обозначим через Σ множество всех таких $\sigma \subset \mathbb{C}$, что E_σ не особа. Таким образом мы имеем семейство эллиптических кривых над Σ. К. Саито приводит в работе [**39**, Раздел 1.11] явные формулы для j-инварианта эллиптической кривой E_σ:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{E}_6: j(\sigma) = -\frac{16\sigma^6}{\sigma^3 + 27},\\
&\tilde{E}_7: j(\sigma) = \frac{16(\sigma^2 + 12)^3}{(\sigma^2 - 4)^2},\\
&\tilde{E}_8: j(\sigma) = 1728\frac{4\sigma^3}{4\sigma^3 + 27}.
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

Используя эти формулы, рассмотрим число $\tau = \tau(\sigma) \in \mathbb{H}/\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ как модуль эллиптической кривой E_σ, такое что выполнено следующее равенство:

$$j(\tau) = j(\sigma).$$

Рассмотрим также семейство эллиптических кривых, параметризованное $\mathbb{H}$:

$$\mathcal{E} := \{\mathbb{P}^2(c_1, c_2, c_3) \times \mathbb{H} \mid W_\sigma(x_1, x_2, x_3) = 0\} \to \mathbb{H}. \tag{3.3}$$

1. Примитивная форма простой эллиптической особенности

Обозначим через $\mathcal{S}$ базовое пространство универсальной развертки $F(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ простой эллиптической особенности W_σ. Поскольку $\phi_{-1} \in \mathcal{L}_{W_\sigma}$, параметр развертки s_{-1} может быть идентифицирован с σ. Таким образом, базовое пространство развертки имеет вид: $\mathcal{S} = \Sigma \times \mathbb{C}^{\mu-1}$.

К. Саито было замечено в работе **[40]**, что всякая примитивная форма простой эллиптической особенности задается однозначно с помощью некоторых данных эллиптической кривой E_σ (детальное доказательство этого факта может быть найдено в **[34]**). В общем случае (не обязательно эллиптической особенности) примитивная форма $\zeta = \zeta(\mathbf{s})$ зависит от точки $\mathbf{s} \in \mathcal{S}$. В случае эллиптической особенности W_σ прямым следствием аксиоматического определения примитивной формы и высшего спаривания К. Саито является то, что из всех координат $\mathbf{s}$, примитивная форма зависит только от s_{-1}: $\zeta = \zeta(s_{-1})$. Другим прямым следствием вышеупомянутой аксиоматики является то, что примитивная форма удовлетворяет уравнению Пикара–Фукса семейства E_σ. Далее мы будем обозначать примитивную форму W_σ с помощью $\omega = \omega(\sigma)$.

Рассмотрим отображение:

$$\varphi : \mathbb{C}^3 \times \mathcal{S} \to \mathbb{C} \times \mathcal{S}, \quad \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{s}) := (F(\mathbf{x}, \mathbf{s}), \mathbf{s}).$$

Для каждых $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\mathbf{s} \in \mathcal{S}$ положим $X_{\lambda,\mathbf{s}} := \varphi^{-1}(\lambda, \mathbf{s})$. Обозначим через $D \subset \mathbb{C} \times \mathcal{S}$ дискриминант отображения F: $D = \{(\lambda, \mathbf{s}) \mid X_{\lambda,\mathbf{s}} \text{ особо}\}$. Тогда объединение X' всех множеств $X_{\lambda,\mathbf{s}}$ для всех $(\lambda, \mathbf{s}) \in (\mathbb{C} \times \mathcal{S}) \backslash D$ задает гладкое слоение, которое называется *слоением Милнора.*

Слои $X_{\lambda,\mathbf{s}}$ могут быть компактифицированы приклеиванием эллиптической кривой E_σ. Рассмотрим следующую 2–форму:

$$\Omega := \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{dW_\sigma}.$$

Такая 2–форма голоморфна на $X_{\lambda,\mathbf{s}}$, но имеет простые полюса вдоль $E_\sigma \subset \overline{X}_{\lambda,\mathbf{s}}$. Тогда 1–форма $\mathrm{res}_{E_\sigma} \Omega$ является формой Калаби–Яу эллиптической кривой E_σ. Более того, она имеет степень ноль по $\mathbf{s}$ и, таким образом, зависит только от $s_{-1} = \sigma$ (см. [**31**]). Таким образом, для семейства циклов $A_\sigma \in H_1(E_\sigma, \mathbb{Z})$ функция:

$$\pi_A(\sigma) := \int_{A_\sigma} \mathrm{res}_{E_\sigma} \Omega$$

является решением *уравнения Пикара–Фукса.* Явный вид уравнения Пикара–Фукса зависит от полинома W_σ. Например, для особенности $\tilde{E}_8$ это уравнение принимает следующий вид (см. [**35**]):

$$3\sigma(1-\sigma)\frac{d^2\pi_A}{d\sigma^2} + (2-5\sigma)\,\frac{d\pi_A}{d\sigma} - \frac{7}{48}\pi_A = 0.$$

Теорема 3.1 (Глава 3, Пример 1 в [**40**]). *Рассмотрим простую эллиптическую особенность, задаваемую полиномом $W_\sigma(\boldsymbol{x})$. Для всякого цикла $A_\sigma \in H_1(E_\sigma, \mathbb{C})$ существует единственная с точностью до умножения на ненулевой комплексный множитель примитивная форма ζ особенности $W_\sigma(\boldsymbol{x})$. Примитивная форма ζ имеет следующий явный вид:*

$$\zeta = \zeta(\sigma) = \frac{d^3\boldsymbol{x}}{\pi_A(\sigma)}.$$

Доказательство этой теоремы может быть найдено в [**34**, Приложение A].

1.1. Специальные точки. Как мы заметили ранее, зеркальная симметрия должна возникать в “специальных точках” базового пространства развертки. Для особенностей $\tilde{E}_N$ это множество $\{0, \infty\} \sqcup \{p_k\}$, где:

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_6: \quad p_k &= -3\exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}k), \quad 1 \le k \le 3,\\
\tilde{E}_7: \quad p_k &= 2\exp(\pi\sqrt{-1}k), \quad 1 \le k \le 2,\\
\tilde{E}_8: \quad p_k &= -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}k), \quad 1 \le k \le 3.
\end{aligned}$$

Несложно заметить, что в точках p_k мы имеем $j(p_k) = \infty$.

Предложение 3.2. *j–инвариант эллиптической кривой E_σ принимает в специальных точках значения 0,1728,∞.*

Доказательство. Очевидно. □

Для особенностей $\tilde{E}_6$ и $\tilde{E}_7$ также выполнено $j(\infty) = \infty$. Однако интересно заметить, что для особенности $\tilde{E}_8$ мы имеем: $\lim_{\sigma\to\infty} j(\sigma) = 1728$.

Безусловно, рассмотрение примитивной формы, резидуального спаривания $\eta_{ij}(\mathbf{s})$ и структурных констант $c_{ij}^k(\mathbf{s})$ в специальных точках требует особого анализа. Мы не рассматриваем этот вопрос в данной работе, используя явно найденные в работах Миланов–Шень и Ноуми–Ямада [**35, 37**] плоские координаты.

2. Плоские координаты, задаваемые примитивной формой

Связь между теорией примитивных форм и фробениусовыми многообразиями устанавливается с помощью некоторых осциллирующих интегралов с одной стороны и деформированных плоских координат с другой.

2.1. Деформированные плоские координаты фробениусова многообразия. Пусть $\mathcal{F}(t_1,\dots,t_n)$ — потенциал некоторого фробениусова многообразия M с метрикой η и эйлеровым полем E. Обозначим через ∇ связность Леви–Чивиты метрики η. Рассмотрим деформацию этой связности:

$$\tilde\nabla_u v := \nabla_u v + z^{-1}\, u\circ v, \quad \forall u,v\in TM,$$

где z — формальный параметр. Такая деформация может быть продолжена до связности на $M\times\mathbb{C}$ следующим образом. Положим:

$$\begin{aligned}
&\tilde\nabla_u \frac{d}{dz} := 0,\\
&\tilde\nabla_{\frac{d}{dz}} \frac{d}{dz} := 0,\\
&\tilde\nabla_{\frac{d}{dz}} v := z\partial_z v + E\circ v - \Theta(v),
\end{aligned}$$

для $\Theta(\partial/\partial t_i) = (1-d_i-d/2)\partial/\partial t_i$. Важность этой связности подкрепляется следующим утверждением.

Предложение 3.3 (Предложение 2.1 в [**12**]). *Кривизна связности $\tilde\nabla$ на фробениусовом многообразии M равна нулю. Пусть на касательном пространстве T_pM многообразия M задана структура фробениусовой алгебры, гладко зависящая от точки $p\in M$, с плоской метрикой η и эйлеровым полем E таким что.*

$$\mathcal{L}_E\eta = (2-d)\eta.$$

Пусть также кривизна связности $\tilde\nabla$ равна нулю, а единичное векторное поле фробениусовой алгебры ковариантно постоянно в связности Леви–Чивиты метрики η. Тогда M является фробениусовым многообразием.

Плоские координаты связности $\tilde\nabla$ могут быть выбраны следующим образом: $(z,\tilde t_1(\mathbf{t},z),\dots,\tilde t_n(\mathbf{t},z))$. Фиксируем произвольное k, т.ч. $1\le k\le n$. Обозначим через ξ_α коэффициенты разложения дифференциала $d\tilde t_k$ в базисе dt_α: $\sum_\alpha \xi_\alpha dt_\alpha = d\tilde t_k$. Мы имеем:

$$\begin{aligned}
&z\ \partial_\alpha\xi_\beta = c^\gamma_{\alpha\beta}\xi_\gamma,\\
&z\partial_z\xi_\beta = E^\gamma c^\alpha_{\gamma\beta}\xi_\alpha - \Theta^\epsilon_\beta\xi_\epsilon.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Определим комплексные числа $h_{\alpha,k}$ с помощью следующего равенства:

$$\tilde{t}_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} h_{\alpha,k}(t)\ z^{-k}.$$

Лемма 3.4 (Лемма 2.2 в [**12**]). *Коэффициенты $h_{\alpha,k}$ удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$h_{\alpha,0} = \sum_{\epsilon} \eta_{\alpha,\epsilon} t_\epsilon,$$

$$\partial_\gamma \partial_\beta h_{\alpha,k+1} = c^{\epsilon}_{\beta\gamma} \partial_\epsilon h_{\alpha,k}, \quad k \geq 0.$$

где $1 \leq \alpha, \gamma, \beta \leq n$.

Функции $\tilde{t}_\alpha$ называются *деформированными плоскими координатами* фробениусова многообразия.

2.2. Осциллирующие интегралы. Пусть $F(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ обозначает развертку изолированной квазиоднородной особенности $W(x_1, \ldots, x_N)$ с числом Милнора μ. Фиксируем некоторые положительные ρ, δ и ν. Обозначим через $B^N_\rho \subset \mathbb{C}^n$, $B^1_\delta \subset \mathbb{C}$ и $B^\mu_\nu \subset \mathbb{C}^\mu$ шары радиусов ρ, δ и ν соответственно, с центром в начале координат. Рассмотрим пространство:

$$\mathcal{X}_{\rho,\delta,\nu} := \left(B^N_\rho \times B^\mu_\nu\right) \cap \varphi^{-1}\left(B^1_\delta \times B^\mu_\nu\right) \subset \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^\mu.$$

Фиксируя ρ, такое, что $X_{0,0}$ пересекается трансверсально сферами ∂B^N_r для всех $r:\ 0 < r \leq \rho$, а также δ и ν, такие, что $X_{\lambda,\mathbf{s}}$ пересекается трансверсально сферами ∂B^N_ρ для всех $(\lambda, \mathbf{s}) \in B^1_\delta \times B^\mu_\nu$ мы получаем,

Предложение 3.5 ([**2, 13**]). *Существует $D \subset B^1_\delta \times B^\mu_\nu$, такое что для $\mathcal{X}' := \mathcal{X}_{\rho,\delta,\nu} \backslash \varphi^{-1}(D)$ отображение $\varphi : \mathcal{X}' \to (B^1_\delta \times B^\mu_\nu) \backslash D$ является локально–тривиальным расслоением с общим слоем, гомеоморфным букету μ сфер размерности $N-1$.*

Для всякого $m \in \mathbb{R}$ рассмотрим пространство $\mathcal{X}^-_m \subset \mathcal{X}_{\rho,\delta,\nu}$, определенное следующим образом:

$$\mathcal{X}^-_m := \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathcal{X}' \mid \operatorname{Re}\left(F(\mathbf{x}, \mathbf{s})/z\right) \leq -m\right\}.$$

В силу приведенного выше предложения и точной последовательности пары мы имеем следующий изоморфизм:

$$H_N(\mathcal{X}', \mathcal{X}^-_m) \cong H_{N-1}(X_{\lambda,\mathbf{s}}) \cong \mathbb{Z}^\mu. \tag{3.5}$$

Рассмотрим циклы [1]:

$$\mathcal{A} \in \lim_{m\to\infty} H_N(\mathcal{X}', \mathcal{X}_m^-; \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\mu.$$

Введем следующие *осциллирующие интегралы*:

$$\mathcal{J}_\mathcal{A}(\mathbf{s}, z) := (-2\pi z)^{-N/2} z d_\mathcal{S} \int_\mathcal{A} e^{F(\mathbf{x},\mathbf{s})/z}\omega,$$

зависящие от выбора формы объема ω. Если ω является примитивной формой Саито, то в плоских координатах $\mathbf{t}$ осциллирующие интегралы удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} &z\partial_t \mathcal{J}_\mathcal{A}(\mathbf{t}, z) = \partial_t \circ \mathcal{J}_\mathcal{A}(\mathbf{t}, z), \\ &(z\partial_z + E)\mathcal{J}_\mathcal{A}(\mathbf{t}, z) = \Theta \mathcal{J}_\mathcal{A}(\mathbf{t}, z). \end{aligned} \tag{3.6}$$

где E является эйлеровым полем, отображение $\Theta : T^*_\mathcal{S} \to T^*_\mathcal{S}$ определено своими значениями на базисных ковекторах: $\Theta(dt_i) = (\frac{1}{2} - d_i)dt_i$, и кокасательное пространство отображается изоморфно на касательное пространство с помощью метрики η.

Предложение 3.6. *Пусть классы $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_\mu$ образуют базис пространства $\lim_{m\to\infty} H_N(\mathcal{X}', \mathcal{X}_m^-; \mathbb{C})$. Тогда осциллирующие интегралы $\mathcal{J}_{\mathcal{A}_1}(\boldsymbol{t}, z), \ldots, \mathcal{J}_{\mathcal{A}_\mu}(\boldsymbol{t}, z)$ являются дифференциалами деформированных плоских координат фробениусовой структуры $\mathcal{S}$.*

Доказательство. Несложно заметить, что в плоских координатах осциллирующие интегралы $\mathcal{J}_{\mathcal{A}_k}$ удовлетворяют тому же уравнению, что и уравнение (3.4). □

Следствие 3.7. *Пусть $t_1(\boldsymbol{s}), \ldots, t_\mu(\boldsymbol{s})$ — плоские координаты на $\mathcal{S}$. Тогда верно:*

$$dt_k = [z^0]\mathcal{J}_{\mathcal{A}_k}(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{s}), z),$$

где $[z^0]$ обозначает коэффициент при z^0.

Доказательство. Из Леммы 3.4 видно, что для деформированных плоских координат фробениусова многообразия верно равенство $d\tilde{t}_k = dt_k + O(z^{-1})$. □

Важно заметить, что при для всякой особенности W фиксированных развертке F, базе $\mathcal{S}$ и координатах $\mathbf{s}$ на ней, плоские координаты $\mathbf{t}$ существенно зависят от выбора примитивной формы ω. Плоские координаты, построенные по примитивной форме в LCSL, мы будем также называть *плоскими координатами в LCSL*.

[1] В данном констексте такие циклы были впервые рассмотрены в [**18**], и применены далее, например в [**34**], в следующей форме. Пусть $(\mathbb{C}^N)_m := \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N | \mathrm{Re}(F(\mathbf{s}, \mathbf{x})/z) \leq -m\}$, тогда определим $\mathcal{A} \in \lim_{m\to\infty} H_N(\mathbb{C}^N, (\mathbb{C}^N)_{-m}; \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\mu$. Однако таковое определение следует рассматривать как обозначение ввиду того, что $\mathcal{X}'$ стягиваемо.

2.3. От классов A_σ к $\mathcal{A}$. Рассмотрим, как связаны циклы $\mathcal{A}$, определенные выше и $A_\sigma \in H_1(E_\sigma)$, использованные для определения примитивной формы простой эллиптической особенности. Рассмотрим трубчатую окрестность E_σ в $\overline{X}_{\lambda,\mathbf{s}}$. Ее граница в $\overline{X}_{\lambda,\mathbf{s}}$ определяет инъективное отображение $L : H_1(E_\sigma) \to H_2(X_{\lambda,\mathbf{s}})$. По теореме Коши–Лере верно:

$$\pi_A(\sigma) = \int_{L(A)} \frac{d^3\mathbf{x}}{dF}.$$

Используя отображение L, мы можем выбрать два базисных элемента $H_2(X_{\lambda,\mathbf{s}})$ по эллиптической кривой E_σ. В случае гиперповерхностных простых эллиптических особенностей это означает, что два из μ осциллирующих интегралов $\mathcal{J}_{\mathcal{A}_i}$ сводятся к интегрированию по эллиптической кривой E_σ (см. Следствие 3.7). Такой выбор базиса приводит к следующему предложению.

Предложение 3.8 (Глава 3, Пример 1 в [**40**]). *Для простой эллиптической особенности W_σ существуют комплексный числа $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, такие что $ad - bc \neq 0$ и плоская координата t, имеющая степень 0, определяется модулем τ_0 эллиптической кривой E_σ по следующей формуле:*

$$t = \frac{a\tau_0 + b}{c\tau_0 + d},$$

где

$$\tau_0 = \frac{\int_{\gamma_1} \mathrm{res}_{E_\sigma}\Omega}{\int_{\gamma_2} \mathrm{res}_{E_\sigma}\Omega},$$

и γ_1, γ_2 — произвольные независимые базисные вектора $H_1(E_\sigma, \mathbb{Z})$.

Важно заметить, что циклы γ_1 и γ_2 не обязательно образуют симплектический базис. Однако данное свойство удовлетворено в пределе $LCSL$ и будет использовано в следующем разделе.

3. Плоские координаты для особенности $\tilde{E}_N$ в пределе LCSL

Плоские координаты а пределе LCSL (см. гипотезу зеркальной симметрии) для простых эллиптический особенностей были найдены явно в работе Ноуми–Ямада [**37**].

Для простых эллиптических особенностей с экспонентами a_1, a_2, a_3 рассмотрим $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \mathbb{N}^3$ т.ч. $0 \le \nu_i \le a_i - 2$. Обозначим через I множество всех таких ν (заметим, что это множество конечно). Тогда развертка особенности $\tilde{E}_N$ может быть записана следующим образом:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = W_{\tilde{E}_N}(\mathbf{x}) + \sum_{\nu \in I} s_\nu \phi_\nu(\mathbf{x}),$$

где

$$\phi_\nu(\mathbf{x}) := x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} x_3^{\nu_3},$$

и $W_{\tilde{E}_N}(\mathbf{x}) = W_\sigma(\mathbf{x}) \mid_{\sigma=0}$ — один из многочленов из (3.1).

Замечание 3.1. В начале данной главы мы определили простые эллиптические особенности $\tilde{E}_N$ с помощью многочленов, зависящих также от параметра σ. Эта зависимость присутствует также и в определении развертки $F(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ ввиду того, что мы идентифицируем σ с одним из параметров развертки — s_ν для $\nu = (a_1 - 2, a_2 - 2, a_3 - 2)$.

Обозначим через ϵ_i канонический базис решетки $\mathbb{Z}^3$. Для любого $\alpha \in \mathbb{N}^I$ рассмотрим следующие функции:

$$l(\alpha) := \sum_{\nu \in I} \alpha_\nu \nu \in \mathbb{N}^3, \quad \mathrm{wt}(\alpha) := \sum_{\nu \in I} \alpha_\nu \deg s_\nu \in \mathbb{Q}, \quad \deg s_\nu = 1 - \sum_{i=1}^{3} \frac{\nu_i}{a_i}.$$

Для всякого $\nu \in I$ определим голоморфные на $\mathcal{S}$ функции:

$$\psi_\nu^{(r)}(\mathbf{s}) := \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^I \\ \mathrm{wt}(\alpha) = r - 1 + \deg s_\nu}} c_\nu\left(l(\alpha)\right) \prod_{\xi \in I} \frac{s_\xi^{\alpha_\xi}}{\alpha_\xi!}$$

где для фиксированного $\nu \in I$ и любого $\mu \in (\nu + \sum_{i=1}^3 a_i \epsilon_i \mathbb{Z}) \cap \mathbb{N}^3$ мы имеем:

$$c_\nu(\mu) := \prod_{i=1}^{3} (-1)^{k_i} \frac{\Gamma\left(k_i + \frac{\nu_i + 1}{a_i}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_i + 1}{a_i}\right)}, \quad k_i = \frac{\mu_i - \nu_i}{a_i}.$$

Теорема 3.9 (Теорема 1.1 в [**37**]). *Следующие формулы задают плоские координаты особенности $\tilde{E}_N$ с разверткой $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})$:*

$$t_\nu = \frac{\psi_\nu^{(1)}(\boldsymbol{s})}{\psi_0^0(\boldsymbol{s})},$$

где функции $\psi_0^0(\boldsymbol{s})$ определены в зависимости от типа особенности:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_6 : \quad & \psi_0^0(\boldsymbol{s}) = {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{s_{111}^3}{27}\right), \\ \tilde{E}_7 : \quad & \psi_0^0(\boldsymbol{s}) = {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{s_{22}^2}{4}\right), \\ \tilde{E}_8 : \quad & \psi_0^0(\boldsymbol{s}) = {}_2F_1\left(\frac{1}{12}, \frac{7}{12}; \frac{2}{3}; -\frac{4 s_{41}^3}{27}\right). \end{aligned}$$

Доказательство. Приведем идею доказательства.

Пусть $[\Gamma] \in H_3(\mathcal{X}', \mathcal{X}^-)$. Рассмотрим поверхность уровня $F/z = \lambda$ для всякого фиксированного значения z. Мы можем записать интеграл $\mathcal{J}_\mathcal{A}(\mathbf{s}, z)$ используя форму Гельфанда–Лере.

$$\int_\Gamma e^{F/z} \omega = z \int_{-\infty}^{0} e^\lambda \left(\int_{\partial_\lambda \Gamma} e^{\sum s_j \phi_j z^{d_j}} \frac{\omega}{df} \right) d\lambda.$$

Здесь мы использовали квазиоднородность F для того, чтобы изменить зависимость интеграла от формальной переменной z.

Раскладывая экспоненту в ряд, мы можем проинтегрировать λ с помощью Гамма–функций. Применяя Лемму 3.4 мы получаем выражения для плоских координат. □

Плоские координаты фробениусова многообразия $M_{\tilde{E}_N}$ также индексированы множеством I. Единственной переменной степени 0 является t_{0^*}, где для всякого $\nu \in I$ индекс $\nu^* \in I$ однозначно определен равенством $\eta_{\nu,\nu^*} \neq 0$.

В частности, для особенности $\tilde{E}_8$ переменные индексированы множеством $I = \{00, 10, 20, 30, 40, 11, 21, 31, 41\}$. Поскольку $\phi_{41} = x_1^4 x_2$, параметр σ идентифицируется с s_{41}. Мы будем также полагать $s_{-1} := s_{41}$.

Формулы Ноуми–Ямада для особенности $\tilde{E}_8$ дают:

$$t_{-1} := t_{41} = s_{41} \frac{{}_2F_1\left(\frac{5}{12}, \frac{11}{12}; \frac{4}{3}; u\right)}{{}_2F_1\left(\frac{1}{12}, \frac{7}{12}; \frac{2}{3}; u\right)}, \quad \text{где} \quad u := -\frac{4s_{41}^3}{27}.$$

4. CY–LG и LG–LG с тривиальной группой симметрии

Гипотезы зеркальной симметрии с выбором группы симметрий особенности $G = \{id\}$ были доказаны для обратимых простых эллиптических особенностей Сатаке–Такахаши в [**43**] и Кравитц–Миланов–Шень в работах [**27, 34, 35**] (кроме некоторых специальных случаев). Двойственная группа в данном случае является максимальной группой симметрий $G^T = G_W$. Подходящей А–моделью Ландау–Гинзбурга в данном случае оказалась теория FJRW.

Теорема 3.10 (Теорема 3.6 в [**43**], Теорема 6.6 в [**34**] и Теорема 1.5 в [**35**]). *Для простой эллиптической особенности $\tilde{E}_N$ имеют место следующие изоморфизмы:*

$$M_{\tilde{E}_6} \cong M^{GW}_{\mathbb{P}^1_{3,3,3}}, \quad M_{\tilde{E}_7} \cong M^{GW}_{\mathbb{P}^1_{4,4,2}}, \quad M_{\tilde{E}_8} \cong M^{GW}_{\mathbb{P}^1_{6,3,2}},$$

которые доказывают зеркальную симметрию CY–LG. Зеркальная симметрия LG–LG устанавливается следующим изоморфизмом:

$$M_{\tilde{E}_N} \cong M^{\mathrm{FJRW}}_{\tilde{E}_N, G_{max}} \quad N = 6, 7, 8.$$

Ключевым компонентом всякого зеркального изоморфизма является выбор примитивной формы особенности. Мы не приводим подробностей выбора всех примитивных форм использованных в теореме, которые могут быть найдены в оригинальных публикациях.

4.1. Зеркальная симметрия для особенности $\tilde{E}_8$ с тривиальной группой симметрии. Ниже мы приводим явный вид зеркального изоморфизма CY–LG для особенности $\tilde{E}_8$, который был найден в [**35**].

Теорема 3.11 (Теорема 1.5 в [**35**]). *Обозначим через $M_{\tilde{E}_8}$ фробениусово многообразие, ассоциированное с разверткой особенности $\tilde{E}_8$, и через $M_{\mathbb{P}^1_{6,3,2}}$ фробениусово многообразие теории Громова–Виттена орбифолда $\mathbb{P}^1_{6,3,2}$. Тогда имеет место следующий зеркальный изоморфизм:*

$$M_{\mathbb{P}^1_{6,3,2}} \cong M_{\tilde{E}_8},$$

где фробениусова структура особенности фиксирована примитивной формой ζ_{LCSL} в точке $\sigma = \frac{3}{2}(-2)^{1/3}$, заданной периодом π_A (см. Теорему 3.1):

$$\pi_A(s_{-1}) = {}_2F_1\left(\frac{1}{12}, \frac{7}{12}; 1; 1 + \frac{4}{27}s_{-1}^3\right).$$

Плоские координаты степени 0 *связаны следующим образом:*

$$t_{-1} = 2\pi\sqrt{-1}t_{41}/6.$$

В **[35]** авторы приводят явные формулы для зеркального изоморфизма, связывающие базисы двух фробениусовых алгебра. Эти формулы понадобятся нам в дальнейшем и потому мы приводим их ниже в явном виде.

Обозначим через Δ_{ij} порождающие кольца когомологий Чена–Руана орбифолда $\mathbb{P}^1_{6,3,2}$:

$$\Delta_0 = \{pt\}, \ \Delta_{-1} = P, \ \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{14}, \Delta_{15}, \Delta_{21}, \Delta_{22}, \Delta_{31},$$

где P обозначает класс гиперповерхности в $\mathbb{P}^1$. Мы опишем эти порождающие более детально в следующем разделе.

Пусть, как и ранее, $u := -\frac{4}{27}s_{-1}^3$. Определим функции $F_{1,\mathbf{r}}^{(1)}(u)$, $F_{2,\mathbf{r}}^{(1)}(u)$ для $\mathbf{r} \in I$ (см. предыдущий раздел) следующим образом.

$$\begin{cases} F_{1,\mathbf{r}}^{(1)}(u) = {}_2F_1\left(\alpha_\mathbf{r}, \beta_\mathbf{r}; \alpha_\mathbf{r} + \beta_\mathbf{r} - \gamma_\mathbf{r} + 1; 1 - u\right), \\ F_{2,\mathbf{r}}^{(1)}(u) = {}_2F_1\left(\gamma_\mathbf{r} - \alpha_\mathbf{r}, \gamma_\mathbf{r} - \beta_\mathbf{r}; \gamma_\mathbf{r} - \alpha_\mathbf{r} - \beta_\mathbf{r} + 1; 1 - u\right)\,(1-u)^{\gamma_r - \alpha_r - \beta_r}. \end{cases}$$

где веса $\alpha_\mathbf{r}$, $\beta_\mathbf{r}$ и $\gamma_\mathbf{r}$ приведены в Таблице 1.

Table 1. Веса периодов особенности $\tilde{E}_8$

$\phi_\mathbf{r}$	x_1	x_2	x_1^2	x_1x_2	x_1^3	$x_1^2x_2$	x_1^4	$x_1^3x_2$
$\alpha_\mathbf{r}, \beta_\mathbf{r}, \gamma_\mathbf{r}$	$\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}, \frac{11}{12}, \frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3}$

Первая часть зеркального изоморфизма Миланова–Шеня записывается следующим образом:

$$\Delta_0 \mapsto 1, \quad \Delta_{-1} \mapsto 36(1-u)\phi_{41}\pi_A^2,$$

где π_A определен в вышеприведенной Теореме. Остальные порождающие идентифицированы следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{11} \mapsto (1-u)^{1/6}\, \phi_{10}\, \pi_A,\\
&\Delta_{15} \mapsto (1-u)^{5/6}\, \phi_{31}\, \pi_A,\\
&\Delta_{21} \mapsto (1-u)^{1/3}\Big(F^{(1)}_{2,20}(u)\, \phi_{01} + (-2)^{-1/3}\ F^{(1)}_{2,01}(u)\, \phi_{20}\Big)\, \pi_A,\\
&\Delta_{12} \mapsto (1-u)^{1/3}\Big(F^{(1)}_{1,20}(u)\, \phi_{01} - 3(-2)^{-1/3}\ F^{(1)}_{1,01}(u)\, \phi_{20}\Big)\, \pi_A,\\
&\Delta_{31} \mapsto (1-u)^{1/2}\Big(F^{(1)}_{2,30}(u)\, \phi_{11} + (-2)^{-1/3}\ F^{(1)}_{2,11}(u)\, \phi_{30}\Big)\, \pi_A,\\
&\Delta_{13} \mapsto (1-u)^{1/2}\Big(F^{(1)}_{1,20}(u)\, \phi_{11} - 2(-2)^{-1/3}\ F^{(1)}_{1,11}(u)\, \phi_{30}\Big)\, \pi_A,\\
&\Delta_{22} \mapsto (1-u)^{2/3}\Big(F^{(1)}_{2,40}(u)\, \phi_{21} + (-2)^{-1/3}\ F^{(1)}_{2,21}(u)\, \phi_{40}\Big)\, \pi_A,\\
&\Delta_{14} \mapsto (1-u)^{2/3}\Big(F^{(1)}_{1,40}(u)\, \phi_{21} - \frac{5}{3}(-2)^{-1/3}\ F^{(1)}_{1,21}(u)\, \phi_{40}\Big)\, \pi_A.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Миланов, Руан, Шень и Кравитц фиксируют примитивную форму явным решением $\pi(\sigma)$ уравнения Пикара–Фукса. Такой подход предоставляет в качестве преимущества возможность использования анализа самого уравнения Пикара–Фукса для самих примитивных форм. Однако в таком случае практически невозможным представляется определение цикла A_σ, соответствующего решению $\pi(\sigma)$.

