Национальный Исследовательский Университет
Высшая Школа Экономики

На правах рукописи

Бальзин Эдуард Рафитович

Расслоения Гротендика и Гомотопическая Алгебра

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор РАН
Д. Б. Каледин

Москва – 2016

Аннотация

Данная диссертация посвящена изучению семейств категорий, оснащённых гомотопической структурой. Диссертация состоит из трёх основных результатов:

1. Обобщение модельной структуры Риди, построенное в данной работе для сечений семейства категорий, индексированного категорией Риди. В отличие от предыдущих работ (например, статьи Симпсона-Хиршховица), требования, налагаемые нами на семейство, минимальны, а потому наш результат применим в ситуациях, когда функторы перехода в семействе нелинейны.

2. Расширение формализма Сигала для гомотопических алгебраических структур на произвольные моноидальные категории, с применением операторных категорий в смысле Барвика. Наш подход основан на описании моноидальных структур как расслоений Гротендика, и мы вводим понятие производных сечений этих расслоений, используя симплициальные замены Бусфильда-Кана. Наш первый результат касательно модельных структур даёт нам средства для работы с производными сечениями.

3. Доказательство результата типа “гомотопический спуск”, который даёт достаточные условия для того, чтобы функтор обратного образа между категориями производных сечений являлся эквивалентностью категорий. Мы доказываем этот результат для функторов, которые удовлетворяют условиям типа “Теорема A Квиллена”, и которые мы называем разрешениями. Один пример такого функтора-разрешения даётся функтором из категории планарных маркированных деревьев Концевича-Сойбельмана в стратифицированный фундаментальный группоид пространства Рана 2-диска. Применение результата гомологического спуска в этом случае даёт новое доказательство гипотезы Делиня, что даёт, таким образом, альтернативу подходам, использующим формализм операд.

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования, степень разработанности

E_n-операды и факторизационные алгебры

Формализм операд [34] появился как способ описывать алгебраическую структуру n-кратных пространств петель. Операдой $\mathcal{O}$ в категории топологических пространств **Top** называется симметрическая последовательность пространств $\{\mathcal{O}(l)\}_{l\in\mathbb{N}}$, где каждое $\mathcal{O}(l) \in$ **Top** следует воспринимать как пространство операций с l входами и одним выходом. Вдобавок должны быть заданы отображения композиции $\mathcal{O}(l) \times \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(l+m-1)$ уважающие действие симметрической группы, ассоциативные и с единицами. Важный набор примеров операд даётся так называемыми операдами маленьких n-дисков E_n , для которых $\mathrm{E}_n(m)$ — с точностью до гомотопии, конфигурационное пространство l точек в n-диске. Любое n-кратное пространство петель X является алгеброй над E_n, другими словами, заданы отображения $\mathrm{E}_n(m) \times X^m \to X$ удовлетворяющие определённым условиям.

Вместо категории топологических пространств можно рассмотреть произвольную симметрическую моноидальную категорию $\mathcal{M}$ с моноидальным произведением, обозначенным $\otimes$. Определения операды и алгебры над ней легко обобщить: как в отображениях композиции $\mathcal{O}(l)\otimes\mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(l+m-1)$, так и в отображениях структуры $\mathcal{O}$-алгебры, $\mathcal{O}(m)\otimes X^{\otimes m} \to X$, нужно вставить моноидальное произведение $\otimes$ вместо $\times$. В **Top** естественно рассматривать операды и алгебры над ними с точностью до гомотопической эквивалентности. Если мы работаем в моноидальной категории $\mathcal{M}$ с заданной гомотопической структурой (например, $\mathcal{M}$ может быть моноидальной модельной категорией [24]), можно также изучать операды в $\mathcal{M}$ с точностью до слабой эквивалентности в смысле категорной теории гомотопий [15]. С этой точки зрения, в качестве операды в **Top** обычно обозначаемой как E_∞ можно взять любую операду $\mathcal{O}$ такую что $\mathcal{O}(m)$ стягиваемо со свободным действием симметрической группы [9, 11, 38].

Конкретный пример категории, отличной от **Top** даётся $\mathbf{DVect}_k$, категорией цепных комплексов над полем k. Взяв сингулярный цепной комплекс каждого из пространств $\mathrm{E}_n(m)$, составляющих операду n-дисков, мы получим операду в $\mathbf{DVect}_k$, обозначаемую нами $\mathbb{E}_n$. Алгебры над операдами $\mathbb{E}_n$ изучались с большим интересом в последние годы. Примером $\mathbb{E}_2$-алгебры является когомологический комплекс Хохшильда $CH^\bullet(A)$ для dg-алгебры A, который появляется во многих областях математики, например в контексте топологических квантовых теорий поля [14]. Проблема существования структуры $\mathbb{E}_2$-алгебры на $CH^\bullet(A)$

также известна как гипотеза Делиня, и чёткая её формулировка даётся с точностью до квази-изоморфизма: существует операда $\mathcal{O}$ в $\mathbf{DVect}_k$, квази-изоморфная $\mathbb{E}_2$, которая действует на $CH^\bullet(A)$. Доказательства этого результата (см., например, [8, 32, 39]) состоят из большого количества работы по конструированию явной версии $\mathcal{O}$, её действия на $CH^\bullet(A)$, и цепочки квази-изоморфизмов, соединяющих $\mathcal{O}$ с $\mathbb{E}_2$.

Громоздкость доказательств гипотезы Делиня и формализма операд вообще происходит из того факта, что две операды могут быть очень разных сложности и размера, и при этом описывать эквивалентные структуры. Однако, существует другой подход к $\mathbb{E}_n$-алгебрам, и, более общо, к структурам, связанным с конфигурационными пространствами, который основан на машинерии факторизационных алгебр, оригинально введённых в [7]. Факторизационная алгебра $\mathcal{A}$ над пространством X состоит из, грубо говоря, $\mathbf{DVect}_k$-предпучка $\mathcal{A}_m$ на X^m для каждой степени $m \in \mathbb{N}$, вместе с дополнительной структурой. Во-первых, даны отображения вида

$$\Delta_m^* \mathcal{A}_m \longrightarrow \mathcal{A}_1 \tag{i}$$

между ограничением $\Delta_m^* \mathcal{A}_m$ of $\mathcal{A}_m$ на самую малую диагональ $\Delta_m : X \to X^m$ и $\mathcal{A}_1$. Во вторых, если обозначить через $i_m : U_m \subset X^m$ дополнение $\{(x_i) \in X^m | x_k \neq x_l\}$ до всех диагоналей, то должны быть заданы отображения

$$i_m^* \mathcal{A}_m \longrightarrow \mathcal{A}_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \mathcal{A}_1 \tag{ii}$$

между ограничением $\mathcal{A}_m$ на U_m и m-кратным внешним произведением $\mathcal{A}_1$ [7], от которых требуется, чтобы они были квази-изоморфизмами. В случае, когда X это n-диск, можно доказать [31], что $\mathbb{E}_n$-алгебры отвечают тем факторизационным алгебрам на X, которые конструктивны, что означает что каждый предпучок $\mathcal{A}_m$ локально постоянен на стратах для стандартной стратификации X^m.

Можно утверждать, что понятие факторизационной алгебры более естественно и канонично в сравнении с понятием алгебры над операдой. Разница между двумя подходами особенно заметна в малой размерности, например, в размерности 2. В этом случае можно заменить 2-диск D и его степени D^m на их стратифицированные [43] фундаментальные группоиды $\Pi_1^{EP}(D^m)$, и рассмотреть, вместо конструктивных пучков, функторы $\Pi_1^{EP}(D^m) \to \mathbf{DVect}_k$. Таким образом, можно работать с куда меньшим набором данных, чем с парой, состоящее из операды $\mathcal{O}$, квазиизоморфной $\mathbb{E}_2$, и $\mathcal{O}$-алгебры. Это приводит к вопросу о том, существует ли общий "алгебро-гомотопический" формализм, который не имеет проблем неканоничности, связанных с выбором операды, и естественно воспроизводит подход факторизационных алгебр к разного рода алгебраическим структурам.

Подход Сигала и операторные категории

В контексте пространств петель, подобный подход действительно существует и очень полезен на практике. В [37] Грэм Сигал ввёл понятие Γ-пространства. Обозначим через Γ категорию конечных множеств и их отображений, а через Γ_+ категорию конечных множеств и частично заданных отображений: морфизмом $S \to T$ в Γ_+ является отображение множеств, $U \to T$ определённое на подмножестве $U \subset S$. Тогда Γ-пространство A определяется как функтор

$$\Gamma_+ \xrightarrow{A} \mathbf{Top}$$

в категорию топологических пространств, который удовлетворяет условиям Сигала, описанным ниже. Зафиксируем одноэлементное множество 1. Тогда для любого множества S и элемента $x \in S$ мы имеем соответствующее частично определённое отображение $i_x : S \to 1$, заданное на подмножестве $\{x\}$. Условия сигала заключаются в том, что, для каждого $S \in \Gamma_*$, индуцированное отображение

$$A(S) \xrightarrow{\prod_{x\in S} A(i_x)} A(1)^S \tag{iii}$$

является гомотопической эквивалентностью топологических пространств.

Для каждого $S \in \Gamma_+$ есть ещё одно отображение в 1, $\pi_S : S \to 1$, определённое на всём множестве S. Мы можем рассмотреть диаграмму следующего вида

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & A(S) \arrow[dl, "\prod_{x\in S} A(i_x)"'] \arrow[dr, "A(\pi_S)"] & \\ A(1)^S & & A(1). \end{tikzcd} \tag{iv}$$

Выбирая гомотопический обратный к левому отображению, мы получаем, неканонически, операцию умножения $m_S : A(1)^S \to A(1)$ in **Top**. Можно проверить, что в гомотопической категории Ho **Top**, тип, соответствующий $A(1)$, оснащён структурой коммутативного моноида.

Следует заметить, однако, что Γ-пространство A несёт в себе значительно больше информации, нежели чем структура гомотопического моноида на $A(1)$. В своей работе Сигал, точно так же как Мэй в случае с операдами, использовал Γ-пространства для описания бесконечнократных пространств петель и машины распетливания. С современной точки зрения, Γ-пространство является правильным описанием гомотопически когерентно коммутативного моноида в топологических пространствах. В частности, Γ-пространства описывают тот же класс структур, что и E_∞-алгебры в **Top**.

Вместо Γ можно рассмотреть другие категории, например, категорию O конечных полностью упорядоченных множеств. Можно затем похожим образом определить категорию O_+, с отображениями $O \to O'$ даваемыми морфизмами $P \to O'$, где $P \subset O$ — вложение интервала. Модифицируя определения надлежащим образом, можно моделировать ассоциативные моноиды (без коммутативности) как функторы $\mathrm{O}_+ \to \mathbf{Top}$ со специальными условиями. Явные примеры таких функторов можно получать из обычных пространств петель. Более общо, можно рассмотреть, вместо Γ и O, операторную категорию C в смысле [6]: с точностью до некоторых условий конечности, в C, по определению, существует конечный объект 1 и выделенный класс "допустимых" мономорфизмов, которые получаются как композиции обратных образов отображений $1 \to c$ для $c \in \mathrm{C}$ (требуется, чтобы эти обратные образы существовали). С помощью допустимых мономорфизмов можно ввести понятие частично определённых отображений и построить категории C_+ (которые в основном тексте мы обозначаем A_C). В работе [6] показано, что существуют операторные категории O_n, такие что n-кратные пространства петель — примеры E_n-алгебр — могут быть описаны как сигалоподобные объекты $(\mathrm{O}_n)_+ \to \mathbf{Top}$. С другой стороны, вместо $\mathbf{Top}$ можно рассмотреть любую другую гомотопическую категорию, то есть, категорию $\mathcal{M}$ с подкатегорией слабых эквивалентностей $\mathcal{W}$, такую что $\mathcal{M}$ имеет (гомотопические) произведения, и определить объекты Сигала как функторы $\mathrm{C}_+ \to \mathcal{M}$, такие что отображения, подобные описанным в диаграмме (iii), являются слабыми эквивалентностями.

Подход Сигала контрастирует с операдным в том, что умножения $m_S : A(1)^S \to A(1)$ для Γ-пространства A не заданы канонически и вместо этого строятся с помощью свойств A, в то время как задать модель $\mathcal{O}$ для $\mathbb{E}_\infty$-операды в $\mathbf{Top}$ и алгебру над ней значит задать большое количество разных структур. В частности, для $|S|$-элементного множества S не требуется, чтобы $A(S)$ было равно или даже эквивалентно $\mathcal{O}(|S|) \times A(1)^S$. Информация о свойствах умножения в формализме Сигала кодируется, таким образом, целиком и полностью категорией Γ, так что для выбора остаётся куда меньше свободы. Можно было бы надеяться, что в некоторых ситуациях было бы намного проще построить и работать с сигаловыми структурами, нежели чем с операдами. Более того, имеется значительное сходство между Γ-пространствами Сигала и факторизационными алгебрами: для факторизационной алгебры $\mathcal{A}$, отображения вида (i) и (ii) дают, после перехода к слоям, диаграммы, в точности подобные (iv).

Тем не менее, если мы попробуем продолжить формализм Сигала в недекартовы моноидальные категории, например в категорию цепных комплексов, то мы немедленно попадём в тупиковую ситуацию. Чтобы получить отображения вида (iii) в подходе Γ-пространств, мы использовали универсальное свойство декартового произведения $\times$, которое отсутствует для тензорного произведения $\otimes_k$ в $\mathbf{DVect}_k$.

Язык расслоений Гротендика

Есть способ справиться, а точнее, уйти от этой проблемы. Весьма известное наблюдение [31, 37, 41] говорит нам о том, что всякая симметрическая моноидальная категория $\mathcal{M}$ является слабо коммутативным моноидом в категории всех категорий, а значит, её можно описать, с точностью до эквивалентности, как Γ-категорию M. То есть, M — функтор из Γ_+ в категории, такой что $M(1) \cong \mathcal{M}$, и что отображения (iii),

$$M(S) \longrightarrow \prod_S M(1),$$

являются эквивалентностями категорий. Для того чтобы не выбирать эквивалентность между $\mathcal{M}$ и $M(1)$, необходимо либо работать с псевдофункторами из Γ_+ в категории, либо, что эквивалентно, с опрасслоениями Гротендика [19, 42] над Γ_+: каждое из понятий описывает слабое ковариантное Γ_+-индексированное семейство категорий.

Для того чтобы [31] непосредственно получить опрасслоение Гротендика из симметрической моноидальной категории $\mathcal{M}$ с моноидальным произведением $\otimes$, определим $\mathcal{M}^{\otimes}$ как категорию

- с объектами $(S, \{X_s\}_{s\in S})$ где $S \in \Gamma_+$ и каждый X_s является объектом $\mathcal{M}$.
- с морфизмами $(S, \{X_s\}_{s\in S}) \to (T, \{Y_t\}_{t\in T})$ состоящими из частично определённого отображения $f : S \to T$, и для каждого $t \in T$, морфизма $\otimes_{s\in f^{-1}(t)} X_s \to Y_t$. В случае, когда $f^{-1}(t)$ пусто, моноидальное произведение над этим множеством равно единичному объекту. Композиции тогда можно определить с помощью изоморфизмов когерентности для произведения $\otimes : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ и единичного объекта.

Естественный функтор $p : \mathcal{M}^{\otimes} \to \Gamma_+$ — опрасслоение Гротендика, что, повторим, означает, что отображение $S \mapsto p^{-1}(S) = \mathcal{M}^S$ функториально в слабом, но когерентном смысле.

Перед тем как продолжить, мы бы хотели высказать несколько замечаний насчёт вышеописанной конструкции $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}^{\otimes}$. Во-первых, вместо симметрической моноидальной категории, можно рассматривать различные виды моноидальных структур (например, несимметрические или с действием группы кос) и кодировать их как специальные опрасслоения $\mathcal{N}^{\otimes} \to \mathrm{C}_+$ над $(-)_+$-конструкциями подходящих операторных категорий C. Можно пойти в иное направление в вопросе обобщения. Например, напомним, что (представимой) псевдотензорной категорией [7] называется категория $\mathcal{T}$ вместе с набором функторов $\otimes_n : \mathcal{T}^n \to \mathcal{T}$ и с, для каждого набора $m_1, ...m_k \in \mathbb{N}$, естественными преобразованиями

$$\otimes_k \circ (\otimes_{m_1}, ..., \otimes_{m_k}) \to \otimes_{m_1+...+m_k}$$

функторов $\mathcal{T}^{m_1+\dots m_k} \to \mathcal{T}$, так что все естественно возникающие диаграммы коммутативны. Чтобы получить примеры псевдотензорных категорий, рассмотрим операду $\mathcal{O}$ в симметрической моноидальной категории $\mathcal{M}$; тогда, этим данным можно сопоставить псевдотензорную категорию, обозначенную $\mathcal{M}(\mathcal{O})$, попросту полагая $\otimes_n(X_1, ..., X_n) := \mathcal{O}(n) \otimes X_1 \otimes ... \otimes X_n$. Далее, имея псевдотензорную категорию $\mathcal{T}$, можно попробовать ту же конструкцию, которую мы описали выше для симметрических моноидальных категорий. При детальном рассмотрении обнаруживается, что лучше производить эту конструкцию над двойственной категорией Γ_+^{op}. Результат, $\mathcal{T}^{\otimes} \to \Gamma_+^{\mathsf{op}}$, оказывается *предрасслоением* в смысле Гротендика [19].

Возвращаясь к симметрическим моноидальным категориям, рассмотрим коммутативный моноид $A \in \mathcal{M}$. Тогда можно задать сечение $\Gamma_+ \to \mathcal{M}^{\otimes}$ опрасслоения $p : \mathcal{M}^{\otimes} \to \Gamma_+$ по правилу $S \mapsto (S, \{X_s\})$, так что каждый $X_s = A$. Сечения этого типа могут быть охарактеризованы посредством подходящих условий нормировки: если рассмотреть отображение $f : S \to T$ in Γ_+, значение сечения B на f определяется морфизмом $f_! B(S) \to B(T)$ в $\mathcal{M}^T$, где $f_! : \mathcal{M}^S \to \mathcal{M}^T$ — функтор "перехода"

$$f_! : (S, \{X_s\}_{s \in S}) \mapsto (T, \{Y_t\}_{t \in T}), \quad Y_t = \otimes_{s \in f^{-1}t} X_s. \tag{v}$$

В таком случае, сечение B происходит из коммутативного моноида в $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда для каждого инертного отображения $p : S \to T$, — частично определённого отображения, индуцированного вложением $i : T \hookrightarrow S$, $p \circ i = id_T$, — соответствующее отображение $p_! B(S) \to B(T)$ — изоморфизм. Отсюда следует, что $B(S) \cong (B(1), ...B(1))$ естественным образом.

Нет, однако, очевидного способа написать диаграммы для условий сигала, используя язык сечений опрасслоения $\mathcal{M}^{\otimes} \to \Gamma_+$. Очень важно заметить, что когда $\mathcal{M} = \mathbf{DVect}_k$ и $char k > 0$, коммутативные dg-алгебры (которые описываются как сечения) не являются верными объектами для рассмотрения и не совпадают, даже с точностью до квази-изоморфизма, с $\mathbb{E}_\infty$-алгебрами. Наконец, можно проверить, что операторные категории в смысле [6], отвечающие $\mathbb{E}_n$-структурам, не дают ничего большего, чем коммутативные или ассоциативные алгебры в $\mathcal{M}$, будучи рассмотренными в контексте категорных сечений.

Вышеописанные наблюдения мотивируют [31] перейти к рассмотрению моноидальных ∞-категорий, и в то время как получающийся формализм в принципе решает упомянутые проблемы, размеры получающейся машинерии огромны. Философским объяснением этого факта может быть то, что замена $\mathcal{M}^{\otimes} \to \Gamma_+$ на высшекатегорный аналог означает взятие фибрантной замены внутри выбранной модели для высших категорий. Получающиеся в результате соотношения когерентности могут быть очень сложны для того, чтобы с ними работать.

Цели и задачи диссертации

Дабы получить сигалово описание не меняя данных со стороны $\mathcal{M}$, мы бы предпочли иметь объект, который производит диаграммы в $\mathcal{M}$ следующей формы:

$$\begin{tikzcd} & A_{\pi_S} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A(1)^S \cong (\pi_S)_! A(S) & & A(1), \end{tikzcd} \tag{vi}$$

где $(\pi_S)_!$ — функтор перехода вдоль отображения $\pi_S : S \to 1$, $\pi_S^{-1}(1) = S$. Можно затем потребовать, чтобы левое отображение было слабой эквивалентностью, в случае если такие есть в $\mathcal{M}$. В большей общности, вместо $\mathcal{M}^{\otimes} \to \Gamma_+$ можно рассмотреть общие опрасслоения Гротендика $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ и задаться вопросом: есть ли способ определить объекты, такие что по отображению $f : c \to c'$ в $\mathcal{C}$ мы бы получали диаграммы формы $f_! A(c) \longleftarrow A_f \longrightarrow A(c')$ (где $f_! : \mathcal{E}(c) \to \mathcal{E}(c')$ — функтор перехода, индуцированный свойствами опрасслоения $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$). Тогда можно было бы потребовать, чтобы левая стрелка была слабой эквивалентностью, в подходящем смысле. Наконец, условия нормировки (подобные тем, что появлялись для сечений-алгебр выше) вдоль подмножества $\mathcal{S}$ отображений $\mathcal{C}$ можно было бы сформулировать как требования для $A_f \longrightarrow A(c')$ быть слабой эквивалентностью в случае, когда f принадлежит $\mathcal{S}$.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту

Производные сечения

В рамках данной диссертации мы вводим производные, или Сигаловы, сечения опрасслоений со слабыми эквивалентностями, которые воспроизводят, в частности, диаграммы вида (vi).

Опишем вкратце конструкцию. Для категории $\mathcal{C}$, её симплициальной заменой [12] $\mathbb{C}$ назовём категорию

- объекты которой — наборы компонируемых морфизмов $c_0 \to ... \to c_n$ в $\mathcal{C}$ произвольной конечной длины $n \geq 0$,
- морфизм между $c_0 \to ... \to c_n$ и $c'_0 \to ... \to c'_m$ состоит из отображения ординалов $a : [m] \to [n]$ (где $[i]$ обозначает полностью упорядоченное множество из $i+1$ элементов $0, 1, ..., i$) такого что $c_{a(k)} = c'_k$ для $0 \leq k \leq m$.

Если обозначить за Δ категорию конечных ординалов, тогда $\mathbb{C}$ — (опфибрационная) конструкция Гротендика нерва $N\mathcal{C} : \Delta^{\mathsf{op}} \to \mathbf{Set}$. Отображения $(c_0 \to ... \to c_n) \mapsto c_0$ или $(c_0 \to ... \to c_n) \mapsto c_n$ задают функторы $h : \mathbb{C} \to \mathcal{C}$ и $t : \mathbb{C} \to \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.

Чтобы понять важность симплициальных замен, рассмотрим функтор $F : \mathbb{C} \to \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ — категория со слабыми эквивалентностями $\mathcal{W}$. Если взять морфизм $f : c \to c'$ of $\mathcal{C}$, то в $\mathbb{C}$ можно рассмотреть следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} & c \xrightarrow{f} c' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ c & & c'. \end{tikzcd} \tag{vii}$$

Вычисляя F на этой диаграмме получаем следующий домик в $\mathcal{M}$:

$$\begin{tikzcd} & F(c \xrightarrow{f} c') \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ F(c) & & F(c'). \end{tikzcd} \tag{viii}$$

Если потребовать, чтобы левая стрелка $F(c) \longleftarrow F(c \xrightarrow{f} c')$ была изоморфизмом, то диаграмма (viii) задаст отображение из $F(c)$ в $F(c')$, которое мы обозначим через $F(f)$. В таком случае имеет смысл спросить, верно ли, что $F(gf) = F(g)F(f)$ для компонируемой пары морфизмов $c \xrightarrow{f} c' \xrightarrow{g} c''$, или же что $F(id_c) = id_{F(c)}$. Оба этих условия будут выполнены если F будет отправлять в изоморфизмы те отображения $\mathbb{C}$, которые имеют вид

$$(c_0 \to ... \to c_k \to ... \to c_n) \longrightarrow (c_0 \to ... \to c_k)$$

для $0 \leq k \leq n$ (то есть, эти отображения однозначно определяются по вложению $[k]$ как первых $k+1$ элементов $[m]$). Назовём такие отображения $\mathbb{C}$ сигаловыми. Мы также заметим, что функтор F, который переводит отображения Сигала в изоморфизмы, единственным образом факторизуется как $\bar{F} \circ h$, где $\bar{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ — функтор с категории $\mathcal{C}$.

Если же F отправляет сигаловы отображения $\mathbb{C}$ в слабые эквивалентности категории $\mathcal{M}$, то домики вида (viii) определяют морфизмы в локализации $\operatorname{Ho}\mathcal{M}$ категории $\mathcal{M}$ вдоль $\mathcal{W}$. Можно рассматривать такой функтор $F : \mathbb{C} \to \mathcal{M}$ как слабую версию функтора с категории $\mathcal{C}$ в $\mathcal{M}$, так что диаграммы, получаемые из объектов $c_0 \to ... \to c_n$, обеспечивают когерентность композиций.

Предположим теперь, что у нас есть опрасслоение $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$. Более того, предположим, что каждый его слой $\mathcal{E}(c) := p^{-1}(c)$ имеет слабые эквивалентности, и что, для каждого отображения $f : c \to c'$, функтор $f_! : \mathcal{E}(c) \to \mathcal{E}(c')$, индуцированный свойством опрасслоения, сохраняет эти слабые эквивалентности. Тогда существует функтор $p_{\mathbb{C}} : \mathbf{E} \to \mathbb{C}$, такой что

$\mathbf{E}(\mathbf{c}_{[n]}) := p_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbf{c}_{[n]}) \cong \mathcal{E}(c_n)$, и что для каждого $\alpha : \mathbf{c}_{[n]} \to \mathbf{c}'_{[m]}$ существует естественно индуцированный функтор $\mathbf{E}(\mathbf{c}'_{[m]}) \to \mathbf{E}(\mathbf{c}_{[n]})$, изоморфный $t(\alpha)_! : \mathcal{E}(c'_m) \to \mathcal{E}(c_n)$. В отличие от p, функтор $p_{\mathbb{C}}$ — расслоение Гротендика и описывает контравариантное семейство категорий над $\mathbb{C}$.

Определим предсечение $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ как сечение $X : \mathbb{C} \to \mathbf{E}$ функтора $p_{\mathbb{C}}$. Предсечения образуют категорию $\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, которая естественно оснащена слабыми эквивалентностями. Предсечение X, действуя на диаграмме вида (vii), даёт следующую диаграмму в $\mathcal{E}(c')$:

$$\begin{tikzcd} & X(c \xrightarrow{f} c') \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ f_! X(c) & & X(c'). \end{tikzcd}$$

Как и в дискуссии выше, если левая стрелка в этой диаграмме, и, более общо, другие стрелки, получаемые применением X к сигаловым отображениям $\mathbb{C}$, — изоморфизмы, то можно доказать, что X определяет обычное сечение $\mathcal{C} \to \mathcal{E}$ исходного опрасслоения $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$. Если же X отправляет сигаловы отображения в слабые эквивалентности, то мы называем такое предсечение X производным сечением. Производные сечения опрасслоения $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ образуют категорию $\mathsf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \subset \mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ с индуцированными слабыми эквивалентностями.

Обратимся теперь к основным результатам диссертации, касающимся производных сечений.

Модельная структура Риди для полурасслоений

Для того чтобы работать с категорией $\mathsf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ или даже с $\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ гомотопическим образом, необходимо иметь дополнительную структуру, например, модельную структуру в смысле Квиллена [35, 24, 20], или же разумное вложение в модельную категорию.