ГЛАВА 4

Теория Громова–Виттена эллиптических орбифолдов

Алгебраические многообразия, возникающие в качестве A–моделей в данном тезисе, встречаются в литературе под именем *эллиптических орбифолдов.* Все такие орбифолды представляются как проективная прямая $\mathbb{P}^1$ с конечным числом k точек, имеющих групповую структуру $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{a_1}, \dots, \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{a_k})$ где $a_i \geq 2$ и $\sum 1/a_k = 1$. Такие орбифолды называются эллиптическими ввиду того, что все они могут быть получены факторизацией эллиптических кривых по действию конечной группы. Таким образом существуют лишь 4 эллиптических орбифолда: $\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}$, $\mathbb{P}^1_{3,3,3}$, $\mathbb{P}^1_{4,4,2}$, $\mathbb{P}^1_{6,3,2}$.

Для того, чтобы доказать зеркальную симметрию типа CY–LG важно знать потенциал рода 0 эллиптических орбифолдов, который известен, однако же, в явном виде только для орбифолдов $\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}$ и $\mathbb{P}^1_{3,3,3}$ (см. [**43**]).

В данной главе мы приведем результаты [**43**] в том виде, в каком они будут использованы нами в дальнейшем. Также мы приведем явные формулы для некоторого ограничения теории Громова–Виттена орбифолда $\mathbb{P}^1_{6,3,2}$.

1. Теория Громова–Виттена орбифолда $\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}$

Фробениусова потенциал для $M_{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}$ был найден явно в работе [**43**]. Строгий стек инерции имеет вид:

$$\overline{\mathcal{I}}\mathbb{P}^1_{2,2,2,2} = \mathbb{P}^1_{2,2,2,2} \coprod B(\mathbb{Z}_2) \coprod B(\mathbb{Z}_2) \coprod B(\mathbb{Z}_2) \coprod B(\mathbb{Z}_2).$$

Обозначим через $\Delta_0, \dots, \Delta_5$ базис $H^*_{orb}(\mathbb{P}^1_{2,2,2,2})$ такой что:

$$H^0_{orb}(\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}) \simeq \mathbb{Q}\Delta_0,\ H^1_{orb}(\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{4} \mathbb{Q}\Delta_i,\ H^2_{orb}(\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}) \simeq \mathbb{Q}\Delta_5.$$

Спаривание задано своими значениями на базисе:

$$\eta(\Delta_0, \Delta_5) = 1, \quad \eta(\Delta_i, \Delta_j) = \frac{1}{2}\delta_{i,j},\ 1 \leq i, j \leq 4.$$

Потенциал рода ноль имеет следующий явный вид.

$$\mathcal{F}^{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_{-1}) = \frac{1}{2}t_0^2 t_{-1} + \frac{1}{4}t_0(\sum_{i=1}^{4} t_i^2) + (t_1t_2t_3t_4)f_0(q)$$
$$+ \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{4} t_i^4\right) f_1(q) + \frac{1}{6}\left(\sum_{i<j} t_i^2 t_j^2\right) f_2(q), \quad q := \exp(t_{-1}).$$

для некоторых функций f_i, зависящих только от $\exp(t_{-1})$. Квазиоднородность задана эйлеровым полем E:

$$E := t_0 \frac{\partial}{\partial t_0} + \sum_{i=1}^{4} t_i \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_i}, \quad E \cdot \mathcal{F}^{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}} = 2\mathcal{F}^{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}.$$

Уравнение WDVV для $\mathcal{F}^{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}$ эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} q\frac{d}{dq} f_0(q) &= f_0(q) \left(\frac{8}{3} f_2(q) - 24 f_1(q) \right), \\ q\frac{d}{dq} f_1(q) &= -\frac{2}{3} f_0(q)^2 - \frac{16}{3} f_1(q) f_2(q) + \frac{8}{9} f_2(q)^2, \\ q\frac{d}{dq} f_2(q) &= 6 f_0(q)^2 - \frac{8}{3} f_2(q)^2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Из явного вида уравнения WDVV мы получаем следующее предложение.

Предложение 4.1. *Пусть функции $(f_0(q), f_1(q), f_2(q))$ представлены своими рядами Тэйлора в окрестности $q = 0$ и выполнено $f_0(0) = 0$. Тогда эти ряды полностью определены числами $(f_0(0), f_1(0), f_2(0))$.*

Доказательство. Обозначим через $c_k^{(a)}$ следующие числа:

$$f_a(q) = \sum_{k \geq 0} c_k^{(a)} \frac{q^k}{k!}.$$

Лемма 4.2. *Пусть функции $f_0(q)$, $f_1(q)$, $f_2(q)$ удовлетворяют системе (4.1). Для всякого $n \geq 1$ положим:*

$$\begin{aligned} K_n^{(0)} &:= \sum_{p+q=n, p\neq n, q\neq n} \left(\frac{8}{3} c_p^{(0)} c_q^{(2)} - 24 c_p^{(0)} c_q^{(1)} \right), \\ K_n^{(1)} &:= \sum_{p+q=n, p\neq n, q\neq n} \left(-\frac{2}{3} c_p^{(0)} c_q^{(0)} - \frac{16}{3} c_p^{(1)} c_q^{(2)} + \frac{8}{9} c_p^{(2)} c_q^{(2)} \right), \\ K_n^{(2)} &:= \sum_{p+q=n, p\neq n, q\neq n} \left(6 c_p^{(0)} c_q^{(0)} - \frac{8}{3} c_p^{(2)} c_q^{(2)} \right). \end{aligned}$$

Тогда коэффициенты разложения функции $f_a(q)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} n c_n^{(0)} &= K_n^{(0)} + \frac{8}{3}(c_n^{(0)} c_0^{(2)} + c_0^{(0)} c_n^{(2)}) - 24 (c_0^{(0)} c_n^{(1)} + c_n^{(0)} c_0^{(1)}), \\ n c_n^{(1)} &= K_n^{(1)} - \frac{2}{3} c_0^{(0)} c_n^{(0)} - \frac{16}{3}(c_n^{(1)} c_0^{(2)} + c_0^{(1)} c_n^{(2)}) + \frac{8}{9} c_n^{(2)} c_0^{(2)}, \quad n \geq 1. \\ n c_n^{(2)} &= K_n^{(2)} + 6 c_n^{(0)} c_0^{(0)} - \frac{8}{3} c_n^{(2)} c_0^{(2)}. \end{aligned} \right.$$

Доказательство. Это следует моментально сравнением разложений по степеням q левой и правой частей уравнений (4.1). □ Для $q = 0$ уравнение (4.1) даёт:

$$9 c_0^{(0)} c_0^{(0)} - 4 c_0^{(2)} c_0^{(2)} = 0.$$

Таким образом ме имеем $c_0^{(2)} = 0$. Для $n = 1$ выше приведенная Лемма утверждает:

$$c_1^{(0)} = -24c_1^{(0)}c_0^{(1)}.$$

Пусть $c_1^{(0)} = 0$ тогда несложно заметить, что $f_0(q) \equiv 0$. В противном случае мы имеем $24c_0^{(1)} = -1$.

Утверждение Леммы приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} (n-1)c_n^{(0)} = K_n^{(0)}, \quad c_1^{(0)} \neq 0, & \\ nc_n^{(1)} = K_n^{(1)} + \dfrac{2}{9n}K_n^{(2)}, & n \geq 1 \\ nc_n^{(2)} = K_n^{(2)}. & \end{cases}$$

Такая система задает рекурсию, восстанавливающую все коэффициенты функций $f_0(q)$, $f_1(q)$, $f_2(q)$. □

Замечание. Условия выше приведенного предложения могут быть ослаблены. Однако нам она требует только в таком виде.

Для того, чтобы привести явную формулу для фробениусова потенциала орбифолда $\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}$ выпишем функции $f_k(q)$ в явном виде.

Определение. Рассмотрим функции $\vartheta_i(z, \tau)$, зависящие от $\tau \in \mathbb{H}$ и $z \in \mathbb{C}$, представленные следующими рядами Фурье:

$$\vartheta_1(z,\tau) = \sqrt{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{(n-1/2)^2\pi\sqrt{-1}\tau} e^{(2n-1)\pi\sqrt{-1}z},$$

$$\vartheta_2(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(n-1/2)^2\pi\sqrt{-1}\tau} e^{(2n-1)\pi\sqrt{-1}z},$$

$$\vartheta_3(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{n^2\pi\sqrt{-1}\tau} e^{2n\pi\sqrt{-1}z},$$

$$\vartheta_4(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{n^2\pi\sqrt{-1}\tau} e^{2n\pi\sqrt{-1}z}.$$

Мы будем называть эти функции *тета–функциями Якоби*, или просто *тета–функциями*.

Из явного вида рядов Фурье тета–функций Якоби следует равенство:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_i(z,\tau)}{\partial z^2} = 4\pi\sqrt{-1}\frac{\partial \vartheta_i(z,\tau)}{\partial \tau}, \quad 1 \leq i \leq 4.$$

Определение. *Тета–константами Якоби* $\vartheta_i(\tau)$ для всех i, т.ч. $2 \leq i \leq 4$, называются функции $\vartheta_i(\tau) := \vartheta_i(0, \tau)$.

Заметим, что $\vartheta_1(0,\tau) \equiv 0$, ввиду чего мы не рассматриваем эту тета–константу в дальнейшем.

Обозначение 4.1. *Для упрощения записи мы будем опускать аргумент тета–констант, если он фиксирован:*

$$\vartheta_i'(\tau) := \frac{\partial}{\partial z}\vartheta_i(\tau).$$

Определение. Для всякого $\tau \in \mathbb{H}$ определим:

$$X_k^\infty(\tau) := 2\frac{\partial}{\partial \tau}\log\vartheta_k, \quad 2 \le k \le 4.$$

Также рассмотрим функции $X_k^\infty(q)$, заданные как функции от $q = \exp(\pi\sqrt{-1}\tau)$.

$$X_k^\infty(q) := \frac{1}{\pi\sqrt{-1}}X_k^\infty\left(\frac{\tau}{\pi\sqrt{-1}}\right).$$

Теорема Сатаке и Такахаши утверждает:

Теорема 4.3 (Теорема 2.1 в [**43**]). *Функции $f_k(q)$, задающие потенциал рода 0 теории Громова–Виттена орбифолда $\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}$, имеют следующий вид:*

$$\left\{\begin{aligned} &f_0(q) := \tfrac{1}{8}X_3^\infty(q) - \tfrac{1}{8}X_4^\infty(q),\\ &f_1(q) := -\tfrac{1}{12}X_2^\infty(q) - \tfrac{1}{48}X_3^\infty(q) - \tfrac{1}{48}X_4^\infty(q),\\ &f_2(q) := -\tfrac{3}{16}X_3^\infty(q) - \tfrac{3}{16}X_4^\infty(q).\end{aligned}\right. \tag{4.2}$$

Записанное через функции $X_k^\infty(q)$, уравнение WDVV на $\mathcal{F}_0^{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}$ эквивалентно системе уравнений, известной под именем системы Альфана:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{d\tau}(X_2^\infty(\tau) + X_3^\infty(\tau)) = 2X_2^\infty(\tau)X_3^\infty(\tau),\\ &\frac{d}{d\tau}(X_3^\infty(\tau) + X_4^\infty(\tau)) = 2X_3^\infty(\tau)X_4^\infty(\tau),\\ &\frac{d}{d\tau}(X_4^\infty(\tau) + X_2^\infty(\tau)) = 2X_4^\infty(\tau)X_2^\infty(\tau).\end{aligned}\right. \tag{4.3}$$

Хорошо известным является тот факт, что функции X_i^∞ задают решение этой системы (см. например [**38**]). Мы не приводим доказательства этого факта т.к. оно использует некоторые дополнительные свойства тета–констант, не представляющие важность для нас.

Предложение 4.4. *Применяя линейную замену переменных потенциал $\mathcal{F}_0^{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}$ записывается в следующем виде:*

$$\mathcal{F}_0^{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}(t_{-1}, t_0, \tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3, \tilde{t}_4) = \frac{t_0^2 t}{2} + \frac{t_0}{4}\sum_{i=1}^4(\tilde{t}_i)^2 - (\tilde{t}_1^2\tilde{t}_3^2 + \tilde{t}_2^2\tilde{t}_4^2)\frac{1}{16}X_3^\infty(t_{-1})$$

$$- (\tilde{t}_1^2\tilde{t}_4^2 + \tilde{t}_2^2\tilde{t}_3^2)\frac{1}{16}X_4^\infty(t_{-1}) - (\tilde{t}_3^2\tilde{t}_4^2 + \tilde{t}_1^2\tilde{t}_2^2)\frac{1}{16}X_2^\infty(t_{-1}) - \frac{1}{64}\sum_{i=1}^4(\tilde{t}_i)^4\gamma^\infty(t_{-1})$$

с таким же эйлеровым полем:

$$E(t_0, \tilde{t}_i) = E(t_0, t_i),$$

и функцией $\gamma^\infty(t_{-1}) = \frac{2}{3}\sum X_i^\infty(t_{-1})$.

Доказательство. Применим к $\mathcal{F}_0^{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}$ замену переменных $t_1 = (\tilde{t}_4 - \tilde{t}_3)/\sqrt{2}$, $t_2 = (\tilde{t}_4 + \tilde{t}_3)/\sqrt{2}$, $t_3 = (\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2)/\sqrt{2}$, $t_4 = (\tilde{t}_1 + \tilde{t}_2)/\sqrt{2}$, которая очевидным образом сохраняет уравнение WDVV и метрику η. Простые вычисления дают:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}f_2(q) + f_1(q) = -\frac{1}{12}\sum X_i^\infty(q) = -\frac{1}{8}\gamma^\infty(q), \\ \frac{2}{3}f_2(q) - f_0(q) = -\frac{1}{4}X_3^\infty(q), \\ \frac{2}{3}f_2(q) + f_0(q) = -\frac{1}{4}X_4^\infty(q), \\ 3f_1(q) - \frac{1}{3}f_2(q) = -\frac{1}{4}X_2^\infty(q). \end{cases}$$

Тривиальные вычисления показывают, что эйлерово поле сохраняется в новый координатах.

Записывая функции $X_k^\infty(q)$ через $X_k^\infty(t_{-1})$ и применяя еще одну замену переменных $\tilde{t}_{-1} = t_{-1}/\pi\sqrt{-1}$, $\tilde{t}_0 = t_0\sqrt{\pi\sqrt{-1}}$, $\tilde{t}_i = t_i/(\pi\sqrt{-1})^{1/4}$ мы получаем требуемый потенциал. □

2. Вычислительные аспекты теории Громова–Виттена

Задача явного вычисления потенциала Громова–Виттена (и даже некоторых корреляторов теории Громова–Виттена) является не решенной и сложной в общем случае. Однако же для эллиптических орбифолдов, рассматриваемых в данной работе, мы можем применить два мощных инструмента для решения это задачи. Это некоторая теорема о единственности Ишибаши–Шираиши–Такахаши [**21**] и теорема о квази–модулярности Миланова–Шеня [**36**]. Первая теорема удобна для явных вычислений (до определенного порядка), а следствием второй теоремы является то, что эти вычисления достаточно проводить до фиксированного конечного порядка.

2.1. Теорема о единственности фробениусова многообразия эллиптических орбифолдов. Пусть $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$ таковы, что $2 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$. Положим:

$$\chi_A := \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i} - 1, \quad \mu_A := \sum_{i=1}^{3} a_i - 1.$$

Теорема о единственности Ишибаши–Шираиши–Такахаши утверждает:

Теорема 4.5 (Теорема 3.1 в [**21**]). *Существует единственное фробениусово многообразие M размерности μ_A с плоскими координатами:*

$$\{t_1, t_{\mu_A}, t_{i,j}\}, \ \text{где} \quad 1 \leq i \leq 3, \ 1 \leq j \leq a_i - 1.$$

и потенциалом $\mathcal{F}$ конформной размерности 1, удовлетворяющим следующим условиям:

(1) *Единичный вектор e и эйлерово поле E имеют следующий вид*

$$e = \frac{\partial}{\partial t_1},\ E = t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{a_i - 1} \frac{a_i - j}{a_i} t_{i,j} \frac{\partial}{\partial t_{i,j}} + \chi_A \frac{\partial}{\partial t_{\mu_A}}.$$

(2) *Невырожденная симметричная билинейная форма η на $\mathcal{T}_M$ удовлетворяет:*

$$\eta\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_{\mu_A}}\right) = \eta\left(\frac{\partial}{\partial t_{\mu_A}}, \frac{\partial}{\partial t_1}\right) = 1,$$

$$\eta\left(\frac{\partial}{\partial t_{i_1,j_1}}, \frac{\partial}{\partial t_{i_2,j_2}}\right) = \begin{cases} \frac{1}{a_{i_1}} & i_1 = i_2 \text{ и } j_2 = a_{i_1} - j_1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(3) *Фробениусов потенциал $\mathcal{F}$ удовлетворяет: $E\mathcal{F}|_{t_1=0} = 2\mathcal{F}|_{t_1=0}$,*

$$\mathcal{F}|_{t_1=0} \in \mathbb{C}\left[\left[t_{1,1}, \ldots, t_{1,a_1-1}, \ldots, t_{i,j}, \ldots, t_{3,1}, \ldots, t_{3,a_3-1}, e^{t_{\mu_A}}\right]\right].$$

(4) *Пусть выполнено (3), тогда мы имеем:*

$$\mathcal{F}|_{t_1=e^{t_{\mu_A}}=0} = \sum_{i=1}^{3} \mathcal{G}^{(i)}, \quad \mathcal{G}^{(i)} \in \mathbb{C}[[t_{i,1}, \ldots, t_{i,a_i-1}]],\ 1 \le i \le 3.$$

(5) *Пусть выполнено (3), тогда в базисе $\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_{1,1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_{3,a_3-1}}, \frac{\partial}{\partial t_{\mu_A}}$ пространства T_0M, умножение $\circ$ может быть продолжено до предела $t_1 = t_{1,1} = \cdots = t_{3,a_3-1} = e^{t_{\mu_A}} = 0$. $\mathbb{C}$-алгебра полученная в этом пределе изоморфна*

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3] \Big/ \left(x_i x_j,\ a_i x_i^{a_i} - a_j x_j^{a_j}\right)_{1 \le i < j \le 3},$$

где $\partial/\partial t_{i,j}$ отображаются в x_i^j для $i = 1, \ldots, 3, j = 1, \ldots, a_i - 1$ и $\partial/\partial t_{\mu_A}$ отображается в $a_1 x_1^{a_1}$.

(6) *Слагаемое*

$$\left(\prod_{i=1}^{3} t_{i,1}\right) e^{t_{\mu_A}}$$

входит в $\mathcal{F}$ с коэффициентом 1.

Эта теорема особенно важна ввиду следующей теорема Ишибаши–Ширaиши–Такахаши, утверждающей, что теория Громова–Виттена эллиптических орбифолдов удовлетворяет условиям приведенной выше теоремы:

Теорема 4.6 (Теорема 4.2 в [**21**]). *Условия Теоремы 4.5 удовлетворены потенциалом рода 0 теории Громова–Виттена орбифолда $\mathbb{P}^1_{a_1,a_2,a_3}$.*

Для эллиптических орбифолдов мы имеем: $\sum_i \frac{1}{a_i} = 1$ и $\chi_A = 0$. Таким образом потенциалы теорий Громова–Виттена эллиптических орбифолдов зависят от $\exp(t_{-1})$ ежели чем от переменной t_{-1}. Такое же утверждение верно и для орбифолда $\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}$.

2.2. Теория Громова–Виттена и модулярные формы. В предыдущем разделе мы описали в явном виде потенциал теории Громова–Виттена $\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}$ через эллиптические функции. Мы сделаем похожее утверждение для случая эллиптических орбифолдов.

Определение. Рассмотрим подгруппу конечного индекса $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Пусть $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, а $f(\tau)$ – функция, голоморфная на $\mathbb{H}$.

- $f(\tau)$ называется *модулярной формой веса* k если она удовлетворяет следующим условиям:
$$\frac{1}{(c\tau+d)^k} f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = f(\tau) \text{ для всех } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$
- $f(\tau)$ называется *квазимодулярной формой веса* k *и глубины* m если существуют функции $f_0(\tau), \ldots, f_m(\tau)$, голоморфные на $\mathbb{H}$, т.ч.:
$$\frac{1}{(c\tau+d)^k} f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \sum_{l=0}^{m} f_l(\tau) \left(\frac{c}{c\tau+d}\right)^l \text{ для всех } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Примерами (квази)модулярных форм являются ряды Эйзенштейна. Группой Γ в этих случаях является $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ — полная модулярная группа. Обозначим через $E_{2k}(\tau)$ для всякого целого числа $k \geq 1$ ряд Эйзенштейна:
$$E_{2k}(\tau) := 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) e^{2\pi\sqrt{-1}n\tau},$$
где $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, а B_{2k} — число Бернулли. В частности мы имеем $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$.

Хорошо известно, что ряд Эйзенштейна E_{2k} удовлетворяет условию модулярности при $k \geq 2$. Для $k = 1$ это условие должно быть изменено следующим образом. Для всякой матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ верно:

$$\begin{aligned} E_2(\tau) &= \frac{1}{(c\tau+d)^2} E_2\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) - \frac{6c}{\pi\sqrt{-1}(c\tau+d)}, \\ E_{2k}(\tau) &= \frac{1}{(c\tau+d)^{2k}} E_{2k}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right), \ k \geq 2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Из этих равенств и определения следует моментально, что E_{2k} для $k \geq 2$ являются модулярными формами, а E_2 — квазимодулярной формой.

В дальнейшем для нас будут важны подгруппы $\Gamma(N) \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, называемые *главными конгруэнтными подгруппами* :

Определение. Для всякого положительного $N \in \mathbb{N}$ определим:

$$\Gamma(N) := \{A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \mid A \equiv \pm I \ \mathrm{mod} N\}.$$

Следующий результат был доказан Милановым–Шенем с помощью анализа теории Саито простых эллиптических особенностей:

Теорема 4.7 (Теорема 1.2 и Следствие 1.3 в [**36**]). *Пусть $\mathcal{X} = \mathbb{P}^1_{a_1,a_2,a_3}$ — эллиптический орбифолд и $\mathcal{F}_0(\boldsymbol{t})$ — потенциал рода 0 соответствующей теории Громова–Виттена. Представим $\boldsymbol{t}$ как $\boldsymbol{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_n t_{-1})$, где t_0 и t_{-1} соответствуют классам точки и гиперплоскости в $H^*_{orb}(\mathcal{X})$ соответственно. Определим функции $f_{i_1,\ldots,i_{n-1}}(t_{-1})$ как коэффициенты $\mathcal{F}_0(\boldsymbol{t})$ по переменным $t_1^{i_1} \ldots t_n^{i_n}$*

$$f_{i_1,\ldots,i_{n-1}}(t_{-1}) := [t_1^{i_1} \ldots t_n^{i_n}]\mathcal{F}_0^{\mathcal{X}}.$$

Тогда разложения по $\exp(t_{-1})$ функций $f_{i_1,\ldots,i_{n-1}}(t_{-1})$ являются рядами Фурье некоторых квазимодулярных форм веса $\sum_{k=1}^n i_k - 2$ по группе $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, где

$$\Gamma = \begin{cases} \Gamma(3), & \mathcal{X} = \mathbb{P}^1_{3,3,3}, \\ \Gamma(4), & \mathcal{X} = \mathbb{P}^1_{4,4,2}, \\ \Gamma(6), & \mathcal{X} = \mathbb{P}^1_{6,3,2}. \end{cases}$$

Замечание. Ряд Фурье квазимодулярной формы является рядом по $\exp(\pi i t)$, в то время как потенциал теории Громова–Виттена орбифолда $\mathcal{X}$ является многочленом по $\mathbf{t}'$ и бесконечным рядом по $\exp(t_{-1})$. Применяя замену переменных как в Предложении 4.4, теорема утверждает, что коэффициенты $\mathcal{F}(\mathbf{t})$ по переменным $\mathbf{t}'$ являются квазимодулярными формами.

В дальнейшем нам будет важно следствие:

Следствие 4.8. *Потенциал теории Громова–Виттена эллиптических орбифолдов определен и голоморфен для всех $t_{-1} \in \mathbb{H}$. Однако же он не определен при $t_{-1} = 0$.*

Теорема Миланова–Шеня удобна для вычислительных задач ввиду следующего факта. Пусть $f(\tau)$ и $g(\tau)$ — две модулярные формы веса k по отношению к группе $\Gamma(N)$. Рассмотрим ряды Фурье f и g:

$$f(\tau) = \sum_{p \geq 0} f_p q^p, \ g(\tau) = \sum_{p\geq 0} g_p q^p \quad \text{где} \quad q := \exp(\pi\sqrt{-1}\tau)$$

Предложение 4.9 (Раздел 3.3 в [**25**]). *Определим число*

$$L_N := \frac{k}{12} N \prod_{m|N} \left(1 + \frac{1}{m}\right),$$

называемое граничным числом Штурма. Тогда если $f_p - g_p = 0$ *для всех* $p \leq L_N$, *то* $f(\tau) - g(\tau) \equiv 0$.

Несложно заметить, что произведение двух модулярных форм является также модулярной формой, а также что произведение квазимодуряных форм является также квазимодулярной формой. Обозначим через $M(\Gamma)$ и $\tilde{M}(\Gamma)$ *кольца всех модулярных и квазимодулярных форм* по группе Γ соответственно.

Теорема 4.10 (Предложение 1 в [**28**]). *Для всякой подгруппы конечного индекса* Γ *верно:*

$$\tilde{M}(\Gamma) = M(\Gamma) \otimes \mathbb{C}[E_2].$$

2.3. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ **действие на пространстве фробениусовых многообразий.** Для того, чтобы усилить утверждение Теоремы 4.7 определим действие $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ на потенциале Громова–Виттена. В данной работе нам потребуется такое действие лишь в роде 0, однако оно было определено в общем случае в [**5**].

2.3.1. *Преобразование инверсии Дубровина.* Пусть потенциал WDVV $\mathcal{F}$ записан так что:

$$\mathcal{F}(\mathbf{t}) = \frac{1}{2}t_1^2 t_n + t_1 \sum_{p\leq q} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(p,q)|}\eta_{p,q}t_p t_q + H(t_2,\dots,t_n),$$

для некоторой функции $H = H(t_2,\dots,t_n)$.

Рассмотрим функцию $\mathcal{F}^I$.

$$\mathcal{F}^I(\hat{\mathbf{t}}) = (t_n)^{-2}\left[\mathcal{F}(\mathbf{t}) - \frac{1}{2}t_1\sum_{i,j}\eta_{ij}t_i t_j\right], \tag{4.5}$$

где для всех $1 < \alpha < n$:

$$\hat{t}_1 := \frac{1}{2}\frac{\sum_{ij}\eta_{ij}t_i t_j}{t_n}, \quad \hat{t}_\alpha := \frac{t_\alpha}{t_n}, \quad \hat{t}_n := -\frac{1}{t_n}.$$

Предложение 4.11 (Приложение Б в [**11**]). *Функция* $\mathcal{F}^I$ *является решением уравнения WDVV и удовлетворяет:*

$$\frac{\partial^3\mathcal{F}^I}{\partial\hat{t}_1\partial\hat{t}_a\partial\hat{t}_b} = \eta_{ab}.$$

2.3.2. *Обобщение на* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Следующее предложение определяет действие $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ на пространстве фробениусовых многообразий.

Предложение 4.12. *Пусть* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. *Тогда функция* $\mathcal{F}^A$ *определенная:*

$$\mathcal{F}^A(\boldsymbol{t}) := \frac{1}{2}t_1^2 t_n + t_1\sum_{p\leq q}\frac{1}{|\mathrm{Aut}(p,q)|}\eta_{p,q}t_p t_q + \frac{c}{8(ct_n+d)}\left(\sum_{p\leq q}\frac{1}{|\mathrm{Aut}(p,q)|}\eta_{p,q}t_p t_q\right)^2$$

$$+ (ct_n+d)^2 H\left(\frac{t_2}{ct_n+d},\dots,\frac{t_{n-1}}{ct_n+d},\frac{at_n+b}{ct_n+d}\right).$$

является решение уравнения WDVV.

Доказательство. Действие A на переменной t_n может быть разложено следующим образом.

$$A\cdot t_n = \frac{at_n+b}{ct_n+d} = T_2\cdot S_{c^2}\cdot I\cdot T_1\cdot t_n,$$

где T_1 задает сдвиг $t_n\to t_n+\frac{a}{c}$, S_{c^2} — растяжение $t_n\to c^2t_n$, T_2 — еще один сдвиг $t_n\to t_n+\frac{d}{c}$ и $I: t_n\to -1/t_n$. "Проквантуем" этого действия на переменной t_n в действие на потенциала фробениусова многообразия. Очевидно, что сдвиги T_1 и T_2 сохраняют спаривание η_{pq} и уравнение WDVV. Действие I квантуется с помощью преобразования инверсии Дубровина (см. Предложение 4.11 выше). Рассматривая композицию этих действий мы получаем требуемое. □

Условие квазимодуряности Теоремы 4.7 эквивалентно следующему условию:

$$\mathcal{F}^A = \mathcal{F},\quad \forall A\in\Gamma.$$

Пример 4.13 (Приложение С в [**11**]). Рассмотрим потенциал ранга 3:

$$\mathcal{F}^3 := \frac{t_0^2t_{-1}}{2}+\frac{1}{2}t_0t_1^2-\frac{t_1^4}{16}\frac{\pi\sqrt{-1}}{3}E_2(t_{-1}).$$

Из квазимодуряности ряда E_2 следует, что $\mathcal{F}^A=\mathcal{F}$ для всех $A\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

3. Теория Громова–Виттена орбифолда $\mathbb{P}^1_{6,3,2}$

По настоящий момент открытой проблемой является явная формула для потенциала рода 0 теории Громова–Виттена $\mathbb{P}^1_{6,3,2}$. Однако мы можем вычислить его до любой желаемой степени с помощью Теоремы 4.5. Вместе с Теоремой 4.7 мы получаем явные формулы для части потенциала рода 0.