Во-первых, необходимо иметь какую-то структуру на опрасслоении $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$. Мы предположим, что каждый слой $\mathcal{E}(c)$ — модельная категория, и что каждый функтор перехода $f_! : \mathcal{E}(c) \to \mathcal{E}(c')$ сохраняет фибрации и слабые эквивалентности. Назовём такие опрасслоения модельными.

Теорема (Следствие 3.2.5). *Для модельного опрасслоения $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$, соответствующая категория предсечений $\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ обладает модельной структурой, со слабыми эквивалентностями заданными поточечно.*

Пример модельного опрасслоения даётся $\mathbf{DVect}_k^{\otimes} \to \Gamma_+$: функторы перехода в этой ситуации задаются, по существу, n-кратными тензорными произведениями $\otimes : \mathbf{DVect}_k^n \to$

$\mathbf{DVect}_k$, которые сохраняют сюръективные отображения и квази-изоморфизмы, но не коммутируют с пределами или копределами, будучи полилинейными по своей природе. По этой причине, техники для работы с семействами модельных категорий, разработанные ранее (например, [21]), оказываются неприменимы для предсечений.

Теорема о модельной структуре на $\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ является следствием более общего результата. Пусть $\mathcal{R}$ — категория Риди, и обозначим также через $\mathcal{R}_-$ и $\mathcal{R}_+$ подкатегории повышающих и понижающих отображений. Функтор $p : \mathcal{F} \to \mathcal{R}$ называется модельным полурасслоением если

- для любого $l : x \to y$ в $\mathcal{R}_-$ и $Y \in p^{-1}y$ существует декартов (в смысле [19]) морфизм $l^*Y \to Y$, накрывающий l,
- для любого $r : z \to t$ в $\mathcal{R}_+$ и $Z \in p^{-1}z$ существует опдекартов морфизм $Z \to r_!Z$ накрывающий r,
- каждый слой $\mathcal{F}(x) = p^{-1}(x)$ — модельная категория, и функторы l^* (соответственно, $r_!$) сохраняют фибрации и тривиальные фибрации (соответственно, кофибрации и тривиальные кофибрации).

Также необходимо потребовать морфизмы замены базы для коммутативных квадратов определённого вида, см. Определение 1.4.11 и Предложение 1.4.13.

Теорема 2.2.5. *Пусть $p : \mathcal{F} \to \mathcal{R}$ — модельное полурасслоение над категорией Риди $\mathcal{R}$. Тогда категория сечений $\mathsf{Sect}(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ наделена модельной структурой.*

Модельная структура, даваемая этой теоремой, очень конкретна и напоминает во многом обычную структуру Риди. Наше доказательство во многом обобщает наблюдения [21], но мы доказываем всё, от существования (ко)пределов до свойств подъёма и факторизации, по индукции. Индуктивная процедура также позволяет нам строить сопряжённые функторы между категориями сечений, работая с полурасслоениями $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ над факторизационными категориями общего вида, то, что мы используем в этой диссертации для проведения вычислений с производными сечениями.

Чтобы связать результат Теоремы 2.2.5 с существующей литературой, заметим, что наша модельная структура на $\mathsf{Sect}(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ совпадает с приведённой в [21] когда $\mathcal{F} \to \mathcal{R}$ — предпучок Квиллена, то есть, полурасслоение, которое также и бирасслоение. В этом случае, каждый морфизм $f : c \to d$ в $\mathcal{R}$ индуцирует сопряжённую пару Квиллена $\mathcal{F}(c) \rightleftarrows \mathcal{F}(d)$. Для примеров таких ситуаций можно обратиться, опять же, к [21] или рассмотреть различные примеры из производной геометрии.

Как было упомянуто выше, нас интересуют полурасслоения, появляющиеся из нелинейных задач алгебры. Имея модельное опрасслоение $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$, ассоциированное расслоение $\mathbf{E} \to \mathbb{C}$ также является опрасслоением вдоль тех отображений $\mathbb{C}$, которые отвечают сюръекциям в Δ, поскольку в этом случае фибрационные функторы перехода являются эквивалентностями. Таким образом $\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ — модельная категория, и её локализация $\mathrm{Ho}\,\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ вдоль слабых эквивалентностей хорошо контролируема. Продолжая мысль, локализация $\mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ также хорошо определена. Мы не утверждаем существования модельной структуры на $\mathsf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, и не видим причин ожидать её существования. Иметь объемлющую модельную категорию $\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, в точности как в случае вычисления гомотопических (ко)пределов [12, 15], позволяет нам работать с производными сечениями на достаточно эффективном уровне.

Напомним, что мы ввели опрасслоения $\mathcal{M}^{\otimes} \to \Gamma_+$ для описания алгебр в $\mathcal{M}$. Если же мы посмотрим на те же данные как на семейство категорий над Γ_+^{op}, точно так же, как в случае псевдотензорных категорий, тогда сечения $\mathcal{M}^{\otimes} \to \Gamma_+^{\mathsf{op}}$, нормированные определённым образом, отвечают коалгебрам в $\mathcal{M}$. Предсечения $\mathsf{PSect}(\Gamma_+, \mathcal{M}^{\otimes})$ также отвечают коалгебраическим данным определённого рода. Предложение 3.2.10 показывает, что производные сечения ведут себя так же, как и обычные сечения, что подтверждает идею о том, что DSect является разумным объектом для рассмотрения. Философия позади производных сечений — своего рода пример кошулевой двойственности между алгебраическими и коалгебраическими объектами.

Резольвенты

Мы бы хотели иметь возможность строить интересные примеры производных сечений.

Определение 4.0.2. Функтор $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ называется *резольвентой* если для каждой последовательности компонируемых стрелок $c_0 \to \dots \to c_n$ в $\mathcal{C}$, категория $\mathcal{D}(c_0 \to \dots \to c_n) := \{d_0 \to \dots \to d_n | F(d_i \to d_{i+1}) = c_i \to c_{i+1}\}$ имеет стягиваемый нерв.

Строго говоря, это определение верно только тогда, когда F — изорасслоение. (Определение 1.1.12); для простоты изложения мы не будем обращать внимания на этот аспект.

Примеров резольвент — множество. Для каждой категории $\mathcal{C}$, функторы первого и последнего элемента $\mathbb{C} \to \mathcal{C}$, $\mathbb{C}^{\mathsf{op}} \to \mathcal{C}$ являются резольвентами. Есть также примеры резольвент менее формального характера, которые происходят из геометрии и топологии. Например, возьмём конечный клеточный комплекс X гомотопически эквивалентный $K(G, 1)$ и обозначим через $\mathrm{B}G$ фундаментальный группоид пространства X. Группы, для которых подобная картина имеет смысл, существуют, например, можно рассмотреть группу крашеных кос. Далее, выберем регулярное клеточное разбиение X и рассмотрим ассоциированное частично упорядоченное множество $\mathcal{I}$. Выбирая точку в каждой из клеток $\mathcal{I}$ и связывая эти точки путями вдоль вложений цепей, можно задать функтор $F : \mathcal{I} \to \mathrm{B}G$ который является резольвентой с точностью до эквивалентности категорий.

Функторы, подобные F выше, полезны в теории представлений. Рассмотрим функтор обратного образа $F^* : \mathcal{D}(\mathrm{B}G, k) \to \mathcal{D}(\mathcal{I}, k)$, где $\mathcal{D}(\mathrm{B}G, k)$ и $\mathcal{D}(\mathcal{I}, k)$ — производные категории функторов с, соответственно, категорий $\mathrm{B}G$ и $\mathcal{I}$ в категорию $\mathbf{DVect}_k$. Заметим что $\mathcal{D}(\mathrm{B}G, k)$ эквивалентна категории $Loc(X, k)$ — производной категории локально постоянных пучков на X. Можно тогда доказать, что F^* строго полон, и что его образ состоит из тех функторов $\mathcal{I} \to \mathbf{DVect}_k$ которые локально постоянны, в том смысле, что они отправляют в квази-изоморфизмы все отображения в категории $\mathcal{I}$. Мы также видим, что $\mathcal{D}(\mathcal{I}, k)$ — относительно простой объект для изучения: эта категория эквивалентна категории модулей над конечномерной алгеброй, порождённой $\mathcal{I}$. В частности, достаточно просто строить объекты $\mathcal{D}(\mathcal{I}, k)$, которые, окажись они локально постоянными, дают примеры представлений группы G.

Мы бы хотели доказать обобщение этого результата в нелинейном контексте модельных опрасслоений. Любое модельное опрасслоение $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ можно перетащить назад вдоль функтора $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, что даёт модельное опрасслоение $F^*\mathcal{E} \to \mathcal{D}$. Мы также имеем естественно индуцированный функтор $\mathbb{F}^* : \mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to \mathsf{PSect}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$, который сохраняет производные сечения и слабые эквивалентности между ними, что индуцирует функтор $\mathsf{h}\mathbb{F}^* : \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}(\mathcal{D}, F^*\mathcal{E})$.

Напомним, что для изучения алгебр, нам также нужно рассмотреть подмножество $\mathcal{S}$ отображений в $\mathcal{C}$, и работать с теми сечениями, которые локально постоянны вдоль $\mathcal{S}$. Обычное сечение $X : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ является $\mathcal{S}$-локально постоянным, если X отправляет морфизмы из множества $\mathcal{S}$ в опдекартовы морфизмы $\mathcal{E}$, то есть, образ $f : c \to d$ из $\mathcal{S}$ под действием X есть $X(c) \to f_! X(c)$ для некоторого подходящего выбора функтора перехода $f_!$. Подобное же определение можно сделать для производных сечений. А именно, производное сечение $X : \mathbb{C} \to \mathbf{E}$ является $\mathcal{S}$-локально постоянным если для любого отображения $\mathbb{C}$, индуцированного вложением интервала на правый конец,

$$(c_0 \to \ldots \to c_k \to \ldots \to c_n) \longrightarrow (c_k \to \ldots \to c_n),$$

так что вдобавок $c_{i-1} \to c_i$ принадлежат к $\mathcal{S}$ для $1 \leq i \leq k$, соответствующий образ

$$X(c_0 \to \ldots \to c_k \to \ldots \to c_n) \longrightarrow X(c_k \to \ldots \to c_n)$$

является слабой эквивалентностью $\mathcal{E}(c_n)$. Это определение, в частности, означает, что для любого отображения $f : c_0 \to c_1$ in $\mathcal{S}$, обе стрелки в ассоциированной диаграмме

$$\begin{tikzcd} & X(c_0 \xrightarrow{f} c_1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ f_! X(c_0) & & X(c_1). \end{tikzcd}$$

являются слабыми эквивалентностями.

Обозначим через $\mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{\mathcal{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ категорию $\mathcal{S}$-локально постоянных производных сечений. Имея функтор $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, обозначим через $F^*\mathcal{S}$ подмножество стрелок $\mathcal{D}$, которые F отправляет в $\mathcal{S}$. Функтор $\mathsf{h}\mathbb{F}^*$ можно естественно ограничить, индуцировав $\mathsf{h}\mathbb{F}^* : \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{\mathcal{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{F^*\mathcal{S}}(\mathcal{D}, F^*\mathcal{E})$.

Теорема 4.2.11. *Пусть $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — модельное опрасслоение, $\mathcal{S}$ — подмножество морфизмов в $\mathcal{C}$, и $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — резольвента. Тогда* $\mathsf{h}\mathbb{F}^* : \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{\mathcal{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{F^*\mathcal{S}}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ *является эквивалентностью категорий.*

Сей результат является своего рожа “швейцарским ножом”: он позволяет переходить от одной категории, $\mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{\mathcal{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, к другой, $\mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{F^*\mathcal{S}}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$, так что обе категории представляют одну и ту же сущность, и этот факт можно использовать для доказательства большого количества более сложных утверждений.

Наша стратегия доказательства Теоремы 4.2.11 состоит в конструкции функтора прямого образа $\mathsf{h}\mathbb{F}_! : \mathrm{Ho}\,\mathsf{PSect}(\mathcal{D}, F^*\mathcal{E}) \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$. В общей ситуации, этот функтор не сохраняет производные сечения, пусть и можно нарисовать определённые диаграммы-домики, которые указывают на то, что $\mathsf{h}\mathbb{F}_!$ ведёт себя как левый сопряжённый к $\mathsf{h}\mathbb{F}^*$. Тем не менее, если F — резольвента, то $\mathsf{h}\mathbb{F}_!$ ограничивается до функтора $\mathsf{h}\mathbb{F}_! : \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{F^*\mathcal{S}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{\mathcal{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, который, как можно проверить, является эквивалентностью категорий, обратной к $\mathsf{h}\mathbb{F}^*$. В этом смысле, наш подход близок по своей философии к Костелло [14], который строит производную эквивалентность посредством явного представления пары функторов с естественными преобразованиями, которые становятся изоморфизмами после локализации. Функтор $\mathsf{h}\mathbb{F}_!$ вычисляется явным образом, что позволяет проверить сохранение всех необходимых условий на предсечения. Его конструкция, пусть и куда менее ad hoc по сравнению с [14], всё же, весьма замысловата. Она включает в себя манипуляции с диаграммами в $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, даваемыми конечными частично упорядоченными множествами с начальным и конечным элементами, а также прямой образ вдоль опрасслоения над $\mathbb{C}$, слои которого — симплициальные замены категорий $\mathcal{D}(c_0 \to ... \to c_n)$. Читатель может обратиться к Главе 4 за всеми необходимыми деталями.

Гипотеза Делиня

Применим же теперь полученный результат для того, чтобы доказать гипотезу Делиня в рамках подхода производных сечений. Для начала, определим операторные категории B и T.

Операторная категория B получается из стратифицированного фундаментального группоида $\Pi_1^{strat}(Ran(D))$ [43] пространства Рана [7] $Ran(D)$ двумерного диска D. Можно сказать, что B является "утолщением" категории Γ, так что вместо симметрических групп, $Aut_{\mathrm{B}}(S)$ есть группа $|S|$ крашеных кос. Естественный функтор $\mathrm{B} \to \Gamma$ позволяет нам взять опрасслоение $\mathbf{DVect}_k^{\otimes} \to \Gamma_+$ и индуцировать новое опрасслоение $\mathbf{DVect}_k^{\otimes} \to \mathrm{B}_+$. Производные сечения полученного опрасслоения отвечают факторизационным алгебрам на двумерном диске в смысле [7].

Объект категории T — планарное дерево с корнем, частью вершин, отмеченных конечным множеством, так что неотмеченные вершины (кроме корня) стабильны, то есть, имеют валентность не менее трёх. Подобные деревья уже были рассмотрены в [27]. Отображение двух планарных маркированных деревьев $(T, S) \to (T', S')$ даётся отображением конечных множеств $S \to S'$, и отображением определённого вида между клеточными комплексами, $|T| \to |T'|$, связанными с деревьями. Есть ещё одна категория $\tilde{\mathrm{T}}$, чьи объекты те же, что и в категории T, плюс вложение в двумерный диск D, которое отправляет корень каждого дерева в одну и ту же отмеченную точку на границе. Забывание данных вложения индуцирует эквивалентность категорий $\tilde{\mathrm{T}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}$, и забывание всего, кроме отмеченных вершин и их вложений, даёт функтор $\tilde{\mathrm{T}} \to \mathrm{B}$. Таким образом, мы получаем функтор $Cm : \mathrm{T} \to \mathrm{B}$. Можно тогда доказать результат, уже частично набросанный в [26, 27]:

Теорема 5.4.16. *Функтор $Cm : \mathrm{T} \to \mathrm{B}$ является резольвентой.*

Этот результат позволяет построить эквивалентность между категориями B и T-алгебр. Обозначим через $\mathsf{DAlg}(\mathrm{B}, \mathbf{DVect}_k)$ полную подкатегорию $\mathsf{DSect}(\mathrm{B}_+, \mathbf{DVect}_k)$, состоящую из производных алгебр — тех производных сечений, которые локально постоянны вдоль подмножества инертных отображений In_{B} категории B_+. Другими словами, можно потребовать условия нормировки ровно так же, как и в случае обычных сечений. Можно затем использовать функтор Cm и получить опрасслоение $\mathbf{DVect}_k^{\otimes} \to \mathrm{T}_+$. Повторное применение Теоремы 4.2.11 тогда позволяет доказать, что функтор

$$\mathsf{h}Cm^* : \mathrm{Ho}\,\mathsf{DAlg}(\mathrm{B}, \mathbf{DVect}) \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{DAlg}(\mathrm{T}, \mathbf{DVect})$$

строго полон, и что его образ состоит из тех производных алгебр, которые $Cm^*(Iso(\mathrm{B}_+))$ -

локально постоянны, где $Iso(\mathrm{B}_+)$ обозначает подмножество изоморфизмов B_+. грубо говоря говоря, $Cm^*(Iso(\mathrm{B}_+))$-локально постоянная производная T-алгебра отправляет в слабые эквивалентности те отображения T_+, которые становятся изоморфизмами в B_+. Таким образом, мы получаем воспроизведение производно-категорного результата, но в новом, неаддитивном контексте.

В отличие от B, категория T ведёт себя как комбинаторный объект и имеет конечные множества морфизмов, так что строить объекты в $\mathrm{Ho}\,\mathsf{DAlg}(\mathrm{T}, \mathbf{DVect})$ относительно просто. Пример, описанный в диссертации, состоит в производной T-алгебре, соответствующей $CH^\bullet(A, A)$. Благодаря вышеописанной эквивалентности, на комплексе Хохшильда также возникает структура B-алгебры, что даёт доказательство гипотезы Делиня в формализме производных алгебр. Несмотря на то, что гипотеза Делиня — не новый результат и служит для нас как, скорее, тестовый случай, мы склонны считать, что наша перспектива на доказательство Гипотезы имеет достоинство по сравнению с операдным подходом. Функтор $Cm : \mathrm{T} \to \mathrm{B}$ имеет явную и относительно контролируемую комбинаторику, и существование $\mathbb{E}_2$-структуры на $CH^\bullet(A, A)$ в формализме производных сечений — по большей части, формальное следствие того факта, что Cm является резольвентой. Эта общая прозрачность — то, что заставляет нас верить в высокий потенциал формализма Сигала.

Научная новизна, теоретическая и практическая значимость

Понятия производного сечения, полурасслоения и некоторые вспомогательные математические объекты, например, нётеровы категории, являются новыми. Теоремы 2.2.5, 4.2.11, а также Теорема 5.4.16 в описанной формулировке, — новые результаты.

Данная диссертация имеет теоретический характер, и может быть полезна различным специалистам, как со стороны гомологической и гомотопической алгебры, так и математической физики. Значимость результатов диссертации — в описании алгебраического подхода, альтернативного операдам, который позволяет дать новые, более прозрачные доказательства уже известных утверждений, и исследовать структуры, неизвестные для описания в формализме операд.

Методология и методы исследования

Основной математический аппарат, применяемый в диссертации — теория модельных категорий в смысле [35, 20, 24, 36]. Методы исследования — применение различных приёмов гомотопической алгебры [12, 15, 36], с полным избежанием неявных конструкций наподобие кофибрантно-порождённых модельных структур или высших категорий.

Апробация результатов

Результаты диссертации были опубликованы в следующих статьях и препринтах:

1. [1] Э. Р. Бальзин, *Разрешения категорий и производные сечения*, Успехи математических наук 69:5 (2014), страницы 918-920

2. [2] Э. Р. Бальзин, *Производные сечения, факторизационные алгебры и гипотеза Делиня* Математические заметки, 2016, том 100, выпуск 2, страницы 291–295

3. [4] Edouard Balzin, *Derived sections of Grothendieck fibrations and the problems of homotopical algebra*, `http://arxiv.org/abs/1410.3387`, на рецензировании

Результаты диссертации были доложены на докладах на следующих конференциях и семинарах:

1. Доклад “Factorisation categories, algebras and their applications"на конференции GAGC - 2013 (январь 2013, Марсель, Франция),

2. Доклад “Resolutions of categories and derived sections"на семинаре группы ATG лаборатории Ж. А. Дьедонне (сентябрь 2014, Ницца, Франция) и по той же теме на гомотопическом семинаре ВШЭ (октябрь 2014, Москва, Россия),

3. Доклад “Categorical resolutions in the context of homotopical algebra"на конференции GAGC - 2014, (ноябрь 2014, Марсель, Франция),

4. Доклад “Segal Sections and Categorical Resolutions” на конференции “Young Topologists Meeting 2015” (июль 2015, Лозанна, Швейцария)

5. Доклад “Reedy model structures for families"на семинаре группы ATG (май 2016, Ницца, Франция),

6. Доклад “Grothendieck Fibrations and Homotopical Algebra” в лаборатории Ж. А. Дьедонне (20 июня 2016, Ницца, Франция).

Содержание диссертации

Глава 1: Расслоения Гротендика. В этой главе мы вводим категорные понятия, необходимые для нашего формализма. Во-первых, мы вводим понятие предрасслоений Гротендика, которое, будучи весьма известным в фольклоре, не представлено в достаточном количестве изданных материалов. Более того, обычно рассматриваются расслоения, а не предрасслоения: наш интерес в псевдотензорных категориях требует введения всех нужных понятий для более общего определения предрасслоения. Неверно, что для произвольного предрасслоения, его категория сечений допускает пределы, даже если предрасслоение послойно полно. По этой причине, мы вводим специальный класс "нётеровых" категорий. Предрасслоение $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$ с полными слоями над нётеровой категорией обладает тем свойством, что её категория сечений $\mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ полна. Мы не встречали понятие нётеровой категории в литературе, однако есть определённые сходства между нашим подходом и понятием обобщённых категорий Риди [10]. Затем мы вводим понятие полурасслоения $\mathcal{E} \to \mathcal{D}$ над факторизационной категорией $(\mathcal{D}, \mathscr{L}, \mathscr{R})$, и объясняем, как можно вычислять пределы и сопряжённые функторы через ограничение на правые или левые классы факторизационной системы. Понятие полурасслоения также не встречается в литературе (за исключением похожего, но отличающегося понятия амбирасслоения).

Глава 2: Модельные структуры Риди. В этой главе мы изучаем полурасслоения над категориями Риди, оснащённые модельной структурой. Мы доказываем Теорему 2.2.5 и несколько побочных результатов, необходимых в дальнейшем, рассматривая под конец главы полурасслоения над категорией Δ.

Глава 3: Производные сечения. В этой главе, которая во многом перекрывается с введением, мы вводим, на должном уровне строгости, понятия симплициальных замен, предсечений и производных сечений модельных опрасслоений Гротендика. Мы показываем также, как вложить обычные сечения в производные, и доказываем несколько результатов, которые связаны с поведением модельной структуры на предсечениях в ситуации, когда она ограничена на подкатегорию производных сечений. Эти результаты будут нужны нам для доказательств в последующих главах.

Глава 4: Резольвенты. Мы описываем понятие резольвенты и доказываем Теорему 4.2.11. Многие из конструкций Главы 4 интересны сами по себе, например, категория Π конечных частично упорядоченных множеств с начальным и конечным элементом, прямая категория Риди K, состоящая из инъекций в Δ (со скрученными отображениями между ними), как и различные операции, проводимые над ними. Чтобы адаптировать наши результаты для ситуации операторных категорий, мы заканчиваем главу доказательством более продвинутого результата, Теоремы 4.3.12, которая относится к функторам между факторизационными категориями. Доказательство этого факта включает в себя повторное применение Теоремы 4.2.11 вместе с большим количеством комбинаторики, обращающейся вокруг сплетённых произведений и подходящей версии нерва факторизационных категорий.

Глава 5: Сигаловы алгебры и гипотеза Делиня. Вводятся понятия операторных категорий, моноидальных категорий над ними, и производных алгебр. Мы изучаем резольвенты в этой ситуации, приводя критерий, который позволяет обнаружить, когда функтор между операторными категориями — резольвента. Мы используем этот критерий для доказательства Теоремы 5.4.16, утверждающей, что функтор $Cm : \mathrm{T} \to \mathrm{B}$ — резольвента, и затем показываем, как построить сечение, отвечающее комплексу Хохшильда над категорией T.

Глава 1

Расслоения Гротендика

1.1. Декартовы морфизмы, предрасслоения, сечения

Пусть дан функтор $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$. Для $c \in \mathcal{C}$, обозначим через $\mathcal{E}(c)$ категорию-слой $p^{-1}c$ над c. Она состоит из всех $X \in \mathcal{E}$, таких что $p(X) = c$ и всех морфизмов $X \to X'$, таких что $p(X \to X') = id_c$.

Определение 1.1.1. Морфизм $\alpha : X \to Y$ категории $\mathcal{E}$ называется

- *p-декартовым*, или просто декартовым, если для всякого другого морфизма $\beta : X' \to Y$ с $p(\beta) = p(\alpha)$ существует единственный морфизм $\gamma : X' \to X$ in $\mathcal{E}(p(X))$ который факторизует $\beta = \alpha \circ \gamma$.

- *p-опдекартовым*, или попросту опдекартовым, если для любого другого отображения $\delta : X \to Y'$ с $p(\delta) = p(\alpha)$ существует единственный морфизм $\eta : Y \to Y'$ in $\mathcal{E}(p(Y))$ который факторизует $\delta = \eta \circ \alpha$.

Скажем, что p-декартов или p-опдекартов морфизм $\alpha : X \to Y$ накрывает морфизм $f : c \to c'$, если $p(\alpha) = f$.

Определение 1.1.2. Функтор $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ называется

- предрасслоением если для каждого $f : x \to y$ категории $\mathcal{C}$ и $Y \in \mathcal{E}(y)$ существует декартов морфизм $\alpha : X \to Y$, накрывающий f, то есть, $p(\alpha) = f$.

- предопрасслоением если для всякого $f : x \to y$ категории $\mathcal{C}$ и $X \in \mathcal{E}(x)$ существует опдекартов морфизм $\delta : X \to Z$ накрывающий f, то есть, $p(\alpha) = f$.

Лемма 1.1.3. *Пусть $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — предрасслоение, тогда $p^{\mathsf{op}} : \mathcal{E}^{\mathsf{op}} \to \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ — предопрасслоение.*
□

Обозначение 1.1.4. Пусть $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — предрасслоение, $f : x \to y$ — морфизм в категории $\mathcal{C}$ и $Y \in \mathcal{E}(y)$, мы будем обычно обозначать выбранный декартов подъём через $f^*Y \to Y$. То же самое будет применимо, если p — предопрасслоение, и в этом случае для $X \in \mathcal{E}(x)$, мы будем обозначать через $X \to f_!X$ выбранный опдекартов подъём.

Определение 1.1.5. Пред(оп)расслоение $q : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ называется малым если $\mathcal{C}$ и $\mathcal{E}$ — малые категории. Пред(оп)расслоение q дискретно если для каждого $c \in \mathcal{C}$, категория $\mathcal{E}(c)$ не имеет нетождественных морфизмов.

Все дискретные пред(оп)расслоения, которые мы будем рассматривать, являются малыми.

Лемма 1.1.6. *Пусть $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — дискретное предрасслоение. Тогда композиция декартовых морфизмов $\mathcal{E}$ декартова. То же самое верно про дискретные предопрасслоения.*

Доказательство. Очевидно. □

Определение 1.1.7. Предрасслоение $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ называется расслоением Гротендика если композиция декартовых морфизмов декартова. Определение опрасслоения Гротендика даётся двойственным образом.

Замечание 1.1.8. В дальнейшем, (оп)расслоения часто будут рассматриваться как частные случаи пред(оп)расслоений, с дополнительными ремарками в случае необходимости. Если не сказано обратное, всякое определение или результат для пред(оп)расслоения даёт то же самое для (оп)расслоения.

Конструкция 1.1.9. Пусть дан функтор E из $\mathcal{C}$ со значениями в категориях, тогда можно произвести опрасслоение, обозначаемое $\int E \to \mathcal{C}$ и называемое *конструкцией Гротендика* [42] функтора E. Объект $\int E$ — пара (c, X) из $c \in \mathcal{C}$ и $X \in E(c)$, а морфизм $(c, X) \to (c', X')$ состоит из $f : c \to c'$ вместе с отображением $\alpha : E(f)(X) \to X'$ в $E(c')$.

Двойственным образом, для контравариантного категорнозначного функтора F, определённого на $\mathcal{C}$, его конструкция Гротендика есть расслоение $\int F \to \mathcal{C}$ с теми же парами (c, Y) в качестве объектов, но с отображениями, даваемыми парами $f : c \to c'$ и $\beta : Y \to F(f)Y'$ in $F(c)$.

Рассмотрим предрасслоение $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$. Пусть $f : c \to c'$ — морфизм в $\mathcal{C}$ и $Y \in \mathcal{E}(c')$. Выберем декартов морфизм $\alpha : f^*Y \to Y$ над f. Это задаёт объект $f^*Y \in \mathcal{E}(c)$. По универсальному свойству декартовых морфизмов, сопоставление $Y \mapsto f^*Y$ определяет функтор $f^* : \mathcal{E}(c') \to \mathcal{E}(c)$, который называется функтором перехода вдоль f. Заметим, что, для каждой пары компонируемых морфизмов f, g, существует естественное преобразование "когерентности" $f^* \circ g^* \to (g \circ f)^*$, которое является изоморфизмом с случае, когда p — расслоение Гротендика. Для любой компонируемой тройки морфизмов f, g, h, всякий выбор морфизмов когерентности приводит к следующей коммутативной диаграмме:

$$\begin{tikzcd} f^*g^*h^* \arrow[r] \arrow[d] & (gf)^*h^* \arrow[d] \\ f^*(hg)^* \arrow[r] & (hgf)^*. \end{tikzcd} \tag{1.1.1}$$

Для предопрасслоения картина получается двойственная.

В литературе [19, 42] подобный выбор сопоставления $f \mapsto f^*$ вместе с изоморфизмами когерентности для расслоений называется расщеплением.

Определение 1.1.10. Пусть $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ и $q : \mathcal{E}' \to \mathcal{C}$ — два функтора.

- Морфизм между p и q — это функтор $F : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ коммутирующий с функторами в $\mathcal{C}$, то есть, $q \circ F = p$.

- Сечение p — функтор $S : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ такой что $p \circ S = id_{\mathcal{C}}$. Другими словами, это морфизм из $id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ в $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$.

Имея два морфизма $F, F' : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$, морфизмом между ними называется естественное преобразование $\alpha : F \to F'$ такое что, для каждого x в категории $\mathcal{E}$, α_X накрывает $id_{p(X)}$.

Мы иногда будем обозначать через $\mathsf{Lax}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ категорию морфизмов между p и q, сами же функторы при этом подразумеваются ясными из контекста. Через $\mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) = \mathsf{Lax}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ мы обозначим категорию сечений функтора p.

Определение 1.1.11. Пусть $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ и $q : \mathcal{E}' \to \mathcal{C}$ — два пред(оп)расслоения. Морфизм $F : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ называется *декартовым*, если он отправляет (оп)декартовы морфизмы $\mathcal{E}$ в (оп)декартовы морфизмы $\mathcal{E}'$.

Обозначим через $\mathsf{Cart}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ полную подкатегорию $\mathsf{Lax}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$, состоящую из декартовых морфизмов.

Согласно [42], всякое расслоение (и, аналогичным образом, опрасслоение) $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ может быть, с точностью до эквивалентности, заменено на расслоение $\tilde{p} : \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{C}$, в котором сопоставление $c \mapsto \mathcal{E}(c)$ можно сделать строгим функтором посредством выбора функторов перехода вдоль морфизмов $\mathcal{C}$. Мы называем такие (оп)расслоения строго расщепимыми.

Подобное же наблюдение верно для предрасслоений. Всякое предрасслоение можно, с точностью до эквивалентности, заменить на такое, что сопоставление $c \to \mathcal{E}(c)$ будет контравариантным слабым (lax) функтором из $\mathcal{C}$ в категории. Более того, этот функтор будет нормализован, в том смысле что образ тождественных отображений $\mathcal{C}$ — тождественные функторы перехода, а образ изоморфизмов — эквивалентности. Последнее свойство имеет несколько специальный характер.

Определение 1.1.12. Функтор $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ называется *изорасслоением,* если для любого изоморфизма $f : c \xrightarrow{\sim} d$ категории $\mathcal{C}$ и объекта Y с $p(Y) = d$, существует изоморфизм $\alpha : X \xrightarrow{\sim} Y$ с $p\alpha = f$.

Всякое (оп)расслоение Гротендика автоматически является изорасслоением, но подобное неверно про пред(оп)расслоения.

Соглашение 1.1.13. С текущего момента, всякое предрасслоение или предопрасслоение, которое мы будем рассматривать, также предполагается изорасслоением, если не сказано обратного. Для изорасслоения $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ и $c \in \mathcal{C}$, обозначение $\mathcal{E}(c)$ всегда будет означать $p^{-1}(c)$, строгий категорный слой p над c. Для любого функтора $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, не являющегося изорасслоенем, обозначение $\mathcal{D}(c)$ для $c \in \mathcal{C}$ будет значить *существенный слой* F над c: его объекты суть пары из $d \in \mathcal{D}$ и $\alpha : F(d) \cong c$ in $\mathcal{C}$, а морфизмы $(d, \alpha) \to (d', \beta)$ даны $f : d \to d'$ такими что $\beta F(f) = \alpha$. В частности, $F(f)$ — изоморфизм.

1.2. Операции и конструкции

Мы видели, что всякое опрасслоение $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ можно описать, с точностью до эквивалентности, как ковариантный функтор с категории $\mathcal{C}$ со значениями в категориях. Эквивалентно, это то же самое, что и контравариантный функтор с категории $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ со значениями в категориях. Чтобы описать эту двойственность без перехода к функторам на $\mathcal{C}$, можно сделать следующее.

Определение 1.2.1. Зафиксируем опрасслоение $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$. Определим категорию, обозначенную через $\mathcal{E}^\top$, следующим образом:

1. $Ob(\mathcal{E}^\top) = Ob(\mathcal{E})$,
2. Морфизм $x \to z$ в $\mathcal{E}^\top$ — класс изоморфизмов диаграмм в $\mathcal{E}$ вида

$$x \longrightarrow y \longleftarrow z$$

таких что левая стрелка послойна, $p(x \to y) = id_{p(x)}$, и правая стрелка опдекартова.

Есть очевидный функтор, $p^\top : \mathcal{E}^\top \to \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ который отправляет морфизм $x \longrightarrow y \longleftarrow z$ в $p(y \longleftarrow z)$. Морфизм $\mathcal{E}^\top$ $p^\top$-декартов если его можно представить как диаграмму вида

$y \xrightarrow{id_y} y \longleftarrow z$. Функтор $p^\top$ — расслоение, которое мы будем называть *транспонированным расслоением* p.

В случае, когда $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ равно $\int E \to \mathcal{C}$ для функтора $E : \mathcal{C} \to \mathbf{Cat}$, тогда $\mathcal{E}^\top \to \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ эквивалентно (фибрационной) конструкции Гротендика, применённой к $E : (\mathcal{C}^{\mathsf{op}})^{\mathsf{op}} \to \mathbf{Cat}$, контравариантному функтору на $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.

Имея функтор $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, мы можем брать обратный образ пред(оп)расслоений над $\mathcal{C}$ и получать пред(оп)расслоения на $\mathcal{D}$. Имея пред(оп)расслоение $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$, обозначим через $F^*\mathcal{E} \to \mathcal{D}$, или в некоторых случаях через $\mathcal{E}|_{\mathcal{D}} \to \mathcal{D}$, получающееся пред(оп)расслоение.

Подобным же образом, по сечению $A : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ пред(оп)расслоения $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$, мы получаем сечение $F^*A : \mathcal{D} \to F^*\mathcal{E}$ обратного образа $F^*\mathcal{E} \to \mathcal{D}$. Эта операция задаёт функтор обратного образа $F^* : \mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to \mathsf{Sect}(\mathcal{D}, F^*\mathcal{E})$.

Мы часто будем писать $\mathsf{Sect}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ вместо $\mathsf{Sect}(\mathcal{D}, \mathcal{E}|_{\mathcal{D}}) = \mathsf{Sect}(\mathcal{D}, F^*\mathcal{E})$.

Лемма 1.2.2. *Пусть дано расслоение $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$ и естественное преобразование $\alpha : F \to G$ функторов $F, G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Тогда*

- *существует естественное декартово отображение расслоений $R_\alpha : G^*\mathcal{F} \to F^*\mathcal{F}$, называемое отображением ограничения,*

- *Имея сечение $A : \mathcal{C} \to \mathcal{F}$, возникает функториальный по A морфизм сечений*

$$F^*A \to R_\alpha G^*A.$$

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$ строго расщепимо. Возьмём $d \in \mathcal{D}$. Для каждого X из $\mathcal{E}(G(d)) = G^*\mathcal{F}(d)$, мы имеем декартову стрелку $Y \to X$ в $\mathcal{F}$ над $\alpha_d : F(d) \to G(d)$. Значение $R_\alpha X$ тогда определяется равным Y; действие на морфизмах можно определить похожим образом.

Пусть дано сечение A, тогда его значение на $\alpha_d : F(d) \to G(d)$ можно естественно факторизовать как

$$F^*A(d) = A(F(d)) \to R_\alpha A(G(d)) \to A(G(d)) = G^*A(d).$$

Варьируя d, стрелки $F^*A(d) \to R_\alpha A(G(d)) = (R\alpha G^*A)(d)$ задают нам необходимое естественное преобразование. $\square$

Более общий результат, Лемма 1.4.18, будет доказан позже в этой главе.

Определение 1.2.3. Пусть $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — пред(оп)расслоение и $I \in \mathbf{Cat}$ — категория.

- Произведение I и $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — это функтор $I \times p : I \times \mathcal{E} \to \mathcal{C}, \quad (i, x) \mapsto p(x)$.

- Возведение p в степень I — это функтор $p^I : \mathcal{E}^I \to \mathcal{C}$, где $\mathcal{E}^I$ — подкатегория $Fun(I, \mathcal{E})$, состоящая из всех функторов $F : I \to \mathcal{E}$, таких что $p \circ F$ — постоянный функтор $I \to \mathcal{C}$.

Оба этих функтора — пред(оп)расслоения.

Пусть дан функтор $q : \mathcal{O} \to \mathcal{C}$, являющийся опрасслоением Гротендика. Тогда есть несколько операций, которые можно выполнить с предрасслоениями над $\mathcal{O}$ и $\mathcal{C}$.

Определение 1.2.4. Имея предрасслоение $p : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$ и опрасслоение $q : \mathcal{O} \to \mathcal{C}$ с малыми слоями, *предрасслоение-степень* $p^q : \mathcal{F}^{\mathcal{O}} \to \mathcal{C}$ определяется следующим образом. Объект $\mathcal{F}^{\mathcal{O}}$ — пара из $c \in \mathcal{C}$ и функтора $X : \mathcal{O}(c) \to \mathcal{F}$, такого что pX — постоянный функтор со значением c. Морфизм $(c, X) \to (c', Y)$ состоит из $f : c \to c'$ и естественного преобразования $X \to Y \circ f_!$ функторов $\mathcal{O}(c) \to \mathcal{F}$ для некоторого выбора функтора перехода $f_! : \mathcal{O}(c) \to \mathcal{O}(c')$. Функтор $\mathcal{F}^{\mathcal{O}} \to \mathcal{C}$ — естественная проекция.

Можно проверить, что $\mathcal{F}^{\mathcal{O}} \to \mathcal{C}$ — предрасслоение со слоями $\mathsf{Fun}(\mathcal{O}(c), \mathcal{F}(c))$. Функтор перехода $\mathcal{F}^{\mathcal{O}}(c') \to \mathcal{F}^{\mathcal{O}}(c)$ даётся прекомпозицией функтора-объекта $F : \mathcal{O}(c) \to \mathcal{F}(c)$ с $f_! : \mathcal{O}(c) \to \mathcal{O}(c')$ и посткомпозицией с $f^* : \mathcal{F}(c') \to \mathcal{F}(c)$ для некоторого выбора функторов перехода $f_!$ и f^* в $\mathcal{O}$ и $\mathcal{F}$ соответственно.

Лемма 1.2.5. *Имея функтор $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ и $p : \mathcal{F} \to \mathcal{C}, q : \mathcal{O} \to \mathcal{C}$ как выше,*

1. *Существует эквивалентность категорий*

$$\mathsf{Sect}(\mathcal{O}, q^*\mathcal{F}) \cong \mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{F}^{\mathcal{O}}).$$

2. *Существует декартово отображение*

$$(F^*\mathcal{F})^{F^*\mathcal{O}} \to F^*(\mathcal{F}^{\mathcal{O}})$$

которое, вдобавок, является эквивалентностью над $\mathcal{D}$.

Доказательство. Очевидно. □

Если функтор $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — (оп)расслоение, то у функтора обратного образа $F^* : \mathbf{Cat}/\mathcal{C} \to \mathbf{Cat}/\mathcal{D}$ существует правый сопряжённый F_*.

Лемма 1.2.6. *Пусть $F : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$ — расслоение и $p : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ — предрасслоение. Тогда прямой образ p, $F_*p : F_*\mathcal{E} \to \mathcal{C}$, также является предрасслоением. Объект $F_*\mathcal{E}$ — пара (c, S) из*

$c \in \mathcal{C}$ и $S \in \mathsf{Sect}(\mathcal{F}(c), \mathcal{E})$. Морфизм $(c, S) \to (c', S')$ может быть представлен как пара из морфизма $f : c \to c'$ категории $\mathcal{C}$ и естественного преобразования $S \circ f^* \to S'$ для выбора функтора перехода $f^* : \mathcal{O}(c) \to \mathcal{O}(c')$. Более того, имеем, что

$$\mathsf{Sect}(\mathcal{C}, F_*\mathcal{E}) \cong \mathsf{Sect}(\mathcal{F}, \mathcal{E}).$$

Доказательство. Очевидно. □

1.3. Пределы и сопряжения

Рассмотрим предрасслоение Гротендика $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ над базой $\mathcal{C}$. В этой секции, мы изучим вопрос, в каком случае категория $\mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ допускает пределы и копределы. Как связанный вопрос, имея декартов квадрат предрасслоений

$$\begin{tikzcd} F^*\mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[d] \\ \mathcal{D} \arrow[r, "F"] & \mathcal{C}, \end{tikzcd}$$

зададимся вопросом, допускает ли функтор $F^* : \mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to \mathsf{Sect}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ сопряжённый.

1.3.1. Базовые результаты

Определение 1.3.1. Функтор $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ называется *послойно (ко)полным* если каждый слой $\mathcal{E}(c)$ (ко)полон.

Расслоение, опрасслоение, предрасслоение или предопрасслоение послойно полно или кополно если оно таково как функтор в вышеописанном смысле.

Предложение 1.3.2. *Пусть $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — послойно кополное предрасслоение. Тогда категория $\mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ кополна, так что копределы вычисляются послойно. Двойственный результат верен для категории сечений полного предопрасслоения.*

Доказательство. Пусть $S_\bullet : I \to \mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ — диаграмма сечений,

$$(i, c) \in I \times \mathcal{C} \ \mapsto \ S_i(c) \in \mathcal{E}(c).$$

Определим тогда $(\varinjlim_I S_\bullet)(c) = \varinjlim_I S_i(c)$, то есть, копредел $S_\bullet(c) : I \to \mathcal{E}(c)$ в слое $\mathcal{E}(c)$. Возьмём морфизм $f : c \to d$, тогда достаточно построить

$$(\varinjlim_I S_\bullet)(c) \to f^*(\varinjlim_I S_\bullet)(d) \qquad (1.3.1)$$

для некоторого выбора декартового морфизма $f^*(\varinjlim_I S_\bullet)(d) \to (\varinjlim_I S_\bullet)(d)$. Если мы выберем декартовы морфизмы для каждого $i \in I$, получая диаграмму

$$f^* S_\bullet(d) : I \to \mathcal{E}(c), \;\; i \mapsto f^* S_i(d),$$

тогда мы имеем канонический морфизм

$$\varinjlim_I f^* S_\bullet(d) \to f^*(\varinjlim_I S_\bullet(d))$$

индуцированный свойством копредела. Комбинируя его вместе с отображением $\varinjlim_I S_\bullet(c) \to \varinjlim_I f^* S_\bullet(d)$, индуцированным структурой сечения $S_\bullet$, мы получаем отображение (*1.3.1*). Можно проверить совместимость полученных отображений с композицией морфизмов в $\mathcal{C}$.

Пусть $X \in \mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ — сечение, и обозначим через $c^* X : I \to \mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ постоянную диаграмму со значением X. Имея отображение $S_\bullet \to c^* X$, мы хотим построить сопряжённое отображение $\varinjlim_I S_\bullet \to X$. Во-первых, мы можем построить послойные отображения

$$\varinjlim_I S_\bullet(c) \to X(c).$$

Имея морфизм $f : c \to d$, можно затем нарисовать диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_I S_\bullet(c) \arrow[r] \arrow[d] & \varinjlim_I f^* S_\bullet(d) \arrow[r] \arrow[d] & f^* \varinjlim_I S_\bullet(d) \arrow[d] \\
X(c) \arrow[r] & f^* X(d) \arrow[r, "="] & f^* X(d)
\end{tikzcd}$$

Левый квадрат коммутативен потому, что $S_\bullet \to c^* X$ — морфизм сечений. Правый квадрат коммутативен в силу универсального свойства копредела. Мы видим, таким образом, что семейство послойных отображений задаёт морфизм сечений $\varinjlim_I S_\bullet \to X$. Проверка в другую сторону делается подобным же образом. □

Предложение 1.3.3. *Пусть $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — кополное послойно предрасслоение, и квадрат*

$$\begin{tikzcd}
F^* \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[d] \\
\mathcal{D} \arrow[r, "F"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

— декартов. Допустим, что $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ —опрасслоение. Тогда $F^* : \mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to \mathsf{Sect}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ допускает левый сопряжённый $F_!$, который можно вычислять как

$$F_! T(c) = \varinjlim_{\mathcal{D}(c)} T|_{\mathcal{D}(c)}.$$

Доказательство. Непосредственно и похоже на доказательство Предложения 1.3.2. Заметим, что факт того, что $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — опрасслоение, означает, что естественный функтор $\mathcal{D}(c) \to F/c$ вложения слоя в комма-категорию допускает левый сопряжённый, а потому кофинален. □

1.3.2. Локально нётеровы категории

В нижеследующем мы будем использовать термины “цепочка” и “последовательность” в одном и том же смысле.

Определение 1.3.4. Пусть $\mathcal{C}$ — категория, и $c \in \mathcal{C}$ — объект. Скажем, что c *k-ограничен справа* для некоторого числа $k \in \mathbb{N}$, если всякая последовательность n морфизмов, начинающихся с c,

$$c \longrightarrow c_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow c_n$$

содержит как минимум $n-k$ изоморфизмов как только $n > k$. Двойственно, c k-ограничен слева, если всякая последовательность из n морфизмов, заканчивающаяся объектом c,

$$c_n \longrightarrow c_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow c_1 \longrightarrow c$$

содержит как минимум $n - k$ изоморфизмов как только $n > k$.

Определение 1.3.5. Категория $\mathcal{C}$ называется *локально нётеровой*, или просто *нётеровой категорией,* если для каждого объекта $c \in \mathcal{C}$ существует номер k, такой что c k-ограничен справа.

Двойственным образом, категория $\mathcal{C}$ называется *локально артиновой*, или попросту *артиновой категорией,* если для каждого объекта $c \in \mathcal{C}$ существует номер k, такой что c k-ограничен слева.

Замечание 1.3.6. Очевидно, если $\mathcal{C}$ — нётерова категория, то $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ — артинова категория. Мы остановимся на нётеровых категориях, и все результаты, полученные в данной секции, можно дуализовать в артинов случай.

Для нётеровой категории $\mathcal{C}$ и объекта $c \in \mathcal{C}$, обозначим через $|c| \geq 0$ минимальное число k такое что c k-ограничен справа.

Лемма 1.3.7. *Для $c, c' \in \mathcal{C}$, если $|c| < |c'|$, то $\mathcal{C}(c, c') = \emptyset$. Если же $|c| = |c'|$ и существует отображение $c \to c'$, то тогда оно изоморфизм. В частности, всякий эндоморфизм c является изоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $c' \to c'_1 \to \dots \to c'_{|c'|}$ — цепочка, начинающаяся с объекта c, длины $|c'|$, такая что отображения в этой цепочке — не изоморфизмы. Если есть отображение $c \to c'$ в $\mathcal{C}$, композиция с ним даёт цепочку длины $|c'| + 1$, которая начинается с c.

Таким образом, если $|c| < |c'|$, то мы имеем последовательность отображений длины $|c'| + 1$ из c, в которой как минимум $|c'|$ отображений необратимо, что невозможно. Если $|c| = |c'|$, то иметь отображение $c \to c'$ можно только в том случае, если это изоморфизм. $\square$

Таким образом, можно говорить о функции степени $c \mapsto |c|$, которую можно рассматривать как контравариантный функтор $| - | : \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \to \mathbb{N}$ в категорию $\mathbb{N}$ натуральных чисел и морфизмов в положительном направлении.

Обозначение 1.3.8. Имея нётерову категорию $\mathcal{C}$, обозначим через $\mathcal{C}_n$ подкатегорию объектов c, таких что $|c| \leq n$. Существует индуцированная фильтрация $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_1 \subset ... \subset \mathcal{C}_n \subset ... \subset \mathcal{C}$. Обозначим также через $\mathcal{G}_n$ подкатегорию $\mathcal{C}$, состоящую из c с $|c| = n$. Лемма 1.3.7 говорит нам о том, что $\mathcal{G}_n$ — группоид.

Пусть $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — предрасслоение. Для $x \in \mathcal{C}$ и подкатегории $\mathcal{D}$ в комма-категории $x\backslash\mathcal{C}$, структура предрасслоения означает существование функтора $Res_x : \mathcal{E}|_{\mathcal{D}} \to \mathcal{E}(x)$. Объект $Y \in \mathcal{E}|_{\mathcal{D}}$, живущий над $f : x \to y$ категории $\mathcal{D}$, отправляется в f^*Y, где $f^*Y \to Y$ — декартово отображение. Выбор Res_x единственен с точностью до единственного изоморфизма.

Пусть S — сечение над $\mathcal{C}_{n-1}$. Рассмотрим предел $\varprojlim_{c\backslash\mathcal{C}_{n-1}} Res_c S$, где $c \in \mathcal{G}_n$. Поскольку отображения $c \to c'$ — изоморфизмы для $|c| = |c'|$, мы имеем естественным образом, что $\mathcal{E}(c) \cong \mathcal{E}(c')$ (см Соглашение 1.1.13) и мы получаем канонически определённое отображение $\varprojlim_{c\backslash\mathcal{C}_{n-1}} Res_c S \to \varprojlim_{c'\backslash\mathcal{C}_{n-1}} Res_{c'} S$.

Определение 1.3.9. Пусть $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — предрасслоение над нётеровой категорией $\mathcal{C}$, и $S \in \mathsf{Sect}(\mathcal{C}_{n-1}, \mathcal{E})$. Тогда *$n$-ая мэтчинг-система S*, обозначаемая $\mathscr{M}_n S$, — сечение

$$\mathscr{M}_n S : \mathcal{G}_n \to \mathcal{E}|_{\mathcal{G}_n}, \quad c \mapsto \varprojlim_{c\backslash\mathcal{C}_{n-1}} Res_c S \,\in\, \mathcal{E}(c)$$

предрасслоения $\mathcal{E} \to \mathcal{G}_n$, в предположении, что все необходимые пределы существуют.

Сопоставление $S \mapsto \mathscr{M}_n S$ задаёт функтор $\mathscr{M}_n : \mathsf{Sect}(\mathcal{C}_{n-1}, \mathcal{E}) \to \mathsf{Sect}(\mathcal{G}_n, \mathcal{E})$.

Предложение 1.3.10. *Имеется комма-квадрат*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Sect}(\mathcal{C}_n, \mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow"] & \mathsf{Sect}(\mathcal{G}_n, \mathcal{E}) \arrow[d, "="] \\
\mathsf{Sect}(\mathcal{C}_{n-1}, \mathcal{E}) \arrow[r, "\mathscr{M}_n"] & \mathsf{Sect}(\mathcal{G}_n, \mathcal{E})
\end{tikzcd}$$

который представляет $\mathsf{Sect}(\mathcal{C}_n, \mathcal{E})$ *как комма-категорию* $\mathsf{Sect}(\mathcal{G}_n, \mathcal{E})/\mathscr{M}_n$. *Другими словами, сопоставление*

$$Y \in \mathsf{Sect}(\mathcal{C}_n, \mathcal{E}) \quad \mapsto \quad (Y|_{\mathcal{C}_{n-1}}, Y|_{\mathcal{G}_n}, Y|_{\mathcal{G}_n} \to \mathscr{M}_n Y|_{\mathcal{C}_{n-1}}) \in \mathsf{Sect}(\mathcal{G}_n, \mathcal{E})/\mathscr{M}_n$$

— *эквивалентность категорий.*

Доказательство. Предположим, что у нас есть сечение S на $\mathcal{C}_{n-1}$ и отображение $X \to \mathscr{M}_n S$ сечений $\mathcal{G}_n \to \mathcal{E}$. Покажем, как построить новое сечение $\tilde{S} : \mathcal{C}_n \to \mathcal{E}$. Для объекта $c \in \mathcal{C}_n$ с $|c| = n$, есть два типа отображений: $c \to c'$ с $|c'| = n$ и $c \to c''$ с $|c''| < n$. Отображения первого типа — изоморфизмы в $\mathcal{G}_n$ и включены в X как часть данных. Отображение $X \to \mathscr{M}_n S$ тогда даёт морфизмы $X(c) \to S(c'')$, которые совместимы с $\mathcal{G}_n$. $\square$

Пусть I — малая категория, и обозначим через $X_\bullet :\in \mathsf{Sect}(\mathcal{R}, \mathcal{E})^I \cong \mathsf{Sect}(\mathcal{R}, \mathcal{E}^I)$ диаграмму сечений,

$$(x, i) \quad \mapsto \quad X_i(x).$$

Если слой $\mathcal{E}(x)$ допускает пределы, мы можем вычислить предел функтора $i \mapsto X_i(x)$, который мы обозначим через $\varprojlim_I (X_\bullet(x))$. Мы бы хотели знать, существует ли предел функтора $X_\bullet$, обозначаемый через $\varprojlim_I X_\bullet$, глобально в $\mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$.

Предложение 1.3.11. *Пусть $\mathcal{C}$ — нётерова категория, и$\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — предрасслоение Гротендика с полными слоями. Тогда категория сечений $\mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ допускает пределы и, более того, для каждой диаграммы $X_\bullet \in \mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})^I$ и объекта x с $|x| = n$, имеется следующий декартов квадрат:*

$$\begin{tikzcd}
(\varprojlim_I X_\bullet)(y) \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim_I (X_\bullet(y)) \arrow[d] \\
\mathscr{M}_n(\varprojlim_I X_\bullet)(y) \arrow[r] & \varprojlim_I (\mathscr{M}_n X_\bullet)(y).
\end{tikzcd} \tag{1.3.2}$$

где $\mathscr{M}_n X_\bullet : \mathcal{G}_n \times I \to \mathcal{E}$ — функтор $(y, i) \mapsto (\mathscr{M}_n X_i)(y)$.

Доказательство. Для каждого x с $|x| = 0$, определим $(\varprojlim_I X_\bullet)(x) = \varprojlim_I (X_\bullet(x))$, то есть, возьмём предел в соответствующем слое $\mathcal{E}(x)$. Поскольку у нас нет отображений из объектов степени ноль, и $\mathcal{E}(x) \cong \mathcal{E}(x')$ для $x \cong x'$, мы получаем корректно определённое сечение $\mathcal{C}_0 \to \mathcal{E}$.