3.1. Потенциал теории Громова–Виттена $\mathbb{P}^1_{6,3,2}$. Пусть $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{N}$. Рассмотрим базис $\Delta_0,\Delta_{-1},\Delta_{ij}$ кольца $H^*_{orb}(\mathbb{P}^1_{a_1,a_2,a_3})$ такой что:

$$H^*_{orb}(\mathbb{P}^1_{6,3,2})\simeq\bigoplus\mathbb{Q}[\Delta_0]\bigoplus_{i=1}^{3}\bigoplus_{j=1}^{a_i-1}\mathbb{Q}[\Delta_{ij}]\bigoplus\mathbb{Q}[\Delta_{-1}].$$

Классы Δ_0 и Δ_{-1} соответствуют классам точки и гиперплоскости в $H^*(\mathbb{P}^1)$ соответственно. Спаривание имеет вид:

$$\eta(\Delta_0,\Delta_{-1})=1,\quad \eta(\Delta_{ij},\Delta_{kl})=\frac{1}{a_i}\delta_{i,k}\delta_{j+l,a_i}.$$

Пусть $\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_{6,3,2}}$ — потенциал рода 0 орбифолда $\mathbb{P}^1_{6,3,2}$. Это функция, зависящая от 10 переменных t_0, t_{-1}, t_{ij} со следующим эйлеровым полем:

$$E = t_0\frac{\partial}{\partial t_0} + \sum_{k=1}^{5} t_{1k}\frac{6-k}{6}\frac{\partial}{\partial t_{1k}} + \sum_{k=1}^{3} t_{2k}\frac{3-k}{3}\frac{\partial}{\partial t_{2k}} + t_{31}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_{31}}, \quad E\cdot\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_{6,3,2}} = 2\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_{6,3,2}}.$$

Из условия квазиоднородности мы видим, что $\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_{6,3,2}}$ зависит полиномиально от t_0, t_{ij} и является бесконечным рядом по $\exp(t_{-1})$.

С помощью программы написанной в пакете Mathematica, реализующей Теорему 4.5 (доступна на [**3**]) мы посчитали потенциал $\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_{6,3,2}}$ до $\exp(40t_{-1})$. Мы приводим его здесь только до второго порядка по $\exp(t_{-1})$. В дальнейшем нам понадобятся явные вычисления с большей точностью ограничения этого потенциала, а не всей функции. Немного изменяя обозначения мы запишем потенциал в переменных $\{t_0, t_1, \ldots, t_8, t_9\} = \{t_0, t_{1k}, t_{2k}, t_{31}, t_{-1}\}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_{6,3,2}} = {} & \frac{1}{2}t_0^2t_9 + t_0\left(\frac{t_3^2}{12} + \frac{t_2t_4}{6} + \frac{t_1t_5}{6} + \frac{t_6t_7}{3} + \frac{t_8^2}{4}\right) + \frac{t_2^3}{36} + \frac{1}{6}t_1t_2t_3 - \frac{t_3^4}{288} + \frac{1}{12}t_1^2t_4 - \frac{t_8^4}{96} \\
& - \frac{1}{36}t_2t_3^2t_4 - \frac{1}{72}t_2^2t_4^2 - \frac{1}{72}t_1t_3t_4^2 + \frac{1}{432}t_3^2t_4^3 + \frac{t_2t_4^4}{1296} - \frac{t_4^6}{38880} - \frac{1}{72}t_2^2t_3t_5 - \frac{1}{72}t_1t_3^2t_5 - \frac{1}{36}t_1t_2t_4t_5 \\
& + \frac{1}{324}t_3^3t_4t_5 + \frac{1}{144}t_2t_3t_4^2t_5 + \frac{t_1t_4^3t_5}{1296} - \frac{5t_3t_4^4t_5}{10368} - \frac{1}{144}t_1^2t_5^2 + \frac{1}{432}t_2t_3^2t_5^2 + \frac{1}{432}t_2^2t_4t_5^2 + \frac{1}{432}t_1t_3t_4t_5^2 \\
& - \frac{5t_3^2t_4^2t_5^2}{5184} - \frac{t_2t_4^3t_5^2}{2592} + \frac{t_4^5t_5^2}{34560} + \frac{t_1t_2t_5^3}{1296} - \frac{t_3^3t_5^3}{7776} - \frac{5t_2t_3t_4t_5^3}{7776} - \frac{t_1t_4^2t_5^3}{15552} + \frac{11t_3t_4^3t_5^3}{93312} - \frac{t_2^2t_5^4}{15552} - \frac{t_1t_3t_5^4}{31104} \\
& + \frac{11t_3^2t_4t_5^4}{186624} + \frac{t_2t_4^2t_5^4}{31104} - \frac{13t_4^4t_5^4}{2239488} + \frac{11t_2t_3t_5^5}{933120} + \frac{t_1t_4t_5^5}{933120} - \frac{91t_3t_4^2t_5^5}{11197440} - \frac{11t_3^2t_5^6}{11197440} - \frac{13t_2t_4t_5^6}{16796160} \\
& + \frac{91t_4^3t_5^6}{201553920} - \frac{t_1t_5^7}{235146240} + \frac{43t_3t_4t_5^7}{201553920} + \frac{t_2t_5^8}{201553920} - \frac{41t_4^2t_5^8}{2418647040} - \frac{17t_3t_5^9}{9674588160} \\
& + \frac{809t_4t_5^{10}}{2612138803200} - \frac{809t_5^{12}}{344802322022400} + \frac{t_6^3}{18} - \frac{1}{36}t_6^2t_7^2 + \frac{1}{648}t_6t_7^4 - \frac{t_7^6}{19440} \\
& + e^{t_9}t_1t_6t_8 + \frac{1}{6}e^{t_9}t_3t_4t_6t_8 + \frac{1}{6}e^{t_9}t_2t_5t_6t_8 + \frac{1}{72}e^{t_9}t_4^2t_5t_6t_8 + \frac{1}{72}e^{t_9}t_3t_5^2t_6t_8 + \frac{e^{t_9}t_4t_5^3t_6t_8}{1296} + \frac{e^{t_9}t_5^5t_6t_8}{155520} \\
& + \frac{1}{6}e^{t_9}t_1t_7^2t_8 + \frac{1}{36}e^{t_9}t_3t_4t_7^2t_8 + \frac{1}{36}e^{t_9}t_2t_5t_7^2t_8 + \frac{1}{432}e^{t_9}t_4^2t_5t_7^2t_8 + \frac{1}{432}e^{t_9}t_3t_5^2t_7^2t_8 + \frac{e^{t_9}t_4t_5^3t_7^2t_8}{7776} \\
& + \frac{e^{t_9}t_5^5t_7^2t_8}{933120} + \mathrm{O}(e^{2t_9}).
\end{aligned}$$

3.2. Ограничение потенциала рода 0 Теории Громова–Виттена орбифолда $\mathbb{P}^1_{6,3,2}$. Предложение 4.12 вместе с Теоремой 4.7, Предложением 4.9 и Теоремой 4.10 позволяют записать в явном виде часть потенциала рода 0 орбифолда $\mathbb{P}^1_{6,3,2}$.

Пусть $\mathcal{F}_0^{\mathbb{P}^1_{6,3,2}}(\mathbf{t})$ — потенциал рода 0 теории Громова–Виттена орбифолда $\mathbb{P}^1_{6,3,2}$ с переменными t_α, соответствующими классам Δ_α как в Разделе 3.1:

$$\mathbf{t} = \{t_0, t_{-1}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{15}, t_{21}, t_{22}, t_{31}\}.$$

Рассмотрим функцию $\mathcal{F}^4$:

$$\mathcal{F}^4(t_0, t_{-1}, t_{13}, t_{31}) := \mathcal{F}_0^{\mathbb{P}^1_{6,3,2}} |_{t_{11}=0, t_{12}=0, t_{14}=0, t_{15}=0, t_{21}=0, t_{22}=0} .$$

Предложение 4.14. *Функция $\mathcal{F}^4$ удовлетворяет уравнению WDVV и имеет следующий явный вид:*

$$\mathcal{F}^4 = \frac{1}{2}t_0^2 t_{-1} + t_0\left(\frac{t_{13}^2}{12} + \frac{t_{31}^2}{4}\right) + \frac{1}{36}t_{13}^4 f_1(3t_{-1}) + \frac{1}{18}t_{13}^2 t_{31}^2 f_2(3t_{-1})$$
$$+ \frac{1}{9}t_{13}t_{31}^3 f_0(3t_{-1}) + \left(\frac{1}{12}f_1(3t_{-1}) + \frac{1}{18}f_2(3t_{-1})\right)t_{31}^4.$$

Доказательство. Очевидно, что полагая в ноль определенные переменные ненулевой степени в функции, являющейся решением WDVV, мы получаем функцию, которая тоже является решением WDVV. Используя квазиоднородность $\mathcal{F}_0^{\mathbb{P}^1_{6,3,2}}$ функция $\mathcal{F}^4$ имеет вид:

$$\mathcal{F}^4 = \frac{1}{2}t_0^2 t_{-1} + t_0\left(\frac{t_{13}^2}{12} + \frac{t_{31}^2}{4}\right) + t_{13}^4 g_1(t_{-1}) + t_{13}^2 t_{31}^2 g_2(t_{-1})$$
$$+ t_{13}t_{31}^3 g_3(3t_{-1}) + t_{31}t_{13}^3 g_4(t_{-1}) + t_{31}^4 g_5(t_{-1}),$$

для некоторых неизвестных $g_k(t_{-1})$.

По Теореме 4.7 мы имеем, что эти функции являются квазимодулярными по группе $\Gamma(6)$. Однако из Предложение 4.12 видно, что функции $g_3(t_{-1})$ и $g_4(t_{-1})$ модулярны (веса 2).

Пусть $q = \exp(t_{-1})$. Используя Теорему 4.5 мы подсчитали следующие разложения в ряд для $\mathcal{F}^4$:

$$g_1(q) = \left(-\frac{1}{288} + \frac{q^{12}}{12} + \frac{q^{24}}{4}\right) + \mathrm{O}(q^{30}),\ g_2(q) = \left(\frac{q^6}{2} + q^{12} + 2q^{18}\right) + \mathrm{O}(q^{30}),$$
$$g_3(q) = \left(\frac{q^3}{3} + \frac{4q^9}{3} + 2q^{15} + \frac{8q^{21}}{3} + \frac{13q^{27}}{3}\right) + \mathrm{O}(q^{30}),\ g_4(q) = 0 + \mathrm{O}(q^{30}),$$
$$g_5(q) = \left(-\frac{1}{96} + \frac{q^6}{2} + \frac{5q^{12}}{4} + 2q^{18} + \frac{11q^{24}}{4}\right)t_{31}^4 + \mathrm{O}(q^{30}).$$

Граничное число Штурма L_N для $\Gamma(6)$ есть: $L_6 = 4$. Согласно Теореме 4.7 вес каждой из этих функций равен двум, что налагает ограничение на разложение из Теоремы 4.10. Сравнивая коэффициенты рядов Фурье мы получаем:

$$\frac{1}{9}f_0(q^3) \equiv g_3(q), \quad g_4(q) \equiv 0.$$

Аналогичным образом разложения Фурье функций g_1, g_2, g_5 с точностью до q^{30} совпадают с разложениями в ряд $f_1(q^3)/36$, $f_2(q^3)/18$ и $f_1(q^3)/12 + f_2(q^3)/18$. Однако мы не можем применить здесь Предложение 4.9.

Лемма 4.15. *Рассмотрим функции $\tilde{f}_k(q)$ такие, что:*

$$g_1(q) = \tilde{f}_1(q^3)/36,\ g_2(q) = \tilde{f}_2(q^3)/18,\ g_5(q) = \tilde{f}_1(q^3)/12 + \tilde{f}_2(q^3)/18,$$

тогда уравнение WDVV на $\mathcal{F}^4$ записанное через $\tilde{f}_k(q)$ эквивалентно системе ОДУ (4.1).

Доказательство. Это получено простыми вычислениями. □

Данная лемма завершает доказательство Предложения 4.14. □

3.2.1. *Идея Предложения 4.14.* Доказательство Предложения 4.14 не вполне следует идее самого утверждения.

Рассмотрим два орбифолда $\mathcal{X} = \mathbb{P}^1_{2,2,2,2}$ и $\mathcal{Y} = \mathbb{P}^1_{6,3,2}$. Оба эти орбифолда могут быть представлены как факторы эллиптических кривых по действию конечной группы:

$$\mathcal{X} = [\mathbb{E}/\mathbb{Z}_2]\,, \quad \mathcal{Y} = [\mathbb{E}/\mathbb{Z}_6]\,.$$

Мы можем рассмотреть также фактор $\mathcal{Y} = \mathcal{X}//\mathbb{Z}_3$. Естественно было бы предположить существование отображения $f^* : H^*_{orb}(\mathcal{Y}) \to H^*_{orb}(\mathcal{X})$, которое однако же не может быть изоморфизмом. Вместо этого рассмотрим подпространство $H_s \subset H^*(\mathcal{IX})$ такое, что $H_s \cong f^*\left(H^*(\mathcal{IY})\right)$.

Пусть $\tilde{\gamma}_k \in H_s$ и $\tilde{\gamma}_k = f^*(\gamma_k)$ для $\gamma_k \in H^*(\mathcal{IY})$. Рассмотрим корреляторы:

$$\langle \tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_n \rangle^{\mathcal{X}}_{n,g,\beta} = \prod_{i=1}^{n} ev_k^*(\tilde{\gamma}_k).\left[\overline{M}_{g,n}(\mathcal{X},\beta)\right] \in \mathbb{C}.$$

Мы имеем:

$$\langle \tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_n \rangle^{\mathcal{X}}_{n,g,\beta} = \prod_{i=1}^{n} ev_k^*(\gamma_k).f_*\left[\overline{M}_{g,n}(\mathcal{X},\beta)\right]$$

К сожалению неясно, как выглядит образ виртуального фундаментального класса под действием отображение f_* (ввиду сложности конструкции первого).

В частном случае, описанном в предыдущем разделе осмысленно рассмотрение корреляторов, имеющих Δ_0,Δ_{-1}, Δ_{13} и Δ_{31} из $H^*_{orb}(\mathbb{P}^1_{6,3,2})$, а также $\tilde{\Delta}_0$, $\tilde{\Delta}_{-1}$, $\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2, \tilde{\Delta}_3, \tilde{\Delta}_4$ из $H^*_{orb}(\mathbb{P}^1_{2,2,2,2})$. Следуя описанной выше логике, рассматривая $\mathcal{Y} = \mathcal{X}//\mathbb{Z}_3$ мы можем предположить связь между корреляторами:

$$\Delta_0 \leftrightarrow \tilde{\Delta}_0,\ \Delta_{-1} \leftrightarrow 3\tilde{\Delta}_{-1}$$

и

$$\Delta_{31} \leftrightarrow \tilde{\Delta}_1,\ \Delta_{13} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\tilde{\Delta}_2 + \tilde{\Delta}_3 + \tilde{\Delta}_4\right).$$

так как точка порядка 6 на $\mathbb{P}^1_{6,3,2}$ “собирается” из 3 трех точек порядка 2 на $\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}$ в то время как четвертая “отображается” в точку порядка 2 на $\mathbb{P}^1_{6,3,2}$.

ГЛАВА 5

Фробениусовы структуры орбифолдовых А и Б моделей Ландау–Гинзбурга

В работе [**16**] Фан-Джарвис-Руан построили когомологическую теорию поля $\Lambda_{g,n}$, соответствующую орбифолдовой А–модели Ландау–Гинзбурга. Такая когомологическая теория поля часто называется сокращенно FJRW–теорией по фамилиям авторов, где "W" соответствует Э.Виттену, который предположил существование такой когомологической теории поля. Как и теория Громова–Виттена, теория FJRW задает некоторое фробениусово многообразие (ограничением на род ноль). Однако такое фробениусово многообразие не является единственным возможным, возникающим как орбифолдовая А–модель, а сама теория FRJW не определена в достаточной общности. Другим недостатком теории FJRW является то, что ее сложно вычислить явно.

На настоящий момент не существует определения фробениусовой структуры, соответствующей орбифолдовов Б–модели Ландау–Гинзбурга. Некоторая работа в этом направлении была сделана Р.Кауфманом и М.Кравитцом в [**24, 26**], которые дали определение фробениусовой алгебры в нуле орбифолдовой Б–модели. То есть только лишь кубическую часть по переменным $\mathbf{t}$ всего потенциала $\mathcal{F}(\mathbf{t})$ фробениусовой структуры.

Мы предлагаем ниже *аксиоматизацию* фробениусовых многообразий орбифолдовых А и Б моделей Ландау–Гинзбурга. По отношению к работам Кауфмана и Кравитца мы рассматриваем то же пространство состояний, однако мы не используем конструкцию фробениусовой алгебры, предложенной выше указанными авторами. По отношению в работе Фан–Джарвис–Руан мы рассматриваем более общий класс фробениусовых многообразий. Все аксиомы, которые мы приводим для нашей А–модели либо удовлетворяются, либо предположительно удовлетворяются всякой теорией FJRW. Однако же в нашей случае этих аксиом три, в то время как аксиомы теории FJRW занимает несколько страниц.

Мы будем предполагать, что многочлен W задает обратимую особенность. Введём определение.

Определение. Пусть группа G является Б–допустимой группой симметрий W. Для всякого $g \in G$ определим фиксированное подпространство g:

$$\mathrm{Fix}(g) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N \mid g \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}\},$$

и натуральное число $N_g := \dim \mathrm{Fix}(g)$.

Обозначим через W_g ограничение многочлена W на фиксированное подпространство $g \in G$:

$$W_g := W\mid_{\mathrm{Fix}(g)}, \quad W_g : \mathbb{C}^{N_g} \to \mathbb{C}.$$

1. Орбифолдовая Б–модель Ландау–Гинзбурга

Определение. Пусть G является Б–допустимой группой симметрий многочлена W. Определим:

- Для всякого $g \in G$ обозначим через $\mathcal{L}_{W_g}$ локальную алгебру особенности W_g. Тогда *пространство состояний* орбифолдовой Б–модели имеет следующий вид:

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{g\in G} (\mathcal{L}_{W_g})^G.$$

- Пусть e является единицей $\mathcal{L}_W$. Определим:

$$\mathcal{H}^{tw} := \bigoplus_{g\in G,\ g\neq e} (\mathcal{L}_{W_g})^G.$$

  Тогда мы имеем:

$$\mathcal{H} := (\mathcal{L}_{W_e})^G \oplus \mathcal{H}^{tw}.$$

  Подпространство $(\mathcal{L}_{W_e})^G$ будем называть *неподкрученным сектором* подпространства $\mathcal{H}$, а пространство $\mathcal{H}^{tw}$ — *подкрученным сектором* пространства $\mathcal{H}$.

- Для всех $g \in G$ обозначим через η_g резидуальное спаривание W_g ограниченное на $(\mathcal{L}_{W_g})^G$. Определим спаривание $\eta^{\mathcal{H}}$ на $\mathcal{H}$ следующим образом:

$$u, v \in \mathcal{H} \Rightarrow \eta^{\mathcal{H}}(u,v) = \begin{cases} \eta_g(u,v), \text{ для } u \in (\mathcal{L}_{W_g})^G, v \in (\mathcal{L}_{W_{g^{-1}}})^G, \\ 0 \quad \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть W задает обратимую изолированную особенность. Пусть также ζ — некоторая примитивная форма Саито этой особенности, G — Б–допустимая группа симметрий W. Определим фробениусово многообразие $M_{(W,G),\zeta}$ аксиоматически.

Определение. *Фробениусовым многообразием пары* (W,G), согласованным с примитивной формой ζ будем называть фробениусово многообразие, удовлетворяющее следующим аксиомам.

- Тривиальная группа: для $G = \{id\}$ выполнено:

$$M_{(W,G),\zeta} = M_{(W,\{id\}),\zeta} \cong M_{W,\zeta}.$$

- Пространство состояний:

$$\mathcal{T}M_{(W,G),\zeta}\mid_{\mathbf{t}=0}\cong\ \mathcal{H}.$$

- Спаривание: Спаривание фробениусовой структуры $M_{(W,G),\zeta}$ совпадает в плоских координатах со спариванием $\eta^{\mathcal{H}}$ на $\mathcal{H}$.
- Неподкрученный сектор: Ограниченние $M_{(W,G),\zeta}$ на неподкрученный сектор изоморфно G–инвариантной части фробениусовой структуры Саито особенности W:

$$M_{(W,G),\zeta}\mid_{\mathcal{L}_W^G}\quad\cong\left(M_{W,\zeta}\right)^G.$$

- Примитивная форма: Существует понятие замены примитивной формы для $M_{(W,G),\zeta}$, которое согласовано с заменой примитивной формы Саито в неподкрученном секторе.
- Специальная точка: Существует понятние "специальной точки" в пространстве примитивных форм.
- Эквивариантность: Пусть $\mathcal{F}(\mathbf{t})$ — потенциал фробениусовой структуры. Пусть e — единица группы G и элементы $g_i\in G$ для всех $1\le i\le k$ таковы, что:

$$g_1\cdot\dots\cdot g_k\neq e\in G.$$

  Тогда выполнено:

$$\frac{\partial^k\mathcal{F}}{\partial t_{g_1,i_1}\dots\partial t_{g_k,i_k}}\mid_{\mathbf{t}=0}=0\quad\forall i_1,\dots,i_k.$$

Последнее свойство лучше всего рассматривать с точки зрения когомологических теорий поля. Предполагая наличие когомологической теории поля, такой, что $\mathcal{F}$ совпадает с её потенциалом рода ноль, последнее свойство понимается как некоторой условие сбалансированности дополнительной структуры группы в отмеченных точках кривых — элементов пространства модулей (см. например **[22]**).

Заметим, что прямым следствием аксиомы о пространстве состояний является то, что на $M_{(W,G),\zeta}$ существуют координаты $\mathbf{t}$, индексированные $g\in G$:

$$\mathbf{t}=\{(t_{g,1},\dots,t_{g,\mu_g}),\ \forall g\in G\},$$

где $\mu_g:=\dim(\mathcal{L}_{W_g})^G$.

Таким образом верно:

$$\frac{\partial^3\mathcal{F}}{\partial t_{\mathbf{1},1}\partial t_a\partial t_b}=\eta^{\mathcal{H}}_{a,b}.$$

Следствие 5.1. *Ввиду того, что в приведенную выше систему аксиом входит также примитивная форма самой особенности W, мы имеем семейство фробениусовых многообразий для всякой пары (W,G). Однако из данной аксиоматизации не следует,* *что при всякой фиксированной примитивной форме ζ фробениусово многообразие $M_{(W,G),\zeta}$ единственно.*

2. Орбифолдовая А–модель Ландау–Гинзбурга

Пусть G является А–допустимой группой симметрий многочлена W. Для всякого $h \in G$ рассмотрим:

$$\mathcal{H}_h := \Omega^{N_h}(\mathbb{C}^{N_h})/(dW_h \wedge \Omega^{N_h-1}).$$

Фиксируя форму объёма $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{N_h}$ мы имеем следующий изоморфизм:

$$\mathcal{H}_h \cong \mathcal{L}_{W_h} \cdot \omega.$$

Действие группы G поднимается до действия на пространстве $\Omega(\mathbb{C}^{N_h})$. Определим пространство состояний А–модели следующим образом:

$$\mathcal{H}_{W,G} := \left(\bigoplus_{h \in G} \mathcal{H}_h \right)^G$$

Как и в случае Б–модели, спаривание определяется с помощью изоморфизма $\mathcal{H}_h \cong \mathcal{H}_{h^{-1}}$.

Пусть $M^A_{W,G}$ является фробениусовым многообразием орбифолдовой А–модели Ландау–Гинзбурга пары (W, G). Мы требуем, чтобы были выполнены следующие аксиомы:

- Пространство состояний:

$$\mathcal{T} M^A_{W,G} \mid_{\mathbf{t}=0} \cong \mathcal{H}_{W,G}.$$

- Рациональность: Потенциал $\mathcal{F}(\mathbf{t})$ фробениусовой структуры $M^A_{W,G}$ имеет разложение в ряд с рациональными коэффициентам,
- Соответствие CY/LG: $M^A_{W,G}$ связано с фробениусовой структурой теории Громова–Виттена X_W некоторым действием на пространстве всех фробениусовых многообразий, соответствующим замене примитивной формы для $G = G_W$,

Первая аксиома выполнена в теории FJRW по построению. Условие второй аксиомы не доказано в общем случае для теорий FJRW, однако удовлетворяется во всех известных случаях. Третьей аксиомой мы ограничиваемся на класс фробениусовых многообразий, которые гипотетически могут возникнуть в зеркальной симметрии.

ГЛАВА 6

Зеркальная симметрия типа CY–LG для орбифолдовой модели Ландау–Гинзбурга

Рассмотрим проблему зеркальной симметрии типа CY–LG для орбифолдовой Б–модели Ландау–Гинзбурга пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$.

Рассмотри группу G, действующую на $\mathbb{C}^3$, и являющуюся группой симметрий $\tilde{E}_8$. Для $\xi^3 = 1, \xi \neq 1$ положим:

$$h : (x, y, z) \to (\xi x, \xi^2 y, z).$$

Определим $G := \langle h \rangle$. Очевидно, что $G \cong \mathbb{Z}_3$.

Теорема 6.1. *Пусть ζ_{LCSL} — примитивная форма особенности $\tilde{E}_8$ в LCSL (см. Теорему 3.11). Тогда потенциал фробениусова многообразия орбифолдовой Б–модели $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$ с примитивной формой, согласованной с ζ_{LCSL} имеет вид:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\mathbb{Z}_3} = {} & \frac{1}{2} t_{\boldsymbol{1},0}^2 t_{\boldsymbol{1},3} + t_{\boldsymbol{1},0} \left(\frac{t_{\boldsymbol{1},1}^2}{12} + \frac{t_{\boldsymbol{1},2}^2}{4} \right) + t_{\boldsymbol{1},0} t_h t_{h^2} + \frac{1}{36} t_{\boldsymbol{1},1}^4 f_1(t_{\boldsymbol{1},3}) \\
& + \frac{1}{18} t_{\boldsymbol{1},1}^2 t_{\boldsymbol{1},2}^2 f_2(t_{\boldsymbol{1},3}) + \frac{1}{9} t_{\boldsymbol{1},1} t_{\boldsymbol{1},2}^3 f_0(t_{\boldsymbol{1},3}) + t_{\boldsymbol{1},2}^4 \left(\frac{1}{12} f_1(t_{\boldsymbol{1},3}) + \frac{1}{18} f_2(t_{\boldsymbol{1},3}) \right) \\
& + t_h t_{h^2} \left(\frac{2}{9} t_{\boldsymbol{1},1}^2 f_2(t_{\boldsymbol{1},3}) + 2 t_{\boldsymbol{1},2}^2 f_1(t_{\boldsymbol{1},3}) - \frac{2}{3} t_{\boldsymbol{1},1} t_{\boldsymbol{1},2} f_0(t_{\boldsymbol{1},3}) \right) + t_h^2 t_{h^2}^2 \left(\frac{2}{3} f_2(t_{\boldsymbol{1},3}) + 2 f_1(t_{\boldsymbol{1},3}) \right) \\
& + \left(t_h^3 + t_{h^2}^3 \right) \left(t_{\boldsymbol{1},1} f_0(t_{\boldsymbol{1},3}) + t_{\boldsymbol{1},2} (3 f_1(t_{\boldsymbol{1},3}) - f_2(t_{\boldsymbol{1},3})) \right),
\end{aligned}$$

где функции $f_0(t), f_1(t), f_2(t)$ заданы явно в (4.2).

Заметим, что из данной теоремы также следует, что фробениусово многообразие Б–модели $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$ с примитивной формой, согласованной с ζ_{LCSL} единственно с точностью до изоморфизма.

Эбелинг–Такахаши построили в **[15]** алгебраическое многообразие, которое является в определенном смысле "зеркально двойственным" паре (W, G), где W имеет вид $x_1^{p_1} + x_2^{p_2} + x_3^{p_3} - x_1 x_2 x_3$. Для этого они определили *орбифолдовые* числа Долгачева и Габриелова. Вероятно применение этой пары для зеркальной симметрии типа CY–LG было целью авторов такого определения. Мы покажем на частном примере, что их идея работает. В частности для пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$ зеркальным многообразием Эбелинга–Такахаши является $\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}$.

Теорема 6.2. *Фробениусово многообразие Б–модели Ландау–Гинзбурга пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$ изоморфно фробениусову многообразию теории Громова–Виттена орбифолда $\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}$.*

1. Орбифолдовые числа Долгачева и Габриелова

Ниже мы приводим только упрощенный вид подхода Эбелинга–Такахаши (см. [**15**]) к числам Габриелова и Долгачева для орбифолдовых моделей Ландау–Гинзбурга.

Определение. Пусть $W(x_1, x_2, x_3)$ является обратимым многочленом с матрицей коэффициентов $R = \{r_{ij}\}$. Группу

$$\hat{G}_W := \left\{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in (\mathbb{C}^*)^3 \mid \prod_{j=1}^{3} \lambda_j^{r_{1j}} = \prod_{j=1}^{3} \lambda_j^{r_{2j}} = \prod_{j=1}^{3} \lambda_j^{r_{3j}} \right\}$$

будем называть *максимальной Абелевой группой симметрий* W.

Заметим, что для $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \hat{G}_W$ и $\lambda := \prod_{j=1}^{3} \lambda_j^{r_{1j}}$ верно:

$$W(\lambda \cdot \mathbf{x}) = \lambda W(\mathbf{x}).$$

Для всякого обратимого многочлена $W(x_1, x_2, x_3)$ и всякой его A–допустимой группы симметрий G определим группу $\hat{G}$ следующей коммутативной диаграммой точных последовательностей.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d, hook] & \hat{G} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathbb{C}^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & G_W \arrow[r] & \hat{G}_W \arrow[r] & \mathbb{C}^* \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Орбифолдовой A–модели Ландау–Гинзбурга пары (W, G) Эбелинг–Такахаши ставят в соответствие кривую $\mathcal{C}_{(W,G)}$:

$$\mathcal{C}_{(W,G)} := [W^{-1}(0) \backslash \{0\} / \hat{G}].$$

Такая кривая может быть рассмотрена как гладкая кривая рода $g_{(W,G)}$ с конечным числом изотропных точек.

Определение. Порядки $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ изотропных точек кривой $\mathcal{C}_{(W,G)}$ будут называться числами Долгачева пары (W, G) и обозначаться через $A_{(W,G)}$.

Поясним связь кривой $\mathcal{C}_{W,G}$ с введенным ранее алгебраическим многообразием $X_{W,G}$. Группа $\hat{G}$ является расширением G, контролирующим квазиоднородность W. Вложенная в проективное пространство $\mathbb{P}^2(c_1, c_2, c_3)$ кривая $\mathcal{C}_{W,G}$ будет изоморфна $X_{W,G}$, а числа c_i будут определены $\hat{G}$.

Пусть $W(x_1, x_2, x_3)$ является обратимым многочленом. В [**14**] была найдена голоморфная замена переменных такая, что многочлен $W(x_1, x_2, x_3) + ax_1x_2x_3$ для некоторого $a \in \mathbb{C}^*$ преобразуется в

$$W_{Ferma} := x_1^{p_1} + x_2^{p_2} + x_3^{p_3} - x_1x_2x_3$$

для некоторых целых $p_i \geq 2$.

Рассмотри другой набор чисел, ассоциированный паре (W, G).