Задав $(\varprojlim_I X_\bullet)$ на $\mathcal{C}_{n-1}$, диаграмма (*1.3.2*) говорит нам в точности, как задать предел $(\varprojlim_I X_\bullet)(y)$ для $y \in \mathcal{G}_n$. Правая вертикальная стрелка существует как предел естественного отображения $X_\bullet(y) \to (\mathscr{M}_n X_\bullet)(y)$. Нижняя горизонтальная стрелка существует потому, что, по индукции, существуют естественные отображения $(\varprojlim_I X_\bullet)(x) \to X_i(x)$ для $x \in \mathcal{C}_{n-1}$. Эти отображения индуцируют $\mathscr{M}_n(\varprojlim_I X_\bullet)(y) \to (\mathscr{M}_n X_i)(y)$ и затем, отображения в $\varprojlim(\mathscr{M}_n X_\bullet)(y)$.

Чтобы проверить, что построенное сечение $Y = \varprojlim_I X_\bullet$ — предел в $\mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, также рассудим по индукции (которая тривиальна в степени ноль) и рассмотрим отображение

$c^*Z \to X_\bullet$, где c^*Z — постоянная I-диаграмма со значением в $Z : \mathcal{C}_n \to \mathcal{E}$. Для каждого y с $|y| = n$, мы имеем тогда следующую диаграмму,

$$\begin{tikzcd} Z(y) \arrow[rr] \arrow[d] & & \varprojlim_I (X_\bullet(y)) \arrow[d] \\ \mathscr{M}_n Z(y) \arrow[r] & \mathscr{M}_n Y(y) \arrow[r] & \varprojlim_I (\mathscr{M}_n X_\bullet)(y), \end{tikzcd}$$

которая коммутирует по той причине, что это банальная факторизация коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} Z(y) \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim_I (X_\bullet(y)) \arrow[d] \\ \mathscr{M}_n Z(y) \arrow[r] & \varprojlim_I (\mathscr{M}_n X_\bullet)(y), \end{tikzcd}$$

где факторизация $\mathscr{M}_n Z(y) \to \mathscr{M}_n Y(y) \to \varprojlim_I (\mathscr{M}_n X_\bullet)(y)$ существует по свойству предела Y на $\mathcal{C}_{n-1}$. Имеем, таким образом, коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} Z(y) \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim_I (X_\bullet(y)) \arrow[d] \\ \mathscr{M}_n Y(y) \arrow[r] & \varprojlim_I (\mathscr{M}_n X_\bullet)(y), \end{tikzcd}$$

который в силу декартовости диаграммы (*1.3.2*) даёт нам отображение $Z(y) \to Y(y)$, как и требовалось. $\square$

Предложение 1.3.10 можно релятивизировать. Вспомним следующее понятие из [17, Definition 1.33].

Определение 1.3.12. Функтор $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ называется

- Открытым вложением, если он строго полон, инъективен на объектах, и для каждого морфизма $f : c \to F(d)$ категории $\mathcal{C}$ существует единственное отображение $\tilde{f} : d' \to d$ в $\mathcal{D}$, накрывающее f.

- Замкнутым вложением, если он строго полон, инъективен на объектах, и для каждого $f : F(d) \to c$ категории $\mathcal{C}$ существует единственное отображение $\tilde{f} : d \to d'$ в $\mathcal{D}$, накрывающее f.

Напомним, что для $c \in \mathcal{C}$, корешетом называется подкатегория $S \subset c\backslash\mathcal{C}$, закрытая по отношению к посткомпозиции: из $f : c \to c' \in S$ следует, что gf лежит в S для любого $g : c' \to c''$ в $\mathcal{C}$.

Лемма 1.3.13. *Для функтора $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, инъективного на объектах, эквивалентно следующее*

- *F — замкнутое вложение,*

- *F — строгое изорасслоение (Определение 1.1.12), и для каждого $d \in \mathcal{D}$, существенный образ $d\backslash\mathcal{D}$ в $F(d)\backslash\mathcal{C}$ — корешето.*

- *F — строго полное опрасслоение Гротендика с дискретными слоями.*

Двойственное верно для открытого вложения.

Доказательство. Очевидно. □

В частности, пусть $c \in \mathcal{C}$ — объект, не содержащийся в образе F. Тогда $\mathcal{C}(F(d), c) = \emptyset$ для каждого $d \in \mathcal{D}$. Таким образом, как максимум, есть отображения из c в $\mathcal{D}$.

Пусть $\mathcal{C}$ — нётерова категория и $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — замкнутое вложение. Далее мы отождествим $\mathcal{D}$, которая также нётерова, с её образом в $\mathcal{C}$.

Обозначение 1.3.14. Определим $\mathcal{D}_n$ как подкатегорию, состоящую из $\mathcal{D}$ и всех объектов $c \in \mathcal{C}$, не содержащихся в $\mathcal{D}$ со степенью $|c| \leq n$. Обозначим через $F_n : \mathcal{D} \to \mathcal{D}_n$ функтор вложения. Существует также вложение $\mathcal{D}_n \to \mathcal{C}$, которое мы оставим без названия на данный момент. Наконец, обозначим через $\mathcal{G}_n$ подкатегорию $\mathcal{D}_n$, состоящую из тех объектов c, которые не принадлежат к $\mathcal{D}_{n-1}$.

Для объекта $c \in \mathcal{C}$ (который обычно предполагается лежащим вне $\mathcal{G}_n$) можно определить категорию $c\backslash\mathcal{D}_{n-1}$ как обычную комма-категорию для вложения $\mathcal{D}_{n-1} \to \mathcal{C}$: её объекты — морфизмы $c \to d$ в $\mathcal{C}$, где d лежит в $\mathcal{D}_{n-1}$.

Как и обычно с комма-категориями и предрасслоениями, мы получаем функтор ограничения $Res_c : \mathcal{E}|_{c\backslash\mathcal{D}_{n-1}} \to \mathcal{E}(c)$.

Предложение 1.3.15. *Пусть $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — замкнутое вложение нётеровых категорий и $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — предрасслоение с полными слоями. Тогда для каждого сечения $X \in \mathsf{Sect}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ существует правое расширение Кана $Ran_F X \in \mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, которое ограничивается до правых расширений Кана $Ran_{F_n} X \in \mathsf{Sect}(\mathcal{D}_n, \mathcal{E})$ сечения X вдоль $F_n : \mathcal{D} \to \mathcal{D}_n$. Более того, $F^* Ran_F X \cong X$ и для каждого $x \in \mathcal{G}_n$ имеем*

$$(Ran_{F_n} X)(x) = \varprojlim_{x\backslash\mathcal{D}_{n-1}} Res_x \circ Ran_{F_{n-1}} X \tag{1.3.3}$$

где мы неявно ограничиваем $Ran_{F_{n-1}} X$ на $x\backslash\mathcal{D}_{n-1}$ вдоль очевидной проекции.

Доказательство. Будем строить $Ran_{F_n} X$ для каждого значения n по индукции. Для $n = 0$, единственные объекты $x \in \mathcal{D}_0$, которые не лежат в $\mathcal{D}$, — те, которые не допускают необратимых отображений из себя, поскольку $|x| = 0$. Тогда положим $(Ran_{F_0} X)(x)$ равным конечному объекту в $\mathcal{E}(x)$. Формула (*1.3.3*) тогда объясняет, как вести индукцию: для $x, y \in \mathcal{D}_n$ которые не в $\mathcal{D}_{n-1}$, отображения $x \to y$, если они существуют, обратимы, и конструкция отображения $(Ran_{F_n}X)(x) \to (Ran_{F_n}X)(y)$ таким образом так же тривиальна, как и в Предложении 1.3.10. Наконец, каждый объект (морфизм, или композиция морфизмов) $\mathcal{C}$ принадлежит к какому-то $\mathcal{G}_n$, что позволяет нам построить $Ran_F X$ на всей категории $\mathcal{C}$.

По построению, $F^* Ran_F X$ очевидно изоморфно X. Универсальное свойство правого расширения Кана можно проверить, используя (*1.3.3*). Пусть $T \in \mathsf{Sect}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ — сечение, и допустим, что есть отображение $\alpha : F^*T \to X$. Мы хотели бы получить морфизм $\beta : T \to Ran_F X$. Предположим по индукции (которая, опять же, тривиальна для объектов степени ноль) что мы получили это отображение для всех $c \in \mathcal{D}_{n-1}$. Пусть x — объект $\mathcal{G}_n$. Тогда имеем диаграмму в $\mathcal{E}(x)$ вида

$$T(x) \to \varprojlim_{x \backslash \mathcal{D}_{n-1}} Res_x \circ T \to \varprojlim_{x \backslash \mathcal{D}_{n-1}} Res_x \circ Ran_{F_{n-1}} X = Ran_{F_n} X(x)$$

где, когда необходимо, оба T и $Ran_{F_{n-1}}X$ ограничены на $x \backslash \mathcal{D}_{n-1}$. Первое отображение существует из-за структуры сечения T, второе отображение даётся индуктивным предположением, и вместе они дают $T(x) \to Ran_{F_n}X(x) = Ran_F X(x)$. Другая половина универсального свойства тривиально проверяется посредством применения $F*$. $\square$

Сопоставление $X \mapsto Ran_F X$ определяет, таким образом, строго полный функтор $F_* : \mathsf{Sect}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \to \mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ сопряжённый справа к F^*.

Рассмотрим замкнутое вложение $F : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ и объект $c \in \mathcal{C}$. Можно сформировать следующую декартову диаграмму в **Cat**

$$\begin{tikzcd} c\backslash\mathcal{C}' \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "F_c"'] & \mathcal{C}' \arrow[d, "F"] \\ c\backslash\mathcal{C} \arrow[r, "\pi"'] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

где $c \backslash \mathcal{C}'$ совпадает с обычной комма-категорией $c \backslash F$. Более того, можно проверить, что каждая категория в этой диаграмме — нётерова, все функторы сохраняют степень, и что вертикальные, F и F_c, являются замкнутыми вложениями (функторы π и π', будучи дискретными расслоениями Гротендика, всего лишь строгие).

Имея послойно полное предрасслоение над $\mathcal{C}$, имеем следующую индуцированную 2 - диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Sect}(c\backslash\mathcal{C}', \mathcal{E}) \arrow[d, "F_{c,*}"'] & \mathsf{Sect}(\mathcal{C}', \mathcal{E}) \arrow[l, "\pi'^*"'] \arrow[d, "F_*"] \arrow[dl, phantom, "\Leftarrow"] \\ \mathsf{Sect}(c\backslash\mathcal{C}, \mathcal{E}) & \mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}). \arrow[l, "\pi^*"] \end{tikzcd}$$

Предложение 1.3.16. *В диаграмме выше, отображение $\pi^* F_* \to F_{c,*}\pi'^*$ — изоморфизм.*

Мы будем доказывать это предложение по индукции, формируя, для каждого $c \in \mathcal{C}$, категории для индукции, обозначаемые $\mathcal{C}'_n$ и $(c\backslash\mathcal{C}')_n$ в Обозначении 1.3.14, где $\pi_n : (c\backslash\mathcal{C}')_n \to \mathcal{C}'_n$ — функтор проекции. Можно видеть что, более того, $(c\backslash\mathcal{C}')_n \cong c\backslash\mathcal{C}'_n$. Тогда Предложение 1.3.16 следует из

Предложение 1.3.17. *Пусть $F : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ замкнутое вложение нётеровых категорий и $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — предрасслоение с полными слоями. Тогда для каждого n, естественный 2-морфизм в квадрате*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Sect}(c\backslash\mathcal{C}', \mathcal{E}) \arrow[d, "Ran_{F_{c,n}}"'] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow"] & \mathsf{Sect}(\mathcal{C}', \mathcal{E}) \arrow[l, "\pi'^*"'] \arrow[d, "Ran_{F_n}"] \\
\mathsf{Sect}(c\backslash\mathcal{C}'_n, \mathcal{E}) & \mathsf{Sect}(\mathcal{C}'_n, \mathcal{E}). \arrow[l, "\pi_n^*"]
\end{tikzcd}$$

— изоморфизм.

Доказательство. Индукция по n. Для $n = 0$, продолжение на объекты степени ноль вне $\mathcal{C}'$ или $c\backslash\mathcal{C}'$ даётся конечными объектами, а потому изоморфизм тривиален. Возьмём теперь объект категории $c\backslash\mathcal{C}'_n$, представленный отображением $c \to d$ с d вне $\mathcal{C}'$ и степенью $|c \to d| = |d|$ равной n. Можно тогда написать, что

$$\pi_n^* Ran_{F_n} X(c \to d) = Ran_{F_n} X(d) = \varprojlim_{d\backslash\mathcal{C}'_{n-1}} Res_d \pi_{n-1}^* Ran_{F_{n-1}} X$$

где π_{n-1} — функтор $d\backslash\mathcal{C}'_{n-1} \to \mathcal{C}'_{n-1}$, и также что

$$F_{c,*}\pi'^* X(c \to d) = \varprojlim_{(c\to d)\backslash(c\backslash C'_{n-1})} Res_{c\to d} Ran_{F_{c,n-1}} \pi'^* X \cong \varprojlim_{d\backslash C'_{n-1}} Res_d Ran_{F_{c,n-1}} \pi'^* X$$

где в среднем члене есть ещё одно неявное ограничение. По индукции,

$$\pi_{n-1}^* Ran_{F_{n-1}} X \to Ran_{F_{c,n-1}} \pi'^* X$$

— изоморфизм, который индуцирует изоморфизм между двумя выражениями пределов выше. □

1.4. Факторизационные системы и полурасслоения

Определение 1.4.1. *Факторизационной системой* на категории $\mathcal{C}$ называется пара подкатегорий $\mathscr{L}, \mathscr{R} \subset \mathcal{C}$, содержащая все изоморфизмы $\mathcal{C}$, такая что всякий морфизм $f : c \to c'$ в $\mathcal{C}$ может быть разложен (“факторизован”) как

$$f : c \xrightarrow{l} c'' \xrightarrow{r} c' \qquad (1.4.1)$$

где $l \in \mathrm{Mor}\,\mathscr{L}$ и $r \in \mathrm{Mor}\,\mathscr{R}$. Факторизация, к тому же, должна быть единственной с точностью до единственного изоморфизма.

В данной работе, *факторизационной категорией* мы будем называть тройку $(\mathcal{C}, \mathscr{L}, \mathscr{R})$, состоящую из категории вместе с факторизационной системой $(\mathscr{L}, \mathscr{R})$.

Мы будем зачастую писать $\mathcal{C}$ вместо $(\mathcal{C}, \mathscr{L}, \mathscr{R})$, когда факторизационная система ясна из контекста. В силу условий на изоморфизмы, подкатегории $\mathscr{L}$ и $\mathscr{R}$ содержат все объекты $\mathcal{C}$. Мы часто будем называть $\mathscr{L}$ левым классом морфизмов, а $\mathscr{R}$ — правым классом.

Определение 1.4.2. *Факторизационным функтором* $F : (\mathcal{C}', \mathscr{L}', \mathscr{R}') \to (\mathcal{C}, \mathscr{L}, \mathscr{R})$ называется функтор $\mathcal{C}' \to \mathcal{C}$, такой что $F(\mathscr{L}') \subset \mathscr{L}$ и $F(\mathscr{R}') \subset \mathscr{R}$. Мы иногда будем обозначать индуцированные функторы через $F_L : \mathscr{L}' \to \mathscr{L}$ и $F_R : \mathscr{R}' \to \mathscr{R}$.

Определение 1.4.3. *Категория Риди* $\mathcal{R}$ — факторизационная категория $(\mathcal{R}, \mathcal{R}_-, \mathcal{R}_+)$ вместе с функцией степени $deg : \mathcal{R} \to \mathbb{N}$, принимающей значения в натуральных числах, так что

- необратимые морфизмы $\mathcal{R}_-$ понижают значение deg,
- необратимые морфизмы $\mathcal{R}_+$ повышают значение deg,
- для каждого $x \in \mathcal{R}$, множество автоморфизмов $Aut(x)$ состоит id_x.

Наше определение категории Риди несколько отличается от традиционно даваемых в литературе [20, 24, 36]. В дальнейшем мы не будем упоминать функцию степени явным образом.

Определение 1.4.4. Пусть $F : (\mathcal{C}', \mathscr{L}', \mathscr{R}') \to (\mathcal{C}, \mathscr{L}, \mathscr{R})$ — факторизационный функтор. Назовём F *замкнутым справа*, если для любого $\mathcal{C}$-отображения вида $c \to F(c')$, его $(\mathscr{L}, \mathscr{R})$ - факторизация принимает вид

$$c \xrightarrow{l} F(c'') \xrightarrow{F(r)} F(c')$$

где $r : c'' \to c'$ принадлежит $\mathscr{R}'$. Двойственно, F *замкнут слева*, если для любого $\mathcal{C}$ - отображения вида $F(c') \to c$, его $(\mathscr{L}, \mathscr{R})$-факторизация имеет вид

$$F(c') \xrightarrow{F(l)} F(c'') \xrightarrow{r} c$$

где $l : c' \to c''$ принадлежит $\mathscr{L}'$.

Очевидно, если $F : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ замкнут справа, то $F^{\mathsf{op}} : \mathcal{C}'^{\mathsf{op}} \to \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ замкнут слева.

1.4.1. Индексирование факторизационными категориями

Пусть $\mathcal{C}$ — малая категория.

Определение 1.4.5. $\mathcal{C}$-*индексированной категорией* называется (малое) дискретное опрасслоение Гротендика $\mathcal{X} \to \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$. Морфизмом $\mathcal{C}$-индексированных категорий $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ называется опдекартов морфизм между опрасслоениями над $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.

Обозначим через $\mathbf{Cat}(\mathcal{C})$ категорию $\mathcal{C}$-индексированных категорий.

Пусть теперь $\mathcal{C}$ — факторизационная категория, с факторизационной структурой $(\mathscr{G}, \mathscr{D})$.

Лемма 1.4.6. *Для всякой $\mathcal{C}$-индексированной категории $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$, существует единственная факторизационная система $(\mathscr{L}_{\mathcal{X}}, \mathscr{R}_{\mathcal{X}})$ на $\mathcal{X}$, такая что π становится факторизационным функтором $(\mathcal{X}, \mathscr{L}_{\mathcal{X}}, \mathscr{R}_{\mathcal{X}}) \to (\mathcal{C}^{\mathsf{op}}, \mathscr{D}^{\mathsf{op}}, \mathscr{G}^{\mathsf{op}})$. Более того, всякий морфизм $\mathcal{C}$ - индексированных категорий также становится факторизационным функтором.*

Доказательство. $\mathscr{L}_{\mathcal{X}} := \pi^{-1}(\mathscr{D}^{\mathsf{op}})$ и $\mathscr{R}_{\mathcal{X}} := \pi^{-1}(\mathscr{G}^{\mathsf{op}})$. □

Определение 1.4.7. Назовём пару $(\mathscr{L}_{\mathcal{X}}, \mathscr{R}_{\mathcal{X}})$ факторизационной системой, канонически индуцированной с $(\mathcal{C}, \mathscr{G}, \mathscr{D})$.

Определение 1.4.8. Пусть $F : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ — функтор. F-*переиндексацией* $\mathcal{C}$-индексированной категории $\pi : \mathcal{X}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ называется обратный образ π вдоль F^{op}. Другими словами, это левая вертикальная стрелка в декартовом квадрате

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}_{\mathcal{C}'} \arrow[r, "F_{\mathcal{X}}"] \arrow[d, "\pi'"'] & \mathcal{X}_{\mathcal{C}} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{C}'^{\mathsf{op}} \arrow[r, "F^{\mathsf{op}}"] & \mathcal{C}^{\mathsf{op}}. \end{tikzcd}$$

Лемма 1.4.9. *Пусть $F : (\mathcal{C}', \mathscr{G}', \mathscr{D}') \to (\mathcal{C}, \mathscr{G}, \mathscr{D})$ — факторизационный функтор, и $\mathcal{X} \to \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ — $\mathcal{C}$-индексированная категория. Тогда функтор $F_{\mathcal{X}} : \mathcal{X}_{\mathcal{C}'} \to \mathcal{X}_{\mathcal{C}}$, индуцированный операцией переиндексации, является факторизационным функтором $(\mathcal{X}_{\mathcal{C}'}, \mathscr{L}_{\mathcal{X}_{\mathcal{C}'}}, \mathscr{R}_{\mathcal{X}_{\mathcal{C}'}}) \to (\mathcal{X}_{\mathcal{C}}, \mathscr{L}_{\mathcal{X}_{\mathcal{C}}}, \mathscr{R}_{\mathcal{X}_{\mathcal{C}}})$ между двумя канонически индуцированными факторизационными системами.*

Доказательство. Очевидно. □

Предложение 1.4.10. *(Наследование для индексированных категорий) Пусть*

$$F : (\mathcal{C}', \mathscr{G}', \mathscr{D}') \to (\mathcal{C}, \mathscr{G}, \mathscr{D})$$

— факторизационный функтор. Тогда, для каждой $\mathcal{C}$-индексированной категории $\mathcal{X}$, мы имеем следующее:

1. *Если $\mathscr{D}^{\mathsf{op}}$ — нётерова категория (Определение 1.3.5), тогда такова же и индуцированная категория $\mathscr{L}_{\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}}$. Также имеется двойственный результат для правых классов.*

2. *Если F таков, что индуцированный функтор — $\mathscr{D}'^{\mathsf{op}} \to \mathscr{D}^{\mathsf{op}}$ замкнутое вложение нётеровых категорий (Определение 1.3.12), тогда индуцированный функтор $\mathscr{L}_{\mathfrak{X}_{\mathcal{C}'}} \to \mathscr{L}_{\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}}$ имеет то же свойство.*

3. *Если $F^{\mathsf{op}} : \mathcal{C}'^{\mathsf{op}} \to \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ замкнут справа (Определение 1.4.4), то таков же и $F_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X}_{\mathcal{C}'} \to \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}$. Двойственное утверждение верно для левой замкнутости.*

4. *Если $(\mathcal{C}, \mathscr{G}, \mathscr{D})$ — категория Риди, то такова же и $(\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}, \mathscr{L}_{\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}}, \mathscr{R}_{\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}})$.*

Доказательство. Очевидная проверка. □

1.4.2. Полурасслоения

Определение 1.4.11. Пусть $(\mathcal{C}, \mathscr{L}, \mathscr{R})$ — факторизационная категория. Функтор $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ называется *полурасслоением* над $\mathcal{C}$ если он — изорасслоение, и выполнены следующие условия.

1. Для любого $l : c \to c'$ в $\mathscr{L}$ и Y с $p(Y) = c'$ существует декартов (Определение 1.1.1) подъём $\lambda : Y' \to Y$ морфизма l.

2. Для любого $r : x \to y$ в $\mathscr{R}$ и X с $p(X) = x$ существует опдекартов подъём $\rho : X \to X'$ в r.

3. Для любого $\alpha : X \to Y$ категории $\mathcal{E}$ такого что $p(\alpha)$ разлагается как

$$p(X) \xrightarrow{r} c \xrightarrow{l} p(Y)$$

с $r \in \mathscr{R}$ и $l \in \mathscr{L}$, мы требуем, чтобы α факторизовался как

$$\alpha : X \xrightarrow{\rho} X' \xrightarrow{\varphi} Y' \xrightarrow{\lambda} Y \qquad (1.4.2)$$

где $\rho : X \to X'$ — опдекартов морфизм над r, $\lambda : Y' \to Y$ — декартов морфизм над l, и $p(\varphi) = id_c$.

Лемма 1.4.12. *Третье условие Определения 1.4.11 эквивалентно следующему: для любого $\alpha : X \to Y$ из $\mathcal{E}$, такого что $p(\alpha)$ раскладывается как*

$$p(X) \xrightarrow{r} c \xrightarrow{l} p(Y)$$

с $r \in \mathscr{R}$ и $l \in \mathscr{L}$, мы требуем чтобы

$$\alpha : X \xrightarrow{\rho} X' \xrightarrow{\varphi} Y' \xrightarrow{\lambda} Y$$

где $\rho : X \to X'$ — морфизм над l, $\lambda : Y' \to Y$ — морфизм над r, и $p(\varphi) = id_c$.

Доказательство. Следует из универсальности (оп)декартовых стрелок. $\square$

Имея полурасслоение $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$, если $f : c \to c'$ — отображение в $\mathcal{L}$, тогда есть функтор $f^* : \mathcal{E}(c') \to \mathcal{E}(c)$, естественно индуцированный декартовыми подъёмами. Если $g : x \to y$ — отображение в $\mathcal{R}$, мы таким же образом имеем $g_! : \mathcal{E}(x) \to \mathcal{E}(y)$, индуцированный опдекартовыми подъёмами.

Предложение 1.4.13. *Пусть $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — полурасслоение над $(\mathcal{C}, \mathscr{L}, \mathscr{R})$. Тогда*

1. *Факторизация (1.4.2) естественна и единственна с точностью до единственного изоморфизма,*

2. *Пусть*

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & y \arrow[d, "h"] \\ z \arrow[r, "k"'] & t \end{tikzcd}$$

— коммутативная диаграмма с $f, k \in \mathscr{L}$ и $g, h \in \mathscr{R}$. Тогда мы имеем 2-квадрат

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(x) \arrow[d, "g_!"'] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow"] & \mathcal{E}(y) \arrow[l, "f^*"'] \arrow[d, "h_!"] \\ \mathcal{E}(z) & \mathcal{E}(t) \arrow[l, "k^*"] \end{tikzcd}$$

с канонически индуцированным естественным преобразованием $g_! f^* \to k^* h_!$.

Доказательство. Первое утверждение — следствие универсального свойства декартовых морфизмов.

Чтобы доказать второе, возьмём $Y \in \mathcal{E}(y)$. Тогда имеем диаграмму в $\mathcal{E}$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "ocart"'] & f^* Y \arrow[l, "cart"'] \arrow[r, "ocart"] & g_! f^* Y \\ & h_! Y & k^* h_! Y \arrow[l, "cart"] \end{tikzcd}$$

где морфизмы с $cart$ — декартовы над $\mathscr{L}$, а $ocart$ — опдекартовы над $\mathscr{R}$. Поскольку $hf = kg$, композиция $f^*Y \to Y \to h_!Y$ накрывает $x \xrightarrow{g} z \xrightarrow{k} t$, а потому, по пункту (3) Определения 1.4.11, может быть разложена как

$$f^*Y \to g_!f^*Y \to k^*h_!Y \to h_!Y$$

и мы получаем морфизм $g_!f^*Y \to k^*h_!Y$, как и требовалось. $\square$

Поскольку $\mathcal{C}$ — факторизационная категория, всякий морфизм $x \xrightarrow{g} z \xrightarrow{k} t$ с g в $\mathscr{R}$ и k в $\mathscr{L}$ можно дополнить до диаграммы

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & y \arrow[d, "h"] \\
z \arrow[r, "k"'] & t
\end{tikzcd}$$

как в Предложении 1.4.13. Потому, свойство замены базы для функторов перехода можно выполнить, если предположить что-то из нижеперечисленного.