Определение. Пусть G является Б–допустимой группой симметрий многочлена $W(x_1, x_2, x_3)$, и $K_i \subseteq G$ является максимальной подгруппой, сохраняющей координату x_i. Пусть p_1, p_2, p_3 — экспоненты W_{Ferma} (см. выше). Следующие числа $(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ называются *числами Габриелова* пары (W, G):

$$\Gamma_{W,G} := (\gamma_1, \ldots, \gamma_s) = \left(\frac{p_i}{|G/K_i|} * |K_i|,\ 1 \leq i \leq 3 \right),$$

где под $a * |K_i|$ мы понимаем $|K_i|$–кратное повторение числа a, и все числа 1 опущены.

Определение. Пусть $G \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ — некоторая конечная подгруппа. Для всякого $g \in G$ порядка r представим:

$$g = (e^{2\pi i a_1/r}, \ldots, e^{2\pi i a_n/r}), \quad 0 \leq a_k < r.$$

Обозначим через j_G число элементов g группы G таких, что g фиксирует только $\{0\}$ и $\sum_k a_k = r$:

$$j_G = \left| \left\{ g = (e^{2\pi i a_1/r}, \ldots, e^{2\pi i a_n/r}) \in G \mid \sum_k a_k = r \text{ и } \mathrm{Fix}(g) = \{0\} \right\} \right|.$$

Теорема Эбелинга–Такахаши **[15]** утверждает:

Теорема 6.3 (Теорема 7.1 в **[15]**). *Пусть $W(x_1, x_2, x_3)$ является обратимым многочленом и G — его Б–допустимая группа симметрий. Тогда следующие наборы чисел совпадают:*

$$g_{W^T, G^T} = j_G, \quad A_{W^T, G^T} = \Gamma_{W,G}.$$

Ключевым объектом в теореме Эбелинга–Такахаши является кривая $\mathcal{C}_{(W^T, G^T)}$. Её использование в доказательстве данной теоремы мотивирует подход к теории Громова–Виттена, изложенный в разделе 3.1 главы 4.

1.1. Числа Габриелова пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$. Рассмотрим многочлен

$$W(x_1, x_2, x_3) = x_1^6 + x_2^3 + x_3^2.$$

Для данного многочлена мы имеем равенство: $W^T = W$. Несмотря на это мы будем сохранять знак транспонирования для более четкого различия стороны зеркальной симметрии, которой соответствует пара (W, G) или же (W^T, G^t).

Рассмотрим группу симметрий $\mathbb{Z}_3$, действующую на W как было описано в начале данной главы. В зеркальной симметрии типа CY–LG мы должны работать с теорий Громова–Виттена кривой $\mathcal{C}_{(W^T,\mathbb{Z}_3^T)}$. Теорема 6.3 показывает, что для того, чтобы определить структуру орбифолда кривой $\mathcal{C}_{(W^T,\mathbb{Z}_3^T)}$ достаточно посчитать числа Габриелова пары $(W, \mathbb{Z}_3)$.

Для этого заметим, что для фиксированной нами группы G верно:

$$K_x = K_y = \{id\} \text{ и } K_z = \mathbb{Z}_3.$$

Следовательно:

$$\frac{p_x}{|\mathbb{Z}_3/K_x|} * |K_x| = \frac{6}{3} = 2, \quad \frac{p_y}{|\mathbb{Z}_3/K_y|} * |K_y| = \frac{3}{3} = 1, \quad \frac{p_z}{|\mathbb{Z}_3/K_z|} * |K_z| = \frac{2}{1} * 3 = (2,2,2).$$

Числа Габриелова имеют вид:

$$\Gamma_{\tilde{E}_8,\mathbb{Z}_3} = (2,2,2,2).$$

Несложно заметить, что $j_{\mathbb{Z}_3} = 0$. Эти наблюдения мотивируют использование орбифолда $\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}$ в качестве кандидата для зеркальной симметрии типа CY–LG с Б–моделью Ландау–Гинзбурга пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$.

2. Зеркальная симметрия типа CY–LG для пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$

В этом разделе мы докажем две теоремы, сформулированные в начале главы. Рассмотрим развертку особенности $\tilde{E}_8$:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, \mathbf{s}) := {} & x^6 + y^3 + z^2 + s_{-1}x^4y + s_{31}x^3y \\ & + s_{21}x^2y + s_{11}xy + s_{30}x^3 + s_{20}x^2 + s_{10}x + s_{01}y + s_0. \end{aligned}$$

Пространство состояний Б–модели пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$ имеет вид:

$$\mathcal{H} := (\mathcal{L})^G \oplus \langle 1_h \rangle \oplus \langle 1_{h^2} \rangle,$$

где первое слагаемое соответствует инвариантной подалгебре локальной алгебры особенности и имеет следующий базис:

$$(\mathcal{L})^G \cong \langle 1, x^4y, xy, x^3 \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Обозначение 6.1. *Обозначим через $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}_3}$ потенциал фробениусова многообразия $M_{\tilde{E}_8,\mathbb{Z}_3}$, записанный в координатах $t_{\mathbf{1},0}, \ldots, t_{\mathbf{1},3}, t_h, t_{h^2}$, таких, что:*

$$\frac{\partial}{\partial t_{\mathbf{1},k}} \leftrightarrow e_k \in (\mathcal{L})^G, \ \frac{\partial}{\partial t_h} \leftrightarrow 1_h \in \mathcal{H}, \ \frac{\partial}{\partial t_{h^2}} \leftrightarrow 1_{h^2} \in \mathcal{H}.$$

2.1. Идея доказательства. Пусть $M_{(\tilde{E}_8)^G}$ — фробениусово многообразие как в аксиоме "неподкрученный сектор" Б–модели пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$. Тогда верно

$$\mathcal{T}M_{(\tilde{E}_8)^G} \mid_{\mathbf{t}=0} \cong (\mathcal{L})^G.$$

Идея приведенного ниже доказательства может быть описана следующей диаграммой, в вершинах которой стоят разные фробениусовы многообразия, все горизонтальные стрелки являются (предположительно или фактически) изоморфизмами, а все диагональные стрелки являются вложениями.

$$\begin{tikzcd}
M_{(\tilde{E}_8,\{Id\})} \arrow[rr, "A"] & & M_{\mathbb{P}^1_{6,3,2}} & \\
& (M_{(\tilde{E}_8,id)})^G \arrow[ul, hook, "E"'] \arrow[rr, "J"] \arrow[dd, equal, "B"] & & M^4 \arrow[ul, hook, "K"'] \arrow[dd, "C"] \\
M_{(\tilde{E}_8,\mathbb{Z}_3)} \arrow[rr, dashed, "D"] & & M_{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}} & \\
& M_{(\tilde{E}_8)^G} \arrow[ul, hook, "F"'] \arrow[rr, "I"] & & N^4 \arrow[ul, hook, "L"']
\end{tikzcd}$$

где

- A — зеркальный изоморфизм изоморфизм Теоремы 3.11 .
- E и F являются вложениями некоторых подмногообразий в $M_{(\tilde{E}_8,\{Id\})}$ и $M_{(\tilde{E}_8,\mathbb{Z}_3)}$ соответственно. Первое подмногообразие описывается нами в Предложении 6.4, в то время как второе соответствует ограничению на неподкрученный сектор в орбифолдовой Б–модели.
- Имея явном виде изоморфизм A и вложение E, мы находим потенциал $M_{\left(\tilde{E}_8\right)^G}$ с помощью Предложения 4.14.
- С помощью изоморфизм аксиомы "неподкрученный сектор" D орбифолдовой Б–модели Ландау–Гинзбурга мы получаем потенциал структуры $M_{\left(\tilde{E}_8\right)^G}$. В Предложениях 6.7 и 6.8 мы доказываем, что это подмногообразие полностью определяет фробеунисову структуру $M_{(\tilde{E}_8,\mathbb{Z}_3)}$ с точностью до изоморфизма.
- Ограничением изоморфизма A на подмногообразие $\left(M_{\tilde{E}_8}\right)^G$ мы получаем некоторое подмногообразие в $M_{\mathbb{P}^1_{6,3,2}}$, изоморфное $\left(M_{\tilde{E}_8}\right)^G$.
- В Предложении 6.5 мы получаем некоторое утверждение о единственности, фиксирующее явный вид изоморфизма аксиомы "неподкрученный сектор" D.

Замечание 6.1. В приведенной выше диаграмме мы полностью опустили примитивную форму, использованную для построения многообразия $M_{(\tilde{E}_8,\{\mathrm{id}\})}$. Однако определенный выбор примитивной формы — ζ_{LCSL} фиксирован зеркальным изоморфизмом A. В то же время аксиома "неподкрученный сектор" орбифолдовой Б–модели требует, что фробениусово многообразие $M_{(\tilde{E}_8,\mathbb{Z}_3)}$ является определенной "фазой" орбифолдовой Б–модели пары $(\tilde{E}_8,\mathbb{Z}_3)$, которая согласована с примитивной формой ζ_{LCSL} особенности $\tilde{E}_8$.

Наше утверждение заключается в том, что зеркальный изоморфизм B полностью определен приведенной выше диаграммой. В частности зеркальной симметрией типа CY–LG без группы симметрии и аксиомами орбифолдовой Б–модели Ландау–Гинзбурга.

2.2. Анализ неподкрученного сектора $M_{\tilde{E}_8,\mathbb{Z}_3}$. Зависимость плоских координат t_{ij} многообразия $M_{\tilde{E}_8}$ от "естественных" координат s_{ij} сложна (см. Теорему 3.9). Однако же следующее предложение показывает, что при "правильном" выборе группы симметрий эта зависимость имеет ясный смысл.

Пусть далее примитивная форма и плоские координаты особенности $\tilde{E}_8$ фиксированы как в Теореме 3.11.

Предложение 6.4. *В многообразии $M_{\tilde{E}_8}$ ограничение на инвариантную подалгебру локальной алгебры особенности $\tilde{E}_8$ эквивалентно $t_{ij}=0$ для некоторого набора индексов.*

Доказательство. Заметим, что ограничение на инвариантную часть $\mathcal{L}$ в терминах развертки особенности эквивалентно ограничению $s_{ij}=0$ для некоторого набора индексов $\mathcal{I}_{tw}$:

$$\mathcal{L}_{\tilde{E}_8}\to(\mathcal{L}_{\tilde{E}_8})^G \iff s_{ij}=0 \text{ для } (i,j)\in\mathcal{I}_{tw}.$$

Несложно заметить, что для особенности $\tilde{E}_8$ (с приведенной выше разверткой, фиксирующей базис локальной алгебры) неинвариантными являются только следующие базисные элементы локальной алгебры :

$$x, x^3y, y, x^2, x^2y, x^4 \notin (\mathcal{L}_{\tilde{E}_8})^{\mathbb{Z}_3}.$$

и таким образом $\mathcal{I}_{tw}=\{10,31,01,20,21,40\}$.

Набор всех индексов I переменных s_{ij} развертки имеет вид:

$$I=\mathcal{I}_{tw}\sqcup\mathcal{I}_{inv},\qquad \text{для}\qquad \mathcal{I}_{inv}=\{41,11,30,0\}.$$

Приведем степени соответствующих переменных:

$$\left\{\frac{5}{6},\frac{1}{6},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\}\qquad \text{и}\qquad \left\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right\}.$$

Обратим внимание, что в формулах Ноуми–Ямады (см. Теорему 3.9) как только индекс $\nu\in\mathcal{I}_{tw}$, то суммирование $\psi_\nu^{(1)}$ не включает индексы $\alpha\in\mathcal{I}_{inv}$ кроме индекса $\alpha=41$. Однако эта переменная имеет степень 0, в то время как все переменные из набора $\mathcal{I}_{tw}$ имеют положительные степени. Таким образом в каждом слагаемом функции $\psi_\nu^{(1)}$, когда индекс $\nu \in \mathcal{I}_{tw}$, имеется хотя бы один множитель s_μ с индексом $\mu \in \mathcal{I}_{tw}$. Следовательно мы получается:

$$\psi_\nu^{(1)}(\mathbf{s}) \mid_{s_\mu=0,\ \mu\in\mathcal{I}_{tw}} = 0, \quad \forall \nu \in \mathcal{I}_{tw}.$$

Что завершает доказательство предложения. □

В дальнейшем мы будем работать с фробениусовыми подмногообразиями. В частности мы рассматриваем ограничение фробениусовой структуры на подмногообразие. Эта тема была развита И.Строном в [**45**], где фробениусова структура была определена на касательном пространстве к подмногообразию $M' \subset M$. Мы используем несколько иной подход. Для некоторого решения WDVV $\mathcal{F}(\mathbf{t}, \mathbf{t}')$ мы будем рассматривать новую функцию $\mathcal{F}'(\mathbf{t}')$:

$$\mathcal{F}'(\mathbf{t}') := \mathcal{F}(\mathbf{t}, \mathbf{t}') \mid_{\mathbf{t}=0} . \tag{6.1}$$

Такая функция не всегда является решением уравнения WDVV. Однако же в случаях, рассматриваемых в данной работе это верно из соображений квазиоднородности.

Обозначение 6.2. *Для двух фробениусовых многообразий M и M' мы будем писать:*

$$M' = M \mid_{\boldsymbol{t}=0} \quad \textit{или} \quad M' \subset M$$

если фробениусовы потенциалы $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}$ связаны равенством (6.1).

Положим:

$$M^4 := M_{\mathbb{P}^1_{6,3,2}} \mid_{t_{ij}=0,(i,j)\in\mathcal{J}} .$$

Будем также обозначать через $\mathcal{F}^4$ потенциал этого фробениусова многообразия.

Предложение 6.5. *Существует единственное 4–мерное фробениусово подмногообразие $N^4 \subset M_{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}$, изоморфное фробениусову многообразию M^4.*

Доказательство. Пусть формальные переменные t_{ij} соответствуют порождающим Δ_{ij} кольца $H^*_{orb}(\mathbb{P}^1_{6,3,2})$. Таким образом эти переменные являются координатами на $M_{\mathbb{P}^1_{6,3,2}}$. Из изоморфизма (3.7) зеркальной симметрии типа CY–LG мы имеем:

$$M_{\tilde{E}_8} \mid_{s_{ij}=0,(i,j)\in\mathcal{I}_{tw}} \;\cong\; M_{\mathbb{P}^1_{6,3,2}} \mid_{t_{ij}=0,(i,j)\in\mathcal{J}}$$

для набора индексов $\mathcal{J} = \{11, 12, 14, 15, 21, 22\}$ как в Предложении 4.14 и набора индексов $\mathcal{I}_{tw}$ как в Предложении 6.4. Следовательно фробениусов потенциал $\mathcal{F}^4$ многообразия M^4 был явно посчитан в Предложении 4.14. Квазиоднородность потенциала фробениусова многообразия $\mathcal{F}^4$ задана эйлеровым полем E^4:

$$E^4 = t_0\frac{\partial}{\partial t_0} + \frac{1}{2}t_{13}\frac{\partial}{\partial t_{13}} + \frac{1}{2}t_{31}\frac{\partial}{\partial t_{31}}, \ E^4 \cdot \mathcal{F}^4 = 2\mathcal{F}^4.$$

4–мерное фробениусово подмногообразие N^4 в $M_{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}(t_0, t_{-1}, t_1, t_2, t_3, t_4)$, удовлетворяющее такому условию квазиоднородности получается с общем случае следующим образом

$$N^4(t_0, \tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_{-1}) = M_{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}(\mathbf{t}(\tilde{\mathbf{t}})),$$

где

$$t_i = \tilde{t}_1 a_i + \tilde{t}_2 b_i, \quad 1 \le i \le 4,$$

для некоторых комплексных чисел $a_i, b_i \in \mathbb{C}$, и

$$\tilde{t}_{-1} = \phi(t_{-1}),$$

для некоторой функции ϕ, такой, что $\phi(0) = 1$.

Изоморфизм $N^4 \cong M^4$ верен тогда и только тогда, когда

$$k \cdot \mathcal{F}^4 \mid_{t_{13}=\tilde{t}_1, t_{31}=\tilde{t}_2} = \mathcal{F}_0^{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}} \mid_{\mathbf{t}(\tilde{\mathbf{t}})},$$

для некоторого ненулевого числа k. Сравнивая кубические члены потенциалов мы получаем $k = 3$. Используя алгебраическую независимость функций f_0, f_1 и f_2 приведенное выше равенство задает систему линейный уравнений на числа a_i, b_i. С точностью до симметрии, переставляющей циклически переменные t_i эта система имеет ровно два решения:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0, \; b_4 = 0, \; a_4 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \; b_1 = b_2 = b_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$

Очевидно, что оба решения задают одно и то же фробениусово подмногообразие. □

2.3. Доказательство Теоремы 6.1. Используя аксиомы Б–модели Ландау–Гинзбурга мы получаем:

Предложение 6.6. *Пусть $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}_3}$ удовлетворяет аксиомам орбифолдовой Б–модели Ландау–Гинзбурга (см. Главу 5). Тогда $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}_3}$ является функцией от $t_{\mathbf{1},p}$ для $0 \le p \le 3$, $t_h t_{h^2}$, t_h^3 и $t_{h^2}^3$:*

$$\mathcal{F}^{\mathbb{Z}_3} = \mathcal{F}^{\mathbb{Z}_3}(t_{\mathbf{1},0}, t_{\mathbf{1},1}, t_{\mathbf{1},2}, t_{\mathbf{1},3}, t_h t_{h^2}, t_h^3, t_{h^2}^3).$$

Доказательство. Утверждение следует моментально из аксиомы об эквивариантности. □

В данном разделе мы используем явный виде уравнения WDVV на потенциал $\mathcal{F}^4$. Однако же мы запишем его в новых координатах, удобных для орбифолдовой Б–модели:

$$\mathcal{F}^4(t_{\mathbf{1},0}, \dots, t_{\mathbf{1},3}) = \mathcal{F}^4 \mid_{t_0=t_{\mathbf{1},0},\; t_{13}=t_{\mathbf{1},1},\; t_{31}=t_{\mathbf{1},2},\; t_{-1}=t_{\mathbf{1},3}} .$$

Предложение 6.7. *Мы имеем:*

- *Потенциал* $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}_3}$ *фробениусой структуры* $M_{(\tilde{E}_8,\mathbb{Z}_3)}$ *имеет вид:*

$$\mathcal{F}^{\mathbb{Z}_3} = \mathcal{F}^4 + t_{\mathbf{1},0}t_h t_{h^2} + H(t_{\mathbf{1},1}, t_{\mathbf{1},2}, t_{\mathbf{1},3}, t_h, t_{h^2}),$$

где H *— некоторая функция, удовлетворяющая* $H\mid_{t_h=0,t_{h^2}=0}\equiv 0$.

- *Потенциал* $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}_3}$ *удовлетворяет следующему условию квазиоднородности:*

$$E^{\mathbb{Z}_3}\cdot\mathcal{F}^{\mathbb{Z}_3} = 2\mathcal{F}^{\mathbb{Z}_3},$$

где

$$E^{\mathbb{Z}_3} = t_0\frac{\partial}{\partial t_0} + \frac{1}{2}t_{\mathbf{1},1}\frac{\partial}{\partial t_{\mathbf{1},1}} + \frac{1}{2}t_{\mathbf{1},2}\frac{\partial}{\partial t_{\mathbf{1},2}} + \frac{1}{2}t_h\frac{\partial}{\partial t_h} + \frac{1}{2}t_{h^2}\frac{\partial}{\partial t_{h^2}}.$$

Доказательство. Первая часть предложения легко выводится из аксиомы о спаривании и неподкрученном секторе орбифолдовой Б–модели. Заметим, что квазиоднородность потенциала $\mathcal{F}^4$ фиксирует конформную размерность фробениусова многообразия. Таким образом эйлерово поле $E^{\mathbb{Z}_3}$ потенциала $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}_3}$ имеет вид:

$$E^{\mathbb{Z}_3} = E^4 + d_h t_h\frac{\partial}{\partial t_h} + d_{h^2}t_{h^2}\frac{\partial}{\partial t_{h^2}}.$$

Из спаривание мы имеем: $d_h + d_{h^2} = 1$. Применяя также Предложение 6.6 мы получаем требуемое. $\square$

Из условия квазиоднородности $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}_3}$ следует:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{\mathbb{Z}_3} &= \frac{1}{2}t_{\mathbf{1},0}^2 t_{\mathbf{1},3} + t_{\mathbf{1},0}\left(\frac{t_{\mathbf{1},1}^2}{12} + \frac{t_{\mathbf{1},2}^2}{4}\right) + t_{\mathbf{1},0}t_h t_{h^2}\\ &+ \frac{1}{36}t_{\mathbf{1},1}^4 f_1(t_{\mathbf{1},3}) + \frac{1}{18}t_{\mathbf{1},1}^2 t_{\mathbf{1},2}^2 f_2(t_{\mathbf{1},3}) + \frac{1}{9}t_{\mathbf{1},1}t_{\mathbf{1},2}^3 f_0(t_{\mathbf{1},3}) + t_{\mathbf{1},2}^4\left(\frac{1}{12}f_1(t_{\mathbf{1},3}) + \frac{1}{18}f_2(t_{\mathbf{1},3})\right)\\ &+ t_h t_{h^2}\left(t_{\mathbf{1},1}^2 b_1(t_{\mathbf{1},3}) + t_{\mathbf{1},2}^2 b_2(t_{\mathbf{1},3}) + t_{\mathbf{1},1}t_{\mathbf{1},2}b_3(t_{\mathbf{1},3})\right) + t_h^2 t_{h^2}^2 b_4(t_{\mathbf{1},3})\\ &+ t_h^3\left(t_{\mathbf{1},1}b_5(t_{\mathbf{1},3}) + t_{\mathbf{1},2}b_6(t_{\mathbf{1},3})\right) + t_{h^2}^3(t_{\mathbf{1},1}b_7(t_{\mathbf{1},3}) + t_{\mathbf{1},2}b_8(t_{\mathbf{1},3})),\end{aligned}$$

для некоторых функций $b_i(t_{\mathbf{1},p})$.

Рассмотрим уравнение WDVV на потенциал $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}_3}$. Напомним, что уравнение WDVV имеет четыре параметра (см. (2.1)).

Обозначение 6.3. *Пусть* M *— фробениусово многообразие с потенциалом* $\mathcal{F}$. *Для всяких четырех* t_i, t_j, t_k, t_l, *являющихся координатами на* M *обозначим:*

$$WDVV(\partial_i,\partial_j,\partial_k,\partial_l) := \sum_{p,q}\left(\frac{\partial^3\mathcal{F}}{\partial t_i\partial t_j\partial t_p}\ \eta^{pq}\ \frac{\partial^3\mathcal{F}}{\partial t_q\partial t_k\partial t_l} - \frac{\partial^3\mathcal{F}}{\partial t_i\partial t_k\partial t_p}\ \eta^{pq}\ \frac{\partial^3\mathcal{F}}{\partial t_q\partial t_j\partial t_l}\right)$$

Предложение 6.8. *Функции* $b_i(t)$, *такие, что* $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}_3}$ *удовлетворяет уравнению WDVV единственны с точностью до следующего преобразования:*

$$t_h\to a t_h,\quad t_{h^2}\to t_{h^2}/a,\quad a\in\mathbb{C}^*,$$

которое является симметрией уравнения WDVV.

Доказательство.

Пусть $b_8(t) \equiv 0$ и $b_7(t) \not\equiv 0$. Тогда из $\mathrm{WDVV}(\partial_{h^2}, \partial_{h^2}, \partial_{(\mathbf{1},2)}, \partial_{(\mathbf{1},2)})$, рассматривая коэффициент $t_{(\mathbf{1},2)}t_{h^2}$ мы получаем:

$$b_7(t)f_0(t) \equiv 0,$$

что противоречит с $f_0(t) \not\equiv 0$. Случай $b_8(t) \not\equiv 0$ и $b_7(t) \equiv 0$ приводит к противоречию аналогичным образом.

Если же $b_8(t) \equiv 0$ и $b_7(t) \equiv 0$, несложно заметить, что либо все $b_k(t) \equiv 0$, или $f_0(t) \equiv 0$, что противоречит явной формуле для этой функции.

Пусть $b_8(t) \not\equiv 0$ и $b_7(t) \not\equiv 0$. В таком случае уравнение WDVV на $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}_3}$ эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt_{\mathbf{1},3}} b_8(t_{\mathbf{1},3}) &= -\frac{8}{3} b_8(t_{\mathbf{1},3}) \frac{2(f_2(t_{\mathbf{1},3}))^2 - 6f_2(t_{\mathbf{1},3})f_1(t_{\mathbf{1},3}) - 3(f_0(t_{\mathbf{1},3}))^2}{f_2(t_{\mathbf{1},3}) - 3f_1(t_{\mathbf{1},3})}, \\
b_1(t_{\mathbf{1},3}) &= \frac{2}{9} f_2(t_{\mathbf{1},3}), \\
b_2(t_{\mathbf{1},3}) &= 2f_1(t_{\mathbf{1},3}), \\
b_3(t_{\mathbf{1},3}) &= -\frac{2}{3} f_0(t_{\mathbf{1},3}), \\
b_4(t_{\mathbf{1},3}) &= \frac{2}{3} f_2(t_{\mathbf{1},3}) + 2f_1(t_{\mathbf{1},3}), \\
b_5(t_{\mathbf{1},3}) &= \frac{8}{81} \frac{3f_0(t_{\mathbf{1},3})f_1(t_{\mathbf{1},3}) - f_2(t_{\mathbf{1},3})f_0(t_{\mathbf{1},3})}{b_8(t_{\mathbf{1},3})}, \\
b_6(t_{\mathbf{1},3}) &= \frac{8}{81} \frac{(f_2(t_{\mathbf{1},3}))^2 - 6f_1(t_{\mathbf{1},3})f_2(t_{\mathbf{1},3}) + 9(f_1(t_{\mathbf{1},3}))^2}{b_8(t_{\mathbf{1},3})}, \\
b_7(t_{\mathbf{1},3}) &= \frac{b_8(t_{\mathbf{1},3})f_0(t_{\mathbf{1},3})}{3f_1(t_{\mathbf{1},3}) - f_2(t_{\mathbf{1},3})}.
\end{aligned}$$

В частности, выражение для функции $b_1(t_{\mathbf{1},3})$ получается из $\mathrm{WDVV}(\partial_h, \partial_{h^2}, \partial_{(\mathbf{1},1)}, \partial_{(\mathbf{1},2)})$, функция $b_7(t_{\mathbf{1},3})$ выражается через $b_8(t_{\mathbf{1},3})$ ввиду $\mathrm{WDVV}(\partial_{h^2}, \partial_{h^2}, \partial_{(\mathbf{1},1)}, \partial_{(\mathbf{1},2)})$ и ОДЕ на $b_8(t_{\mathbf{1},3})$ следует из $\mathrm{WDVV}(\partial_{h^2}, \partial_{h^2}, \partial_{(\mathbf{1},2)}, \partial_{(\mathbf{1},2)})$.

Единственной неизвестной функцией этой системы является $b_8(t_{\mathbf{1},3})$, которая является решением определенного ОДЕ, приведенного выше. Используя известные ОДЕ на $f_1(t)$ и $f_2(t)$ (см. (4.2)) запишем:

$$\frac{d}{dt} b_8(t) = b_8(t) \frac{\frac{d}{dt}(f_2(t) - 3f_1(t))}{f_2(t) - 3f_1(t)}.$$

Так как $b_8 \not\equiv 0$ мы имеем:

$$\frac{d}{dt} \log b_8(t) = \frac{d}{dt} \log(f_2(t) - 3f_1(t)).$$

Это уравнение может быть решено явно:

$$b_8(t) = c\left(3f_1(t) - f_2(t)\right), \quad c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Таким образом мы знаем все функции $b_1, \ldots, b_8$ в точностью до множителя c функции b_8. Заметим, что этот множитель возникает только в выражениях функций b_8, b_7 как умножение на c и в функциях b_5, b_6 как умножение на $1/c$.

Заметим, что такая сводоба соотвествует растяжению $t_h \to t_h/c^{1/3}, t_{h^2} \to c^{1/3}t_{h^2}$ в потенциале $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}_3}$. Такое растяжение сохраняет спаривание $\eta(\partial_{t_h}, \partial_{t_{h^2}}) = 1$ и является симметрией уравнения WDVV. $\square$

Полагая $c = 1$ в приведенной выше формуле мы получаем потенциал фробениусовой структуры $M_{(\tilde{E}_8,\mathbb{Z}_3)}$. Это завершает доказательство Теоремы 6.1.

2.4. Доказательство Теоремы 6.2. Приведем изоморфизм $M_{(\tilde{E}_8,\mathbb{Z}_3)} \cong M_{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}$ явно. Пусть функция $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}_3}$ является фробениусовы потенциалом $M_{(\tilde{E}_8,\mathbb{Z}_3)}$.

Пусть $b_8(t_{\mathbf{1},3})$ — коэффициент при $t^3_{h^2}t_{\mathbf{1},2}$ функции $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}_3}$.

$$b_8(t_{\mathbf{1},3}) := \left[t^3_{h^2}t_{\mathbf{1},2}\right]\ \mathcal{F}^{\mathbb{Z}_3}.$$

Определим $c := b_8(0)/(3f_1(0) - f_2(0))$.

Тогда зеркальный изоморфизм имеет вид:

$$t_0 \to t_{\mathbf{1},0}, \quad t_1 \to -\frac{t_{\mathbf{1},1}}{\sqrt{3}}, \quad t_2 \to -\frac{t_{\mathbf{1},2}}{\sqrt{3}} + ct_h + \frac{2t_{h^2}}{3c}, \quad t_{-1} \to t_{\mathbf{1},3},$$
$$t_3 \to -\frac{\sqrt{3}}{3}t_{\mathbf{1},2} + \frac{\left(-1+\sqrt{-3}\right)c}{2}t_h - \frac{\left(1+\sqrt{-3}\right)}{3c}t_{h^2},$$
$$t_4 \to -\frac{\sqrt{3}}{3}t_{\mathbf{1},2} - \frac{\left(1+\sqrt{-3}\right)c}{2}t_h + \frac{\left(-1+\sqrt{-3}\right)}{3c}t_{h^2}.$$

Используя явный вид потенциала $M_{(\tilde{E}_8,\mathbb{Z}_3)}$ (см. Теорему 6.1) несложно проверить, что данная линейная замена переменных переводит потенциал $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}_3}$ в потенциал рода 0 теории Громова–Виттена $\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}$.

ГЛАВА 7

Теория Громова–Виттена орбифолда $\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}$ и гурвиц–фробениусовы многообразия

В [**11**, Лекция 5] Б.А. Дубровин определил структуру фробениусова многообразия на пространстве разветвленных накрытий сферы. Такие фробениусовы многообразия носят в настоящее время название гурвиц-фробениусовых многообразий. В данной работе мы заинтересованы в гурвиц-фробениусовых многообразиях ввиду следующей теоремы, опубликованной в [**4**].