Лемма 1.4.14. *Пусть* $(\mathcal{C}, \mathscr{L}, \mathscr{R})$ *— факторизационная категория, и* $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ *—*

- *либо расслоение над* $\mathcal{C}$*, которое также — предопрасслоение над* $\mathscr{R}$*,*
- *либо опрасслоение над* $\mathcal{C}$*, которое также предрасслоение над* $\mathscr{L}$*,*

тогда $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ *— полурасслоение.*

Доказательство. В первом случае, в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "ocart"'] & f^*Y \arrow[l, "cart"'] \arrow[r, "ocart"] & g_!f^*Y \\
& h_!Y & k^*h_!Y \arrow[l, "cart"]
\end{tikzcd}$$

как и ранее, мы получаем, что композиция $f^*Y \to Y \to h_!Y$ пропускается через декартово отображение $k^*h_!Y \to h_!Y$ (что следует из более сильного универсального свойства декартовых морфизмов в этом случае [42]), а потому мы получаем отображение $f^*Y \to k^*h_!Y$. Это отображение можно, в свою очередь, пропустить через опдекартов морфизм $f^*Y \to g_!f^*Y$, и мы получаем Y-компоненту $g_!f^*Y \to k^*h_!Y$ естественного преобразования замены базы. Его можно использовать для конструкции факторизации (3) Определения 1.4.11. Второй случай доказывается двойственным образом. $\square$

Можно пойти ещё дальше в ослаблении условий на $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$.

Лемма 1.4.15. *Пусть дано* $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ *— предрасслоение над факторизационной категорией* $(\mathcal{C}, \mathscr{L}, \mathscr{R})$, *— такое что ограничение* $\mathcal{E}|_{\mathscr{R}} \to \mathscr{R}$ *— также ещё и предопрасслоение, и такое что композиция декартовых подъёмов, накрывающих* $x \xrightarrow{r} z \xrightarrow{l} y$ *(с* r *в* $\mathscr{R}$ *и* l *в* $\mathscr{L}$*) декартова. Тогда* $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ *— полурасслоение над* $(\mathcal{C}, \mathscr{L}, \mathscr{R})$.

Доказательство. В доказательстве леммы 1.4.14, сильное универсальное свойство было нужно как раз для морфизмов, накрывающих $x \xrightarrow{r} z \xrightarrow{l} y$. $\square$

1.4.3. Пределы и сопряжённые функторы для сечений

Предложение 1.4.16. *Пусть* $(\mathcal{C}, \mathscr{L}, \mathscr{R})$ *— факторизационная категория и* $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ *— полурасслоение со слоями, которые полны и допускают произвольные копроизведения. Допустим, что категория* $\mathsf{Sect}(\mathscr{L}, \mathcal{E}|_{\mathscr{L}})$ *имеет пределы. Тогда то же самое верно про* $\mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$. *Более того, функтор ограничения* $\mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to \mathsf{Sect}(\mathscr{L}, \mathcal{E})$ *сохраняет пределы.*

Двойственно, если $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ *имеет кополные слои и послойные произведения, и также* $\mathsf{Sect}(\mathscr{R}, \mathcal{E}|_{\mathscr{R}})$ *допускает копределы, то то же самое верно про* $\mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, *и функтор ограничения* $\mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to \mathsf{Sect}(\mathscr{R}, \mathcal{E})$ *сохраняет копределы.*

Лемма 1.4.17. *Пусть* $c \in \mathcal{C}$, *и рассмотрим подкатегорию* $c \backslash \mathscr{L}$. *Тогда функтор*

$$u_c^* : \mathsf{Sect}(\mathscr{L}, \mathcal{E}) \to \mathsf{Sect}(c \backslash \mathscr{L}, \mathcal{E}),$$

индуцированный вдоль естественного функтора забывания $u_c : c \backslash \mathscr{L} \to \mathscr{L}$, *сохраняет пределы.*

Доказательство. Функтор u_c^* допускает левый сопряжённый,

$$u_!^c : \mathsf{Sect}(c \backslash \mathscr{L}, \mathcal{E}) \to \mathsf{Sect}(\mathscr{L}, \mathcal{E}),$$

который вычисляется по формуле $(u_!^c X)(c') = \coprod_{\mathscr{L}(c,c')} X(c')$. $\square$

Для всякого объекта $c \in \mathcal{C}$, структура полурасслоения даёт нам функтор ограничения

$$Res_c : \mathcal{E}|_{c \backslash \mathcal{L}} \to \mathcal{E}(c).$$

Доказательство Предложения 1.4.16. Пусть дана диаграмма $X_\bullet : I \to \mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$,

$$i \in I \ \mapsto \ (\ c \mapsto X_i(c)\ ),$$

и мы бы хотели построить её предел $Y = \varprojlim_I X_\bullet \in \mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$. Напишем следующее выражение:

$$Y(c) = \varprojlim X_\bullet(c) = \varprojlim_{c \backslash \mathscr{L}} Res_c(\varprojlim_I^{c \backslash \mathscr{L}} X_\bullet|_{c \backslash \mathscr{L}}),$$

где $\varprojlim_I^{c\backslash\mathscr{L}} X_\bullet|_{c\backslash\mathscr{L}}$ — предел $X_\bullet|_{c\backslash\mathscr{L}}$, вычисленный в $\mathsf{Sect}(c\backslash\mathscr{L}, \mathcal{E})$. Далее мы не будем писать ограничение рядом с $X_\bullet$.

Поскольку категория $c\backslash\mathscr{L}$ имеет начальный объект,

$$\varprojlim_{c\backslash\mathscr{L}} Res_c(\varprojlim_I^{c\backslash\mathscr{L}} X_\bullet) \cong (\varprojlim^{c\backslash\mathscr{L}} X_\bullet)(c \xrightarrow{id} c) \cong (\varprojlim^{\mathscr{L}} X_\bullet)(c),$$

наша формула — просто иной способ записи предела в $\mathsf{Sect}(\mathscr{L}, \mathcal{E})$.

Пусть $r : c \to d$ — морфизм из $\mathscr{R}$. Тогда нам нужно построить $Y(r) : Y(c) \to Y(d)$. Структура полурасслоения на $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ означает, что нужно построить $\mathcal{E}(d)$-отображение $r_! Y(c) \to Y(d)$ для некоторого опдекартового морфизма $Y(c) \to r_! Y(c)$. Отметим, что для всякого $\mathscr{L}$-морфизма $l : d \to d'$, факторизационная система на $\mathcal{C}$ даёт единственную диаграмму вида

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "r"] \arrow[d, "k"'] & d \arrow[d, "l"] \\ c' \arrow[r, "t"] & d' \end{tikzcd} \tag{1.4.3}$$

С вертикальными стрелками в $\mathscr{L}$ и горизонтальными стрелками в $\mathscr{R}$. В смысле подкатегорий, можно сказать, что имеем индуцированный функтор

$$F : d\backslash\mathscr{L} \to c\backslash\mathscr{L}, \quad (l : d \to d') \mapsto (k : c \to c').$$

Как обычно, по всякому функтору $G : c\backslash\mathscr{L} \to \mathcal{M}$, мы имеем естественное отображение между пределами $\varprojlim_{c\backslash\mathscr{L}} G \to \varprojlim_{d\backslash\mathscr{L}} F^* G$. Таким образом, чтобы построить отображение f_1 в

$$r_! \varprojlim_{c\backslash\mathscr{L}} Res_c(\varprojlim_I^{c\backslash\mathscr{L}} X_\bullet) \xrightarrow{f_1} \varprojlim_{d\backslash\mathscr{L}} Res_d(\varprojlim_I^{d\backslash\mathscr{L}} X_\bullet)$$

мы можем, что эквивалентно, попробовать построить f_2 в

$$r_! \varprojlim_{d\backslash\mathscr{L}} F^* Res_c(\varprojlim_I^{c\backslash\mathscr{L}} X_\bullet) \xrightarrow{f_2} \varprojlim_{d\backslash\mathscr{L}} Res_d(\varprojlim_I^{d\backslash\mathscr{L}} X_\bullet).$$

Вместо этого, пользуясь универсальным свойством пределов, мы можем попробовать построить f_3 в

$$\varprojlim_{d\backslash\mathscr{L}} r_! F^* Res_c(\varprojlim_I^{c\backslash\mathscr{L}} X_\bullet) \xrightarrow{f_3} \varprojlim_{d\backslash\mathscr{L}} Res_d(\varprojlim_I^{d\backslash\mathscr{L}} X_\bullet).$$

Теперь можно сбросить $\varprojlim_{d\backslash\mathscr{L}}$ и попробовать построить морфизм функторов f_4

$$r_! F^* Res_c(\varprojlim_I^{c\backslash\mathscr{L}} X_\bullet) \xrightarrow{f_4} Res_d(\varprojlim_I^{d\backslash\mathscr{L}} X_\bullet).$$

Используя обозначения диаграммы (*1.4.3*), вычисленное на $l : d \to d'$, отображение f_4 дало бы нам

$$r_! k^*(\varprojlim_I^{c\backslash\mathscr{L}} X_\bullet)(c \xrightarrow{k} c') \xrightarrow{f_4(l)} l^*(\varprojlim_I^{d\backslash\mathscr{L}} X_\bullet)(d \xrightarrow{l} d').$$

Вспоминая об отображении замены базы (Предложение 1.4.13) $r_! k^* \to l^* t_!$ и равенствах

$$(\varprojlim_I^{c\backslash \mathscr{L}} X_\bullet)(c \xrightarrow{k} c') = (\varprojlim_I^{\mathscr{L}} X_\bullet)(c')$$

(и того же самого для d, d'), мы видим, что вместо f_4 можно попробовать построить отображения

$$l^* t_! (\varprojlim_I^{\mathscr{L}} X_\bullet)(c') \xrightarrow{f_5(l)} l^* (\varprojlim_I^{\mathscr{L}} X_\bullet)(d')$$

или что даже проще, $t_!(\varprojlim_I^{\mathscr{L}} X_\bullet)(c') \to (\varprojlim_I^{\mathscr{L}} X_\bullet)(d')$. Если рассмотреть внимательно объект $t_!(\varprojlim_I^{\mathscr{L}} X_\bullet)(c')$, то можно заметить естественные отображения

$$t_!(\varprojlim_I^{\mathscr{L}} X_\bullet)(c') \to t_! X_i(c') \to X_i(d')$$

с первой стрелкой — значением $t_!$ на проекции из предела, и второй стрелкой, которая происходит из структуры сечения X_i. Собирая эти отображения вместе, получаем $f_5(l)$ для каждого $l : d \to d'$, и, как следствие, f_4, f_3, f_2 и f_1.

Это определяет $Y(r) : \varprojlim X_\bullet(c) \to \varprojlim X_\bullet(d)$ для $\mathscr{R}$-отображений категории $\mathcal{C}$. Факторизационная структура на $\mathcal{C}$ и длительная проверка позволяют убедиться, что $c \mapsto Y(c)$ — действительно сечение $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$, которое имеет нужное универсальное свойство. $\square$

Напомним, что факторизационный функтор F замкнут справа (Определение 1.4.4) если для любого морфизма $c \to F(c')$ существует факторизация

$$c \xrightarrow{l} F(c'') \xrightarrow{F(r)} F(c')$$

с $r : c'' \to c'$ в $\mathscr{R}' \subset \mathcal{C}'$. Отсюда следует, что, для всякого морфизма $r : c_1 \to c_2$ в $\mathscr{R}$, имеется следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
c_1\backslash \mathscr{L}' \arrow[r, "F_{c_1}"] & c_1\backslash \mathscr{L} \\
c_2\backslash \mathscr{L}' \arrow[u, "r_{\mathscr{L}'}"] \arrow[r, "F_{c_2}"] & c_2\backslash \mathscr{L} \arrow[u, "r_{\mathscr{L}}"']
\end{tikzcd}$$

с функторами $r_{\mathscr{L}'}, r_{\mathscr{L}}$, даваемыми факторизацией морфизмов. Необходимо проявить некоторую аккуратность с обратными образами $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$. Обозначив через $\pi_1 : c_1\backslash \mathscr{L} \to \mathcal{C}$, $\pi_2 : c_2\backslash \mathscr{L} \to \mathcal{C}$ очевидные проекции, имеем, что факторизации

$$\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[r, "r"] \arrow[d, "k"'] & c_2 \arrow[d, "l"] \\
d_1 \arrow[r, "t"] & d_2
\end{tikzcd} \tag{1.4.4}$$

которые определяют $r_{\mathscr{L}}$ как сопоставление $l \mapsto k$, приводят к тому, что есть естественное отображение $\tau : \pi_1 r_{\mathscr{L}} \to \pi_2$ с компонентами, даваемыми морфизмами типа t в диаграмме выше, которые принадлежат к $\mathscr{R}$.

Лемма 1.4.18. *(Ср. Предложение 1.2.2) Пусть* $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ *— полурасслоение над* $(\mathcal{C}, \mathscr{L}, \mathscr{R})$ *и* $F, G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *— два функтора со значениями в* $\mathscr{L}$*, и* $\tau : F \to G$ *— естественное преобразование с компонентами в* $\mathscr{R}$*. Тогда*

1. *оба функтора* $F^*\mathcal{E} \to \mathcal{D}$ *и* $G^*\mathcal{E} \to \mathcal{D}$ *— предрасслоения,*

2. *сопоставление* $(X, d, F(d) = p(X)) \mapsto (\tau(d)_!X, d)$ *обладает свойством, что* $p(\tau(d)_!X) = G(d)$*, и задаёт морфизм предрасслоений* $\tau_! : F^*\mathcal{E} \to G^*\mathcal{E}$ *над* $\mathcal{D}$*,*

3. *имеется индуцированный функтор* $\tau_! : \mathsf{Sect}(\mathcal{D}, F^*\mathcal{E}) \to \mathsf{Sect}(\mathcal{D}, G^*\mathcal{E})$ *на категориях сечений. Более того, для каждого* $X \in \mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$*, имеется естественное (по* X*) отображение* $\tau_!F^*X \to G^*X$*.*

4. *Пусть* $H : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}$ *— функтор, и предположим, что имеются правые сопряжённые,*

$$H_F^* : \mathsf{Sect}(\mathcal{D}, F^*\mathcal{E}) \leftrightarrows \mathsf{Sect}(\mathcal{D}', F^*\mathcal{E}) : H_*^F,$$

$$H_G^* : \mathsf{Sect}(\mathcal{D}, G^*\mathcal{E}) \leftrightarrows \mathsf{Sect}(\mathcal{D}', G^*\mathcal{E}) : H_*^G$$

к функторам ограничения H_F^*, H_G^**. Тогда имеем естественное отображение*

$$\tau_! H_*^F \longrightarrow H_*^G \tau_!'$$

где $\tau_!' : \mathsf{Sect}(\mathcal{D}', H^*F^*\mathcal{E}) \to \mathsf{Sect}(\mathcal{D}', H^*G^*\mathcal{E})$ *— функтор, индуцированный в предыдущем пункте.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Для второго, осталось доказать, что $X \mapsto \tau(d)_!X$ — действительно морфизм предрасслоений. Имея отображения $f : d \to d'$, можно сформировать следующий квадрат

$$\begin{tikzcd} Fd' \arrow[r, "\tau(d')"] \arrow[d, "Ff"'] & Gd' \arrow[d, "Gf"] \\ Fd \arrow[r, "\tau(d)"] & Gd \end{tikzcd} \tag{1.4.5}$$

Используя послойно-декартову факторизацию на $F^*\mathcal{E}$, остаётся проверить, что происходит с декартовыми отображениями $Ff^*Y \to Y$, $p(Y) = Fd'$. Мы видим, что функтор замены базы для диаграммы выше даёт отображение

$$\tau(d)_! Ff^*Y \longrightarrow Gf^*\tau(d')_!Y$$

где неявно мы выбрали декартов морфизм $Gf^*\tau(d')_!Y \to \tau(d')_!Y$. Таким образом, получаем композицию

$$\tau(d)_! Ff^*Y \longrightarrow Gf^*\tau(d')_!Y \to Gf^*\tau(d')_!Y \to \tau(d')_!Y$$

нужную для конструирования морфизма $F^*\mathcal{E} \to G^*\mathcal{E}$.

Функтор $\tau_!$ из третьего утверждения попросту индуцируется посткомпозицией с функтором из второго утверждения. Существование естественного семейства отображений $\tau_! F^* X \to G^* X$ доказывается так же, как и в Лемме 1.2.2: на объекте $d \in \mathcal{D}$, $\tau(d)_! X(F(d)) \to X(G(d))$ даётся структурой сечения X вдоль $\mathscr{R}$-морфизма $\tau(d) : F(d) \to G(d)$.

Для четвёртого утверждения, рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Sect}(\mathcal{D}, F^*\mathcal{E}) \arrow[r, "H_F^*"] \arrow[d, "\tau_!"'] & \mathsf{Sect}(\mathcal{D}', F^*\mathcal{E}) \arrow[d, "\tau_!'"] \\ \mathsf{Sect}(\mathcal{D}, G^*\mathcal{E}) \arrow[r, "H_G^*"] & \mathsf{Sect}(\mathcal{D}', G^*\mathcal{E}) \end{tikzcd}$$

и заметим, что она коммутативна с точностью до изоморфизма. А потому искомое отображение

$$\tau_! H_*^F \longrightarrow H_*^G \tau_!'$$

даётся обычным аргументом о замене базы. $\square$

Заметим, что $\tau_!$ переводит декартовы отображения в декартовы в том случае, когда морфизм замены базы в диаграмме (*1.4.5*) является изоморфизмом.

Докажем теперь утверждение про сопряжённые функторы, которое подобно тому, что мы имели про пределы. А именно, пусть $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — полурасслоение, и факторизационный функтор $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ замкнут справа. Мы хотим вынести заключение о существовании правого сопряжённого к функтору обратного образа $F^* : \mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to \mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ из предположения существования правого сопряжённого к $F^*_{\mathscr{L}} : \mathsf{Sect}(\mathscr{L}, \mathcal{E}) \to \mathsf{Sect}(\mathscr{L}', \mathcal{E})$.

Определение 1.4.19. В вышеописанной ситуации, будем говорить, что функтор обратного образа $F^*_{\mathscr{L}}$ допускает поточечный правый сопряжённый, если

1. функтор $F^*_{\mathscr{L}} : \mathsf{Sect}(\mathscr{L}, \mathcal{E}) \to \mathsf{Sect}(\mathscr{L}', \mathcal{E})$ допускает правый сопряжённый $F_{\mathscr{L},*}$,

2. для каждого $c \in \mathscr{L}$, функтор обратного образа $F^*_c : \mathsf{Sect}(c\backslash\mathscr{L}, \mathcal{E}) \to \mathsf{Sect}(c\backslash\mathscr{L}', \mathcal{E})$ вдоль индуцированного функтора $F_c : c\backslash\mathscr{L}' \to c\backslash\mathscr{L}$ допускает правый сопряжённый $F_{c,*}$, и более того, естественное отображение замены базы $\pi^* F_{\mathscr{L},*} \to F_{c,*}\pi'^*$, происходящее из диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathscr{L}' \arrow[r, "F_{\mathscr{L}}"] & \mathscr{L} \\ c\backslash\mathscr{L}' \arrow[u, "\pi'"] \arrow[r, "F_c"] & c\backslash\mathscr{L}, \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

является изоморфизмом.

Проще говоря, это означает, что $F_{c,*}\pi'^*X$ можно вычислять как $F_{\mathscr{L},*}X$, ограниченный на комма-категорию.

Предложение 1.4.20. *Пусть $F : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ — замкнутый справа факторизационный функтор, а $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — послойно полное полурасслоение над $\mathcal{C}$. Допустим, что функтор $F^*_{\mathscr{L}} : \mathsf{Sect}(\mathscr{L}, \mathcal{E}) \to \mathsf{Sect}(\mathscr{L}', \mathcal{E})$ допускает поточечный правый сопряжённый $F_{\mathscr{L},*}$. Тогда функтор $F^* : \mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to \mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ допускает правый сопряжённый F_*, такой что естественная диаграмма замены базы*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Sect}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \arrow[r, "F_*"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow"] & \mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \arrow[d] \\
\mathsf{Sect}(\mathscr{L}', \mathcal{E}) \arrow[r, "F_{\mathscr{L},*}"] & \mathsf{Sect}(\mathscr{L}, \mathcal{E}),
\end{tikzcd}$$

(с вертикальными морфизмами, даваемыми ограничениями), коммутативна с точностью до изоморфизма.

Доказательство. Будем действовать так же, как и в Предложении 1.4.16. Для $c \in \mathcal{C}$ и $X \in \mathsf{Sect}(\mathcal{C}', \mathcal{E})$, положим

$$Y(c) := F_*X(c) = \varprojlim_{c\backslash\mathscr{L}} Res_c F_{c,*}(X|_{c\backslash\mathscr{L}'})$$

где $F_c : c\backslash\mathscr{L}' \to c\backslash\mathscr{L}$ — функтор, индуцированный F. Заметим, что $Y(c) \cong F_{\mathscr{L}*}X(c)$.

Предположим, что дано отображение $r : c_1 \to c_2$. Нам нужно построить

$$r_! \varprojlim_{c_1\backslash\mathscr{L}} Res_{c_1} F_{c_1,*}(X|_{c_1\backslash\mathscr{L}'}) \xrightarrow{f_1} \varprojlim_{c_2\backslash\mathscr{L}} Res_{c_2} F_{c_2,*}(X|_{c_2\backslash\mathscr{L}'})$$

Поскольку F замкнут справа, имеем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
c_1\backslash\mathscr{L}' \arrow[r, "F_{c_1}"] & c_1\backslash\mathscr{L} \\
c_2\backslash\mathscr{L}' \arrow[r, "F_{c_2}"] \arrow[u, "r_{\mathscr{L}'}"] & c_2\backslash\mathscr{L} \arrow[u, "r_{\mathscr{L}}"']
\end{tikzcd}$$

с функторами $r_{\mathscr{L}'}, r_{\mathscr{L}}$, даваемыми факторизацией морфизмом. Обозначив через $\pi_1 : c_1\backslash\mathscr{L} \to \mathcal{C}$, $\pi_2 : c_2\backslash\mathscr{L} \to \mathcal{C}$ очевидные проекции, получаем, что факторизации

$$\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[r, "r"] \arrow[d, "k"'] & c_2 \arrow[d, "l"] \\
d_1 \arrow[r, "t"] & d_2
\end{tikzcd} \tag{1.4.6}$$

дают, как и ранее, естественное преобразование $\tau : \pi_1 r_{\mathscr{L}} \to \pi_2$ с компонентами, даваемыми t в диаграмме выше, принадлежащими к $\mathscr{R}$.

Можно попробовать построить вместо этого f_2 в

$$r_! \varprojlim_{c_2\backslash\mathscr{L}} r^*_{\mathscr{L}} Res_{c_1} F_{c_1,*}(X|_{c_1\backslash\mathscr{L}'}) \xrightarrow{f_2} \varprojlim_{c_2\backslash\mathscr{L}} Res_{c_2} F_{c_2,*}(X|_{c_2\backslash\mathscr{L}'}).$$

В свою очередь, по универсальному свойству предела, можно попробовать отыскать отображение f_3 в

$$\varprojlim_{c_2\backslash\mathscr{L}} r_! r^*_{\mathscr{L}} Res_{c_1} F_{c_1,*}(X|_{c_1\backslash\mathscr{L}'}) \xrightarrow{f_3} \varprojlim_{c_2\backslash\mathscr{L}} Res_{c_2} F_{c_2,*}(X|_{c_2\backslash\mathscr{L}'}).$$

Теперь можно забыть о $\varprojlim_{c_2\backslash\mathscr{L}}$ и построить вместо этого отображение функторов f_4

$$r_! r^*_{\mathscr{L}} Res_{c_1} F_{c_1,*}(X|_{c_1\backslash\mathscr{L}'}) \xrightarrow{f_4} Res_{c_2} F_{c_2,*}(X|_{c_2\backslash\mathscr{L}'}).$$

В обозначениях диаграммы (*1.4.7*), происходящей из факторизации на $\mathcal{C}$, отображение f_4 дало бы следующее

$$r_! k^* F_{c_1,*}(X|_{c_1\backslash\mathscr{L}'})(c_1 \xrightarrow{k} d_1) \xrightarrow{f_4(l)} l^* F_{c_2,*}(X|_{c_2\backslash\mathscr{L}'})(c_2 \xrightarrow{l} d_2).$$

Вспоминая о морфизме замены базы $r_! k^* \to l^* t_!$, мы видим, что вместо f_4, мы можем строить отображения

$$t_! F_{c_1,*}(X|_{c_1\backslash\mathscr{L}'})(c_1 \xrightarrow{k} d_1) \xrightarrow{f_5(l)} F_{c_2,*}(X|_{c_2\backslash\mathscr{L}'})(c_2 \xrightarrow{l} d_2).$$

Заметим, что $F_{c_1,*}(X|_{c_1\backslash\mathscr{L}'})(c_1 \xrightarrow{k} d_1) = r^*_{\mathscr{L}} F_{c_1,*}(X|_{c_1\backslash\mathscr{L}'})(c_2 \xrightarrow{l} d_2)$, где $r^*_{\mathscr{L}}$ — обратный образ на сечениях, и мы ищем f_5 в

$$\tau_! r^*_{\mathscr{L}} F_{c_1,*}(X|_{c_1\backslash\mathscr{L}'}) \xrightarrow{f_5} F_{c_2,*}(X|_{c_2\backslash\mathscr{L}'})$$

с $\tau_!$ индуцированным из $\tau : \pi_1 r_{\mathscr{L}} \to \pi_2$ по Лемме 1.4.18.

Имеется морфизм замены базы

$$r^*_{\mathscr{L}} F_{c_1,*} \to F'_{c_2,*} r^*_{\mathscr{L}'}$$

с компонентами, лежащими в категории $\mathsf{Sect}(c_2\backslash\mathscr{L}, (\pi_1 r_{\mathscr{L}})^*\mathcal{E})$. Штрих над функтором $F'_{c_2,*}$ обозначат, что он сопряжён на сечениях предрасслоения $(\pi_1 r_{\mathscr{L}})^*\mathcal{E}$, а не $\pi_2^*\mathcal{E}$. Теперь, применим $\tau_!$ и получим

$$\tau_! r^*_{\mathscr{L}} F_{c_1,*} \to \tau_! F'_{c_2,*} r^*_{\mathscr{L}'} \to F_{c_2,*} \tau'_! r^*_{\mathscr{L}'}$$

где вторая стрелка существует вследствие пункта (4) Леммы 1.4.18, где $\tau' : \pi'_1 r'_{\mathscr{L}'} \pi'_2$ — естественное преобразование между очевидными проекциями $\pi_1 : c_1\backslash\mathscr{L}' \to \mathcal{C}'$, $\pi_2 : c_2\backslash\mathscr{L}' \to \mathcal{C}'$ и $r_{\mathscr{L}'}$.

В итоге мы видим, что для того, чтобы получить f_5, можно, что эквивалентно, построить f_6 в

$$F_{c_2,*} \tau'_! r^*_{\mathscr{L}'} X|_{c_1\backslash\mathscr{L}'} \xrightarrow{F_{c_2,*} f_6} F_{c_2,*} X|_{c_2\backslash\mathscr{L}'},$$

или, убирая $F_{c_2,*}$,

$$\tau'_! r^*_{\mathscr{L}'} X|_{c_1 \backslash \mathscr{L}'} \xrightarrow{f_6} X|_{c_2 \backslash \mathscr{L}'},$$

Это отображение есть по пункту (3) Леммы 1.4.18, поскольку X — полноценное сечение полурасслоения. Если рассмотреть факторизационную диаграмму, определяющую $r_{\mathscr{L}'}$,

$$\begin{tikzcd} c_1 \arrow[r, "r"] \arrow[d, "a"'] & c_2 \arrow[d, "b"] \\ F(d_1) \arrow[r, "F(e)"] & F(d_2), \end{tikzcd} \tag{1.4.7}$$

отображение $f_6(b)$ отвечает $F(e)_! X(F(d_1)) \to X(F(d_2))$. А потому мы получаем f_6 и, обращая всю дискуссию, f_1. $\square$

Следствие 1.4.21. *Пусть $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — замкнутый справа факторизационный функтор, такой что его ограничение $F_{\mathscr{L}} : \mathscr{L}' \to \mathscr{L}$ — замкнутое вложение нётеровых категорий. Тогда для всякого послойно полного полурасслоения $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$, имеется сопряжённая пара $F^* : \mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \rightleftarrows \mathsf{Sect}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) : F_*$, и правый сопряжённый можно вычислить, ограничивая на левые части факторизационных систем.*

Доказательство. Правый сопряжённый для $F_{\mathscr{L}} : \mathscr{L}' \to \mathscr{L}$ существует благодаря Предложению 1.3.15 и является поточечным благодаря Предложению 1.3.16. $\square$

Глава 2

Модельные структуры Риди

2.1. Модельные категории и локализация

Определение 2.1.1. *Гомотопической категорией* называется пара $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$, состоящая из категории $\mathcal{M}$ и подкатегории $\mathcal{W}$, называемой категорией слабых эквивалентностей.

Определение модельной категории, используемое в этой работе, следующее:

Определение 2.1.2. Категория $\mathcal{M}$ оснащена *модельной структурой*, или называется *модельной категорией*, если имеются подкатегории $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$, содержащие все объекты $\mathcal{M}$, называемые, соответственно, подкатегориями слабых эквивалентностей, кофибраций и фибраций, так что выполнены следующие аксиомы.

M1 (Свойство $\mathcal{M}$) категория $\mathcal{M}$ допускает малые пределы и копределы.

M2 Подкатегория$\mathcal{W}$ удовлетворяет свойству 3-за-2: имея два компонируемых морфизма f, g, если любые два элемента множества $\{f, g, gf\}$ — морфизмы из $\mathcal{W}$, то тогда таков же и третий.

M3 Подкатегории $\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F}$ замкнуты относительно ретрактов: имея коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f"'] \\ B \arrow[r, "i_2"] & Y \arrow[r, "r_2"] & B \end{tikzcd}$$

с $r_1 i_1 = id_A$ и $r_2 i_2 = id_B$, если g принадлежит к $\mathcal{W}$ (соответственно, $\mathcal{C}$,$\mathcal{F}$), то к ней же принадлежит и f.

M4 В коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "b"] & Y \end{tikzcd}$$

с i в $\mathcal{C}$ и f в $\mathcal{F}$, если любой из морфизмов i, f также лежит в $\mathcal{W}$, то существует отображение $p : B \to X$ с $pi = a$ и $fp = b$.

M5 Любой морфизм $p : X \to Y$ можно факторизовать как $X \xrightarrow{i} Z \xrightarrow{f} Y$ с i в $\mathcal{C}$ и f в $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$, и как $X \xrightarrow{j} Z' \xrightarrow{g} Y$, с j в $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ и g в $\mathcal{F}$.

Определение 2.1.3. Пусть $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ — гомотопическая категория. *Локализацией* $\mathcal{M}$ вдоль $\mathcal{W}$ [15, 24], обозначаемой через $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}$ или $\operatorname{Ho}\mathcal{M}$, называется категория вместе с функтором $p : \mathcal{M} \to \mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}$, таким что любой функтор $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, посылающий $\mathcal{W}$ в изоморфизмы в $\mathcal{N}$, пропускается через p, и эта факторизация единственна с точностью до канонического изоморфизма.

thm Предложение ([15, 20, 24]). *Имея модельную категорию* $\mathcal{M}$*, её локализация* $\operatorname{Ho}\mathcal{M}$ *вдоль* $\mathcal{W}$ *существует и живёт в том же универсе, что и* $\mathcal{M}$*.*

2.2. Полурасслоения над категориями Риди

2.2.1. Модельные полурасслоения

Определение 2.2.1. Пусть $\mathcal{R}$ — категория Риди. *Модельным полурасслоением* над $\mathcal{R}$ называется функтор $\mathcal{E} \to \mathcal{R}$, являющийся полурасслоением над $(\mathcal{R}, \mathcal{R}_-, \mathcal{R}_+)$ как факторизационной категорией, так что каждая $\mathcal{E}(x)$ — модельная категория, и

- функторы перехода вдоль $\mathcal{R}_-$ сохраняют фибрации и тривиальные фибрации,
- функторы перехода вдоль $\mathcal{R}_+$ сохраняют кофибрации и тривиальные кофибрации.

В данной главе мы покажем, что $\mathsf{Sect}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ имеет модельную структуру.

Напомним [24, 20], что для каждого объекта $x \in \mathcal{R}$, мы имеем ассоциированные лэтчинг и мэтчинг категории $Lat(x)$ и $Mat(x)$. Пусть $\mathcal{E} \to \mathcal{R}$ — полурасслоение. Тогда для каждого $x \in \mathcal{R}$, существуют естественные функторы ограничения $L_x : \mathcal{E}|_{Lat(x)} \to \mathcal{E}(x)$ и $R_x : \mathcal{E}_{Mat(x)} \to \mathcal{E}(x)$. Действительно, L_x посылает объект $X \in \mathcal{E}|_{Lat(x)}$, принадлежащий к слою над $f : y \to x$, в $f_!X \in \mathcal{E}(x)$, и подобным же образом можно определить R_x.

Определение 2.2.2. Для $S \in \mathsf{Sect}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ и x в $\mathcal{R}$, определим лэтчинг-объект S в x как следующий копредел:

$$\mathscr{L}_x S := \varinjlim\nolimits_{Lat(x)} L_x \circ S|_{Lat(x)}.$$

Мэтчинг-объект S в x определяется как следующий предел:

$$\mathscr{M}_x S := \varprojlim\nolimits_{Mat(x)} R_x \circ S|_{Mat(x)}.$$

Обозначим через $\mathcal{R}_{<n}$ подкатегорию объектов степени меньше, чем n, и рассмотрим сечение $S : \mathcal{R}_{<n} \to \mathcal{E}$, определённое на этой подкатегории. Тогда для каждого z степени (вплоть до) n, отображение $\mathscr{L}_z S \to \mathscr{M}_z S$ канонически определено. Рассмотрим следующий коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & y \arrow[d, "h"] \\ z \arrow[r, "k"'] & t \end{tikzcd}$$

получаемый с помощью факторизационной системы, в котором горизонтальные отображения из $\mathcal{R}_-$, а вертикальные — из $\mathcal{R}_+$. Предложение 1.4.13 тогда даёт естественное преобразование $g_! f^* \to k^* h_!$. Отображение из лэтчинг в мэтчинг-объект тогда получается из отображений

$$g_! S(x) \to g_! f^* S(y) \to k^* h_! S(y) \to k^* S(t),$$

с $S(x) \to f^* S(y)$ и $h_! S(y) \to S(t)$ существующими, поскольку S — сечение над $\mathcal{R}_{<n}$. Собирая вместе $g_! S(x) \to k^* S(t)$, мы получаем отображение из копредела в предел, то есть, $\mathscr{L}_z S \to \mathscr{M}_z S$.

Для сечения $S : \mathcal{R} \to \mathcal{E}$, определённого на всей $\mathcal{R}$, у нас даны отображения $\mathscr{L}_x S \to S(x) \to \mathscr{M}_x S$ в каждом слое $\mathcal{E}(x)$, которые, как можно видеть, факторизуют каноническое отображение $\mathscr{L}_x S \to \mathscr{M}_x S$.

Предложение 2.2.3. *Пусть $\mathcal{E} \to \mathcal{R}$ — полурасслоение, и $S : \mathcal{R}_{<n} \to \mathcal{E}$ — сечение, определённое над объектом степени меньше, чем n. Тогда продолжение S до сечения на объектах x степени n эквивалентно факторизации канонического отображения $\mathscr{L}_x S \to \mathscr{M}_x S$ как $\mathscr{L}_x S \to S(x) \to \mathscr{M}_x S$.*

Доказательство. Ясно из предыдущей дискуссии. □

Сопоставления $S \mapsto \mathscr{L}_x S$ и $S \mapsto \mathscr{M}_x S$ задают функторы из $\mathsf{Sect}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ в $\mathcal{E}(x)$. Потому, имея отображение $f : S \to T$ двух сечений $S, T \in \mathsf{Sect}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$, мы получаем, естественно, следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathscr{L}_x S \arrow[r] \arrow[d] & S(x) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{M}_x S \arrow[d] \\ \mathscr{L}_x T \arrow[r] & T(x) \arrow[r] & \mathscr{M}_x T. \end{tikzcd}$$

Определение 2.2.4. Отображение сечений $f : S \to T$ —

- кофибрация Риди, если морфизм $\mathscr{L}_x T \coprod_{\mathscr{L}_x S} S(x) \to T(x)$ — кофибрация в $\mathcal{E}(x)$ для всякого $x \in \mathcal{R}$.

- фибрация Риди, если морфизм $S(x) \to \mathscr{M}_x S \prod_{\mathscr{M}_x T} T(x)$ — фибрация в $\mathcal{E}(x)$ для каждого $x \in \mathcal{R}$.

- слабая эквивалентность Риди, если это послойная слабая эквивалентность.

Теорема 2.2.5. *Пусть $\mathcal{R}$ — категория Риди, и $\mathcal{E} \to \mathcal{R}$ — модельное полурасслоение. Тогда категория сечений $\mathsf{Sect}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ обладает модельной структурой, даваемой кофибрациями, фибрациями и слабыми эквивалентностями Риди из Определения 2.2.4.*

Лемма 2.2.6. *Слабые эквивалентности Риди стабильны по отношению к ретрактам и удовлетворяют аксиоме “3-за-2”.*

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 2.2.7. *Пусть $f : S \to T$ — отображение сечений, удовлетворяющее одному из свойств ниже:*

- *Для каждого $x \in \mathcal{R}$, отображение $\mathscr{L}_x T \coprod_{\mathscr{L}_x S} S(x) \to T(x)$ — кофибрация,*
- *Для каждого $x \in \mathcal{R}$, отображение $\mathscr{L}_x T \coprod_{\mathscr{L}_x S} S(x) \to T(x)$ — тривиальная кофибрация,*
- *Для каждого $x \in \mathcal{R}$, отображение $S(x) \to \mathscr{M}_x S \prod_{\mathscr{M}_x T} T(x)$ — фибрация,*
- *Для каждого $x \in \mathcal{R}$, отображение $S(x) \to \mathscr{M}_x S \prod_{\mathscr{M}_x T} T(x)$ — тривиальная фибрация.*

Тогда всякий ретракт f также имеет это свойство.

Доказательство. Естественная проверка, аналогичная классическим доказательствам. □

2.2.2. Случай “прямой” категории

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathcal{R} = \mathcal{R}_+$ — “прямая” (*direct*) категория Риди. В такой ситуации, $\mathcal{E} \to \mathcal{R}$ — предопрасслоение. Подобным же образом можно рассмотреть $\mathcal{R} = \mathcal{R}_-$, и получить предрасслоение над $\mathcal{R}$.

Предложение 2.2.8. *Кофибрации Риди, поточечные фибрации и слабые эквивалентности дают модельную структуру на $\mathsf{Sect}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$.*

С очевидностью, $\mathcal{R}_+$ — нётерова категория, а потому:

Лемма 2.2.9. *Для $\mathcal{R} = \mathcal{R}_+$, категория $\mathsf{Sect}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ допускает пределы и копределы.*

Доказательство. Применение утверждений, двойственных к Предложениям 1.3.2 и 1.3.11. □

Лемма 2.2.10. *Пусть дана диаграмма сечений*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & S \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

где p — поточечная фибрация (соответственно, тривиальная фибрация). Если для каждого $x \in \mathcal{R}$, отображение

$$\mathscr{L}_x B \coprod_{\mathscr{L}_x A} A(x) \to B(x) \tag{2.2.1}$$

— тривиальная кофибрация (соответственно, кофибрация), то диаграмма допускает подъём $B \to S$.

Доказательство. Индукция по степени. Для $degx = 0$, $\mathscr{L}_x(A)$ совпадает с начальным объектом $\mathcal{E}(x)$ (то же верно для B), а потому отображение (*2.2.1*) равно $A(x) \to B(x)$. Тогда подъём существует просто потому, что $\mathcal{E}(x)$ — модельная категория.

Для $degx = n$, предположим, что мы определили подъём для всех объектов меньшей степени. Для каждого отображения $\alpha : y \to x$ с $degy < n$, мы имеем $h_y : B(y) \to S(y)$, и композиция $B(y) \to S(y) \to S(x)$ может быть факторизована как $\alpha_! B(y) \to S(x)$, что в свою очередь индуцирует отображение $\mathscr{L}_x B \to S(x)$. Мы получаем тогда следующую диаграмму,

$$\begin{tikzcd} \mathscr{L}_x B \coprod_{\mathscr{L}_x A} A(x) \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & S(x) \arrow[d, "p"] \\ B(x) \arrow[r] & T(x), \end{tikzcd}$$

для которой существует подъём, а потому, вспоминая о $A(x) \to \mathscr{L}_x B \coprod_{\mathscr{L}_x A} A(x)$, и искомый нами подъём. □

Лемма 2.2.11. *Пусть морфизм $A \to B$ таков, что $\mathscr{L}_x B \coprod_{\mathscr{L}_x A} A(x) \to B(x)$ — (тривиальная) кофибрация для каждого $x \in \mathcal{R}$. Тогда для любого $y \in \mathcal{R}$, отображения $\mathscr{L}_y A \to \mathscr{L}_y B$ и $A(y) \to B(y)$ — (тривиальные) кофибрации.*

Доказательство. В отличие от [24], проследуем индукцией по степени. Для y с $degy = 0$, лэтчинг-объекты совпадают с начальными, а потому отображение из условия леммы равно $A(y) \to B(y)$.

Допустим, что всё доказано для всех x с $degx < n$. Тогда для $y, degy = n$ имеем:

- Отображение $\mathscr{L}_y A \to \mathscr{L}_y B$ имеет вид

$$\varinjlim_{f: x \to y \in Lat(y)} (f_! A(x) \to f_! B(x)) \, .$$

  Поскольку $f_!$ сохраняют (тривиальные) кофибрации, это отображение, по индукции, также (тривиальная) кофибрация, будучи копределом оных.

- Отображение $A(y) \to B(y)$ равно

$$A(y) \to \mathscr{L}_y B \coprod_{\mathscr{L}_y A} A(y) \to B(y)$$

  где первая стрелка — (тривиальная) кофибрация, будучи прямым образом $\mathscr{L}_y A \to \mathscr{L}_y B$, ровно как и вторая стрелка. □

Следствие 2.2.12. *Пусть $A \to B$ таково, что $\mathscr{L}_x B \coprod_{\mathscr{L}_x A} A(x) \to B(x)$ — тривиальная кофибрация для всякого $x \in \mathcal{R}$. Тогда $A \to B$ — кофибрация Риди и слабая эквивалентность.*
□

Предложение 2.2.13. *Пусть $A \to C$ — морфизм в $\mathsf{Sect}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$. Тогда его можно факторизовать как $A \to B \to C$, где*

- *отображение $A \to B$ таково, что $\mathscr{L}_x B \coprod_{\mathscr{L}_x A} A(x) \to B(x)$ — кофибрация (соответственно, тривиальная кофибрация) для каждого $x \in \mathcal{R}$,*
- *отображение $B \to C$ — поточечная тривиальная фибрация (соответственно, фибрация).*

Доказательство. Покажем первый пункт; доказательство второго делается двойственным образом. Разложим $A(x) \to B(x)$ как $A(x) \to B(x) \to C(x)$ для каждого x степени ноль. Предположим теперь, что факторизация предоставлена для всякого $y \in \mathcal{R}$ степени меньшей, чем n. Для x с $degx = n$, имеем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{L}_x A \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{L}_x B \arrow[d] \\
A(x) \arrow[r] & C(x)
\end{tikzcd}$$

где $\mathscr{L}_x B \to C(x)$ получается при помощи отображений $B(y) \to C(y) \to C(x)$. А потому имеем морфизм $A(x) \coprod_{\mathscr{L}_x A} \mathscr{L}_x B \to C(x)$, который мы факторизуем как

$$A(x) \coprod_{\mathscr{L}_x A} \mathscr{L}_x B \to B(x) \to C(x).$$

Отображения $\mathscr{L}_x B \to B(x)$ превращают B в сечение на $\mathcal{R}_{\leq n}$. По индукции получаем искомую факторизацию. □

Следствие 2.2.14. *Отображение $f : S \to T$ — тривиальная кофибрация Риди, тогда и только тогда, когда*

$$\mathscr{L}_x T \coprod_{\mathscr{L}_x S} S(x) \to T(x)$$

— тривиальная кофибрация для всякого $x \in \mathcal{R}$.

Доказательство. Рассмотрим тривиальную кофибрацию Риди $f : S \to T$ и разложим её как $S \xrightarrow{g} U \xrightarrow{h} T$, где$\mathscr{L}_x U \coprod_{\mathscr{L}_x S} S(x) \to U(x)$ — тривиальная кофибрация. Тогда можно видеть, что f — ретракт g. □

Всё вышесказанное доказывает существование модельной структуры Риди на $\mathsf{Sect}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ для прямой категории $\mathcal{R}$.

2.2.3. Окончание доказательства

Вернёмся к случаю, когда $\mathcal{R}$ — произвольная категория Риди.

Лемма 2.2.15. *Отображение $X \to Y$ —*

- *тривиальная кофибрация Риди тогда и только тогда, когда для всякого $x \in \mathcal{R}$, отображение $\mathscr{L}_x Y \coprod_{\mathscr{L}_x X} X(x) \to Y(x)$ — тривиальная кофибрация,*
- *тривиальная фибрация Риди тогда и только тогда, когда для всякого $x \in \mathcal{R}$, отображение $X(x) \to Y(x) \prod_{\mathscr{M}_x Y} \mathscr{M}_x X$ — тривиальная фибрация.*

Доказательство. Для первой части, заметим что $X \to Y$ — кофибрация Риди в том и только в том случае, если это верно в категории $\mathsf{Sect}(\mathcal{R}_+, \mathcal{E})$. То же самое касается слабых эквивалентностей. А потому применим Следствие 2.2.14. Доказательство второй части утверждения двойственно. □

Предложение 2.2.16. *Предположим, что дана диаграмма сечений*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & S \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

где $f : A \to B$ — кофибрация Риди, а $p : S \to T$ — фибрация Риди. Тогда если вдобавок f или p — слабая эквивалентность, то существует подъём $B \to S$.

Доказательство. По индукции можно предположить, что подъём был построен для $y \in \mathcal{R}$ степени меньше, чем n. Для объекта x степени n, можно нарисовать следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} A(x) \arrow[r] \arrow[dr] & A(x) \coprod_{\mathscr{L}_x A} \mathscr{L}_x B \arrow[r] \arrow[d] & S(x) \arrow[d] \arrow[dr] & \\ & B(x) \arrow[r] & T(x) \prod_{\mathscr{M}_x T} \mathscr{M}_x S \arrow[r] & T(x). \end{tikzcd}$$

Точно так же, как и в классическом случае, подъём в среднем квадрате этой диаграммы, (который есть в случае, если f или p — слабая эквивалентность) задаёт искомое отображение $B \to S$ на объектах степени n. $\square$

Предложение 2.2.17. *Пусть $A \to C$ — отображение в $\mathsf{Sect}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$. Тогда его можно факторизовать как $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$, где i — кофибрация Риди, а p — фибрация Риди, так что i или p — слабая эквивалентность.*

Доказательство. Снова предположим, что $A(y) \to B(y) \to C(y)$ есть для объектов $y \in \mathcal{R}$ степени меньше, чем n. Для x степени n, диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathscr{L}_x A \arrow[r] \arrow[d] & A(x) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{M}_x B \arrow[d] \\ \mathscr{L}_x B \arrow[r] & C(x) \arrow[r] & \mathscr{M}_x C, \end{tikzcd}$$

существующая в силу предположения индукции, даёт нам следующее отображение:

$$\mathscr{L}_x B \coprod_{\mathscr{L}_x A} A(x) \to C(x) \prod_{\mathscr{M}_x C} \mathscr{M}_x B.$$

Факторизуя его в $\mathcal{E}(x)$ как

$$\mathscr{L}_x B \coprod_{\mathscr{L}_x A} A(x) \to B(x) \to C(x) \prod_{\mathscr{M}_x C} \mathscr{M}_x B,$$

вместе с отображениями $\mathscr{L}_x B \to B(x)$ и $B(x) \to \mathscr{M}_x B$, мы получаем искомое продолжение факторизации на объекты степени n. $\square$

Таким образом, мы доказали существование модельной структуры Риди на $\mathsf{Sect}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$.

Лемма 2.2.18. *Пусть $X \to Y$ — кофибрация или фибрация Риди. Тогда для всякого $x \in \mathcal{R}$, отображение $X(x) \to Y(x)$ — кофибрация или фибрация.*

Доказательство. Прямое следствие Леммы 2.2.11. $\square$

2.3. Приложения

Предложение 2.3.1. *Пусть $(\mathcal{R}, \mathcal{R}_-, \mathcal{R}_+)$ — категория Риди, и $\mathcal{E} \to \mathcal{R}$, $\mathcal{F} \to \mathcal{R}$ — два модельных полурасслоения. Пусть $G : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ — функтор над $\mathcal{R}$, такой что*

1. *для каждого $x \in \mathcal{R}$, функтор $G_x : \mathcal{E}(x) \to \mathcal{F}(x)$ допускает левый сопряжённый F_x, и (F_x, G_x) — квилленова пара.*
2. *ограничение $G|_{\mathcal{R}_-} : \mathcal{E}|_{\mathcal{R}_-} \to \mathcal{F}|_{\mathcal{R}_-}$ — декартов морфизм предрасслоений,*
3. *для каждого морфизма $s : x \to y$ in $\mathcal{R}_+$, обозначим через $s_!^{\mathcal{F}}$ и $s_!^{\mathcal{E}}$ функторы перехода вдоль s в соответствующих полурасслоениях; допустим теперь, что морфизм замены базы, $F_y s_!^{\mathcal{F}} \to s_!^{\mathcal{E}} F_x$, — изоморфизм.*

Тогда мы имеем индуцированную квилленову пару

$$F : \mathsf{Sect}(\mathcal{R}, \mathcal{F}) \leftrightarrows \mathsf{Sect}(\mathcal{R}, \mathcal{E}) : G$$

между модельными категориями сечений.

Доказательство. Попробуем построить F, положив $FX(x) = F_x(X(x))$ для $X \in \mathsf{Sect}(\mathcal{R}, \mathcal{F})$. Видим, что для всякого $i : x \to y$ в $\mathcal{R}_-$, мы имеем коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(x) \arrow[r, "G_x"] & \mathcal{F}(x) \\ \mathcal{E}(y) \arrow[u, "i^*_{\mathcal{E}}"] \arrow[r, "G_y"] & \mathcal{F}(y) \arrow[u, "i^*_{\mathcal{F}}"'] \end{tikzcd}$$

а потому имеем также индуцированный морфизм замены базы $F_x i^*_{\mathcal{F}} \to i^*_{\mathcal{E}} F_y$. Им можно воспользоваться, чтобы получить $F_x(X(x)) \to i^*_{\mathcal{E}} F_y(X(y))$ как $F_x(X(x)) \to F_x(i^* \mathcal{F} X(y)) \to i^*_{\mathcal{E}} F_y(X(y))$.

Рассматривая ситуацию на морфизмах, для $s : x \to y$ в $\mathcal{R}_+$, можно видеть, что стрелки указывают в противоположном направлении. Наше условие (3) позволяет обойти эту проблему. Потому мы имеем левый сопряжённый F. То, что $F \dashv G$ — квилленова пара, следует из того, что все функторы вида G_x сохраняют пределы, фибрации и тривиальные фибрации, а потому хорошо взаимодействуют со структурой Риди. $\square$

2.3.1. Над категорией симплексов

В нижеследующем частично упорядоченные множества (ЧУМы) отождествляются с малыми категориями, которые имеют максимум один морфизм между каждой парой объектов.

Определение 2.3.2. Обозначим через Δ полную подкатегорию **Cat**, состоящую из непустых конечных ЧУМ. Обозначим через $[n]$ категорию

$$[n] = 0 \to 1 \to 2 \to ... \to n$$

с ровно одним морфизмом $i \to j$ когда $i \leq j$. Подкатегория Δ, образуемая $[n]$ для $n \geq 0$ — скелет [33], так что каждый $O \in \Delta$ единственно изоморфен некоторому $[n]$. Группа автоморфизмов O состоит из одного элемента. По этим причинам мы часто будем описывать конструкции над Δ только для объектов вида $[n]$.

Лемма 2.3.3. *Всякий морфизм в Δ можно факторизовать как сюръекцию, за которой следует инъекция (в смысле, применимом к ЧУМ). Сюръекции и инъекции формируют факторизационную систему (Δ_s, Δ_i) на Δ которая, вместе с естественным выбором степени $deg[n] = n$, превращает Δ в категорию Риди.*

Доказательство. Очевидно. $\square$

Следствие 2.3.4. *Категория Δ^{op} — категория Риди с факторизационной системой*

$$(\Delta_-^{\mathsf{op}}, \Delta_+^{\mathsf{op}}),$$

состоящей из (морфизмов, противоположных) инъекциям и сюръекциям.

Определение 2.3.5. Отображение $\rho : [m] \to [n]$ в Δ — *вложение Сигала*, или попросту *сигалово*, если это вложение $[m]$ как $m+1$ первых элементов $[n]$, то есть, $\rho(i) = i$ для $0 \leq i \leq m$. В частности, $m \leq n$.

Отображение $\zeta : [n] \to [m]$ в Δ называется *анкерным*, если оно сохраняет конечные элементы: $\zeta(n) = m$.

Обозначим через A, Σ подкатегории анкерных и сигаловых отображений в Δ. легко видеть, что (A, Σ) — факторизационная система на Δ.

Определение 2.3.6. *Сигалова факторизационная система* на Δ^{op} состоит из пары $(\mathscr{S}, \mathscr{A})$, где $\mathscr{S}$ — подкатегория сигаловых отображений, равная Σ^{op}, а $\mathscr{A}$ — подкатегория анкерных отображений, равная A^{op}.

Лемма 2.3.7. *Тождественный функтор отправляет* Δ_+^{op} *в* $\mathscr{A}$. □

Лемма 2.3.8. *Пусть* $\pi : \mathcal{X} \to \Delta^{\mathsf{op}}$ *—* Δ*-индексированная категория. Тогда*

1. *имеется факторизационная система* $(\mathcal{X}_-, \mathcal{X}_+)$*, которая* π*-проектируется в* $(\Delta_-^{\mathsf{op}}, \Delta_+^{\mathsf{op}})$*, называемая факторизационной системой Риди на* $\mathcal{X}$*.*

2. *имеется факторизационная система* $(\mathscr{S}_\mathcal{X}, \mathscr{A}_\mathcal{X})$*, которая* π*-проектируется в* $(\mathscr{S}, \mathscr{A})$*, называемая факторизационной системой Сигала на* $\mathcal{X}$*.*

3. *Тождественный функтор* $id : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *сохраняет морфизмы правых классов:* $id(\mathcal{X}_+) \subset \mathscr{A}_\mathcal{X}$*.*

Доказательство. Прямое следствие Предложения 1.4.10. □

Определение 2.3.9. *Сигаловым предрасслоением* над $\mathcal{X}$ называется предрасслоение $\mathcal{E} \to \mathcal{X}$ которое вдобавок — полурасслоение над сигаловой факторизационной системой. Сигалово предрасслоение $\mathcal{E} \to \mathcal{X}$ называется модельным если индуцированное полурасслоение над факторизационной системой Риди — модельное полурасслоение, и функторы перехода в предрасслоении $\mathcal{E} \to \mathcal{X}$ сохраняют слабые эквивалентности.

Сигалово предрасслоение *нормализовано* если его ограничение $\mathcal{X} \to \mathscr{A}$ — локально постоянное расслоение, так что все функторы перехода — эквивалентности.