Пусть z — координата на эллиптической кривой $\mathcal{E}_{2\omega_1,2\omega_2}$, имеющей периоды $2\omega_1, 2\omega_2$. Рассмотрим пространство функций $\mathcal{H}_{1,(2,2,2,2)} := \{\lambda : \mathcal{E}_{2\omega_1,2\omega_2} \to \mathbb{P}^1\}$, имеющих следующий общий вид.

$$\lambda(z) := \sum_{i=1}^{4}\left(\wp(z-a_i;2\omega_1,2\omega_2)u_i + \frac{1}{2}\frac{\wp'(z-a_i;2\omega_1,2\omega_2)}{\wp(z-a_i;2\omega_1,2\omega_2)}s_i\right) + c, \tag{7.1}$$

где $\omega_1, \omega_2, a_i, u_i, s_i, c$ — параметры λ. Рассмотрим также подпространство $\mathcal{H}^R_{1,(2,2,2,2)} \subset \mathcal{H}_{1,(2,2,2,2)}$ состоящее из таких λ, что:

$$\begin{gathered} a_1 = 0, \quad a_2 = \omega_1 + \omega_2, \quad a_3 = \omega_1, \quad a_4 = \omega_2, \\ s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0. \end{gathered} \tag{7.2}$$

Теорема 7.1 (Теорема 1 в [**4**]). *Пространство $\mathcal{H}^R_{1,(2,2,2,2)}$ имеет структуру фробениусова многообразия, изоморфную фробениусовой структуре теории Громова–Виттена орбифолда $\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}$.*

1. Пространство разветвленных накрытий

Рассмотрим пространство мероморфных функций

$$C \xrightarrow{\lambda} \mathbb{P}^1$$

на компактной Римановой поверхности C рода g. Фиксируем порядки полюсов λ набором чисел $\mathbf{k} := \{k_1, \ldots, k_m\}$:

$$\lambda^{-1}(\infty) = \{\infty_1, \ldots, \infty_m\}, \quad \infty_p \in C,$$

так что локально в ∞_p мы имеем $\lambda(z) = z^{k_p}$.

Такие мероморфные функции определяют разветвленные накрытия $\mathbb{P}^1$ поверхностью C с ветвлением $\mathbf{k}$ нам ∞. Мы также предполагаем, что λ имеет только лишь простые точки ветвления в $P_q \in \mathbb{P}^1 \backslash \{0\}$. Степень разветвленного накрытия равна $N = \sum k_p$. Применяя формулу Римана–Гурвица размерность n пространства таких функций равна:

$$n = 2g - 2 + \sum_{p=1}^{m} k_p + m,$$

что совпадает в точности с количеством точек простого ветвления. Гладкая часть гурвиц-фробениусова многообразия параметризуется значениями функции λ в точках простого ветвления: $(\lambda(P_1), \ldots, \lambda(P_n))$.

Определение. Две пары (C_1, λ_1) и (C_2, λ_2) назовем *гурвиц–эквивалентными*, если $\lambda_1 = \psi \circ \lambda_2$ для некоторого аналитического отображения $\psi : C_1 \to C_2$.

В дальнейшем мы будем рассматривать пары (C, λ) с точностью по гурвиц–эквивалентности.

Определение. Определим многообразие *гурвиц-фробениуса* $\mathcal{H}_{g;\mathbf{k}}$ как пространство модулей пар (C, λ) со следующей дополнительной структурой:

- $\{a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g\}$ — симплектический базис $H_2(C)$,
- $\{w_1, \ldots, w_n\}$ — униформизующий параметр λ в точке ∞_i

$$w_p^{k_p}(z) = \lambda(z), \quad z \in U(\infty_p).$$

1.1. Структура фробениусова многообразия на $\mathcal{H}_{g;\mathbf{k}}$. Следуя Дубровину определим структуру фробениусова многообразия на $\mathcal{H}_{g;\mathbf{k}}$. Пусть ϕ — дифференциал первого рода на C. Определим многозначную координату $v(P)$ на C как следующую функцию:

$$v(P) = \int_{\infty_1}^{P} \phi. \tag{7.3}$$

Теорема 7.2 (Теорема 5.1 в [**11**]). *Следующие функции являются плоскими координатами на $\mathcal{H}_{g,\boldsymbol{k}}$:*

$$\begin{aligned}
&t_{p;a} := \mathrm{res}_{\infty_p} (w_p)^{-a} v d\lambda, && m \geq p \geq 1,\ k_p > a \geq 1,\\
&v_r := \int_{\infty_1}^{\infty_r} \phi, \quad V_r := -\mathrm{res}_{\infty_r} \lambda\phi, && m \geq r > 1,\\
&B_q := \oint_{b_q} \phi, \quad C_q := \oint_{a_q} \lambda\phi. && g \geq q \geq 1.
\end{aligned}$$

Пусть вектора $\partial_\bullet$ составляют базис $T\mathcal{H}_{g,\mathbf{k}}$, соответствующий введенным выше плоским координатам. Будем также писать $\lambda' := \partial_v \lambda$. Определим структурные константы умножения $c(\cdot,\cdot,\cdot)$ и спаривания $\eta(\cdot,\cdot)$:

$$
\begin{aligned}
\eta(\partial_k,\partial_l) &:= \sum \operatorname{res}_{\lambda'=0}\frac{\partial_k\lambda\partial_l\lambda \mathrm{d}v}{\lambda'}, \\
c(\partial_k,\partial_l,\partial_m) &:= \sum \operatorname{res}_{\lambda'=0}\frac{\partial_k\lambda\partial_l\lambda\partial_m\lambda \mathrm{d}v}{\lambda'}.
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

Теорема Дубровина утверждает, что введенные таким образом умножение и спаривание определяют структуру фробениусова многообразия на $\mathcal{H}_{g;\mathbf{k}}$. Причем введенные выше координаты являются плоскими координатами этого фробениусова многообразия. То есть, в этих координатах выполнено: $\partial_k\eta_{lm}=0$. Для выбранных выше плоских координат только следующие компоненты η являются ненулевыми:

$$
\eta_{t_{p;a},t_{q;b}} = \frac{1}{k_p}\delta_{p,q}\delta_{a+b,k_p}, \quad \eta_{v_p,V_q} = \frac{1}{k_p}\delta_{p,q}, \quad \eta_{B_p,C_q} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\delta_{p,q}.
$$

Функция $\mathcal{F}^H$, называемая фробениусовым (или WDVV) потенциалом, определяется уравнением:

$$
\partial_k\partial_l\partial_m\mathcal{F}^H = c(\partial_k,\partial_l,\partial_m).
$$

Из определения очевидно, что введенное таким образом умножение коммутативно и ассоциативно. Из второго свойства следует, что $\mathcal{F}^H$ является решением уравнения WDVV (2.1).

В дальнейшем нас будет интересоваться только структура алгебры, задаваемая функцией $\mathcal{F}^H$. Ввиду этого мы будет рассматривать эту функцию с точностью до слагаемых второго порядка по плоским координатам.

2. Эллиптические функции и тета–константы

Для целостности изложения материала и фиксирования обозначений приведем кратко применяемые в дальнейшем сведения об эллиптических функциях.

2.1. Эллиптические функции. Рассмотрим решетку $\Lambda = 2\omega_1\mathbb{Z}+2\omega_2\mathbb{Z}$ с $\omega_2/\omega_1\in\mathbb{H}$. Обозначим через D ее фундаментальную область.

Определение. Мероморфная функция f на $\mathbb{C}$ называется *эллиптической* (по отношению к решетке Λ) если она удовлетворяет следующему условию периодичности:

$$
f(z+2\omega_1)=f(z), \quad f(z+2\omega_2)=f(z), \quad \forall z\in\mathbb{C}.
$$

Примером таких функций является функция Вейерштрасса:

$$
\wp\left(z;2\omega_1,2\omega_2\right) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right).
$$

Важно заметить, что производная функции Вейерштрасса $\wp'$ также является эллиптической функцией по отношению к той же решетке.

Предложение 7.3. *Пространство всех эллиптических функций на эллиптической кривой $E = \mathbb{C}/\Lambda$ порождено функциями $\wp$ и $\wp'$:*

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \mathbb{C}(\wp, \wp').$$

В дальнейшем нам будет удобно работать с функциями $\wp$ и $\wp'$, разложенными в ряд по z, коэффициенты которого являются функциями от $\tau := \omega_2/\omega_1$:

$$\wp(z,\tau) := z^{-2} + \frac{1}{20} g_2(\tau) z^2 + \frac{1}{28} g_3(\tau) z^4 + O(z^6),$$
$$\wp'(z,\tau) := -2z^{-3} + \frac{2}{20} g_2(\tau) z + \frac{4}{28} g_3(\tau) z^3 + O(z^5),$$

где $g_2(\tau), g_3(\tau)$ известны под названием *модулярных инвариантов* эллиптической кривой. Связь между двумя определениями функции $\wp$ задана следующим равенством:

$$(2\omega_1)^2 \wp(z; 2\omega_1, 2\omega_2) = \wp\left(\frac{z}{2\omega_1}; \tau\right). \tag{7.5}$$

Другим важным свойством эллиптических функций является следующее:

Предложение 7.4. *Пусть $f(z)$ — эллиптическая функция. Тогда сумма вычетов ее полюсов в фундаментальной области D решетки Λ равна нулю:*

$$\sum_{a \in D} \mathrm{res}_{z=a} f(z) \mathrm{d}z = 0.$$

Определение. *Зета–функция Вейерштрасса* определяется равенством:

$$\zeta(z; 2\omega_1, 2\omega_2) = \frac{1}{z} + \sum_{w \in \Lambda\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2}\right).$$

Основным свойством зета–функции является следующее:

$$-\zeta'(z; 2\omega_1, 2\omega_2) = \wp(z; 2\omega_1, 2\omega_2).$$

Заметим, что эта функция не является периодической по отношению к Λ.

Определение. *Квазипериоды* $2\eta_k$ определим равенством:

$$2\eta_k = \zeta(2\omega_k + z) - \zeta(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Связь между периодами и квазипериодами решетки Λ устанавливается равенством Лежандра:

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi\sqrt{-1}}{2}.$$

2.2. Тета–константы и эллиптические функции. В дальнейшем нам понадобятся значения функции $\wp(v,\tau)$ в серединных точках сторон параллелограмма, образованного периодами решетки.

Определение. Пусть $\wp(z) = \wp(z; 2\omega_1, 2\omega_2)$. Комплексные числа $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{C}$ определяются следующим образом:

$$e_1 := \wp(\omega_1), \quad e_2 := \wp(-\omega_1 - \omega_2), \quad e_3 := \wp(\omega_2).$$

Хорошо известным фактом об эллиптических кривых является следующее предложение.

Предложение 7.5. *Точки ω_1, ω_2 и $\omega_1 + \omega_2$ являются единственными нулями функции $\wp'(z)$ в фундаментальной области.*

Числа e_i могут быть выражены через тета–константы следующим образом (см. [**29**, Глава 6] [1]):

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}, \\ e_2 &= \frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}, \\ e_3 &= \frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \frac{\vartheta_4''}{\vartheta_4}. \end{aligned}$$

Используя уравнение теплопроводности мы имеем::

$$\frac{\vartheta_p''}{\vartheta_p} = 4\pi\sqrt{-1}\frac{\partial_\tau \vartheta_p}{\vartheta_p} = 2\pi\sqrt{-1}X_p.$$

Также верно равенство:

$$\eta_1\omega_1 = -\frac{1}{12}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}.$$

Важным свойством производных тета–констант является следующее равенство:

$$\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1} = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + \frac{\vartheta_4''}{\vartheta_4}.$$

Вместе с уравнением теплопроводности мы получаем:

$$\omega_1\eta_1 = -\frac{1}{12}\sum_{p=2}^{4}\frac{\vartheta_p''}{\vartheta_p} = -\frac{\pi\sqrt{-1}}{6}\sum_{p=2}^{4}X_p^\infty = -\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}\gamma^\infty(\tau).$$

3. Гурвиц–фробениусово многообразие $\mathcal{H}_{1,(2,2,2,2)}$

Гурвиц–фробениусово многообразие $\mathcal{H}_{1,(2,2,2,2)}$ параметризует мероморфные функции $\lambda : \mathcal{E} \to \mathbb{P}^1$ на эллиптической кривой $\mathcal{E} = \mathbb{C}/(2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z})$, оснащенные некоторой дополнительной информацией.

[1] Обратим внимание на разницу в нормировке координаты z, примененную в [**29**] по сравнению с нашей.

3.1. Модули. В нашем контексте функция λ определена на $\mathcal{E}$, и должна быть таким образом эллиптической. Ввиду фиксированного нами ветвления она имеет четыре полюса порядка 2. Используя Предложение 7.3 запишем явно общий вид такой функции:

$$\lambda(z) = \sum_{k=1}^{4} \left(\wp(z-a_k; 2\omega_1, 2\omega_2) u_k + \frac{1}{2} \frac{\wp'(z-a_k; 2\omega_1, 2\omega_2)}{\wp(z-a_k; 2\omega_1, 2\omega_2)} s_k \right) + c, \tag{7.6}$$

откуда мы имеем следующие “модули”:

- a_k – координаты полюсов на $\mathcal{E}$,
- u_k, s_k – поведение функции в полюсах,
- c – сдвиг,
- $2\omega_1, 2\omega_2$ – “модули” самой эллиптической кривой.

Суммарно мы получаем 15 параметром, которые однако же не являются независимыми. Из формулы Римана–Гурвица мы знаем, что размерность пространства таких функций $\mathcal{H} := \{\lambda\}$ равна 12.

Ввиду того, что функция λ является эллиптической выполнено:

$$\sum_{z \in D} \mathrm{res}_z \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{4} s_k = 0.$$

Без ограничения общности будем предполагать, что $s_1 = 0$.

На накрывающей кривой мы имеем $\mathcal{E}_{(2\omega_1, 2\omega_2)} \cong \mathcal{E}_{1,\tau}$ для $\tau = \omega_2/\omega_1$. Две такие эллиптические кривые задают гурвиц–эквивалентные разветвленные накрытия.

Ввиду автоморфизмов эллиптической кривой, заданными сдвигами начала координат мы также положим $a_1 = 0$.

Предложение 7.6. *Гурвиц–фробениусово многообразие $\mathcal{H}_{1,(2,2,2,2)}$ является пространством функций λ, описанных выше, параметризованным числами:*

$$a_2, a_3, a_4,\ \ s_2, s_3, s_4,\ \ u_1, u_2, u_3, u_4,\ \ \omega_2/\omega_1.$$

В дальнейшем для упрощения обозначений мы будем писать $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{1,(2,2,2,2)}$, а также мы не будет опускать число a_1 в суммированиях, не забывая однако, что оно нулевое.

3.2. Плоские координаты. Следуя Дубровину введем плоские координаты на пространстве $\mathcal{H}_{1,(2,2,2,2)}$ (см. Теорема 7.2). Для этого необходим зафиксировать некоторый дифференциал на накрывающей кривой. Положим:

$$\phi := \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}z}{2\omega_1},$$

где z является координатой на $\mathcal{E}$.

Предложение 7.7. *Разветвленное накрытие λ имеет следующий вид в плоских координатах:*

$$
\begin{aligned}
\lambda(z) = \sum_{k=2}^{4} \left(\frac{1}{4} \wp\left(v - v_k, \tau\right) t_k^2 + \frac{1}{2} \frac{\wp'\left(v - v_k, \tau\right)}{\wp\left(v - v_k, \tau\right)} V_k \right) \\
+ \frac{1}{4}\wp(v,\tau) t_1^2 + \eta_1 \omega_1 \sum_{k=1}^{4} t_k^2 + C_1.
\end{aligned} \tag{7.7}
$$

Эйлерово поле фробениусовой структуры в этих координатах записывается:

$$
E_{\mathcal{H}} = C_1 \frac{\partial}{\partial C_1} + \sum \frac{1}{2} t_i \frac{\partial}{\partial t_i} + \sum V_i \frac{\partial}{\partial V_i}. \tag{7.8}
$$

Доказательство. Используя формулы Дубровина (см. Теорема 7.2) посчитаем плоские координаты.

$$
v_k = \frac{a_k}{2\omega_1}, \quad V_k = \frac{s_k}{2\omega_1}, \quad B_1 = \int_0^{2\omega_2} \frac{dz}{2\omega_1} = \tau,
$$

где $\tau = \omega_2/\omega_1$ — модуль эллиптической кривой. Найдем $t_k := t_{k,1}$:

$$
t_k = \mathrm{res}_{a_k} \frac{z - a_k}{2\omega_1} \frac{z - a_k}{\sqrt{u_k}} \left(\frac{-2u_k}{(z - a_k)^3} + \text{h.o.t.} \right) = -\frac{\sqrt{u_k}}{\omega_1},
$$

где ветвь квадратичного корня фиксирована униформизующим параметром w_k.

Значение функции $\zeta(z)$ не определено в точке $z = 0$, ввиду этого для того, чтобы найти плоскую координату C_1 мы используем пределы:

$$
\begin{aligned}
C_1 =& \frac{1}{2\omega_1} \lim_{\epsilon \to 0} \left[-\sum_k \left(\zeta(z - a_k) u_k + \frac{1}{2} \log \wp(z - a_k) v_k \right) + zc \right]_{\epsilon}^{2\omega_1 - \epsilon} \\
=& \frac{1}{2\omega_1} \sum_k \left(\left(\zeta(-a_k) - \zeta(2\omega_1 - a_k)\right) u_k + \frac{1}{2} \left(\log \wp(2\omega_1 - a_k) - \log \wp(-a_k)\right) v_k \right) + c.
\end{aligned}
$$

Вследствие периодичности функции Вейерштрасса мы получаем:

$$
C_1 = c - \frac{\eta_1}{\omega_1} \sum_{k=1}^{4} u_k.
$$

Равенство (7.5) завершает доказательство. □

До конца этой главы мы будет работать с функцией $\lambda(v)$, записанной в плоских координатах. Мы будем также опускать переменную τ, имея в виду, что функции Вейерштрасса, использованные в $\lambda(v)$ имеют вид $\wp(v, \tau)$.

3.3. Структурные константы $\mathcal{H}_{1,(2,2,2,2)}$. В этом разделе мы приведем все вычисления, необходимые для доказательства Теоремы 7.1. Мы подсчитаем все структурные константы $\mathcal{H}_{1,(2,2,2,2)}$ по формулам (7.4).

В большинстве случае нам надо будет считать вычеты эллиптических функций. Это будет происходить ровно тогда, когда производная λ, эллиптической функции по построению, также будет эллиптической функцией. В таком случае мы будет работать с вычетами в точках v_i, ежели чем в таких, что $\lambda' = 0$.

Предложение 7.8. *Пусть $f(v)$ — эллиптическая функция, и x_p – ее набор полюсов, такой, что $\lambda'(x_p) \neq 0$. Тогда мы имеем:*

$$\sum_{y:\ \lambda'(y)=0} \mathrm{res}_{v=y} \frac{f(v)\mathrm{d}v}{\lambda'(v)} = -\sum_p \mathrm{res}_{v=x_p} \frac{f(v)\mathrm{d}v}{\lambda'(v)}.$$

Доказательство. Полюсами функции $f(v)/\lambda'(v)$ по переменной v являются точки: $\{x_p\} \sqcup \{y : \lambda'(y) = 0\}$. Частное $f(v)/\lambda'(v)$ также является эллиптической функцией и мы имеем:

$$\sum_p \mathrm{res}_{x_p} \frac{f(v)\mathrm{d}v}{\lambda'(v)} + \sum_{y:\ \lambda'(y)=0} \mathrm{res}_{v=y} \frac{f(v)\mathrm{d}v}{\lambda'(v)} = 0.$$

□

Однако мы не можем применить такой подход для производной $\partial_\tau \lambda$, где мы будем использовать лемму Фробениуса—Штикельбергера [**17**]:

Лемма 7.9. *Пусть $f(z; 2\omega_1, 2\omega_2)$ является эллиптической функцией с периодами $(2\omega_1, 2\omega_2)$, тогда следующая функция также является периодической, причем с теми же периодами:*

$$\eta_1 \frac{\partial f}{\partial \omega_1} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial \omega_2} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z},$$

где $\zeta = \zeta(z; 2\omega_1, 2\omega_2)$.

Доказательство. Приведем краткое доказательство. Дифференцируя равенство $f(z + 2\omega_1) = f(z)$ по ω_1 мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \omega_1} f(z + 2\omega_1) + 2\frac{\partial}{\partial z} f(z + 2\omega_1) = \frac{\partial}{\partial \omega_1} f(z).$$

Из выражения для квазипериодов получаем равенство:

$$\begin{aligned}
\eta_1 \frac{\partial f(z)}{\partial \omega_1} + \eta_2 \frac{\partial f(z)}{\partial \omega_2} + \zeta(z) \frac{\partial f(z)}{\partial z} &= \eta_1 \frac{\partial f(z + 2\omega_1)}{\partial \omega_1} \\
+ 2\eta_1 \frac{\partial f(z + 2\omega_1)}{\partial z} + \eta_2 \frac{\partial f(z + 2\omega_1)}{\partial \omega_2} &+ (\zeta(z + 2\omega_1) - 2\eta_1) \frac{\partial f(z + 2\omega_1)}{\partial z} \\
= \eta_1 \frac{\partial f(z + 2\omega_1)}{\partial \omega_1} + \eta_2 \frac{\partial f(z + 2\omega_1)}{\partial \omega_2} &+ \zeta(z + 2\omega_1) \frac{\partial f(z + 2\omega_1)}{\partial z}.
\end{aligned}$$

□ Рассмотрим функцию $f(z; 2\omega_1, 2\omega_2)$. Применяя замену переменных как в (7.5) мы получим для $f(v, \tau)$:

$$\eta_1 \frac{\partial f}{\partial \omega_1} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial \omega_2} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} = -2\pi\sqrt{-1}\ \partial_\tau f + \zeta \partial_v f - 2\eta_1 \partial_v f.$$

где мы также применили равенство Лежандра.

Обозначение 7.1. *Введем обозначение для соответствующей эллиптической функции:*

$$h_f(z,t) := -2\pi\sqrt{-1}\ \partial_\tau f + \zeta\partial_v f - 2\eta_1\partial_v f.$$

4. Ограничение потенциала

Определение. Определим $\mathcal{F}_R$ как потенциал, полученный ограничением потенциала $\mathcal{F}^H$ гурвиц—фробениусова многообразия на подмногообразие $\mathcal{H}^R_{1,(2,2,2,2)}$:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{R}} := \mathcal{F}^H\ |_{\mathcal{A}},$$

где

$$\mathcal{A} := \Big\{ v_1 = 0, \quad v_2 = \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}, \quad v_3 = \frac{1}{2}, \quad v_4 = \frac{\tau}{2}, \quad V_2 = V_3 = V_4 = 0 \Big\}.$$

Из Предложения 7.7 следует, что это ограничение согласовано с (7.2).

Предложение 7.10. *Слагаемые потенциала $\mathcal{F}^H$, включающие переменные v_p и V_p не входят в потенциал ограничения $\mathcal{F}_R$.*

Мы докажем это предложение вычисляя структурные константы фробениусовой структуры. Из явного вида эйлерова поля $\mathcal{H}$ мы знаем, что переменные V_p имеют ненулевую целую степень. Таким образом они входят в потенциал $\mathcal{F}^H$ полиномиально. То есть имеется натуральное число N, такое, что V_p^n для $n \geq N$ не входит в разложение в ряд потенциала $\mathcal{F}^H$.

Из вычетной формулы для структурных констант очевидно, что функция $\mathcal{F}^H$ определена при $V_p = 0$. Таким образом основная сложность в доказательстве приведенного выше предложения заключается в переменных v_p, имеющих степень 0.

Обозначение 7.2. *Пусть $f(v) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k v^k$ — некоторый формальный ряд по переменной v, и $p \in \mathbb{Z}$. Обозначим:*

$$[v^p]\ f(v) := a_p.$$

Мы будем использовать лемму:

Лемма 7.11. *В плоских координатах верны следующие выражения для структурных констант. Для всех $k \neq p$ верно:*

$$c(t_k, v_k, v_k) = \frac{g_2(\tau)}{20}\frac{t_k}{2}\eta_1\omega_1 V_k,$$

$$c(t_k, t_k, v_p) = \frac{1}{8}\wp'(a_p - a_k)t_k^2 + \frac{1}{4}\frac{\wp''(z-a_k)\wp(z-a_k) - (\wp'(z-a_k))^2}{\wp(z-a_k)^2}V_k$$

$$c(t_k, t_k, v_k) = 0,$$

$$c(v_p, v_p, C_1) = 0.$$

Доказательство. Производная функции λ по v_k имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\lambda}{\partial v_k} &= -\frac{1}{4}\wp'(v-v_k)t_k^2 - \frac{1}{2}\frac{\wp''(v-v_k)\wp(v-v_k) - (\wp'(v-v_k))^2}{\wp(v-v_k)^2}V_k \\ &= \frac{1}{2}\frac{t_k^2}{(v-v_k)^3} - \frac{V_k}{(v-v_k)^2} + O(1).\end{aligned}$$

Очевидно, что это эллиптическая функция.

Структурная константа $c(t_k, v_k, v_k)$. По определению мы имеем:

$$c(t_k, v_k, v_k) = -\mathrm{res}_{v_k}\frac{(\partial_{v_k}\lambda)^2(\partial_{t_k}\lambda)\mathrm{d}v}{\lambda'}.$$

Заметим, что поведение функций λ' и $-\partial_{v_k}\lambda$ в окрестности точки a_k совпадают:

$$\begin{aligned}c(t_k, v_k, v_k) &= \mathrm{res}_{v_k}(\partial_{v_k}\lambda\ \partial_{t_k}\lambda)\mathrm{d}v \\ &= [(v-v_k)]\partial_{v_k}\lambda\cdot[(v-v_k)^{-2}]\partial_{t_k}\lambda + [(v-v_k)^{-3}]\partial_{v_k}\lambda\cdot[(v-v_k)^2]\partial_{t_k}\lambda \\ &+ \frac{2V_k}{t_k^2}[(v-v_k)^{-3}]\partial_{v_k}\lambda\cdot[(v-v_k)]\partial_{t_k}\lambda\end{aligned}$$

Первые две слагаемых дают в сумме ноль (попросту потому, что $\mathrm{res}_{v_k}\wp'(v-v_k)\wp(v-v_k) = 0$) и из разложения $\wp$ в ряд Лорана мы получаем:

$$c(t_k, v_k, v_k) = \frac{g_2(\tau)}{20}\frac{t_k}{2}\eta_1\omega_1 V_k.$$

Структурная константа $c(t_k, t_k, v_p)$. Для всех $p \neq k$ мы имеем:

$$c(t_k, t_k, v_p) = -\mathrm{res}_{v_k}\frac{(\partial_{t_k}\lambda)^2(\partial_{v_p}\lambda)\mathrm{d}v}{\lambda'} = \frac{2}{t_k^2}[(v-v_k)^{-4}](\partial_{t_k}\lambda)^2\partial_{v_p}\lambda.$$

Функция $\partial_{v_p}\lambda$ регулярна в точке v_k для всех $k \neq p$ и мы имеем:

$$c(t_k, t_k, v_p) = \frac{2}{t_k^2}\partial_{v_p}\lambda\mid_{v=v_k}[(v-v_k)^{-4}](\partial_{t_k}\lambda)^2 = \frac{2}{t_k^2}\frac{t_k^2}{4}\partial_{v_p}\lambda\mid_{v=v_k}.$$

Структурная константа $c(t_k, t_k, v_k)$. Посчитаем вычет для $p = k$:

$$c(t_k, t_k, v_k) = -\mathrm{res}_{v_k}\frac{(\partial_{t_k}\lambda)^2(\partial_{v_k}\lambda)\mathrm{d}v}{\lambda'} = \mathrm{res}_{v_k}(\partial_{t_k}\lambda)^2.$$

Разложение $\partial_{t_k}\lambda$ в ряд Лорана содержит только четные степени $v-v_k$. Таким образом вычет равен нулю.

Структурная константа $c(C_1, v_p, v_p)$. Для подсчета этой структурной константы мы можем использовать свойство фробениусовой алгебры:

$$c(C_1, v_p, v_p) = \eta(v_p, v_p) = 0,$$

где мы использовали явный вид спаривания в плоских координатах.

Лемма доказана. □

Заметим, что ввиду выбора a_k в определенном выше ограничении, мы должны рассмотреть разложение $\partial_{v_p}\lambda$ в серединных точках сторон параллелограмма, заданного периодами решетки:

$$a_2 - a_1 = \omega_1 + \omega_2,\ a_3 - a_1 = \omega_1,\ a_4 - a_1 = \omega_2,$$

$$a_2 - a_3 = \omega_2,\ a_2 - a_4 = \omega_1,\ a_3 - a_4 = \omega_1 - \omega_2.$$

Обозначение 7.3. *Для всех $k \neq l$, $4 \geq k, l \geq 1$ обозначим через $\{kl\}$ следующие числа:*

$$\{13\} = \{24\} := 1, \quad \{12\} = \{34\} := 2, \quad \{23\} = \{14\} := 3.$$

В использованном нами обозначении мы имеем:

$$e_{\{13\}} = e_{\{24\}} = e_1, \quad e_{\{12\}} = e_{\{34\}} = e_2, \quad e_{\{23\}} = e_{\{14\}} = e_3.$$

Доказательство. Покажем, что приведенные структурные константы обращаются в ноль при ограничении. Заметим, что мы не считали структурные константы $c(v_p, v_p, \tau)$ и $c(v_k, v_l, v_p)$. В этом нет необходимости ввиду квазиоднородности потенциала гурвиц–фробениусова многообразия — переменные v_p и τ имеют степень ноль. Таким образом слагаемые функции $\mathcal{F}^H$, задающие эти структурные константы входят в потенциал умноженные на некоторые другие переменные ненулевой степени. Это переменные V_p и t_p. По этой причине мы доказываем, что обнуляются структурные константы $c(t_p, \cdot, \cdot)$ и $c(V_p, \cdot, \cdot)$.

Очевидно, что все слагаемые, имеющие переменную V_k множителем обращаются в ноль. Имеется только одна структурная константа, которая требуют особого рассмотрения: $c(t_k, t_k, v_p)$. Мы имеем:

$$c(t_k, t_k, v_p) = -\frac{1}{2}\partial_{v_p}\lambda(v_k - v_p).$$

Точки $a_k - a_l$ являются в точности теми, где $\wp'(z; 2\omega_1, 2\omega_2) = 0$. И мы получаем:

$$\partial_{v_p}\lambda(a_k - a_p) = \frac{V_k}{2e_{\{kp\}}}\wp''\left(\frac{1}{2\omega_1}(a_k - a_l)\right).$$

Это выражения обнуляется при $V_k = 0$.

$\square$

5. Доказательство Теоремы 7.1

Чтобы доказать Теорему 7.1 посчитаем структурные константы по переменным t_k, C_1 и τ.

5.1. Структурные константы, включающие только переменные t_k, C_1 и τ.

Предложение 7.12. *В плоских координатах выполнено:*

$$
\begin{aligned}
c(\tau, C_1, C_1) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}},\\
c(t_k, t_k, C_1) &= \frac{1}{2},\\
c(t_k, t_k, t_k) &= 3t_k \cdot \omega_1\eta_1,\\
c(t_k, t_k, t_l) &= t_l\left(\frac{1}{4}\wp(a_k - a_l) + \eta_1\omega_1\right).
\end{aligned}
$$

Доказательство.

Структурная константа $c(\tau, C_1, C_1)$. По определению мы имеем:

$$c(\tau, C_1, C_1) = \sum \mathrm{res}_{\lambda'=0} \frac{\partial_\tau \lambda(v)\mathrm{d}v}{\lambda'(v)},$$

Применяя Лемму 7.9 запишем:

$$c(\tau, C_1, C_1) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum \mathrm{res}_{\lambda'=0} \frac{h_\lambda(v)\mathrm{d}v}{\lambda'(v)}$$

где мы использовали в последнем равенстве тот факт, что ζ–функция имеет единственный полюс в точке $v = 0$. Функция h_λ является эллиптической, и мы можем применить Предложение 7.8:

$$c(\tau, C_1, C_1) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum \mathrm{res}_{v_p} \frac{h_\lambda \mathrm{d}v}{\lambda'} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum \mathrm{res}_{v_p} \frac{\zeta\lambda' - 2\pi\sqrt{-1}\partial_\tau\lambda - 2\eta_1\lambda'}{\lambda'}\mathrm{d}v.$$

Функция $\partial_\tau\lambda/\lambda'$ регулярна в точке v_p и не вносит вклада в вычет:

$$c(\tau, C_1, C_1) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum \mathrm{res}_{v_p}\zeta\mathrm{d}v = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\mathrm{res}_{v_1}\zeta\mathrm{d}v = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}.$$

Структурная константа $c(t_k, t_k, C_1)$.

$$c(t_k, t_k, C_1) = \sum \mathrm{res}_{\lambda'=0} \frac{(\partial_{t_k}\lambda)^2\partial_{C_1}\lambda\mathrm{d}v}{\lambda'} = -\mathrm{res}_{v_k} \frac{\left(\dfrac{2t_k}{4(v-v_k)^2} + h.o.t.\right)^2 \mathrm{d}v}{\dfrac{-2t_k^2}{4(v-v_k)^3} + h.o.t.}$$

где мы обозначили через $h.o.t.$ члены старших порядков по переменным.

$$c(t_k, t_k, C_1) = \frac{t_k^2}{4}\frac{2}{t_k^2} = \frac{1}{2}.$$

Структурная константа $c(t_k,t_k,t_k)$.

$$c(t_k,t_k,t_k) = -\mathrm{res}_{v_k}\frac{(\partial_{t_k}\lambda)^3\,\mathrm{d}v}{\lambda'} = \frac{2}{t_k^2}[(v-v_k)^{-4}](\partial_{t_k}\lambda)^3.$$

Ряд Тейлора функции в числителе имеет вид:

$$\partial_{t_k}\lambda = \frac{t_k}{2}\left(\frac{1}{(v-v_k)^2} + 4\eta_1\omega_1 + O\left((v-v_k)^2\right)\right).$$

Имеются ровно две возможности для получения множителя порядка -4 из куба функции $\partial_{t_k}\lambda$. Разложенные по порядкам множителей это: $-1,-1,-2$ и $-2,-2,-0$. Первая возможность не дает вклада в вычет так как степень -1 по $v-v_i$ входит только умноженная на переменную V_k и мы получаем:

$$c(t_k,t_k,t_k) = \frac{2}{t_k^2}\frac{3t_k^3}{4}2\eta_1\omega_1 = 3t_k\omega_1\eta_1.$$

Структурная константа $c(t_k,t_k,t_l)$.

$$c(t_k,t_k,t_l) = -\mathrm{res}_{v_k}\frac{(\partial_{t_k}\lambda)^2\left(\partial_{t_l}\lambda\right)\mathrm{d}v}{\lambda'} = \frac{2}{t_k^2}[(v-v_k)^{-4}](\partial_{t_k}\lambda)^2\left(\partial_{t_l}\lambda\right).$$

Множитель $\partial_{t_l}\lambda$ регулярен в точке v_k и мы всего лишь берем его значение.

$$c(t_k,t_k,t_l) = \frac{2}{t_k^2}\frac{t_k^2}{4}\left(\partial_{t_l}\lambda\right)|_{v=v_k}.$$

□

5.2. Структурные константы в специальной точке.

Предложение 7.13. *Для потенциала $\mathcal{F}_R$ выполнено:*

$$\frac{\partial^3\mathcal{F}_R}{(\partial t_k)^2\partial t_l} = -t_l\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}X_{kl}(\tau).$$

Доказательство. По Предложению 7.10 потенциал $\mathcal{F}_R$ получается интегрированием структурных констант $c(\cdot,\cdot,\cdot)$ многообразия $\mathcal{H}$, включающих лишь переменные t_k,τ,C_1. Мы имеем:

$$\frac{\partial^3\mathcal{F}_R}{(\partial t_k)^2\partial t_l} = \frac{\partial^3\mathcal{F}^H}{(\partial t_k)^2\partial t_l}\,|_{\mathcal{A}} = \int c(t_k,t_k,t_l)dt_k^2dt_l.$$

Последние могут быть посчитаны через тета–константы. Для структурных констант под знаком интеграла выполнено:

$$\left(\frac{1}{4}\wp(v_k-v_l)+\eta_1\omega_1\right) = \left(\frac{1}{12}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \frac{1}{4}\frac{\vartheta_{\{kl\}}''}{\vartheta_{\{kl\}}}\right) - \frac{1}{12}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = -\frac{1}{4}\frac{\vartheta_{\{kl\}}''}{\vartheta_{\{kl\}}},$$

где мы применили обозначение 7.3 о двойном индексе.

Применяя уравнение теплопроводности на $\vartheta_{\{kl\}}$ доказательство завершено. □

5.3. Потенциал ограничения. Интегрируя структурные константы, которые мы посчитали запишем потенциал $\mathcal{H}^R_{1,(2,2,2,2)}$:

$$\mathcal{F}_R = \frac{C_1^2\tau}{2}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} + C_1\sum_k \frac{t_k^2}{4} - \sum_{p>q}\frac{t_p^2t_q^2}{4}\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}X^{\infty}_{pq}(\tau) - \sum_k \frac{t_k^4}{24}\frac{3\pi\sqrt{-1}}{4}\gamma^{\infty}(\tau).$$

Пусть:

$$t_{-1} := \pi\sqrt{-1}\tau, \quad \tilde{C}_1 := \frac{C_1}{\sqrt{2\pi\sqrt{-1}}}, \quad \tilde{t}_k := t_k\sqrt{\pi\sqrt{-1}}\cdot 2^{1/4}.$$

Потенциал изменяется следующим образом:

$$\mathcal{F}_R = \frac{\tilde{C}_1^2 t_{-1}}{2} + \tilde{C}_1\sum_k \frac{\tilde{t}_k^2}{4} - \sum_{p>q}\frac{\tilde{t}_p^2\tilde{t}_q^2}{16}\frac{1}{\pi\sqrt{-1}}X^{\infty}_{pq}(t_{-1}) - \sum_k \frac{\tilde{t}_k^4}{64}\frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\gamma^{\infty}(t_{-1}).$$

Под действием такой замены переменных потенциал преобразуется в потенциал WDVV, приведенный в Предложении 4.4. Теорема 7.1 доказана.

Следствие 7.14. *Пусть t^{GW} — переменные $\mathcal{F}_0^{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}$. В координатах изоморфизм имеет вид:*

$$t_{-1}^{\mathrm{GW}} = \pi\sqrt{-1}\tau, \quad t_0^{\mathrm{GW}} = \frac{C_1}{\sqrt{-2\pi}}, \quad t_1^{\mathrm{GW}} = (t_4 - t_3)\frac{\sqrt{\pi\sqrt{-1}}}{2^{1/4}}$$

$$t_2^{\mathrm{GW}} = (t_4 + t_3)\frac{\sqrt{\pi\sqrt{-1}}}{2^{1/4}} \quad t_3^{\mathrm{GW}} = (t_1 - t_2)\frac{\sqrt{\pi\sqrt{-1}}}{2^{1/4}} \quad t_4^{\mathrm{GW}} = (t_1 + t_2)\frac{\sqrt{\pi\sqrt{-1}}}{2^{1/4}}.$$

ГЛАВА 8

Замена примитивной формы орбифолдовой модели Ландау–Гинзбурга

По настоящий момент теория примитивных форм для орбифолдовых моделей Ландау–Гинзбурга еще не построена. Ввиду этого мы предлагаем рассмотреть эффект от изменения примитивной формы только в классе фробениусовых многообразий с помощью зеркальной симметрии типа CY–LG, доказанной в Теореме 6.2 и некоторого действия на пространстве фробениусовых многообразий.

Рассмотрим орбифолдовую Б–модель пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$, согласованную с примитивной формой LCSL, как "начальную точку". Применим к этому фробениусову многообразию некоторое действие $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}$, определенное на пространстве фробениусовых многообразий, которое изменяет примитивную форму.

Фробениусовы многообразия пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$ задающие зеркальную симметрию типа LG–LG, согласно гипотезам зеркальной симметрии, должны быть согласованы с примитивной формой в *специальной точке*. Такое понятие также не определено для орбифолдовых моделей Ландау–Гинзбурга. Аналогично зеркальной симметрии с тривиальной группой симметрии мы предлагаем называть специальными точками те, для которых $\tau_0 \in \mathbb{Q}\sqrt{-D}$ для некоторого $D \in \mathbb{N}_+$.

$$\begin{array}{lcr}
(W, \{id\}) & \leftrightarrow & (W, G) \\
\text{замена примитивной формы} & \leftrightarrow & \text{действие } \mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)} \\
\text{специальная точка} & \leftrightarrow & \tau_0 \in \mathbb{Q}\sqrt{-D}, \quad D \in \mathbb{Z}_+.
\end{array}$$

В следующих разделах мы мотивируем использование действия $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}$ для замены примитивной формы.

1. Фробениусово многообразие $M_6^{(\tau_0,\omega_0)}$

Рассмотрим фробениусово многообразие M размерности 6 и конформной размерности 1 с плоскими координатами $t_1, \dots, t_5, t_6$, удовлетворяющее следующим условиям:

- Единичное векторное поле e совпадает с $\frac{\partial}{\partial t_1}$.

- Эйлерово поле E имеет вид

$$E = t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + \sum_{k=2}^{5} \frac{1}{2} t_k \frac{\partial}{\partial t_k}.$$

- Фробениусов потенциал $\mathcal{F}$ записывается как

$$F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = \frac{1}{2} t_1^2 t_6 + \frac{1}{4} t_1 (\sum_{i=2}^{5} t_i^2) + (t_2 t_3 t_4 t_5) f_0(t_6)$$
$$+ \frac{1}{4}(t_2^4 + t_3^4 + t_4^4 + t_5^4) f_1(t_6) + \frac{1}{6}(t_5^2 t_2^2 + t_5^2 t_3^2 + t_5^2 t_4^2 + t_2^2 t_3^2 + t_2^2 t_4^2 + t_3^2 t_4^2) f_2(t_6),$$

где $f_0(t)$, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — некоторые функции от переменной t, голоморфные в некоторой области в $\mathbb{C}$.

1.1. Решения уравнения WDVV.

Предложение 8.1. *Уравнение WDVV на $\mathcal{F}$ эквивалентно следующей системе уравнений*:

$$\begin{cases} f_0'(t) = \frac{8}{3} f_0(t) f_2(t) - 24 f_0(t) f_1(t), \\ f_1'(t) = -\frac{2}{3} f_0(t)^2 - \frac{16}{3} f_1(t) f_2(t) + \frac{8}{9} f_2(t)^2, \\ f_2'(t) = 6 f_0(t)^2 - \frac{8}{3} f_2(t)^2. \end{cases} \tag{8.1}$$

Доказательство. Легко проверить, что WDVV$(\partial_3, \partial_4, \partial_3, \partial_4)$ (см. Обозначение 6.3) дает второе и третье уравнение, а WDVV$(\partial_2, \partial_4, \partial_3, \partial_3)$ дает первое уравнение. □

Без потери общности мы можем считать:

$$\begin{cases} f_0(t) := \frac{1}{8} X_3(t) - \frac{1}{8} X_4(t), \\ f_1(t) := -\frac{1}{12} X_2(t) - \frac{1}{48} X_3(t) - \frac{1}{48} X_4(t), \\ f_2(t) := -\frac{3}{16} X_3(t) - \frac{3}{16} X_4(t), \end{cases} \tag{8.2}$$

для некоторых функций $X_i(t)$, голоморфных на той же области, что и $f_i(t)$.

Предложение 8.2. *Уравнения* (8.1) *эквивалентны следующей системе дифференциальных уравнений*:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(X_2(t) + X_3(t)) = 2 X_2(t) X_3(t), \\ \frac{d}{dt}(X_3(t) + X_4(t)) = 2 X_3(t) X_4(t), \\ \frac{d}{dt}(X_4(t) + X_2(t)) = 2 X_4(t) X_2(t), \end{cases} \tag{8.3}$$

известно под именем системы Альфана.

Доказательство. следует моментально из явного вида функций. □

Следующее предложение является красивым примером действия на пространстве фробениусовых многообразий, которое задается исключительно аналитически.

Предложение 8.3. *Пусть тройка функция* $(X_2(t), X_3(t), X_4(t))$ *является решением системы Альфана* (8.3)*. Для всякой* $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ *определим другую тройку функций* $X_i^A(t)$, $2 \le i \le 4$*:*

$$X_i^A(t) := \frac{\det(A)}{(ct+d)^2} X_i\left(\frac{at+b}{ct+d}\right) - \frac{c}{ct+d}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{8.4}$$

Тогда тройка $(X_2^A(t), X_3^A(t), X_4^A(t))$ *также является решением системы Альфана* (8.3)*.*

Доказательство. Это утверждение было доказано в [**38**] для $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Рассмотрим

$$A' = \begin{pmatrix} a' & b \\ c' & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), \quad a' = a/\det A, c' = c/\det A.$$

Из определения видно, что если тройка $\{X_i(t)\}$ является решением системы Альфана, то для всякого $a \in \mathbb{C}^*$ тройка $\{aX_i(at)\}$ тоже является решением системы Альфана. Полагая $a := \det A$ мы получаем требуемое. □

Важно заметить, что это $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$–действие является обратным к $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$–действию на пространстве решений уравнения WDVV, приведенном в Приложении Б [**11**].

Предложение 8.4. *Рассмотрим преобразование инверсии Дубровина I (см. уравнение* (4.5) *в Главе 4), примененное к* 6*–мерному фробениусову многообразию с потенциалом* $\mathcal{F}$*:*

$$\mathcal{F}^I = \mathcal{F}^A, \ \textit{для } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где слева мы применяем преобразование инверсии, а справа — $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ *действие* (8.4)*.*

Доказательство. Это следует из явной записи обоих действий. □

1.2. Действие $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}$ на $M_{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}$. Напомним, что фробениусово многообразие теории Громова–Виттена орбифолда $\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}$ задано некоторым определенным решением системы Альфана, которое мы обозначили в главе 4 через $X_k^\infty(\tau)$:

$$X_k^\infty(\tau) := 2\frac{\partial}{\partial\tau}\log\vartheta_k(\tau), \quad 2 \le k \le 4,$$

где $\vartheta_k(\tau)$ – тета константы Якоби. Заметим, что фробениусово многообразие теории Громова–Виттена орбифолда $\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}$ также принадлежит приведенному выше классу 6–мерных фробениусовых многообразий.

Рассмотрим следующее $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$–действие $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}$ на приведенном выше классе фробениусовых многообразий

$$\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)} := \begin{pmatrix} \dfrac{\bar{\tau}_0}{4\pi\omega_0\mathrm{Im}(\tau_0)} & \omega_0\tau_0 \\ \dfrac{1}{4\pi\omega_0\mathrm{Im}(\tau_0)} & \omega_0 \end{pmatrix}. \tag{8.5}$$

Определение. Фиксируем $\tau_0 \in \mathbb{H}$ и $\omega_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

(1) Применяя действие $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ (8.4), заданное матрицей $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}$, определим тройку функций

$$X_k^{(\tau_0,\omega_0)}(t) := (X_k^{\infty})^{\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}}(t) \quad \text{for} \quad 4 \geq k \geq 2.$$

Тогда функции $X_k^{(\tau_0,\omega_0)}(t)$ голоморфны на:

$$D^{(\tau_0,\omega_0)} := \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < |-4\pi\omega_0^2\mathrm{Im}(\tau_0)|\}.$$

(2) Обозначим через $M_6^{(\tau_0,\omega_0)} := \mathbb{C}^5 \times D^{(\tau_0,\omega_0)}$ фробениусово многообразие со следующим потенциалом:

$$\mathcal{F}_6^{(\tau_0,\omega_0)} = \frac{t_1^2t_6}{2} + \frac{t_1}{4}\sum_{k=2}^{5} t_k^2 - (t_3^2t_4^2 + t_5^2t_2^2)\frac{1}{16}X_2^{(\tau_0,\omega_0)}(t_6) - (t_5^2t_3^2 + t_2^2t_4^2)\frac{1}{16}X_3^{(\tau_0,\omega_0)}(t_6)$$
$$- (t_5^2t_4^2 + t_2^2t_3^2)\frac{1}{16}X_4^{(\tau_0,\omega_0)}(t_6) - \frac{1}{64}\left(\sum_{k=2}^{5} t_k^4\right)\left(\frac{2}{3}\sum_{k=2}^{4} X^{(\tau_0,\omega_0)}(t)\right).$$

Мы будем также писать:

$$\mathcal{F}_6^{(\tau_0,\omega_0)} = \mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)} \cdot \mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}.$$

Из явного вида потенциала $\mathcal{F}_6^{(\tau_0,\omega_0)}$ видно, что эйлерово поле остается неизменным под действием $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}$. Таким образом приведенное выше действие $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$, определенное исключительно аналитически как действие на множестве решений системы Альфана, задает действие на пространстве фробениусовых многообразий.

2. Замена примитивной формы и $M_6^{(\tau_0,\omega_0)}$

Напомним, что множество нулей уравнения $W_\sigma = 0$ задает семейство эллиптических кривых над Σ. Пусть ζ_σ — некоторая примитивная форма особенности W_σ. Она задает некоторый период $\pi(\sigma)$ эллиптической кривой $E_\sigma := \{W_\sigma = 0\}$.

Рассмотрим $\lambda_\sigma \in \mathcal{H}_{1,(2,2,2,2)}$, т.ч.:

$$\lambda_\sigma : E_\sigma \xrightarrow{8:1} \mathbb{P}^1, \quad \forall\sigma \in \Sigma,$$

прообраз $\lambda_\sigma^{-1}(\infty)$ состоит из 4 точек порядка 2 каждая. Напомним, что частью конструкции гурвиц–фробениусова многообразия был выбор дифференциала первого рода

ϕ (см. Раздел 1.1 Главы 7), от которого зависели также и явные формулы для плоских координат. Выбирая $\phi = dz/\pi(\sigma)$ на эллиптической кривой E_σ мы получаем семейство фробениусовых структур на $\mathcal{H}_{1,(2,2,2,2)}$ и $\mathcal{H}^R_{1,(2,2,2,2)}$ (см. Главу 7). Обозначим через M^σ фробениусову структуру на $\mathcal{H}^R_{1,(2,2,2,2)}$, заданную периодом $\pi(\sigma)$ эллиптической кривой E_σ.

Далее мы идентифицируем M^{σ_0} для всякого $\sigma_0 \in \Sigma$ с определенным фробениусовым многообразием $M_6^{(\tau_0,\omega_0)}$. Это позволит нам рассматривать действие $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}$ на фробениусовых многообразиях размерности 6 как эффект от замены примитивной формы особенности W_σ.

2.1. Замена примитивной формы. В работе [**6**] был предложен следующий подход для замены примитивной формы. Пусть $H_\mathbb{Z} = \mathbb{Z}\alpha \otimes \mathbb{Z}\beta$ — группа гомологий $H_1(E_\sigma, \mathbb{Z})$ эллиптической кривой в бесконечности. Положим:

$$H^*_\mathbb{C} := (H_\mathbb{C})^* := (H_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C})^* = \mathbb{C}\alpha^\vee \oplus \mathbb{C}\beta^\vee,$$

где $\{\alpha^\vee, \beta^\vee\}$ является базисом, двойственным к $\{\alpha, \beta\}$. Группа $H^*_\mathbb{C}$ изоморфна группе когомологий $H^1(E_\sigma, \mathbb{Z})$. Рассмотрим семейство эллиптических кривых $\mathcal{E}$ определенное в (3.3). Относительная голоморфная форма объема $\Omega \in \Gamma(\mathbb{H}, \Omega^1_{\mathcal{E}/\mathbb{H}})$ в базисе $\alpha^\vee, \beta^\vee$ имеет вид:

$$\Omega = x(\tau)\,(\alpha^\vee + \tau\beta^\vee)$$

для некоторой нигде не обнуляющейся функции $x(\tau)$ на $\mathbb{H}$.

Возьмем в качестве относительной голоморфной формы объема $\zeta^\infty = \alpha^\vee + \tau\beta^\vee$ примитивную форму, фиксированную выбором вектора $\alpha \in H_\mathbb{C}$, такую, что:

$$\int_\alpha \zeta^\infty = 1 \text{ и } \int_\beta \zeta^\infty = \tau.$$

Существует общий механизм для построения примитивной формы по канонической обратной фильтрации Ходжа в точке $\tau_0 \in \mathbb{H}$, функционирующий в случае простых эллиптических особенностей следующим образом.

Предложение 8.5. *Для всяких $\tau_0 \in \mathbb{H}$ и $\omega_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, существует единственная относительная голоморфная форма объема $\zeta \in \Gamma(\mathbb{H}, \Omega^1_{\mathcal{E}/\mathbb{H}})$, такая, что:*

$$\int_{\alpha'} \zeta = 1, \quad \alpha' := \frac{1}{\omega_0(\bar\tau_0 - \tau_0)}\,(\bar\tau_0\alpha - \beta)\,.$$

Доказательство. Несложны вычисления дают:

$$\zeta = \omega_0 \frac{\bar\tau_0 - \tau_0}{\bar\tau_0 - \tau}\,(\alpha^\vee + \tau\beta^\vee)\,.$$

□

Такая голоморфная форма объема ζ является примитивной формой, однозначно определяющейся выбором вектора $\alpha' \in H_{\mathbb{C}}$. Фиксируем $\tau_0 \in \mathbb{H}$ и $\omega_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, такие, что:

$$\int_\alpha \zeta = \omega_0 \text{ и } \int_\beta \zeta = \omega_0\tau_0 \quad \text{в } \tau = \tau_0.$$

Далее выберем $\beta' \in H_{\mathbb{C}}$, такое, что $\int_{\beta'} \zeta = 0$ в $\tau = \tau_0$ и $(\alpha', \beta') = 1$. Несложно заметить, что тогда верно:

$$\beta' := -\omega_0 \left(\tau_0 \alpha - \beta\right).$$

Базисы $\{\alpha, \beta\}$ и $\{\alpha', \beta'\}$ связаны действием следующей матрицы из $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ на $H^1(E_\sigma, \mathbb{Z})$:

$$A_{hom} := \begin{pmatrix} -\dfrac{\bar{\tau}_0}{2\sqrt{-1}\omega_0 \mathrm{Im}(\tau_0)} & \dfrac{1}{2\sqrt{-1}\omega_0 \mathrm{Im}(\tau_0)} \\ -\omega_0\tau_0 & \omega_0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \end{pmatrix} = A_{hom} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \tag{8.6}$$

Тогда связь между плоскими координатами, которые строятся по соответствующим примитивным формам задается матрицей $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}$. Пусть t_{-1} — плоская координата "в бесконечности", построенная по примитивной форме, фиксированной базисом $\{\alpha, \beta\}$. Тогда плоская координата t'_{-1}, построенная по примитивной форме, фиксированной базисом $\{\alpha', \beta'\}$ преобразуется следующим образом (см. Предложение 3.8):

$$\frac{t'_{-1}}{2\pi\sqrt{-1}} = \int_{\beta'} \zeta = 2\sqrt{-1}\omega_0^2 \mathrm{Im}(\tau_0) \frac{\tau_0 - t_{-1}}{\bar{\tau}_0 - t_{-1}},$$

что эквивалентно:

$$t'_{-1} = \mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)} \cdot t_{-1}. \tag{8.7}$$

Похожий метод был использован Милановым–Руаном и Кравитцом–Шенем для изменения примитивной формы простой эллиптической особенности. В отличие от их подхода мы работаем с явными циклами эллиптической кривой. Таким образом мы можем рассмотреть все примитивные формы используя геометрию эллиптических кривых. Однако же в [**5**] было доказано, что оба подхода эквивалентны.

2.2. Действия A_{hom} и $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}$. В данном разделе мы покажем, что действие $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}$ на плоской координате t_{-1} (см. (8.7) выше) возникает естественным образом как действие на пространстве фробениусовых многообразий.

Фиксируем некоторое $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ и разветвленное накрытие $\{\lambda : \mathcal{E}_\tau \to \mathbb{P}^1\} \in \mathcal{H}^R_{1,(2,2,2,2)}$. В координатах λ записывается через эллиптические функции. Это позволяет нам рассмотреть действие A на λ, соответствующее действию A на решетке накрывающей эллиптической кривой.

Предложение 8.6. *Пусть* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. *Её действие на решетке эллиптической кривой поднимается до действия на плоских координатах фробениусова многообразия* $\mathcal{H}^R_{1,(2,2,2,2)}$. *Пусть* $(\tau, C_1, t_1, t_2, t_3, t_4)$ *— плоские координаты* $\mathcal{H}^R_{1,(2,2,2,2)}$*:*

$$\hat{\tau} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \hat{C}_1 = C_1 - \frac{\pi\sqrt{-1}}{2}\frac{c}{c\tau + d}\sum_{i=1}^{4} t_i^2, \quad \hat{t}_i = \frac{t_i}{c\tau + d}, \quad 1 \le i \le 4$$

Доказательство. Заметим, что под действием A мы имеем:

$$\hat{\omega}_2 = a\omega_2 + b\omega_1, \quad \hat{\omega}_1 = c\omega_2 + d\omega_1.$$

Применим выражение плоских координат $\mathcal{H}_{1,(2,2,2,2)}$, найденное в Предложении 7.7. Пусть $\hat{C}_1$, $\hat{t}_1, \ldots, \hat{t}_4$ и $\hat{\tau}$ будут плоскими координатами A—преобразованной фробениусовой структуры $\mathcal{H}^R_{1,(2,2,2,2)}$.

Для переменных t_i, $1 \le i \le 4$ и τ верны следующие формулы:

$$\hat{\tau} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \frac{a\omega_2 + b\omega_1}{c\omega_2 + d\omega_1}, \; \hat{t}_i = -\frac{\sqrt{\tilde{u}_i}}{\tilde{\omega}_1} = \frac{t_i}{c\tau + d}.$$

Рассмотрим также переменную C_1.

$$\hat{C}_1 = c - \frac{\hat{\eta}_1}{\hat{\omega}_1}\sum_{i=1}^{4} u_i = c - \frac{c\eta_2 + d\eta_1}{c\omega_2 + d\omega_1}\sum_{i=1}^{4} u_i.$$

Используя равенство Лежандра мы получаем:

$$\hat{C}_1 = c - \frac{1}{\omega_1}\left(\eta_1 + \frac{\pi\sqrt{-1}c}{2}\frac{1}{c\omega_2 + d\omega_1}\right)\sum_{i=1}^{4} u_i = c - \frac{\eta_1}{\omega_1}\sum_{i=1}^{4} u_i - \frac{1}{\omega_1^2}\left(\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}\frac{c}{c\tau + d}\right)\sum_{i=1}^{4} u_i,$$

что завершает доказательство. □

Данное предложение позволяет нам применить на $\mathcal{H}^R_{1,(2,2,2,2)}$, рассмотренном как гурвиц–фробениусово многообразие, действие матрицы $A_{hom} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, опредленное в (8.6) только лишь для эллиптических кривых.

Предложение 8.7. *Для всякой просто эллиптической особенности* W_σ *замена примитивной формы с* ζ^∞ *на примитивную форму* ζ_{σ_0} *в специальной точке точке* σ_0 *эквивалентно действию* $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}$*, такому, что:*

$$j_W(\sigma_0) = j(\tau_0),$$

и τ_0 *— квадратичная иррациональность.*

Доказательство. Пусть A_{hom} является матрицей из $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, соответствующей замене примитивной формы как в разделе 2.1. Рассмотрим на $\mathcal{H}^R_{1,(2,2,2,2)}$ следующий оператор:

$$A_{hom} : \{\lambda : E_\infty \to \mathbb{P}^1\} \to \{\hat{\lambda} : E_{\tau_0} \to \mathbb{P}^1\},$$

где E_{τ_0} является эллиптической кривой с модулем τ_0 по построению A_{hom}. Однако по Теореме 3.1 примитивная форма в точке σ_0 фиксируется периодом эллиптической кривой E_{σ_0}, которая изоморфна $\mathcal{E}_{\tau_0}$.

Ввиду Предложения 8.6, действие оператора A_{hom} на $\mathcal{H}^R_{1,(2,2,2,2)}$ поднимается до действия того же элемента $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ на плоских координатах $\mathcal{H}^R_{1,(2,2,2,2)}$.

Следующая лемма определяет действие на $M_{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}$, индуцированное матрицей A_{hom} и изоморфизмом Теоремы 7.1.

Лемма 8.8. *Действие $A_{hom} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ на $\mathcal{H}^R_{1,(2,2,2,2)}$ индуцирует действие $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}$ на $M_{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}$.*

Доказательство. Ввиду приведенного выше предложения действие $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ на $\mathcal{H}^R_{1,(2,2,2,2)}$ определено и согласовано с действием на решетке периодов эллиптической кривой. Рассмотрим индуцированное действие A_{hom} на $\mathcal{H}^R_{1,(2,2,2,2)}$.

Пусть ω_1', ω_2' получены действием A_{hom} на ω_1, ω_2:

$$\begin{pmatrix} \omega_1' & \omega_2' \end{pmatrix} = A_{hom} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix},$$

и $\tau' = \omega_2'/\omega_1'$. Мы имеем:

$$\tau' = 2\sqrt{-1}\omega_0 \mathrm{Im}\tau_0 \frac{\tau_0 - \tau}{\bar{\tau}_0 - \tau}.$$

Обратная замена координат имеет вид:

$$\tau = \frac{-\tau'\bar{\tau}_0 + 2\sqrt{-1}\omega_0^2\tau_0\mathrm{Im}\tau_0}{-\tau' + 2\sqrt{-1}\omega_0^2\mathrm{Im}\tau_0}.$$

Принимая также во внимание дополнительное растяжения в $2\pi\sqrt{-1}$, которое должно быть применено к $M_{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}$ (из–за растяжения в $2\pi\sqrt{-1}$ в изоморфизме Теоремы 7.1) мы получаем в точности действие $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}$. $\square$

Из определения и приведенного выше предложения видно, что A_{hom} действует на $\mathcal{H}^R_{1,(2,2,2,2)}$ сдвигом начала координат. Плоские координаты $A_{hom} \cdot \mathcal{H}^R_{1,(2,2,2,2)}$ определены в окрестности τ_0 того же фробениусова многообразия $\mathcal{H}^R_{1,(2,2,2,2)}$. Из–за изоморфизма $M^\sigma \mid_{\sigma=\infty} \cong M_{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}$ мы имеем:

$$\mathcal{A}_{hom} \cdot \mathcal{H}^R_{1,(2,2,2,2)} = M^\sigma \cong M_6^{(\tau_0,\omega_0)}.$$

Подставляя σ_k, соответствующее специальной точке в формулу для j–инварианта (3.2) мы получаем, что j–инвариант равен 0, 1728 или ∞. Мы имеем:

$$0 = j(\sqrt{-1}), \quad 1728 = j(\exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3})).$$

Комплексные числа $\tau_0 = \sqrt{-1}$ и $\tau_0 = \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3})$ являются очевидным образом квадратичными иррациональностями.