Следствие 2.3.10. *Пусть* $\mathcal{E} \to \mathcal{X}$ *— модельное сигалово предрасслоение. Тогда категория* $\mathsf{Sect}(\mathcal{X}, \mathcal{E})$ *модельна.*

Доказательство. Непосредственное применение Теоремы 2.2.5. □

Замечание 2.3.11. Пределы в категории $\mathsf{Sect}(\mathcal{X}, \mathcal{E})$ можно считать в любой из двух факторизационных систем на $\mathcal{X}$ с помощью Предложения 1.4.16, поскольку $\mathcal{E} \to \mathcal{X}$ — полурасслоение над каждой из них.

Глава 3

Производные сечения

3.1. Симплициальные замены

Определение 3.1.1. Пусть дана малая категория $\mathcal{C}$. Её *симплициальной заменой* называется единственная Δ-индексированная категория $\mathbb{C} \to \Delta^{\mathsf{op}}$, такая что каждый слой $\mathbb{C}([n])$ — множество $\operatorname{Ob}\mathsf{Fun}([n], \mathcal{C})$ функторов из $[n]$ в $\mathcal{C}$, с морфизмами над $[n] \leftarrow [m]$ даваемыми предкомпозицией $\mathsf{Fun}([n], \mathcal{C}) \to \mathsf{Fun}([m], \mathcal{C})$.

Практически тавтологично, что

Лемма 3.1.2. *Для $\mathcal{C} \in \mathbf{Cat}$, симплициальная замена $\mathbb{C} \to \Delta^{\mathsf{op}}$ может быть получена как опрасслоительная конструкция Гротендика $\int N\mathcal{C}$ нерва $N\mathcal{C} : \Delta^{\mathsf{op}} \to \mathbf{Set} \subset \mathbf{Cat}$. Сопоставление $\mathcal{C} \to \mathbb{C}$ задаёт функтор из $\mathbf{Cat}$ в категорию $\mathbf{Cat}(\Delta)$ Δ-индексированных категорий.*

□

Обозначение 3.1.3. Объект в $\mathbb{C}$ — это, фактически, последовательность $c_0 \to \ldots \to c_n$ компонируемых морфизмов в $\mathcal{C}$. Мы часто будем её обозначать как $\mathbf{c}_{[n]}$ или просто как $\mathbf{c}$ когда индексирующий Δ-объект не так важен. Для функтора $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, индуцированный функтор мы будем обозначать как $\mathbb{F} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$:; по определению, $\mathbb{F}(d_0 \to \ldots \to d_n) = Fd_0 \to \ldots \to Fd_n$, и это коммутирует с индексирующими проекциями из $\mathbb{D}$ и $\mathbb{C}$ в Δ^{op}.

Согласно Следствию 2.3.8, имеется две факторизационные системы в $\mathbb{C}$. Первая система, $(\mathbb{C}_-, \mathbb{C}_+)$, — это факторизационная система Риди. Вторая, $(\mathscr{S}_{\mathbb{C}}, \mathscr{A}_{\mathbb{C}})$, — факторизационная система Сигала.

Лемма 3.1.4. *Существуют функторы $h_{\mathcal{C}} : \mathbb{C} \to \mathcal{C}$ и $t_{\mathcal{C}} : \mathbb{C} \to \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$, даваемые отображениями $\mathbf{c}_{[n]} \mapsto c_0$ или $\mathbf{c}_{[n]} \mapsto c_n$ соответственно. Более того, $h_{\mathcal{C}}$ посылает $\mathbb{C}_+$ и $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}$ в тождественные отображения $\mathcal{C}$, и $t_{\mathcal{C}}$ отправляет $\mathbb{C}_+$ и $\mathscr{A}_{\mathbb{C}}$ в тождественные отображения $\mathcal{C}$.*

□

Предложение 3.1.5. *Для малой категории $\mathcal{C}$, любой функтор $F : \mathbb{C} \to \mathcal{N}$, который отправляет $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}$ в изоморфизмы, факторизуется единственным с точностью до изоморфизма образом $F = \tilde{F} \circ h_{\mathcal{C}}$ для $\tilde{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{N}$. Другими словами, $\mathcal{C}$ — локализация $\mathbb{C}$ вдоль морфизмов Сигала.*

Доказательство. Отметим, что функтор $h_{\mathcal{C}}^* : \mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{N}) \to \mathsf{Fun}(\mathbb{C}, \mathcal{N})$ строго полон (см [36, Section 4.4]). Ясно, что для любого $G : \mathcal{C} \to \mathcal{N}$, ассоциированный функтор $h_{\mathcal{C}}^* G = G h_{\mathcal{C}}$ отправляет $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}$ в изоморфизмы. Наоборот, пусть $F : \mathbb{C} \to \mathcal{N}$ — функтор, который отправляет $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}$ в изоморфизмы. Определим новый функтор $\bar{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{N}$. На объектах, $\bar{F}(c) = F(c)$, где c рассматривается как объект $\mathbb{C}$ нулевой длины. Рассмотрим домик

$$c \longleftarrow (c \xrightarrow{f} c') \longrightarrow c',$$

тогда действие F на нём даёт диаграмму $F(c) \leftarrow F(c \to c') \to F(c')$. Обращая левую стрелку, мы получаем стрелку $\bar{F}(f) : \bar{F}(c) \to \bar{F}(c')$. Действие F на объектах длины 3, $c \to c' \to c''$, и на вырожденных объектах, $c \xrightarrow{id} c$, обеспечивает то, что $\bar{F}$ — действительно функтор, и $F \cong \bar{F} h_{\mathcal{C}}$. □

Предложение 3.1.5 позволяет обосновать идею о том, что, имея гомотопическую категорию $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$, функтор $F : \mathbb{C} \to \mathcal{M}$, который посылает $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}$ В $\mathcal{W}$ — подходящее ослабление концепта функтора из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{M}$. Действие F на диаграммах в $\mathbb{C}$ вида

$$c \longleftarrow (c \xrightarrow{f} c') \longrightarrow c',$$

где левая стрелка сигалова, даёт диаграмму $F(c) \xleftarrow{\mathcal{W}} F(c \to c') \to F(c')$, где левая стрелка — слабая эквивалентность. На уровне $\operatorname{Ho} \mathcal{M}$, эта диаграмма даёт отображение $F(c) \to F(c')$, которое можно обозначить через $F(f)$. Применяя F к объектом более высокой длины даёт затем когерентности для "слабого функтора" F.

Для произвольной гомотопической категории $\mathcal{M}$, подобные диаграммы необязательно корректно описывают все морфизмы в $\operatorname{Ho} \mathcal{M}$. На деле нам приходится сделать несколько дополнительных предположений насчёт $\mathcal{M}$, таких как существование модельной структуры.

Определение 3.1.6. Для опрасслоения $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$, его *симплициальное расширение — расслоение* $\mathbf{E} \to \mathbb{C}$, являющееся обратным образом транспонированного расслоения (Определение 1.2.1) $\mathcal{E}^\top \to \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ вдоль $t_{\mathcal{C}} : \mathbb{C} \to \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.

Отметим, что $\mathbf{E}$ не является симплициальной заменой $\mathcal{E}$ или $\mathcal{E}^\top$. В частности, слой $\mathbf{E} \to \mathbb{C}$ над объектом $\mathbf{c}_{[n]}$ эквивалентен $\mathcal{E}(c_n)$. В случае, когда $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ происходит из функтора $\mathcal{E} : \mathcal{C} \to \mathbf{Cat}$, расслоение $\mathbf{E} \to \mathbb{C}$ происходит из функтора

$$\mathbb{C}^{\mathsf{op}} \xrightarrow{t_{\mathcal{C}}^{\mathsf{op}}} \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{E}} \mathbf{Cat}$$

рассматриваемого как контравариантного функтора на $\mathbb{C}$.

Лемма 3.1.7. *Пусть $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — опрасслоение. Тогда $\mathbf{E} \to \mathbb{C}$ — нормализованное расслоение Сигала в смысле Определения 2.3.9.* $\square$

Имея пару функторов $k_1, k_2 : K \to \mathbb{C}$ и естественное преобразование $\alpha : k_1 \to k_2$ со значениями in $\mathscr{A}_{\mathbb{C}}$, мы получаем, что индуцированное декартово отображение расслоений (Лемма 1.2.2)

$$\alpha^* : k_2^* \mathbf{E} \to k_1^* \mathbf{E}$$

является эквивалентностью.

Можно также взять обратный образ $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ на $\mathbb{C}$ с помощью функтора $h_{\mathcal{C}} : \mathbb{C} \to \mathcal{C}$. Связь между этим обратным образом и расслоением $\mathbf{E} \to \mathbb{C}$ следующая:

Предложение 3.1.8. *Пусть $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — опрасслоение, тогда имеем морфизм $T : h_{\mathcal{C}}^* \mathcal{E} \to \mathbf{E}$ коммутирующий с функторами в $\mathbb{C}$, который посылает опдекартовы морфизмы $h_{\mathcal{C}}^* \mathcal{E}$ в декартовы морфизмы $\mathbf{E}$ и универсален, то есть, для любого другого функтора $G : h_{\mathcal{C}}^* \mathcal{E} \to \mathbf{E}$ над $\mathbb{C}$ с подобным свойством существует факторизация через T с точностью до естественного изоморфизма.*

Доказательство. Рассмотрим категорию $\mathcal{X}$, определённую следующим образом.

- Объект $\mathcal{X}$ — пара $(\mathbf{c}_{[n]}, \alpha)$, где $\mathbf{c}_{[n]} = c_0 \to ... \to c_n$ — объект $\mathbb{C}$ и $\alpha : x \to y$ — опдекартово отображение в $\mathcal{E}$, накрывающее композицию $c_0 \to c_n$ in $\mathcal{C}$ (i.e. $p(\alpha) = c_0 \to c_n$),
- Морфизм $(\mathbf{c}_{[n]}, \alpha : x \to y) \to (\mathbf{c}'_{[m]}, \beta : x' \to y')$ состоит из отображения $\mathbf{c} \to \mathbf{c}'$ в $\mathbb{C}$ и отображения $\gamma : x \to x'$, накрывающего индуцированное отображение $c_0 \to c'_0$.

Можно проверить, что функтор $\mathcal{X} \to \mathbb{C}$ — опрасслоение, и что сопоставление $(\mathbf{c}, \alpha : x \to y) \mapsto (\mathbf{c}, x)$ задаёт эквивалентность над $\mathbb{C}$ опрасслоений $\mathcal{X} \xrightarrow{\sim} h_{\mathcal{C}}^* \mathcal{E}$.

С другой стороны, рассмотрим сопоставление $(\mathbf{c}, \alpha : x \to y) \mapsto (\mathbf{c}, y)$. Мы утверждаем, что это определяет функтор $\bar{T} : \mathcal{X} \to \mathbf{E}$ коммутирующий с проекциями в $\mathbb{C}$. Пусть $(f, t) : (\mathbf{c}, \alpha : x \to y) \to (\mathbf{c}', \beta : x' \to y')$ — отображение. В частности, имеем следующее отображение в $\mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\alpha"'] & x' \arrow[d, "\beta"] \\ y & y'. \end{tikzcd} \qquad (3.1.1)$$

Предположим сначала, что отображение t послойно. Тогда в силу опдекартового свойства существует отображение $t' : y \to y'$, которое дополняет диаграмму (*3.1.1*) до коммутативного квадрата. Вспоминая описание стрелок в Определении 1.2.1, определим $\bar{T}(f,t) = (f, y \xrightarrow{t'} y' \xleftarrow{id} y')$; другими словами, мы рассматриваем t' как послойное отображение в $\mathcal{E}^\top$.

Далее, если t опдекартово, найдём опдекартово отображение $k : y' \to z$ в $\mathcal{E}$, накрывающее $c'_m \to c_n$ (которое индуцировано с $f : \mathbf{c} \to \mathbf{c}'$). Композиция $k\beta t$ и α обе проектируются вдоль $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ в отображение $c_0 \to c_n = c_0 \to c'_0 \to c'_m \to c_n$, поэтому существует послойный изоморфизм $z \cong y$. Это даёт то, что диаграмма (*3.1.1*) может быть дополнена до

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\alpha"'] & x' \arrow[d, "\beta"] \\ y & y'. \arrow[l, "t'"'] \end{tikzcd}$$

где все стрелки опдекартовы в $\mathcal{E}$. Положим, опять же, $\bar{T}(f,t) = (f, y \xrightarrow{id} y \xleftarrow{t'} y')$, рассматривая t' как декартово отображение в $\mathcal{E}^\top$. Любой другой случай (f,t) можно разрешить, факторизуя отображение нужным образом.

Обращая эквивалентность $\mathcal{X} \xrightarrow{\sim} h^*_{\mathcal{C}}\mathcal{E}$ и компонируя с $\bar{T}$, мы получаем требуемый функтор $T : h^*_{\mathcal{C}}\mathcal{E} \to \mathbf{E}$, и можно использовать его явную форму для проверки универсального свойства. $\square$

3.2. Категория производных сечений

3.2.1. Предсечения

Определение 3.2.1. Имея опрасслоение $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$, его категорией of *предсечений* называется категория

$$\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) := \mathsf{Sect}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbf{E}).$$

сечений симплициального расширения $\mathbf{E} \to \mathbb{C}$.

Чтобы связать $\mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ с $\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, вспомним про существование функторов $h_{\mathcal{C}}$ и T из Леммы 3.1.4 и Предложения 3.1.8. Функтор $h_{\mathcal{C}}$ индуцирует функтор обратного образа $h^*_{\mathcal{C}} : \mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to \mathsf{Sect}(\mathbb{C}, h^*_{\mathcal{C}}\mathcal{E})$.

Предложение 3.2.2. *Сопоставление* $S \mapsto T \circ (h^*_{\mathcal{C}} S)$ *задаёт строго полный функтор* $i : \mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to \mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$. *Его существенный образ состоит из предсечений, которые отправляют сигаловы отображения* $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}$ *в декартовы морфизмы* $\mathbf{E}$.

Доказательство. Заметим, что для каждого сигалова отображения $a : \mathbf{c}_{[n]} \to \mathbf{c}_{[k]}$, отображение в $h^*_{\mathcal{C}}\mathcal{E}$ опдекартово над a если и только если это изоморфизм $x \xrightarrow{\sim} x$ в $\mathcal{E}(c_0)$. С одной стороны, функтор T посылает такие отображения в декартовы морфизмы в $\mathbf{E}$; с другой стороны, сечение-обратный образ $h^*_{\mathcal{C}}S : \mathbb{C} \to h^*_{\mathcal{C}}\mathcal{E}$ посылает сигаловы отображения $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}$ в тождественные отображения в $\mathcal{E}$. Остальные детали очевидны. $\square$

Замечание 3.2.3. Рассмотрим объект $\mathbf{c}_{[n]} = c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} c_n$ категории $\mathbb{C}$. Тогда $S \in Sect(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ отправляется в предсечение $i(S)$ такое что $i(S)(\mathbf{c}_{[n]}) \cong (f_n ... f_1)_! S(c_0)$, где $(f_n ... f_1)_! : \mathcal{E}(c_0) \to \mathcal{E}(c_n) = \mathbf{E}(\mathbf{c}_{[n]})$ — функтор перехода вдоль композиции f_i.

Определение 3.2.4. *Модельным опрасслоением* $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ называется опрасслоение, такое что каждый слой $\mathcal{E}(c)$ — модельная категория, и функторы перехода сохраняют фибрации и слабые эквивалентности. Что то же самое, имея диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

с горизонтальными опдекартовыми стрелками и вертикальными послойными стрелками, если $X \to Z$ — фибрация (соответственно, слабая эквивалентность) тогда то же верно про $Y \to T$.

Следствие 3.2.5. *Пусть* $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ *— модельное опрасслоение, тогда* $\mathbf{E} \to \mathbb{C}$ *— нормализованное модельное сигалово расслоение над* Δ*-индексированной категорией* $\mathbb{C}$*. Следовательно, категория* $\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) = \mathsf{Sect}(\mathbb{C}, \mathbf{E})$ *имеет модельную структуру Риди из Теоремы 2.2.5.*

Доказательство. Очевидно. $\square$

Обозначим через $\mathrm{Ho}\,\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ соответствующую локализацию.

3.2.2. Производные сечения

Определение 3.2.6. Пусть $\mathcal{F} \to \mathcal{D}$ — предрасслоение, такое что каждый слой $\mathcal{F}(x)$ имеет слабые эквивалентности (содержащие все изоморфизмы $\mathcal{F}(x)$). Морфизм $\alpha : X \to Y$ в $\mathcal{F}$ называется *слабо декартовым*, если его можно факторизовать как

$$\alpha : X \to Z \to Y$$

где $X \to Z$ — слабая эквивалентность в $\mathcal{F}(X)$, и $Z \to Y$ декартов.

Определение 3.2.7. Пусть $\mathcal{F} \to \mathcal{X}$ — модельное сигалово предрасслоение над Δ - индексированной категорией $\mathcal{X}$. Сечение $S : \mathcal{X} \to \mathcal{F}$ называется сигаловым, если оно отправляет

$\mathscr{S}_{\mathcal{X}}$ в слабо декартовы отображения $\mathcal{F}$. Обозначим через $\mathsf{Sect}_{\mathscr{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ полную подкатегорию $\mathsf{Sect}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$, состоящую из сигаловых сечений.

Лемма 3.2.8. *Пусть $S \to S'$ — слабая эквивалентность в $\mathsf{Sect}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$. Тогда если одно из сечений S, S' сигалово, то второе — тоже.*

Доказательство. Посредством применения свойства “три-за-два” и факта, что функторы перехода сохраняют слабые эквивалентности. □

Обозначим через $\operatorname{Ho}\mathsf{Sect}_{\mathscr{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{F}) \subset \operatorname{Ho}\mathsf{Sect}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ подкатегорию сигаловых сечений. Это — полная подкатегория $\operatorname{Ho}\mathsf{Sect}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$, которая совпадает с локализацией $\mathsf{Sect}_{\mathscr{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ вдоль послойных слабых эквивалентностей.

Возвращаясь к нашему примеру,

Определение 3.2.9. Пусть $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — модельное опрасслоение. Предсечение $A : \mathbb{C} \to \mathbf{E}$ называется *производным сечением*, если A отправляет сигаловы морфизмы $\mathbb{C}$ в слабо декартовы морфизмы $\mathbf{E}$.

Обозначим через $\mathsf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ полную подкатегорию $\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, состоящую из производных сечений. Мы также обозначим через $\operatorname{Ho}\mathsf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ соответствующую подкатегорию $\operatorname{Ho}\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$.

Рассмотрим объект $c \xrightarrow{f} c'$ of $\mathbb{C}$. Производное сечение X даёт нам диаграмму в $\mathcal{E}(c')$

$$\begin{tikzcd} & X(c \xrightarrow{f} c') \arrow[dl, "\mathcal{W}"'] \arrow[dr] & \\ f_!X(c) & & X(c') \end{tikzcd} \tag{3.2.1}$$

где $X(c) \to f_!X(c)$ — опдекартов морфизм $\mathcal{E}$, накрывающий f (ср. Определение 1.2.1). Левая стрелка в этой диаграмме (*3.2.1*) — слабая эквивалентность. Диаграммы, получаемые из объектов $\mathbf{c}_{[n]} \in \mathbb{C}$ общего вида, можно рассматривать как соотношения гомотопической когерентности для композиций стрелок, получаемых из (*3.2.1*) обращением левой стрелки.

Предложение 3.2.10. *Пусть $\mathcal{F} \to \mathcal{X}$ — модельное предрасслоение Сигала над Δ - индексированной категорией $\mathcal{X}$. Тогда*

1. *если $X \in \mathsf{Sect}_{\mathscr{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$, то всякая (ко)фибрантная замена X — также сигалово сечение,*

2. *если $X \in \mathsf{Sect}_{\mathscr{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ фибрантно и $f : x \to y$ — отображение в $\mathscr{S}_{\mathcal{X}}$, то индуцированное отображение $X(x) \to f^*X(y)$ — тривиальная фибрация между фибрантными объектами,*

3. *если* $X_\bullet : I \to \mathsf{Sect}_{\mathscr{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ *— диаграмма фибрантных сигаловых сечений, то её (негомотопический) предел — фибрантное сигалово сечение,*

4. *если* $\{X_i\}_{i\in S}$ *— семейство сигаловых сечений, то их гомотопическое произведение* $\times^{\mathsf{h}}_{i\in S} X_i$ *также сигалово сечение, и более того, для каждого* $x \in \mathcal{X}$*, естественное отображение* $(\times^{\mathsf{h}}_{i\in S} X_i)(x) \to \times^{\mathsf{h}}_{i\in S}(X_i(x))$ *— слабая эквивалентность.*

5. *если* $X \to Y \leftarrow Z$ *— диаграмма в* $\mathsf{Sect}_{\mathscr{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$*, то гомотопическое расслоённое произведение* $X \times^{\mathsf{h}}_Y Z$ *— тоже сигалово сечение, и для каждого* $x \in \mathcal{X}$*, естественное отображение* $(X \times^{\mathsf{h}}_Y Z)(x) \to X(x) \times^{\mathsf{h}}_{Y(x)} Z(x)$ *— слабая эквивалентность.*

Доказательство. Первое утверждение — прямое следствие Леммы 3.2.8.

Для второго утверждения, мы знаем, что фибрантность X означает, что $X(x)$ фибрантно для каждого $x \in \mathcal{X}$ степени 0. Вообще говоря, мы знаем, что $X(x) \to \mathscr{M}_x X$ — фибрация. Точно так же, как и для симплициальных объектов в модельной категории, можно доказать, что для всякого $x \to y$, накрывающего инъекцию $[n] \hookleftarrow [m]$ в Δ, отображение $\mathscr{M}_x X \to X(y)$ — фибрация. Отсюда следует то, что $X(x)$ фибрантно и всякое сигалово отображение $x \to y$ отправляется в $X(x) \to X(y)$, которое является фибрацией и слабой эквивалентностью.

Чтобы продолжить, воспользуемся Предложением 1.3.11 для вычисления пределов, и вдобавок, сделаем это в сигаловой факторизационной системе на $\mathcal{X}$. Заметим, что для $x \in \mathcal{X}$ над $[n] \in \Delta$, мэтчинг-категория $Mat^{\mathscr{S}}(x)$ в сигаловой факторизационной системе эквивалентна $[n-1]$. для сечения X, мэтчинг-объект в сигаловой факторизационной системе, $\mathscr{M}^{\mathscr{S}}_x X$, равен, в таком случае, $X(x\backslash 1)$, где $x \to x\backslash 1$ — сигалово отображение, которое накрывает вложение $[n] \hookleftarrow [n-1]$. Таким образом, имея диаграмму сечений $X_\bullet : I \to \mathsf{Sect}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$, соответствующая декартова диаграмма (*1.3.2*) из Предложения 1.3.11 принимает следующую форму:

$$\begin{tikzcd}
(\varprojlim_I X_\bullet)(x) \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim_I (X_\bullet(x)) \arrow[d] \\
(\varprojlim_I X_\bullet)(x\backslash 1) \arrow[r] & \varprojlim_I (X_\bullet(x\backslash 1)).
\end{tikzcd}$$

В случае, когда все X_i — фибрантные сигаловы сечения, отображение справа — предел тривиальных фибраций, а потому тривиальная фибрация. И, таким образом, то же самое верно про отображение слева. Тогда можно воспользоваться индукцией и доказать третье утверждение. Наконец, заметим, что если (по индукции с тривиальной базой) мы знаем, что нижняя горизонтальная стрелка — слабая эквивалентность, то то же самое верно про верхнюю горизонтальную стрелку.

В таком случае, как четвёртое, так и пятое утверждения следуют из вышеописанного аргумента. Чтобы получить произведения, нужно применить аргумент к набору фибрантных производных сечений. Чтобы получить обратные образы, заметим, что $X \to Y \leftarrow Z$ можно заменить, с точностью до слабой эквивалентности, на диаграмму фибраций $X' \to Y' \leftarrow Z'$ между фибрантными объектами, чьё расслоённое произведение даёт $X \times^{\mathsf{h}}_{Y} Z$. $\square$

Глава 4

Резольвенты

Пусть дан функтор $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ и модельное опрасслоение $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$, тогда мы имеем индуцированный функтор обратного образа $\mathbb{F}^* : \mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) = \mathsf{Sect}(\mathbb{C}, \mathbf{E}) \to \mathsf{Sect}(\mathbb{D}, \mathbf{E}) = \mathsf{PSect}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ на категориях предсечений. Этот функтор сохраняет слабые эквивалентности и производные сечения. А потому мы получаем функтор

$$\mathsf{h}\mathbb{F}^* : \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$$

на локализованных категориях.

В данной главе мы покажем, что для определённого класса функторов F, обратный образ $\mathsf{h}\mathbb{F}^*$ строго полон, а его естественный образ легко охарактеризовать.

Определение 4.0.1. Для функтора $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ и $\mathbf{c}_{[n]} = c_0 \to ... \to c_n$ of $\mathbb{C}$, обозначим через $\mathcal{D}(\mathbf{c}_{[n]})$ категорию,

- объекты которой — пары из $\mathbf{d}_{[n]} = d_0 \to ... \to d_n$ и коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} Fd_0 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & ... \arrow[r] & Fd_n \arrow[d, "\cong"'] \\ c_0 \arrow[r] & ... \arrow[r] & c_n, \end{tikzcd}$$

  в которой вертикальные стрелки — изоморфизмы,

- морфизмы которой даются коммутативными диаграммами

$$\begin{tikzcd} d_0 \arrow[r] \arrow[d] & ... \arrow[r] & d_n \arrow[d] \\ d'_0 \arrow[r] & ... \arrow[r] & d'_n \end{tikzcd}$$

  так что для $0 \leq i \leq n$, квадрат

$$\begin{tikzcd} Fd_i \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & Fd'_i \arrow[d, "\cong"'] \\ c_i \arrow[r, "="] & c_i \end{tikzcd}$$

  коммутативен.

Категории $\mathcal{D}(c_0 \to ... \to c_n)$ представляют собой обобщение понятия существенного (или изо-) слоя функтора, см. Соглашение 1.1.13.

Определение 4.0.2.

1. Функтор $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ называется *резольвентой*, если для каждого $\mathbf{c}_{[n]} \in \mathbb{C}$, категория $\mathcal{D}(\mathbf{c}_{[n]})$ стягиваема (то есть, имеет стягиваемый нерв).

2. Функтор $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — *правая резольвента*, если

   - для каждого $c \in \mathbb{C}$ над $[0] \in \Delta$, категория $\mathcal{D}(c)$ стягиваема, и
   - для каждого $f : c' \to c$ в $\mathbb{C}$ над $[1] \in \Delta$ и $d \in \mathcal{D}(c)$, подкатегория $F(f, d) \subset \mathcal{D}(c' \xrightarrow{f} c)$, даваемая (строгим) слоем функтора $\mathcal{D}(c' \xrightarrow{f} c) \to \mathcal{D}(c)$ над d, стягиваема.

3. Функтор $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — *левая резольвента*, если

   - для каждого $c \in \mathbb{C}$ над $[0] \in \Delta$, категория $\mathcal{D}(c)$ стягиваема, и
   - для каждого $f : c' \to c$ в $\mathbb{C}$ над $[1] \in \Delta$ и $d \in \mathcal{D}(c)$, подкатегория $F(d', f) \subset \mathcal{D}(c' \xrightarrow{f} c)$ даваемая (строгим) слоем функтора $\mathcal{D}(c' \xrightarrow{f} c) \to \mathcal{D}(c')$ над d', стягиваема.