$\square$

Заметим, что приведенное предложение также определяет пространство фробениусовых многообразий, которые гипотетически могут появиться в соответствии CY/LG.

Следствие 8.9. *Орбита фробениусова многообразия* $M_{(\tilde{E}_8,\mathbb{Z}_3),\zeta_{LCSL}}$ *под действием* $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}$ *для всех* $\tau_0 \in \mathbb{H}$, $\omega_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *задает семейство фробениусовых структур Б–модели* $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$.

ГЛАВА 9

Зеркальная симметрия типа LG–LG для пары $(\tilde{E}_8, \mathbb{Z}_3)$

Главной теоремой данной главы является следующая теорема о зеркальной симметрии типа LG–LG.

Теорема 9.1. *Фробениусово многообразие орбифолдовой A–модели Ландау–Гинзбурга пары $(\tilde{E}_8^T, \mathbb{Z}_3^T)$ (см. Глава 5) изоморфно фробениусову многообразию $M_6^{(\sqrt{-1},\omega_0)}$, где*

$$\omega_0 := \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{4\pi^{\frac{3}{2}}}.$$

Важно заметить, что $\tilde{E}_8^T = \tilde{E}_8$, то есть многочлен, задающий особенность $\tilde{E}_8$, не изменяется при двойственности Берглюнда–Хубша.

В предыдущей главе мы показали, что на пространстве фробениусовых структур замена примитивной формы эквивалента действию $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}$. Для того, чтобы доказать приведенную выше теорему, ввиду аксиомы о соответствии CY/LG и теоремы 6.2 о зеркальной симметрии, достаточно рассмотреть орбиту фробениусова многообразия $M_{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}$ под действием $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}$ для всех τ_0, ω_0.

Мы классифицируем фробениусовы многообразия $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)} \cdot M_{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}$, удовлетворяющие аксиомам A–модели Ландау–Гинзбурга, предложенными в Главе 5. Одной из наиболее строгих является аксиома о рациональности.

Определение. Пусть $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ — некоторое поле. Будем говорить, что фробениусово многообразие M размерности μ *определено над* $\mathbb{K}$ если существует выбор плоских координат $t_1, \ldots, t_\mu$ на M, такой, что фробениусов потенциал $\mathcal{F}$ определен в точке $t_1 = \cdots = t_\mu = 0$ и удовлетворяет: $\mathcal{F} \in \mathbb{K}\{t_1, \ldots, t_\mu\}$.

Для того, чтобы классифицировать все фробениусовы многообразия $M_6^{(\tau_0,\omega_0)}$, определенные над $\mathbb{Q}$ необходимо рассмотреть разложение в ряд функций $X_k^{(\tau_0,\omega_0)}(t)$. Положим:

$$\gamma^{(\tau_0,\omega_0)}(t) := \frac{2}{3}\sum_{k=2}^{4} X_k^{(\tau_0,\omega_0)}(t).$$

Тогда верно:

$$X_k^{(\tau_0,\omega_0)}(t) \in \mathbb{K}\{t\} \ \Rightarrow\ \gamma^{(\tau_0,\omega_0)}(t) \in \mathbb{K}\{t\}.$$

Мы рассмотрим фробениусово многообразие $M_3^{(\tau_0,\omega_0)}$ размерности 3, такое, что его потенциал определяется функцией $\gamma^{(\tau_0,\omega_0)}$. Таким образом рациональность $M_3^{(\tau_0,\omega_0)}$ является необходимым условием для рациональности $M_6^{(\tau_0,\omega_0)}$.

1. Трехмерное фробениусово многообразие $M^{(\tau_0,\omega_0)}$

Рассмотрим фробениусовы многообразия M размерности три и конформной размерности один с плоскими координатами t_1, t_2, t_3, удовлетворяющие следующим условиям:

- Единичное векторное поле e совпадает с $\frac{\partial}{\partial t_1}$.
- Эйлерово поле E имеет вид $E = t_1\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{1}{2}t_2\frac{\partial}{\partial t_2}$.
- Фробениусов потенциал $\mathcal{F}$ имеет следующий явный вид:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}t_1^2 t_3 + \frac{1}{2}t_1 t_2^2 - \frac{t_2^4}{16}\gamma(t_3)$$

  где $\gamma(t)$ — некоторая функция от переменной t, голоморфная в открытой области в $\mathbb{C}$.

Следующее предложение было впервые замечено Дубровиным.

Предложение 9.2 (Приложение C в **[11]**). *Уравнение WDVV на $\mathcal{F}$ эквивалентно следующему уравнению, известному как уравнение Шази.*

$$\gamma''' = 6\gamma\gamma'' - 9(\gamma')^2. \tag{9.1}$$

Доказательство. Уравнение WDVV (2.1) с четырьмя индексами (t_2, t_2, t_3, t_3) даёт требуемое. □

1.1. Ряды Эйзенштейна и эллиптические кривые. Пусть E_{2k} для всякого $k \in \mathbb{Z}_+$ является рядом Эйзенштейна, определенным в Главе 4, Разделе 2.2. Рассмотрим семейство эллиптических кривых, параметризованное $\mathbb{H}$:

$$\pi : \mathcal{E} := \{(x, y, \tau) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{H} \mid y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)\} \longrightarrow \mathbb{H},$$

тогда модулярные инварианты эллиптической кривой $g_2(\tau)$ и $g_3(\tau)$ имеют следующие выражения через ряды Эйзенштейна:

$$g_2(\tau) := \frac{4\pi^4}{3}E_4(\tau), \quad g_3(\tau) := \frac{8\pi^6}{27}E_6(\tau). \tag{9.2}$$

Обозначим через $\mathcal{E}_{\tau_0}$ слой отображения π над точкой $\tau_0 \in \mathbb{H}$.

Определение. Пусть $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ — некоторое поле. Фиксируем некоторое $\tau_0 \in \mathbb{H}$. Будем говорить, что эллиптическая кривая $\mathcal{E}_{\tau_0}$ *определена над* $\mathbb{K}$ если имеются $g_2, g_3 \in \mathbb{K}$, такие, что алгебраическое многообразие

$$E_{g_2,g_3} := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3\}$$

изоморфно $\mathcal{E}_{\tau_0}$.

Производные рядов Эйзенштейна E_2, E_4, E_6 удовлетворяют следующим тождествам, известным как *тождества Рамануджана*:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{dE_2(\tau)}{d\tau} &= \frac{1}{12}\left(E_2(\tau)^2 - E_4(\tau)\right),\\
\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{dE_4(\tau)}{d\tau} &= \frac{1}{3}\left(E_2(\tau)E_4(\tau) - E_6(\tau)\right),\\
\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{dE_6(\tau)}{d\tau} &= \frac{1}{2}\left(E_2(\tau)E_6(\tau) - E_4(\tau)^2\right).
\end{aligned}
\tag{9.3}
$$

Рассмотрим также комплекснозначную вещественноаналитическую функцию $E_2^*(\tau)$ на $\mathbb{H}$, определенную следующим образом:

$$E_2^*(\tau) := E_2(\tau) - \frac{3}{\pi \mathrm{Im}(\tau)},$$

Такая функция является примером *почти голоморфной* модулярной формы веса два ввиду следующего равенства.

Предложение 9.3. *Для всякой матрицы* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ *верно:*

$$E_2^*(\tau) = \frac{1}{(c\tau+d)^2} E_2^*\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$$

Доказательство. Утверждение следует моментально из равенства

$$\left(\mathrm{Im}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\right)^{-1} = \frac{|c\tau+d|^2}{\mathrm{Im}(\tau)}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}), \tag{9.4}$$

. □

Определение. Многочлен $f(\tau)$ по $\mathrm{Im}(\tau)^{-1}$ над кольцом голоморфных функций над $\mathbb{H}$, удовлетворяющий свойству

$$f(\tau) = \frac{1}{(c\tau+d)^k} f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) \text{ для любой } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}),$$

называется *почти голоморфной модулярной формой* веса k.

Предложение 9.4 (Параграф 5.1. в **[50]**). *Пусть $f(\tau)$ — некоторая почти голоморфная модулярная форма веса k. Тогда почти голоморфная производная функции $f(\tau)$, определенная следующим образом*

$$\partial_k f(\tau) := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{\partial f(\tau)}{\partial\tau} - \frac{k}{4\pi \mathrm{Im}(\tau)} f(\tau), \tag{9.5}$$

является почти голоморфной модулярной формой веса $k+2$.

Доказательство. Утверждение проверяется явно с использованием уравнений (4.4) и (9.4). Проверим утверждение явно для $\partial_2 E_2^*(\tau)$:

$$\partial_2 E_2^* = \frac{1}{12}\left(E_2(\tau)^2 - E_4(\tau)\right) - \frac{3}{4\pi(\mathrm{Im}(\tau))^2} - \frac{1}{2\pi\mathrm{Im}(\tau)}E_2^*(\tau).$$
$$= \frac{1}{12}\left(E_2(\tau)^2 - \frac{6E_2(\tau)}{\pi\mathrm{Im}(\tau)} + \frac{9}{(\pi\mathrm{Im}(\tau))^2}\right) - \frac{1}{12}E_4(\tau).$$
$$= \frac{1}{12}E_2^*(\tau)^2 - \frac{1}{12}E_4(\tau).$$

Вследствие модулярности E_4 и E_2^* мы показали требуемое. □

В дальнейшем мы будем опускать индекс k в производной, имея в виду, что этот индекс всегда фиксирован весом модулярной формы, к которой применяется производная. Мы будем также использовать обозначение ∂^p, которое записывается:

$$\partial^p g := \partial_{k+2(p-1)} \ldots \partial_k g,$$

для некоторой почти голоморфной модулярной формы g веса k.

Предложение 9.5. *Мы имеем:*

$$\partial E_2^*(\tau) = \frac{1}{12}\left(E_2^*(\tau)^2 - E_4(\tau)\right),$$
$$\partial^2 E_2^*(\tau) = \frac{1}{36}\left(E_6(\tau) - \frac{3}{2}E_2^*(\tau)E_4(\tau) + \frac{1}{2}E_2^*(\tau)^2\right).$$

Доказательство. Это следует из прямых вычислений с использованием уравнений (9.3). □

1.2. Решения уравнения WDVV.

Предложение 9.6. *Пусть функция $\gamma(t)$, голоморфная на некоторой области в $\mathbb{C}$, является решением уравнения* (9.1). *Для всякого $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$, определим голоморфную функцию $\gamma^A(t)$ на некоторой области в $\mathbb{C}$:*

(9.7) $$\gamma^A(t) := \frac{\det(A)}{(ct+d)^2}\gamma\left(\frac{at+b}{ct+d}\right) + \frac{6c}{ct+d}.$$

Тогда $\gamma^A(t)$ также является решением уравнения (9.1).

Доказательство. Это следует из простых вычислений. □ Рассмотрим голоморфную функцию $\gamma^\infty(\tau)$, определенную на $\mathbb{H}$:

(9.8) $$\gamma^\infty(\tau) := \frac{\pi\sqrt{-1}}{3}E_2(\tau)$$

Б.А. Дубровиным было замечено, что функция $\mathcal{F}^{\infty}$, голоморфная на $M^{\infty} := \mathbb{C}^2 \times \mathbb{H}$, определенная следующим образом:

$$\mathcal{F}^{\infty} = \frac{1}{2}t_1^2\tau + \frac{1}{2}t_1t_2^2 - \frac{t_2^4}{16}\gamma^{\infty}(\tau)$$

задаёт на M^{∞} структуру фробениусова многообразия конформной размерности 1. Это фробениусово многообразие было детально рассмотрено Дубровиным.

Предложение 9.7. *Голоморфная функция $\gamma^{\infty}(\tau)$ удовлетворяет уравнению* (9.1) *и инвариантна под действием* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ *(см.* (9.7)*).*

Доказательство. Это следует из простых вычислений использую модулярность (4.4) функции $E_2(\tau)$ и тождеств Рамануджана. □

1.3. Действие $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}$ на M^{∞}.

Определение. Фиксируем некоторые $\tau_0 \in \mathbb{H}$ и $\omega_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

(1) Определим голоморфную функцию $\gamma^{(\tau_0,\omega_0)}(t)$ на

$$D^{(\tau_0,\omega_0)} := \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < |-4\pi\omega_0^2 \mathrm{Im}(\tau_0)|\}$$

применяя действие $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ по формуле (9.7), определенное матрицей $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}$ (см. (8.5)) к функции $\gamma^{\infty}(\tau)$.

(2) Определим комплексные числа $c_i(\tau_0,\omega_0)$, для всех $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, как коэффициенты разложения в ряд функции $\gamma^{(\tau_0,\omega_0)}(t)$ в точке $t = 0$:

$$\gamma^{(\tau_0,\omega_0)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(\tau_0,\omega_0)}{n!}t^n.$$

(3) Обозначим через $M_3^{(\tau_0,\omega_0)} := \mathbb{C}^2 \times D^{(\tau_0,\omega_0)}$ фробениусово многообразие, имеющее следующий фробениусов потенциал

$$\mathcal{F}^{(\tau_0,\omega_0)} = \frac{1}{2}t_1^2 t + \frac{1}{2}t_1t_2^2 - \frac{t_2^4}{16}\gamma^{(\tau_0,\omega_0)}(t).$$

(4) Сопоставим фробениусову многообразию $M_3^{(\tau_0,\omega_0)}$ эллиптическую кривую, задаваемую в координатах уравнением

$$y^2 = x^3 - \frac{3}{2}c_0(\tau_0,\omega_0)x^2 + \frac{3}{2}c_1(\tau_0,\omega_0)x - \frac{1}{4}c_2(\tau_0,\omega_0). \tag{9.9}$$

1.4. От размерности 6 к размерности 3. Следующая теорема, дающая полную классификацию решений системы Альфана (8.3), была доказана Оямой:

Теорема 9.8 (Теорема 2.1 в [**38**]). *Пусть тройка функций* $(X_2(t), X_3(t), X_4(t))$ *голоморфна в окрестности* $z \in \mathbb{H}$ *и удовлетворяет* (8.3). *Тогда:*

(1) *Если числа* $X_k(z)$ *попарно различны:*

$$X_p(z) \neq X_q(z) \quad p \neq q,\ 2 \leq p, q \leq 4,$$

то $\exists A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$*, т.ч.* $X_k(t) = X_k^A(t)$.

(2) *В противном случае, если два из значений* $X_k(t)$ *в точке* $t = z$ *совпадают для разных индексов (пусть* $X_p(z) = X_q(z)$*), то:*

$$\begin{aligned} X_p(t) = X_q(t) &= -\frac{c}{ct+d}, \\ X_r(t) &= -\frac{c}{ct+d} + \frac{a}{(ct+d)^2}, \end{aligned} \tag{9.10}$$

для $(c : d) \in \mathbb{P}^1$ *и некоторого комплексного числа* $a \in \mathbb{C}$*, которое обнуляется если*

$$X_r(z) = X_p(z) = X_q(z).$$

Связь между уравнением Шази и системой Альфана устанавливается следующим предложением.

Предложение 9.9. *Рассмотрим уравнение третьего порядка по* ω*:*

$$\omega^3 - \frac{3}{2}\gamma(t)\omega^2 + \frac{3}{2}\gamma'(t)\omega - \frac{1}{4}\gamma''(t) = 0. \tag{9.11}$$

(1) *Всякая тройка голоморфных функций* $(X_2(t), X_3(t), X_4(t))$*, являющаяся решением системы Альфана* (8.3) *является тройкой корней* $(\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$ *уравнения третьей степени* (9.11) *по переменной* ω *для некоторой функции* $\gamma(t)$*, являющейся решением уравнения Шази.*

(2) *Обозначим через* $\Delta^Q = \Delta^Q(t)$ *дискриминант уравнения третьей степени* (9.11)*. Тогда* $(\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$ *задают постоянное решение тогда и только тогда, когда* $\Delta^Q(0) = 0$*, и непостоянное решение тогда и только тогда, когда* $\Delta^Q(0) \neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим $\gamma(t) := \frac{2}{3}\sum X_i(t)$. Из уравнений (8.3) следует:

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \frac{2}{3}\left(X_2(t)X_3(t) + X_3(t)X_4(t) + X_2(t)X_4(t)\right), \\ \gamma''(t) &= 4X_2(t)X_3(t)X_4(t), \\ \gamma'''(t) &= 8X_2(t)X_3(t)X_4(t)\left(X_2(t) + X_3(t) + X_4(t)\right) - 4\sum_{i<j}\left(X_i(t)X_j(t)\right)^2. \end{aligned}$$

что завершает доказательство первой части. Вторая часть следует немедленно из Теоремы 9.8. $\square$

Определение. Мы будем называть функцию $\gamma(t)$:

$$\gamma(t) := \frac{2}{3}\sum X_i(t)$$

решением уравнения Шази, ассоциированного с тройкой $(X_2(t), X_3(t), X_4(t))$ — решением системы Альфана.

Предложение 9.10. *Пусть 6–мерное фробениусово многообразие $M_6^{(\tau_0,\omega_0)}$ определено над $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$, тогда 3–мерное фробениусово многообразие $M_3^{(\tau_0,\omega_0)}$ также определено над $\mathbb{K}$.*

Доказательство. Рассмотрим решение уравнения Шази $\gamma^{(\tau_0,\omega_0)}$, заданное многообразием $M_3^{(\tau_0,\omega_0)}$ и решение системы Альфана $(X_i^{(\tau_0,\omega_0)}(t))$ заданное многообразием $M_6^{(\tau_0,\omega_0)}$. Для доказательства покажем:

$$\gamma^{(\tau_0,\omega_0)}(t) = \frac{2}{3}\sum X_i^{(\tau_0,\omega_0)}(t).$$

Так как и левая, и правая части равенства получены одним и тем же действием, достаточно доказать равенство решения уравнения Шази γ^∞ и решения системы Альфана $(X_2^\infty, X_3^\infty, X_4^\infty)$:

$$\gamma^\infty = \frac{\pi\sqrt{-1}}{3}E_2(t) = \frac{2}{3}\sum X_i^\infty(t).$$

Мы уже замечали ранее, что функция $\gamma' := \frac{2}{3}\sum X_k^\infty$ удовлетворяет уравнению Шази. Таким образом достаточно проверить, что три первых коэффициента рядов Фурье γ' и γ^∞ совпадают. Это может быть легко сделано используя явные формулы. Ряд Фурье функций X_p^∞ имеет следующий вид (см. Глава 1 в **[29]**):

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}X_2^\infty = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2ke^{2k\pi\sqrt{-1}\tau}}{1-e^{2k\pi\sqrt{-1}\tau}},$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}X_3^\infty = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2ke^{k\pi\sqrt{-1}\tau}}{1-e^{2k\pi\sqrt{-1}\tau}}, \quad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}X_4^\infty = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2ke^{k\pi\sqrt{-1}\tau}}{1-e^{2k\pi\sqrt{-1}\tau}}.$$

Используя равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{k\pi\sqrt{-1}\tau}\sigma_n(k) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^n e^{k\pi\sqrt{-1}\tau}}{1-e^{k\pi\sqrt{-1}\tau}}, \quad n \in \mathbb{N}_+$$

и определение ряда $E_2(\tau)$ мы получаем требуемое. $\square$

2. Классификация в размерности 3

Предложение 9.10 задает необходимое условие для того, чтобы фробениусово многообразие $M_6^{(\tau_0,\omega_0)}$ было определено над $\mathbb{Q}$. Поэтому мы начнем с классификации 3–мерных фробениусовых многообразий $M_3^{(\tau_0,\omega_0)}$, определенных над $\mathbb{Q}$.

2.1. Классификация $M^{(\tau_0,\omega_0)}$ над кольцом $\mathbb{K}$. Приведем две леммы для классификации всех $M_3^{(\tau_0,\omega_0)}$ над $\mathbb{K}\subset\mathbb{C}$.

Лемма 9.11. *Для всяких $\tau_0\in\mathbb{H}$ и $\omega_0\in\mathbb{C}^*$, следующие коэффициенты ряда Тейлора функции $\gamma^{(\tau_0,\omega_0)}$ имеют выражения через значения рядов Эйзенштейна:*

$$\begin{aligned}
c_0(\tau_0,\omega_0) =&\frac{1}{6\omega_0^2}\left(E_2(\tau_0)-\frac{3}{\pi\mathrm{Im}(\tau_0)}\right),\\
c_1(\tau_0,\omega_0) =&\frac{c_0(\tau_0,\omega_0)^2}{2}-\frac{E_4(\tau_0)}{72\omega_0^4},\\
c_2(\tau_0,\omega_0) =&-c_0(\tau_0,\omega_0)^3+3c_0(\tau_0,\omega_0)c_1(\tau_0,\omega_0)+\frac{E_6(\tau_0)}{216\omega_0^6}.
\end{aligned}$$

Доказательство. По определению функции $\gamma^{(\tau_0,\omega_0)}$ мы имеем:

$$\gamma^{(\tau_0,\omega_0)}(t)=-\frac{2}{t+4\omega_0^2\pi\mathrm{Im}(\tau_0)}+\frac{8\omega_0^2\pi^2\mathrm{Im}(\tau_0)^2}{3\left(t+4\omega_0^2\pi\mathrm{Im}(\tau_0)\right)^2}E_2\left(\frac{t\bar{\tau}_0+4\omega_0^2\pi(\tau_0)\mathrm{Im}(\tau_0)}{t+4\omega_0^2\pi\mathrm{Im}(\tau_0)}\right).$$

Подставляя $t=0$ получим:

$$c_0(\tau_0,\omega_0)=\frac{1}{6\omega_0^2}\left(E_2(\tau_0)-\frac{3}{\pi\mathrm{Im}(\tau_0)}\right).$$

Используя формулы (9.3) подсчитаем первую и вторую производные функции $\gamma^{(\tau_0,\omega_0)}$:

Из выражения для первой производной получаем:

$$c_1(\tau_0,\omega_0)=\frac{1}{72\omega_0^4}\left(\frac{9}{\pi^2\mathrm{Im}(\tau_0)^2}-\frac{6E_2(\tau_0)}{\pi\mathrm{Im}(\tau_0)}+E_2(\tau_0)^2-E_4(\tau_0)\right).$$

Вместе с выражением для $c_0(\tau_0,\omega_0)$ мы получаем заявленную формулу. Для значения второй производной верно равенство:

$$\begin{aligned}
c_2(\tau_0,\omega_0)=\frac{1}{432\omega_0^6}\Big(&-\frac{27}{\pi^3\mathrm{Im}(\tau_0)^3}+\frac{27E_2(\tau_0)}{\pi^2\mathrm{Im}(\tau_0)^2}-\frac{9E_2(\tau_0)^2}{\pi\mathrm{Im}(\tau_0)}+E_2(\tau_0)^3\\
&+3E_4(\tau_0)\left(\frac{3}{\pi\mathrm{Im}(\tau_0)}-E_2(\tau_0)\right)+2E_6(\tau_0)\Big).
\end{aligned}$$

Выражая значения рядов Эйзенштейн через $c_0(\tau_0,\omega_0)$ и $c_1(\tau_0,\omega_0)$ мы получаем требуемое.

□

Лемма 9.12. *Пусть $\gamma(t)$ задана сходящимся рядом по t: $\gamma(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}t^n$. Тогда уравнение Шази эквивалентно следующей рекурсивной формуле*:

$$c_{n+3}=\sum_{a=0}^{n}\binom{n}{a}\left(6c_ac_{n-a+2}-9c_{a+1}c_{n-a+1}\right).$$

В частности мы имеем:

$$c_3=6c_2c_0-9c_1^2.$$

Доказательство. Это следует моментально сравнением коэффициентов при t^k для всех натуральных k в левой и правой частях уравнения Шази. $\square$

Теорема 9.13. *Фиксируем некоторого поле $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$, $\tau_0 \in \mathbb{H}$ и $\omega_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *Фробениусово многообразие $M^{(\tau_0,\omega_0)}$ определено над $\mathbb{K}$.*

(ii) *Все коэффициенты разложения функции $f^{(\tau_0,\omega_0)}(t)$ в ряд принадлежат полю $\mathbb{K}$.*

(iii) *Выполнено:*

$$E_2^*(\tau_0) \in \mathbb{K}\omega_0^2, \quad E_4(\tau_0) \in \mathbb{K}\omega_0^4, \quad E_6(\tau_0) \in \mathbb{K}\omega_0^6.$$

(iv) *Пусть ∂ — почти голоморфная производная, определенная в (9.5). Выполнено:*

$$-\frac{1}{24}E_2^*(\tau_0) \in \mathbb{K}\omega_0^2, \quad -\frac{1}{24}\partial E_2^*(\tau_0) \in \mathbb{K}\omega_0^4, \quad -\frac{1}{24}\partial^2 E_2^*(\tau_0) \in \mathbb{K}\omega_0^6.$$

(v) *Выполнено:*

$$E_2^*(\tau_0) \in \mathbb{K}\omega_0^2, \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_{\tau_0} \text{ определена над } \mathbb{K}.$$

Доказательство. По определению, фробениусово многообразие $M^{(\tau_0,\omega_0)}$ определено над $\mathbb{K}$ тогда и только тогда, когда плоские координаты $t_1, \widetilde{t}_2, \widetilde{t}_3$ таковы, что фробениусов потенциал удовлетворяет:

$$\mathcal{F}^{(\tau_0,\omega_0)} = \frac{1}{2}\eta_1 t_1^2\widetilde{t}_3 + \eta_2\frac{1}{2}t_1\widetilde{t}_2^2 + \widetilde{t}_2^4\widetilde{f}(\widetilde{t}_3) \quad \text{для некоторых } \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{K} \text{ и } \widetilde{f}(\widetilde{t}_3) \in \mathbb{K}\{\widetilde{t}_3\}.$$

Однако это моментально влечет $t_2^2 = \eta_2\widetilde{t}_2^2$, $t_3 = \eta_1\widetilde{t}_3$ и $\gamma^{(\tau_0,\omega_0)}(t_3) = 16\eta_2^{-2}\widetilde{f}(\widetilde{t}_3)$, что доказывает эквивалентность условий (i) и (ii).

Ввиду Леммы 9.12 первые три коэффициента c_0, c_1 и c_2 определяют полностью все коэффициенты $c_n, n \geq 3$. Для того, чтобы показать (iii) достаточно таким образом: $c_i(\tau_0, \omega_0) \in \mathbb{K}$ для всех $2 \geq i \geq 0$.

По Лемме 9.11 таким образом (ii) эквивалентно (iii).

Используя Предложение 9.5 и Лемму 9.11 мы видим, что (iii) эквивалентно:

$$E_2^*(\tau_0) = 6c_0(\tau_0, \omega_0)\omega_0^2,$$

$$\partial E_2^*(\tau_0) = 6c_1(\tau_0, \omega_0)\omega_0^4,$$

$$\partial^2 E_2^*(\tau_0) = 6c_2(\tau_0, \omega_0)\omega_0^6.$$

Последнее условие (v) эквивалентно (iii) снова ввиду Леммы 9.11 с определения $\mathcal{E}_{\tau_0}$. Доказательство завершено. $\square$

2.1.1. *Пример.* Приведем значения рядов Эйзенштейна в $\tau = \sqrt{-1}$:

$$E_2(\sqrt{-1}) = \frac{3}{\pi},\ E_4(\sqrt{-1}) = 3\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^8}{64\pi^6},\ E_6(\sqrt{-1}) = 0. \tag{9.12}$$

Полагая

$$\omega_0 \in \mathbb{Q}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{4\pi^{\frac{3}{2}}}$$

мы имеем: $c_0(\sqrt{-1}, \omega_0) = c_2(\sqrt{-1}, \omega_0) = 0$ и $c_1(\sqrt{-1}, \omega_0) \in \mathbb{Q}$.

Приведем значения рядов Эйзенштейна в $\tau = \rho$:

$$E_2(\rho) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi},\ E_4(\rho) = 0,\ E_6(\rho) = \frac{27}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^{18}}{2^8\pi^{12}}. \tag{9.13}$$

Полагая

$$\omega_0 \in \mathbb{Q}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3}{4\pi^2}$$

мы имеем: $c_0(\rho, \omega_0) = c_1(\rho, \omega_0) = 0$ и $c_2(\rho, \omega_0) \in \mathbb{Q}$.

Эти два примера важны ввиду следующего предложения.

Предложение 9.14 (см. Лемму 3.2 в [**33**]). *Равенство*

$$E_2^*(\tau) = 0 \tag{9.14}$$

выполнено тогда и только тогда, когда $\tau \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\sqrt{-1}$ *или* $\tau \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\rho$, *где* $\rho := \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}\right)$.

2.2. Действие группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ на множестве фробениусовых многообразий $M_3^{(\tau_0,\omega_0)}$. Пусть $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — некоторая матрица из $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Соответствие

$$\tau_0 \mapsto \tau_1 := \frac{a\tau_0 + b}{c\tau_0 + d}, \quad \omega_0 \mapsto \omega_1 := (c\tau_0 + d)\omega_0$$

определяет действие группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ на множестве $\{(\tau_0, \omega_0) \mid \tau_0 \in \mathbb{H},\ \omega_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\}$. Это в точности действие $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, предложенное в (8.4) так как

$$A\begin{pmatrix} \dfrac{\bar\tau_0}{4\pi\omega_0\mathrm{Im}(\tau_0)} & \omega_0\tau_0 \\ \dfrac{1}{4\pi\omega_0\mathrm{Im}(\tau_0)} & \omega_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{(a\bar\tau_0 + b)}{4\pi\omega_0\mathrm{Im}(\tau_0)} & (a\tau_0 + b)\omega_0 \\ \dfrac{(c\bar\tau_0 + d)}{4\pi\omega_0\mathrm{Im}(\tau_0)} & (c\tau_0 + d)\omega_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\bar\tau_1}{4\pi\omega_1\mathrm{Im}(\tau_1)} & \omega_1\tau_1 \\ \dfrac{1}{4\pi\omega_1\mathrm{Im}(\tau_1)} & \omega_1 \end{pmatrix}.$$

2.2.1. *Действие* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Лемма 9.11 влечет следующее предложение.

Предложение 9.15. *Фиксируем некоторые* $\tau_0, \tau_1 \in \mathbb{H}$ *и* $\omega_0, \omega_1 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) *Существует изоморфизм фробениусовых многообразий* $M_3^{(\tau_0,\omega_0)} \cong M_3^{(\tau_1,\omega_1)}$.

(ii) *Верно равенство функций* $\gamma^{(\tau_0,\omega_0)}(t) = \gamma^{(\tau_1,\omega_1)}(t)$.

(iii) *Существует матрица* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, *такая, что:*

$$\tau_1 = \frac{a\tau_0 + b}{c\tau_0 + d}, \quad \omega_1^k = (c\tau_0 + d)^k \omega_0^k,$$

где $k = 4$ *если* $\tau_0 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\sqrt{-1}$, $k = 6$ *если* $\tau_0 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\rho$ *и* $k = 2$ *во всех остальных случаях.*

Доказательство. Эквивалентность (i) и (ii) почти очевидна. По Лемме 9.11 условие (ii) эквивалентно системе уравнений:

$$\frac{E_2^*(\tau_0)}{\omega_0^2} = \frac{E_2^*(\tau_1)}{\omega_1^2}, \quad \frac{E_4(\tau_0)}{\omega_0^4} = \frac{E_4(\tau_1)}{\omega_1^4}, \quad \frac{E_6(\tau_0)}{\omega_0^6} = \frac{E_6(\tau_1)}{\omega_1^6}. \tag{9.15}$$

Из этой системы уравнений следует, что $j(\tau_0) = j(\tau_1)$, и таким образом

$$\tau_1 = \frac{a\tau_0 + b}{c\tau_0 + d}, \quad \text{для некоторой} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}). \tag{9.16}$$

Следовательно мы имеем:

$$\frac{E_2^*(\tau_0)}{\omega_0^2} = \frac{(c\tau_0 + d)^2 E_2^*(\tau_0)}{\omega_1^2}, \ \frac{E_4(\tau_0)}{\omega_0^4} = \frac{(c\tau_0 + d)^4 E_4(\tau_0)}{\omega_1^4}, \ \frac{E_6(\tau_0)}{\omega_0^6} = \frac{(c\tau_0 + d)^6 E_6(\tau_0)}{\omega_1^6}.$$

Если τ_0 таково, что $E_2^*(\tau_0) \neq 0$, приведенная выше система эквивалентна $\omega_1^2 = (c\tau_0 + d)^2 \omega_0^2$. Все значения $\tau_0 \in \mathbb{H}$, такие, что $E_2^*(\tau_0) = 0$ приведены в Предложении 9.14. Это в точности $\tau_0 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\sqrt{-1}$ и $\tau_0 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\rho$. Рассматривая систему уравнений (9.15) для этих двух случаев получаем:

$$\tau_0 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\sqrt{-1} \ \Rightarrow \ E_6(\tau_0) = 0, E_4(\tau_0) \neq 0 \ \Rightarrow \ \omega_1^4 = (c\tau_0 + d)^4 \omega_0^4,$$

и

$$\tau_0 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\rho \ \Rightarrow \ E_4(\tau_0) = 0, E_6(\tau_0) \neq 0 \ \Rightarrow \ \omega_1^6 = (c\tau_0 + d)^6 \omega_0^6.$$

Следовательно условие (iii) эквивалентно условию (ii) по Лемме 9.11 и Лемме 9.12.

$\square$

2.2.2. *Действие* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Q})$ *и комплексное умножение.*

Определение. Говорят, что эллиптическая кривая $\mathcal{E}$ имеет *комплексное умножение*, если ее модуль τ — квадратичная иррациональность. То есть $\tau \in \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ для некоторого натурального D.

Удивительным результатом в теории эллиптических кривых является тот факт, что эллиптические кривые над $\mathbb{Q}$, имеющие комплексное умножение, могут быть легко классифицированы:

Теорема 9.16 (см. Параграф II.2 в [**44**]). *С точностью до изоморфизма существует ровно 13 эллиптический кривых над* $\mathbb{Q}$*, имеющих комплексное умножение.*

Мы приводим модели Вейерштрасса таких эллиптических кривых в Таблице 1.

Модуль τ	Уравнение Вейерштрасса	j–инвариант	Δ_E
$(-1+\sqrt{-3})/2$	$y^2 = 4x^3 + 1$	0	3^3
$\sqrt{-3}$	$y^2 = 4x^3 - 60x + 88$	$2^4 3^3 5^3$	$2^8 3^3$
$(-1+3\sqrt{-3})/2$	$y^2 = 4x^3 - 120x + 253$	$-2^{15} 3 5^3$	3^5
$\sqrt{-1}$	$y^2 = 4x^3 + 4x$	$2^6 3^3$	2^5
$2\sqrt{-1}$	$y^2 = 4x^3 - 44x + 64$	$2^3 3^3 11^3$	2^9
$(-1+\sqrt{-7})/2$	$y^2 = 4x^3 - \frac{35}{4}x - \frac{49}{8}$	$-3^3 5^3$	7^3
$\sqrt{-7}$	$y^2 = 4x^3 - 2380x + 22344$	$3^3 5^3 17^3$	$2^{12} 7^3$
$\sqrt{-2}$	$y^2 = 4x^3 - 120x + 224$	$2^6 5^3$	2^9
$(-1+\sqrt{-11})/2$	$y^2 = 4x^3 - \frac{88}{3}x - \frac{847}{27}$	-2^{15}	11^3
$(-1+\sqrt{-19})/2$	$y^2 = 4x^3 - 152x + 361$	$-2^{15} 3^3$	19^3
$(-1+\sqrt{-43})/2$	$y^2 = 4x^3 - 3440x + 38829$	$-2^{18} 3^3 5^3$	43^3
$(-1+\sqrt{-67})/2$	$y^2 = 4x^3 - 29480x + 974113$	$-2^{15} 3^3 5^3 11^3$	67^3
$(-1+\sqrt{-163})/2$	$y^2 = 4x^3 - 8697680x + 4936546769$	$-2^{18} 3^3 5^3 23^3 29^3$	163^3

Table 1. 13 эллиптических кривых над $\mathbb{Q}$, имеющих комплексное умножение.

Следствие 9.17. *Модуль* τ_0 *эллиптической кривой* $\mathcal{E}_{\tau_0}$*, имеющей комплексное умножение, и определенной над* $\mathbb{Q}$ *принадлежит* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$*–орбите одного из следующих чисел:*

$$\sqrt{-D}, \quad D \in \{1, 2, 3, 4, 7\},$$

или

$$\frac{-1+\sqrt{-D}}{2}, \quad D \in \{3, 7, 11, 19, 27, 43, 67, 163\}.$$

Квадратичные иррациональности $\tau_0 \in \mathbb{C}$ также замечательны с точки зрения теории модулярных форм:

Предложение 9.18 (см. Теорема A1 в [**33**]). *Пусть $\tau \in \mathbb{C}$ — квадратичная иррациональность, и $\tau \notin \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\sqrt{-1}$. Тогда верно:*

$$\frac{E_2^*(\tau)E_4(\tau)}{E_6(\tau)} \in \mathbb{Q}(j(\tau)),$$

где $j(\tau)$ является значением j–инварианта эллиптической кривой $\mathcal{E}_\tau$.

Определение. Фиксируем некоторые $\tau_0 \in \mathbb{H}$, $\omega_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

(1) Будем говорить, что фробениусово многообразие $M_3^{(\tau_0,\omega_0)}$ *имеет симметрию* если существует $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \setminus \{1\}$, т.ч.:

$$\left(\gamma^{(\tau_0,\omega_0)}\right)^A(t) = \gamma^{(\tau_0,\omega_0)}(t).$$

(2) Будем говорить, что фробениусово многообразие $M_3^{(\tau_0,\omega_0)}$ *имеет слабую симметрию* если существует $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \setminus \{1,-1\}$, т.ч.:

$$\left(\gamma^{(\tau_0,\omega_0)}\right)^A(t) = \gamma^{(\tau_0,\omega_0')}(t) \quad \text{для некоторой } \omega_0' \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Замечание 9.1. Важно заметить, что слабая симметрия не является симметрией фробениусова многообразия кроме случая $\omega_0 = \omega_0'$, так как соответствующее действие $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ связывает разные точки в пространстве всех фробениусовых многообразий размерности три.

Теорема 9.19. *Фиксируем некоторые $\tau_0 \in \mathbb{H}$ и $\omega_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.*

(i) *Фробениусово многообразие $M_3^{(\tau_0,\omega_0)}$ имеет симметрию тогда и только тогда, когда τ_0 принадлежит $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$–орбите $\sqrt{-1}$ или ρ.*

(ii) *Фробениусово многообразие $M_3^{(\tau_0,\omega_0)}$ определенное над $\mathbb{Q}$ имеет слабую симметрию тогда и только тогда, когда τ_0 принадлежит приведенному в Следствии 9.17 списку.*

Доказательство. По Предложению 9.15 фробениусово многообразие $M^{(\tau_0,\omega_0)}$ имеет симметрию тогда и только тогда, когда $\frac{a\tau_0+b}{c\tau_0+d} = \tau_0$ и

$$\omega_0^4 = (c\tau_0+d)^4\omega_0^4 \quad \text{для} \quad \tau_0 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\sqrt{-1},$$

или же

$$\omega_0^6 = (c\tau_0+d)^6\omega_0^6 \quad \text{для} \quad \tau_0 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\rho,$$

или же

$$\omega_0^2 = (c\tau_0+d)^2\omega_0^2.$$

Последнее равенство верно тогда и только тогда, когда $(c\tau_0 + d)^2 = 1$ и не имеет решения для $\tau_0 \in \mathbb{H}$, $c, d \in \mathbb{Z}$. Несложно показать, что имеется подходящая матрица $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, решающая первые два уравнения, что доказывает (i).

Пусть $M^{(\tau_0,\omega_0)}$ определено над $\mathbb{Q}$ и имеет слабую симметрию. Тогда по Теореме 9.13 эллиптическая кривая $\mathcal{E}_{\tau_0}$ определена над $\mathbb{Q}$.

По Предложению 9.15 мы имеем $\frac{a\tau_0+b}{c\tau_0+d} = \tau_0$. Таким образом τ_0 удовлетворяет:

$$c\tau_0^2 + \tau_0(d-a) - b = 0.$$

Если $c = 0$, или же дискриминант этого квадратного уравнения равен нулю, мы получаем противоречие с условием $\tau_0 \in \mathbb{H}$. Таким образом эллиптическая кривая $\mathcal{E}_{\tau_0}$ имеет комплексное умножение. Из Предложения 9.16 мы знаем, что существует ровно 13 таких τ_0 с точностью до действия $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Таким образом τ_0 принадлежит приведенному списку.

Пусть τ_0 — модуль эллиптической кривой из приведенного списка. Из предположения о рациональности эллиптической кривой $\mathcal{E}_{\tau_0}$ следует, что $j(\tau_0) \in \mathbb{Q}$. Случай $\tau_0 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})\sqrt{-1}$ был рассмотрен в Примере 2.1.1 и мы можем применить Предложение 9.18:

$$\frac{E_2^*(\tau_0)E_4(\tau_0)}{E_6(\tau_0)} \in \mathbb{Q}.$$

В то же самое время, так как эллиптическая кривая определена над $\mathbb{Q}$, существует некоторое $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, такое, что:

$$a^2 g_2(\tau_0) \in \mathbb{Q}, \quad a^3 g_3(\tau_0) \in \mathbb{Q}.$$

Из уравнения (9.2) мы видим:

$$a^2\pi^4 E_4(\tau_0) = a^2 g_2(\tau_0)\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}, \quad a^3\pi^6 E_6(\tau_0) = a^3 g_3(\tau_0)\frac{27}{8} \in \mathbb{Q}.$$

Таким образом:

$$a\pi^2 E_2^*(\tau_0) \in \mathbb{Q}.$$

И мы имеем:

$$E_2^*(\tau_0) \in \mathbb{Q}(a\pi^2)^{-1}, \quad E_4(\tau_0) \in \mathbb{Q}(a\pi^2)^{-2}, \quad E_6(\tau_0) \in \mathbb{Q}(a\pi^2)^{-3}.$$

Полагая $\omega_0^2 := (a\pi^2)^{-1}$ мы видим, что фробениусово многообразие $M^{(\tau_0,\omega_0)}$ определено над $\mathbb{Q}$ по Теореме 9.13. □

Замечание 9.2. Мы можем переформулировать Теорему 9.19, часть (i) выше так: фробениусово многообразие $M^{(\tau_0,\omega_0)}$ имеет симметрию тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}_{\tau_0}$ имеет нетривиальный автоморфизм.

3. Классификация в размености 6

Мы классифицируем 6–мерные фробениусовы многообразия $M_6^{(\tau_0,\omega_0)}$ с помощью эллиптическое кривой, сопоставленной 3–мерному фробениусову многообразию $M_3^{(\tau_0,\omega_0)}$.

3.1. Классификация $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)} \cdot M_{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}$ над $\mathbb{Q}$.

Лемма 9.20. *Пусть функции $X_i(t)$ представляются сходящимися рядами по t: $X_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n^{(i)}}{n!} t^n$. Тогда система дифференциальных уравнений* (8.3) *эквивалентна следующим рекуррентным соотношениям*:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
x_n^{(2)} + x_n^{(3)} = 2(n-1)! \sum\limits_{p=0}^{n-1} x_p^{(2)} x_{n-1-p}^{(3)} \\
x_n^{(3)} + x_n^{(4)} = 2(n-1)! \sum\limits_{p=0}^{n-1} x_p^{(3)} x_{n-1-p}^{(4)} \\
x_n^{(4)} + x_n^{(2)} = 2(n-1)! \sum\limits_{p=0}^{n-1} x_p^{(4)} x_{n-1-p}^{(2)}
\end{array}
\right. \tag{9.17}
$$

Доказательство. Следует моментально сопоставляя члены рядов. □

Моментальным следствием леммы является то, что первые три коэффициента $x_0^{(2)}$, $x_0^{(3)}$ и $x_0^{(4)}$ полностью определяют все последующие коэффициенты $x_n^{(i)}$ по формулам рекурсии (9.17).

Пусть $\gamma^{(\tau_0,\omega_0)}$ является решение уравнения Шази, ассоциированным с решением системы Альфана $(X_2^{(\tau_0,\omega_0)}, X_3^{(\tau_0,\omega_0)}, X_4^{(\tau_0,\omega_0)})$. Напомним обозначение $c_n(\tau_0,\omega_0)$:

$$\gamma^{(\tau_0,\omega_0)}(t) = \sum_{n\geq 0} c_n(\tau_0,\omega_0) \frac{t^n}{n!}.$$

Предложение 9.21. *Пусть $\gamma^{(\tau_0,\omega_0)}$ — решение уравнения Шази, ассоциированное с решением системы Альфана $(X_2^{(\tau_0,\omega_0)}, X_3^{(\tau_0,\omega_0)}, X_4^{(\tau_0,\omega_0)})$. Пусть $g_2(\tau_0)$ и $g_3(\tau_0)$ — модулярные инварианты эллиптической кривой $\mathcal{E}_{\tau_0}$. Тогда уравнение* (9.11) *в точке $t = 0$:*

$$\omega^3 - \frac{3}{2} c_0(\tau_0,\omega_0)\omega^2 + \frac{3}{2} c_1(\tau_0,\omega_0)\omega - \frac{1}{4} c_2(\tau_0,\omega_0) = 0$$

преобразуется заменой переменной $\hat{\omega} = (2\omega_0\pi)^2 \left(\omega - \frac{1}{2}c_0(\tau_0,\omega_0)\right)$ в следующее:

$$4\hat{\omega}^3 - g_2(\tau_0)\hat{\omega} - g_3(\tau_0) = 0.$$

Доказательство. Избавляясь от квадратичного по ω члена, уравнение (9.11) принимает при $t = 0$ следующий вид:

$$(\omega - \frac{1}{2}c_0)^3 + \frac{3}{2}(\omega - \frac{1}{2}c_0)(c_1 - \frac{c_0^2}{2}) + \frac{3}{4}c_0c_1 - \frac{1}{4}c_2(\tau_0,\omega_0) - \frac{c_0^3}{4} = 0$$

Положим $\tilde{\omega} = \omega - c_0/2$. По Лемме 9.11 мы имеем:

$$\tilde{\omega}^3 - \tilde{\omega}\frac{3}{2}\frac{E_4(\tau_0)}{72\omega_0^4} - \frac{1}{4}\frac{E_6(\tau_0)}{216\omega_0^6} = 0$$

Выражая E_4 и E_6 через модулярные инварианты g_2, g_3 мы получаем:

$$\tilde{\omega}^3 - \frac{1}{2^6}\frac{g_2(\tau_0)}{\omega_0^4\pi^4}\tilde{\omega} - \frac{1}{2^8}\frac{g_3(\tau_0)}{\omega_0^6\pi^6} = 0$$

что эквивалентно уравнению:

$$4\tilde{\omega}^3 - \frac{1}{2^4}\frac{g_2(\tau_0)}{\omega_0^4\pi^4}\tilde{\omega} - \frac{1}{2^6}\frac{g_3(\tau_0)}{\omega_0^6\pi^6} = 0.$$

Применяя замену $\hat{\omega} := (2\omega_0\pi)^2\tilde{\omega}$ и умножая обе стороны уравнения на $(2\omega_0\pi)^8$ мы получаем требуемое. □

Следствие 9.22. *Дискриминант Δ^Q кубического уравнения* (9.11) *является ненулевым множителем дискриминанта Δ эллиптической кривой $\mathcal{E}_{\tau_0}$.*

Обозначим далее через $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{C}$ корни уравнения $4x^3 - g_2x - g_3 = 0$.

Предложение 9.23 (см. Глава 6.12 в **[29]**). *Все три числа e_i вещественны тогда и только тогда, когда g_2 и g_3 вещественны, и $\Delta > 0$. В таком случае периоды эллиптической кривой имеют следующие интегральные выражения:*

$$\omega_1 = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}}, \quad \omega_2 = \sqrt{-1}\int_{-e_3}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}},$$

и модуль эллиптической кривой вещественен $\tau = \omega_2/\omega_1 \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$.

Заметим, что числа e_i зависят от конкретного вида уравнения, определяющего эллиптическую кривую. В частности эти числа отличаются для $g_2' = a^2g_2$ и $g_3' = a^3g_3$ для всякого $a \in \mathbb{C}^*$ в то время как два уравнения определяют изоморфные эллиптические кривые.

Предложение 9.24. *Фиксируем некоторые $\tau_0 \in \mathbb{H}$ и $\omega_0 \in \mathbb{C}^*$. Пусть 6–мерное фробениусово многообразие $M_6^{(\tau_0,\omega_0)}$ определено над $\mathbb{R}$, тогда $\exists g_2, g_3 \in \mathbb{R}$, т.ч.:*

$$\mathcal{E}_{\tau_0} \cong \{y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3\}, \text{ и } e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Так как $M_6^{(\tau_0,\omega_0)}$ определено над $\mathbb{R}$, то уравнение (9.11) имеет три вещественных корня. Мы свяжем эти корни с числами e_1, e_2, e_3 эллиптической кривой.

По Предложению 9.21, применяя замену переменной $\hat{\omega} = (2\omega_0\pi)^2(\omega + 2c_0(\tau_0, \omega_0))$, уравнение (9.11) при $t = 0$ имеет следующую форму:

$$4\hat{\omega}^3 - g_2(\tau_0)\hat{\omega} - g_3(\tau_0) = 0,$$

По Теореме 9.13 и редукции размерности 6 в размерность 3, эллиптическая кривая $\mathcal{E}_{\tau_0}$ определена над $\mathbb{R}$. Таким образом верно:

$$\exists a \in \mathbb{C}^* \quad \text{т.ч.} \quad g_2' := g_2a^2, g_3' := g_3a^3 \in \mathbb{R}.$$

По Теореме 9.13 мы имеем:

$$\frac{1}{\omega_0^4}E_4(\tau_0) = \frac{3}{4}\frac{g_2'}{a^2\omega_0^4\pi^4} \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{\omega_0^6}E_6(\tau_0) = \frac{27}{8}\frac{g_3'}{a^3\omega_0^6\pi^6} \in \mathbb{R}.$$

Таким образом следует:

$$a\omega_0^2\pi^2 \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим замену переменных:

$$\tilde{\omega} = a\hat{\omega} = a(2\omega_0\pi)^2\left(\omega + 2c_0(\tau_0, \omega_0)\right).$$

Та как $a\omega_0^2\pi^2 \in \mathbb{R}$, мы видим, что $\tilde{\omega}$ связано с ω вещественной линейной заменой.

Эллиптическая кривая $\mathcal{E}_{\tau_0}$ изоморфна следующей эллиптической кривой, определенной кубическим уравнением с вещественными коэффициентами:

$$4\tilde{\omega}^3 - g_2'\tilde{\omega} - g_3' = 0.$$

Таким образом числа e_1, e_2, e_3 отличаются от корней уравнения (9.11) в точке $t = 0$ вещественной заменой переменной. □

Теорема 9.25. *Фробениусово многообразие $M_6^{(\tau_0,\omega_0)}$ определено над $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\tau_0 \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$ и $\omega_0^2 \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть фробениусово многообразие $M_6^{(\tau_0,\omega_0)}$ определено над $\mathbb{R}$. По Предложению 9.24 и Предложению 9.23 модуль эллиптической кривой $\tau_0 \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$. Несложно заметить из разложения Фурье, что:

$$E_2^*(\tau_0) \in \mathbb{R}, \quad E_4(\tau_0) \in \mathbb{R}, \quad E_6(\tau_0) \in \mathbb{R}.$$

Единственными нулями $E_4(\tau)$ являются $\tau \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\rho$, а $E_2^*(\tau)$ обнуляется только в точках $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$–орбит $\sqrt{-1}$ и ρ (см. Предложение 9.14). Случай $\tau \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\sqrt{-1}$ был разобран в Разделе 2.1.1. Вне данных орбит мы получаем не менее двух чисел, которые не обращаются в ноль.

По Лемме 9.11 мы снова получаем, что $\omega_0^2 \in \mathbb{R}$.

Применяя Лемму 9.11 и Предложение 9.21 несложно заметить, что для всяких $\tau_0 \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$ и $\omega_0^2 \in \mathbb{R}$ фробениусово многообразие $M_6^{(\tau_0,\omega_0)}$ определено над $\mathbb{R}$. □

3.2. Доказательство теоремы о зеркальной симметрии типа LG–LG. Покажем, что существует единственное фробениусово многообразие, удовлетворяющее аксиомам орбифолдовой А–модели Ландау–Гинзбурга.

Согласно аксиомам орбифолдовой А–модели, соответствующее фробениусово многообразие должно быть определено над $\mathbb{Q}$. По Предложения 9.23 и 9.24 следует рассмотреть только фробениусовы многообразия с $\tau_0 \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$.

Требуя, что фробениусово многообразие принадлежит $\mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}$–орбите многообразия $M_{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}$ с квадратично иррациональным τ_0, мы получаем по Предложению 9.10 необходимое условие — 3–мерное фробениусово многообразие $M_3^{(\tau_0,\omega_0)}$ должно быть определено над $\mathbb{Q}$ с квадратично иррациональным τ_0.

По Теореме 9.19 комплексное число τ_0 принадлежит списку, приведенному в Следствии 9.17 и является чисто мнимым. Это в точности следующие числа:

$$\tau_0 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\ \{\sqrt{-1}, \sqrt{-2}, \sqrt{-3}, \sqrt{-4}, \sqrt{-7}\}.$$

Несложно проверить явно используя явно выписанные модели Вейерштрасса и Предложение 9.24, что такие τ_0 не дают рациональных решений уравнения (9.11) в точке $t = 0$ кроме $\tau_0 = \sqrt{-1}$.

Библиография

[1] Dan Abramovich. Lectures on Gromov–Witten invariants of orbifolds. *Lecture Notes in Math*, 1947, Springer, 2008.

[2] V.I. Arnold, S. Gusein-Zade, A. Varchenko. Singularities of differentiable maps, Volume 2. Birkhäuser Boston, 2012.

[3] A. Basalaev. Homepage. http://basalaev.wordpress.com

[4] A. Basalaev. Orbifold GW theory as the Hurwitz–Frobenius submanifold. *J. Geom. Phys.*, 77, 2014, pp. 30–42.

[5] A. Basalaev. SL$(2, \mathbb{C})$ group action on Cohomological field theories. *preprint, arXiv:1405.6607*, 2014.

[6] A. Basalaev, A. Takahashi. On rational Frobenius Manifolds of rank three with symmetries. *J. Geom. Phys.*, 84, 2014, pp. 73–86.

[7] P. Berglund, M. Henningson. Landau-Ginzburg orbifolds, mirror symmetry and the elliptic genus. *Nucl. Phys. B*, 433, 1995, pp. 311–332.

[8] P. Candelas, X. De La Ossa, P. Green, L. Parkes. A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory. *Nucl. Phys. B*, 359, 1991, pp. 21–74.

[9] W. Chen, Y. Ruan. A New Cohomology Theory for Orbifold. *Comm Math Phys*, 248, 2000, pp. 1–31.

[10] A. Chiodo, Y. Ruan. A global mirror symmetry framework for the Landau-Ginzburg/Calabi-Yau correspondence. *preprint arXiv: 1307.0939*, 2013.

[11] Boris Dubrovin. Geometry of 2d topological field theories. In *Lect. Notes Math*, Springer, 1996.

[12] Boris Dubrovin. Painleve' transcendents in two-dimensional topological field theory. *CRM Series in Mathematical Physics*, Springer, 1999.

[13] W. Ebeling. Functions of Several Complex Variables and Their Singularities. *Graduate studies in mathematics*, 83, AMS, 2007.

[14] W. Ebeling, A. Takahashi. Strange duality of weighted homogeneous polynomials. *Compos. Math.*, 147(05), 2011, pp. 1413–1433.

[15] W. Ebeling, A. Takahashi. Mirror Symmetry between Orbifold Curves and Cusp Singularities with Group Action. *Int. Math. Res. Not.*, 2013(10), 2013, pp. 2240–2270.

[16] H. Fan, T. Jarvis, Y. Ruan. The Witten equation, mirror symmetry, and quantum singularity theory. *Ann. Math.*, 178(1), 2013, pp. 1–106.

[17] G. Frobenius, L. Stickelberger. Über die differentiation der elliptischen functionen nach den Perioden und invarianten. *J. reine angew. Math.*, 92, 1982, pp. 311–327.

[18] A. Givental. Gromov - Witten invariants and quantization of quadratic hamiltonians. *Mosc. Math. J.*, 1(4), 2001, pp. 551–568.

[19] C. Hertling. Frobenius Manifolds and Moduli Spaces for Singularities. *Cambridge University Press*, Cambridge, 2002.

[20] K. Intriligator, C. Vafa. Landau-Ginzburg orbifolds. *Nucl. Phys. B*, 339(1), 1990, pp. 95–120.

[21] Y. Ishibashi, Y. Shiraishi, A. Takahashi. A Uniqueness Theorem for Frobenius Manifolds and Gromov–Witten Theory for Orbifold Projective Lines. *preprint arXiv:1209.4870*, 2012.

[22] T. Jarvis, R. Kaufmann, T. Kimura. Pointed admissible G-covers and G-equivariant cohomological field theories, *Comp. Math.*, 141(4), 2005, pp. 926–978.

[23] L. Katzarkov, M. Kontsevich, T. Pantev. Hodge theoretic aspects of mirror symmetry. *Proc. Symp. Pure Math.*, 78, 2008, pp. 87–174.

[24] R. Kaufmann. Singularities with Symmetries, orbifold Frobenius algebras and Mirror Symmetry. *Contemp. Math.*, 403, 2006, pp. 1–46.

[25] L. J. P. Kilford. Modular forms: a classical and computational introduction. *Imperial college press*, 2008.

[26] M. Krawitz. FJRW rings and Landau-Ginzburg Mirror Symmetry. *preprint arXiv:0906.0796*, 2009.

[27] M. Krawitz, Y. Shen. Landau-Ginzburg/Calabi-Yau Correspondence of all Genera for Elliptic Orbifold $\mathbb{P}^1$. *preprint arXiv:1106.6270*, 2011.

[28] M. Kaneko, D. Zagier. A generalized Jacobi theta function and quasimodular forms. *Progr. Math.*, 128, 1994, pp. 165–172.

[29] D. Lawden. Elliptic Functions and Applications. *Appl. Math. Sci.*, Springer, 1989.

[30] W. Lerche, C. Vafa, N. P. Warner. Chiral rings in $N = 2$ superconformal theories. *Nucl. Phys. B*, 324(2), 1989, pp. 427–474.

[31] E. Looijenga. On the semi-universal deformation of a simple-elliptic hypersurface singularity Part II: the discriminant. *Topology*, 17(1), 1978, pp. 23–40.

[32] Y. Manin. Frobenius Manifolds, Quantum Cohomology, and Moduli Spaces. *Colloquium edition* AMS, 1999.

[33] D. Masser. Elliptic Functions and Transcendence. *Lecture Notes in Math*, Springer , 1975.

[34] T. Milanov, Y. Ruan. Gromov–Witten theory of elliptic orbifold $\mathbb{P}^1$ and quasi-modular forms. *preprint arXiv:1106.2321*, 2011.

[35] T. Milanov, Y. Shen. Global mirror symmetry for invertible simple elliptic singularities. *preprint arXiv:1210.6862*, 2012.

[36] T. Milanov, Y. Shen. The modular group for the total ancestor potential of Fermat simple elliptic singularities. *preprint arXiv:1401.2725*, 2014.

[37] M. Noumi, Y. Yamada. Notes on the flat structures associated with simple and simply elliptic singularities. *Integr. Syst. Algebr. Geom.*, Proceedings of the Taniguchi Symposium 1997, pp. 373–383.

[38] Y. Ohyama. Differential relations of theta functions. *Osaka J. Math*, 32, 1995, pp. 431–450.

[39] K. Saito. Einfach-elliptische Singularitäten. *Invent. Math.*, 23(3-4), 1974, pp. 289–325.

[40] K. Saito. Period mapping associated to a primitive form. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 19, 1983, pp. 1231–1264.

[41] K. Saito, A. Takahashi. From primitive forms to Frobenius manifolds. *Proc. Symp. Pure Math.*, 78, 2008, pp. 31–48.

[42] M. Saito. On the structure of Brieskorn lattices. *Ann. Inst. Frourier Grenoble*, 39, 1989, pp. 27–72.

[43] Ikuo Satake, A. Takahashi. Gromov–Witten invariants for mirror orbifolds of simple elliptic singularities. *Ann. Inst. Fourier*, 61, 2011, pp. 2885–2907.

[44] J. Silverman. Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves. *Graduate Texts in Math*, Springer, 1994.

[45] I. Strachan. Frobenius submanifolds. *J. Geom. Phys.*, 38, 2001, pp. 285–307.

[46] A. Strominger. Mirror symmetry is T-duality. *Nucl. Phys. B*, 479(1-2), 1996, pp. 243–259.

[47] A. Varchenko, B. Blok. Topological Conformal Field Theories and the Flat Coordinates. *Mod. Phys. Lett. A*, 7(07), 1992, pp. 1467–1490.

[48] E. Witten. Mirror Manifolds And Topological Field Theory. *preprint arXiv:hep-th/9112056*, 1991.

[49] E. Witten. Phases of $N = 2$ theories in two dimensions. *Nucl. Phys. B*, 403(1-2), 1993, pp. 159–222.

[50] D. Zagier. Elliptic modular forms and their applications. In *1-2-3 Modul. forms*, Springer Universitext, 2008, pp. 1–103.