Лемма 4.0.3. *Пусть $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — левая или правая резольвента, тогда F — также и резольвента.*

Доказательство. Докажем утверждение для правой резольвенты. По индукции, предположим, что мы доказали свойство резольвенты для каждого $\mathbf{c}'_{[k]}$ с $0 \leq k < n$. Тогда для объекта $\mathbf{c}_{[n]} = c_0 \xrightarrow{f} c_1 \to ... \to c_n$ мы имеем ассоциированный функтор $\mathcal{D}(c_0 \xrightarrow{f} c_1 \to ... \to c_n) \to \mathcal{D}(c_1 \to ... \to c_n)$. Это — опрасслоение над стягиваемой категорией, со слоями, эквивалентными $F(f, d)$ для $d \in \mathcal{D}(c_1)$. По теореме А Квиллена имеем, что $\mathcal{D}(\mathbf{c}_{[n]})$ в таком случае стягиваема. □

Лемма 4.0.4. *Если $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — предрасслоение со стягиваемыми слоями, то F — правая резольвента.*

Двойственно, если $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — предопрасслоение со стягиваемыми слоями, то F — левая резольвента.

Доказательство. Легко видеть, что слои функтора $\mathcal{D}(c' \to c) \to \mathcal{D}(c)$ имеют конечные объекты когда F — предрасслоение. Теорема А Квиллена снова даёт нужный нам результат. Доказательство второй половины леммы аналогично. □

Лемма 4.0.5. *Если $p : \mathcal{D} \rightleftarrows \mathcal{C} : i$ — сопряжённая пара и правый сопряжённый i строго полон,то тогда p — резольвента. В частности, эквивалентность категорий — резольвента.*

Доказательство. Каждая категория $\mathcal{D}(c_0 \to \dots \to c_n)$ допускает конечный объект, даваемый $ic_0 \to \dots \to ic_n$ (заметим, что $pi(c_0) \to \dots \to pi(c_n)$ изоморфно $c_0 \to \dots \to c_n$). $\square$

Определение 4.0.6. Морфизм $\mathbf{c}_{[n]} \to \mathbf{c}'_{[m]}$ категории $\mathbb{C}$ называется *анти-сигаловым*, если его образ в Δ, $[m] \to [n]$, — вложение $[m]$ как последние $m+1$ элементов $[n]$.

Анти-сигаловы отображения с очевидностью сохраняют концы, так что имея произвольное опрасслоение $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$, его симплициальное расширение постоянно вдоль анти-сигаловых отображений, $\mathbf{E}(\mathbf{c}_{[n]}) \cong \mathbf{E}(\mathbf{c}'_{[m]})$.

Определение 4.0.7. Подкатегория $\mathcal{S}$ категории $\mathcal{C}$ *изо-полна*, или просто *изо-подкатегория*, если она содержит все изоморфизмы $\mathcal{C}$.

Определение 4.0.8. Пусть $\mathcal{S}$ — изо-полная подкатегория $\mathcal{C}$, и $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — модельное опрасслоение. Производное сечение $X \in \mathsf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ называется *$\mathcal{S}$-локально постоянным*, если для всякого анти-сигалова морфизма $\alpha : \mathbf{c}_{[n]} \to \mathbf{c}'_{[m]}$, такого что отображения $c_{i-1} \to c_i$, $1 \le i \le n-m$ принадлежат $\mathcal{S}$, образ $X(\alpha)$ — слабая эквивалентность.

В частности, если $f : c_0 \to c_1$ — морфизм в $\mathcal{S}$, обе стрелки в диаграмме $f_! X(c_0) \longleftarrow X(c_0 \to c_1) \longrightarrow X(c_1)$ — слабые эквивалентности.

Обозначим через $\mathsf{DSect}_{\mathcal{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ полную подкатегорию $\mathsf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, состоящую из $\mathcal{S}$ - локально постоянных производных сечений. Любое производное сечение, которое изоморфно в гомотопической категории предсечений $\mathcal{S}$-локально постоянному производному сечению, само является $\mathcal{S}$-локально постоянным.

Имея изо-полную подкатегорию $\mathscr{S}$ категории $\mathcal{C}$, содержащую все изоморфизмы $\mathcal{C}$, мы можем определить $F^*\mathcal{S}$ как минимальную изо-подкатегорию $\mathcal{D}$, которая отображается в $\mathcal{S}$. Как и ранее, мы обозначим через $\mathsf{DSect}_{(F^*\mathcal{S})}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ полную подкатегорию $F^*\mathcal{S}$-локально постоянных производных сечений. В частности, скажем, что

Определение 4.0.9. Производное сечение $X \in \mathsf{DSect}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ *F-локально постоянно*, если оно $F^*Iso(\mathcal{C})$-локально постоянно, где $F^*Iso(\mathcal{C})$ — подкатегория всех морфизмов $\mathcal{D}$, отправляемых функтором F в изоморфизмы $\mathcal{C}$.

Наш основной результат, Теорема 4.2.11, заключается в следующем.

Теорема 4.0.10. *Пусть $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — разрешение, $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ — изо-подкатегория, и $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — модельное опрасслоение. Тогда функтор обратного образа $\mathbb{F}^*$ факторизуется через*

$F^*\mathcal{S}$-локально постоянные сечения на $\mathcal{D}$, и функтор

$$\mathsf{h}\mathbb{F}^* : \operatorname{Ho}\mathsf{DSect}_{\mathcal{S}}(\mathcal{C},\mathcal{E}) \to \operatorname{Ho}\mathsf{DSect}_{F^*\mathcal{S}}(\mathcal{D},\mathcal{E})$$

— эквивалентность категорий.

4.1. Π-замены и башни

4.1.1. Категория Π

Определение 4.1.1. Π, по определению, — категория конечных частично упорядоченных множеств с начальным и конечным элементами. Мы будем рассматривать Π как полную подкатегорию **Cat**. Обозначим через $\delta : \Delta \to \Pi$ каноническое вложение.

Категория Π не является категорией Риди.

Лемма 4.1.2. *Категория Π имеет факторизационную систему (Π_s, Π_i), где Π_s — подкатегория сюрьекций, а Π_i — подкатегория инъекций. Более того, Π_i — артинова категория.*

Функтор $\delta : (\Delta, \Delta_s, \Delta_i) \to (\Pi, \Pi_s, \Pi_i)$ — замкнутый слева (Определение 1.4.4) факторизационный функтор, и он — открытое вложение артиновых категорий 1.3.12 на правых частях факторизационных систем.

Доказательство. То, что $\delta : \Delta \to \Pi$ — факторизационный функтор, очевидно. Рассмотрим теперь морфизм $f : \delta([n]) \to P$ и разложим его как $\delta([n]) \to im(f) \to P$, где первое отображение — сюръекция, а второе — инъекция. Образ $im(f)$ канонически изоморфен $\delta([k])$ для некоторой сюръекции $p : [n] \to [k]$, а потому мы имеем изоморфную факторизацию $\delta([n]) \overset{\delta(p)}{\to} \delta([k]) \to P$, что говорит о том, что δ лево-замкнут.

Для фиксированного объекта $P \in \Pi$, любая цепь инъекций $P_0 \to \ldots \to P_n \to P$ в Π, заканчивающаяся на P, начнёт содержать изоморфизмы с того момента, как n превысит число элементов P, что доказывает артиновость Π_i. Функтор $\delta_R : \Delta_i \to \Pi_i$ строго полон и инъективен на объектах. Более того, если имеется инъекция $P \hookrightarrow [n]$, то P должно быть полностью упорядоченным множеством, что доказывает открытость вложения. $\square$

Лемма 4.1.3. *Отображения, сохраняющие конечный объект, и открытые вложения категорий дают факторизационную систему на Π.*

Доказательство. Чтобы доказать существование, возьмём $f : P \to P'$ между двумя ЧУМ и обозначим через $O(f(P))$ минимальную подкатегорию P', такую что $f(P) \subset O(f(P))$

и $O(f(P)) \subset P'$ — открытое вложение. Тогда имеем естественную факторизацию $P \xrightarrow{i} O(f(P)) \xrightarrow{j} P'$, так что первый функтор сохраняет конечный объект (это верно для $P \to f(P)$, дополнение до открытого вложения этот факт не меняет) а второй является открытым вложением.

Эта факторизация единственна: если $P \xrightarrow{k} Q \xrightarrow{l} P'$ — другая подобная факторизация f, то поскольку оба i и k сохраняют конечные объекты, имеем, что $l(1_Q) = j(1_{O(f(P))}) = f(1_P)$. Свойства открытого вложения гарантируют нам затем что Q и $O(f(P))$ совпадают. $\square$

Определение 4.1.4. *Сигаловой факторизационной системой* $(\mathrm{A}_\Pi, \Sigma_\Pi)$ на Π называется система, левый класс которой A состоит из функторов, которые сохраняют конечный объект, а правый класс Σ — из открытых вложений.

Как и в случае Δ, назовём A_Π анкерными, а Σ_Π — сигаловыми отображениями.

Лемма 4.1.5. *Тождественный функтор на* Π *индуцирует функтор* $\Pi_s \to \mathrm{A}_\Pi$. *Иными словами, всякая сюрбекция в* Π *сохраняет конечные обbекты.*

Доказательство. Сюръективные функторы сохраняют произведения, в частности, пустые произведения, суть конечные объекты. $\square$

Лемма 4.1.6. *Функтор* $\delta : \Delta \to \Pi$ *— факторизационный функтор для сигаловых факторизационных систем* $(\mathrm{A}_\Delta, \Sigma_\Delta)$ *и* $(\mathrm{A}_\Pi, \Sigma_\Pi)$. *Ограничение* $\delta_R : \Sigma_\Delta \to \Sigma_\Pi$, *более того, открытое вложение артиновых категорий.*

Доказательство. Очевидно, что Σ_Π — артинова. Функтор $\delta_R : \Sigma_\Delta \to \Sigma_\Pi$ строго полон, инъективен на объектах, и очевидно, что всякое открытое вложение $P \hookrightarrow \delta_R([n])$ происходит из Σ_Δ-отображения в Δ. $\square$

Функтор δ, однако, не является лево-замкнутым для сигаловых систем.

4.1.2. Π-индексированные категории

Имея малую категорию $\mathcal{C}$, обозначим через $\mathbb{C}_\Delta$ её симплициальную замену (Определение 3.1.1). Обозначим также через $N_\Pi \mathcal{C} : \Pi^{\mathsf{op}} \to \mathbf{Set}$ функтор, чьё значение на $P \in \Pi$ — множество $\mathrm{Ob}\ \mathsf{Fun}(P, \mathcal{C})$ функторов $P \to \mathcal{C}$.

Определение 4.1.7. Имея малую категорию $\mathcal{C}$, её Π-*заменой* называется единственная Π-индексированная категория$\mathbb{C}_\Pi$, чей слой над $P \in \Pi$ даётся $\mathrm{Ob}\ \mathsf{Fun}(P, \mathcal{C})$, а морфизмы $P \leftarrow P'$ даются предкомпозицией $\mathsf{Fun}(P, \mathcal{C}) \to \mathsf{Fun}(P', \mathcal{C})$. (ср. Определение 3.1.1).

Пусть дан функтор $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, тогда его Π-*заменой* называется индуцированный очевидным образом функтор $\mathbb{F}_\Pi : \mathbb{D}_\Pi \to \mathbb{C}_\Pi$.

Конечно, $\mathbb{C}_\Pi = \int N_\Pi \mathcal{C}$, где последнее — опфибрационная конструкция Гротендика, применённая к функтору $N_\Pi\mathcal{C}$. Сопоставление $\mathcal{C} \mapsto \mathbb{C}_\Pi$ задаёт функтор из $\mathbf{Cat}$ в категорию $\mathbf{Cat}(\Pi)$ малых Π - индексированных категорий. Объект $\mathbb{C}_\Pi$ иногда будет обозначаться нами как $\mathbf{c}_P$, где $P \in \Pi$ и $\mathbf{c}_P : P \to \mathcal{C}$ — функтор, элемент $N_\Pi\mathcal{C}(P)$.

Лемма 4.1.8. *Имеется строго полное вложение* $\delta_{\mathcal{C}} : \mathbb{C}_\Delta \to \mathbb{C}_\Pi$, *которое отправляет* $\mathbf{c}_{[n]} \in \mathbb{C}_\Delta$ *в* $\mathbf{c}_{[n]} : [n] \to \mathcal{C}$, *рассматриваемый как объект* $\mathbb{C}_\Pi$. □

Имеем следующую декартову диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}_\Delta \arrow[r, "\delta_{\mathbb{C}}"] \arrow[d] & \mathbb{C}_\Pi \arrow[d] \\
\Delta^{\mathsf{op}} \arrow[r, "\delta^{\mathsf{op}}"] & \Pi^{\mathsf{op}}.
\end{tikzcd}$$

Предложение 1.4.10 о наследовании для индексированных категорий даёт следующее:

Предложение 4.1.9. *Пусть дана* Π-*индексированная категория* $\mathcal{X}_\Pi$ *и декартов квадрат*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}_\Delta \arrow[r, "\delta_{\mathcal{X}}"] \arrow[d] & \mathcal{X}_\Pi \arrow[d] \\
\Delta^{\mathsf{op}} \arrow[r, "\delta^{\mathsf{op}}"] & \Pi^{\mathsf{op}},
\end{tikzcd}$$

тогда имеется две факторизационные системы, канонически индуцированные на каждой из категорий $\mathcal{X}_\Delta$ *и* $\mathcal{X}_\Pi$, *так что* $\delta_{\mathcal{X}}$ *— факторизационный функтор в каждом из случаев.*

1. *Факторизационная система "инъекция-сюръекция",* $((\mathcal{X}_\Delta)_-, (\mathcal{X}_\Delta)_+)$ *для* $\mathcal{X}_\Delta$ *и, соответственно,* $((\mathcal{X}_\Pi)_-, (\mathcal{X}_\Pi)_+)$ *для* $\mathcal{X}_\Pi$, *индуцированные с противоположных категорий к* (Δ_s, Δ_i) *и* (Π_s, Π_i) *соответственно. Более того,* $(\mathcal{X}_\Delta, (\mathcal{X}_\Delta)_-, (\mathcal{X}_\Delta)_+)$ *— категория Риди, и функтор* $\delta_{\mathcal{X}}$ *— замкнутый справа факторизационный функтор, так что* $(\delta_{\mathcal{X}})_L : (\mathcal{X}_\Delta)_- \to (\mathcal{X}_\Pi)_-$ *— замкнутое вложение нётеровых категорий.*

2. *Факторизационная система Сигала,* $(\mathscr{S}_{\mathcal{X}_\Delta}, \mathscr{A}_{\mathcal{X}_\Delta})$ *и* $(\mathscr{S}_{\mathcal{X}_\Pi}, \mathscr{A}_{\mathcal{X}_\Pi})$, *индуцированная с категорий, противоположных к* $(\mathrm{A}_\Delta, \Sigma_\Delta)$ *и* $(\mathrm{A}_\Pi, \Sigma_\Pi)$ *соответственно. Ограничение факторизационного функтора* $\delta_{\mathcal{X}}$, $(\delta_{\mathcal{X}})_L : \mathscr{S}_{\mathcal{X}_\Delta} \to \mathscr{S}_{\mathcal{X}_\Pi}$, *— замкнутое вложение нётеровых категорий.*

Определение 4.1.10. Имея опрасслоение $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$, его Π-*расширение* — расслоение $\mathbf{E}_\Pi \to \mathbb{C}_\Pi$, получаемое как обратный образ транспонированного расслоения $\mathcal{E}^\top \to \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ вдоль функтора $t_{\mathbb{C}_\Pi} : \mathbb{C}_\Pi \to \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ вычисления на конечном объекте.

Лемма 4.1.11. *Пусть $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — опрасслоение, тогда имеем следующий декартов квадрат*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{E}_\Delta \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{E}_\Pi \arrow[d] \\
\mathbb{C}_\Delta \arrow[r, "\delta_{\mathbb{C}}"] & \mathbb{C}_\Pi,
\end{tikzcd}$$

где $\mathbf{E}_\Delta \to \mathbb{C}_\Delta$ — симплициальное расширение (Определение 3.1.6) опрасслоения $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ на $\mathbb{C}_\Delta$. □

Определение 4.1.12. Модельным (нормализованным) сигаловым расслоением над Π - индексированной категорией $\mathcal{X}_\Pi \to \Pi^{\mathsf{op}}$ называется расслоение $p : \mathcal{F} \to \mathcal{X}_\Pi$, такое что

- оно — полурасслоение над сигаловой факторизационной структурой на $\mathcal{X}_\Pi$, (так что функторы перехода над $\mathscr{A}_{\mathcal{X}_\Pi}$ — эквивалентности категорий в нормализованном случае),
- каждый слой $\mathcal{F}(x)$ — модельная категория, и вдобавок контравариантные функторы перехода вдоль $(\mathcal{X}_\Pi)_-$ сохраняют фибрации и тривиальные фибрации, ковариантные функторы перехода вдоль $(\mathcal{X}_\Pi)_+$ сохраняют кофибрации и тривиальные кофибрации, и, наконец, фибрационные функторы перехода вдоль всякого морфизма $\mathcal{X}$ сохраняют слабые эквивалентности.

Категория $\mathsf{Sect}(\mathcal{X}_\Pi, \mathcal{F})$ обладает гомотопической структурой, даваемой поточечными слабыми эквивалентностями; обозначим через $\operatorname{Ho}\mathsf{Sect}(\mathcal{X}_\Pi, \mathcal{F})$ соответствующую локализацию.

Лемма 4.1.13. *Пусть $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — модельное опрасслоение (Определение 3.2.4), тогда $\mathbf{E}_\Pi \to \mathbb{C}_\Pi$ — модельное сигалово расслоение.*

Доказательство. Очевидно. □

Категория $\mathsf{Sect}(\mathcal{X}_\Delta, \mathcal{F})$ обладает модельной структурой по Теореме 2.2.5. Функтор обратного образа $\delta^*_{\mathcal{X}} : \mathsf{Sect}(\mathcal{X}_\Pi, \mathcal{F}) \to \mathsf{Sect}(\mathcal{X}_\Delta, \mathcal{F})$ сохраняет слабые эквивалентности. Обозначим через $\mathsf{Sect}_{\mathscr{S}}(\mathcal{X}_\Pi, \mathcal{F})$ полную подкатегорию $\mathsf{Sect}(\mathcal{X}_\Pi, \mathcal{F})$, состоящую из тех сечений, что посылают $\mathscr{S}_{\mathcal{X}_\Pi}$ в слабо декартовы (Определение 3.2.6) морфизмы $\mathcal{F}$; как и раньше, будем называть такие сечения сигаловыми. Очевидно, δ^* сохраняет сигаловы сечения.

Предложение 4.1.14. *Пусть* $\mathcal{F} \to \mathcal{X}_\Pi$ *модельное сигалово расслоение над* Π*-категорией* $\mathcal{X}_\Pi$*. Тогда*

1. *Функтор* $\delta^*_{\mathcal{X}} : \mathsf{Sect}(\mathcal{X}_\Pi, \mathcal{F}) \to \mathsf{Sect}(\mathcal{X}_\Delta, \mathcal{F})$ *допускает* строго полный *правый сопряжённый* $\delta_{\mathcal{X},*} : \mathsf{Sect}(\mathcal{X}_\Delta, \mathcal{F}) \to \mathsf{Sect}(\mathcal{X}_\Pi, \mathcal{F})$.

2. *Для всякого функтора* $F_\Pi : \mathcal{Y}_\Pi \to \mathcal{X}_\Pi$ *между* Π*-индексированными категориями, морфизм замены базы* $F^*_\Pi \delta_{\mathcal{X},*} \to \delta_{\mathcal{Y},*} F^*_\Delta$ *в диаграмме*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Sect}(\mathcal{X}_\Delta, \mathcal{F}) \arrow[r, "\delta_{\mathcal{X},*}"] \arrow[d, "F^*_\Delta"'] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow"] & \mathsf{Sect}(\mathcal{X}_\Pi, \mathcal{F}) \arrow[d, "F^*_\Pi"] \\ \mathsf{Sect}(\mathcal{Y}_\Delta, \mathcal{F}) \arrow[r, "\delta_{\mathcal{Y},*}"] & \mathsf{Sect}(\mathcal{Y}_\Pi, \mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

   — изоморфизм.

3. *Правый сопряжённый* $\delta_{\mathcal{X},*}$ *отправляет слабые эквивалентности между фибрантными объектами* $\mathsf{Sect}(\mathcal{X}_\Delta, \mathcal{F})$ *в слабые эквивалентности* $\mathsf{Sect}(\mathcal{X}_\Pi, \mathcal{F})$*. В частности, потому существует правый производный функтор* $\mathbb{R}\delta_{\mathcal{X},*}$.

4. *Функтор* $\mathbb{R}\delta_{\mathcal{X},*}$ *строго полон и переводит сигаловы сечения над* $\mathcal{X}_\Delta$ *в* $\mathrm{Ho}\,\mathsf{Sect}_{\mathscr{S}}(\mathcal{X}_\Pi, \mathcal{F})$.

Доказательство. Первое утверждение — следствие Предложений 4.1.9, 1.3.15 и 1.4.20. Заметим, в частности, что Предложение 1.3.15 предъявляет индуктивную формулу для вычисления $\delta_{\mathcal{X},*}$,

$$\delta_{\mathcal{X},*}X(x) = \varprojlim\nolimits_{Mat(x)} Res_x \delta_{\mathcal{X},*} X|_{Mat(x)}$$

где категория $Mat(x)$ состоит из всех морфизмов $x \to x'$ в $\mathcal{X}_\Pi$, которые накрывают нетривиальные инъекции $P \overset{\neq}{\hookleftarrow} P'$ в Π. На уровне категорий, $Mat(x)$ эквивалентна $(\Pi_i/P)^{\mathsf{op}}$ минус тождественное отображение.

Для второго утверждения, заметим, что $F^*_\Pi \delta_{\mathcal{X},*} X$ на $y \in \mathcal{Y}_\Pi$ вычисляется как

$$F^*_\Pi \delta_{\mathcal{X},*} X(y) = \varprojlim\nolimits_{Mat(F_\Pi(y))} Res_{F_\Pi(y)}(\delta_{*,\mathcal{X}} X)|_{Mat(F_\Pi(y))},$$

а $\delta_{\mathcal{Y},*} F^*_\Delta X(y)$ — как

$$\delta_{\mathcal{Y},*} F^*_\Delta X(y) = \varprojlim\nolimits_{Mat(y)} Res_y(\delta_{\mathcal{Y},*} F^*_\Delta X)|_{Mat(y)}.$$

Воспользуемся теперь индукцией по числу элементов в P, ЧУМ, которое отвечает y. Обе категории $Mat(F_\Pi(y))$ и $Mat(y)$ эквивалентны $(\Pi_i/P)^{\mathsf{op}}$ без тождественного отображения. Индуктивно предположив, что морфизм замены базы — изоморфизм для ЧУМ с меньшим числом элементов, чем у P, имеем, что $Res_{F_\Pi(y)}(\delta_{*,\mathcal{X}} X)|_{Mat(F_\Pi(y))}$ и $Res_y(\delta_{\mathcal{Y},*} F^*_\Delta X)|_{Mat(y)}$ совпадают, отвечая, с точностью до изоморфизма, одному и тому же функтору $(\Pi_i/P)^{\mathsf{op}} \backslash \{id_P\} \to \mathcal{F}(F_\Pi(y))$.

Для третьего утверждения, лемма Кена Брауна [24, 20] показывает, что достаточно посмотреть, что происходить с тривиальными фибрациями между фибрантными объектами. Докажем, что если $X \to Y$ — тривиальная фибрация в $\mathsf{Sect}(\mathcal{X}_\Delta, \mathcal{F})$, то тогда для каждого $x \in \Pi$, отображение $\delta_{\mathcal{X},*}X(x) \to \delta_{\mathcal{X},*}Y(x)$ — тривиальная фибрация в $\mathcal{F}(x)$. По индукции, видим, что стрелка $\delta_{\mathcal{X},*}X(x) \to \delta_{\mathcal{X},*}Y(x)$ может быть представлена как предел тривиальных фибраций, а потому является таковой.

То, что правый производный функтор $\mathbb{R}\delta_{\mathcal{X},*}$ строго полон, следует из того, что $\delta_{\mathcal{X},*}$ строго полон и имеет сопряжённый, и что взятие фибрантной замены даёт эквивалентность категорий $\mathrm{Ho}\,\mathsf{Sect}(\mathcal{X}_\Delta, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Ho}\,\mathsf{Sect}(\mathcal{X}_\Delta, \mathcal{F})_{fib}$. Наконец, пусть X — фибрантное сигалово сечение и $x \in \mathcal{X}_\Pi$ — объект над P. Поскольку сигаловы отображения — часть факторизационной системы, подкатегория $Mat^{\mathscr{S}}(x) \subset Mat(x)$, даваемая сигаловыми отображениями, финальна. Поскольку открытое вложение $P' \hookrightarrow P$ определяется образом $1_{P'}$, мы видим, что $Mat^{\mathscr{S}}(x)$ эквивалентна категории, противоположной $P \setminus \{1_P\}$, а потому стягиваема. В силу финальности можно переписать

$$\delta_{\mathcal{X},*}X(x) = \varprojlim\nolimits_{Mat^{\mathscr{S}}(x)} Res_x \delta_{\mathcal{X},*}X|_{Mat^{\mathscr{S}}(x)}.$$

Докажем, что для фибрантного сигалова сечения X и любого сигалова отображения $f : x \to y$ в $\mathcal{X}_\Pi$, индуцированный морфизм $\delta_{\mathcal{X},*}X(x) \to f^*\delta_{\mathcal{X},*}X(y)$ — тривиальная фибрация. По индукции можно считать, что функтор $Z = Res_x\delta_{\mathcal{X},*}X|_{Mat^{\mathscr{S}}(x)} : Mat^{\mathscr{S}}(x) \to \mathcal{F}(x)$ имеет свойство, что для $a \to b$ в $Mat^{\mathscr{S}}(x)$, отображение $Z(a) \to Z(b)$ — тривиальная фибрация между фибрантными объектами. Вспоминая о стягиваемости $Mat^{\mathscr{S}}(x)$, результат, известный в теории модельных категорий даёт, что всякое отображение проекции $\varprojlim_{Mat^{\mathscr{S}}(x)} Z \to Z(a)$ — тривиальное расслоение. Это завершает доказательство последнего утверждения. □

Вернёмся к обсуждению $\mathcal{S}$-локальной постоянности (Определение 4.0.8 производных сечений над $\mathcal{C}$ и того, как она переводится на случай более общих ЧУМ. Для наших целей, будет достаточно ограничиться теми ЧУМ, что имеют вид $[n] \times [k] \in \Delta \times \Delta$.

Определение 4.1.15. Пусть $\mathcal{C}$ — категория. Её *двойной симплициальной заменой* называется опфибрационная конструкция Гротендика $\mathbb{C}_{\Delta\times\Delta} = (\int N_{\Delta\times\Delta}\mathcal{C})$, где $N_{\Delta\times\Delta}\mathcal{C}$ — функтор двойного нерва

$$([n],[m]) \mapsto \mathbf{Cat}([n]\times[m], \mathcal{C}) = \mathrm{Ob}\,\mathsf{Fun}([n]\times[m], \mathcal{C}).$$

По определению, $\pi : \mathbb{C}_{\Delta\times\Delta} \to \Delta^{\mathsf{op}} \times \Delta^{\mathsf{op}}$ — $\Delta \times \Delta$-индексированная категория. Обозначим её объект через $\mathbf{c}_{[m]}^{[k]}$, с соглашением, что нижний индекс отвечает первому аргументу. Этот объект можно нарисовать как прямоугольную диаграмму в $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} c_0^0 \arrow[r] \arrow[dd] & \ldots \arrow[r] & c_m^0 \arrow[dd] \\ & \ldots & \\ \ldots \arrow[dd] & \ldots & \ldots \arrow[dd] \\ & \ldots & \\ c_0^k \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & c_m^k. \end{tikzcd}$$

Очевидный функтор $\nu : \Delta \times \Delta \to \Pi$ индуцирует функтор $\nu_{\mathcal{C}} : \mathbb{C}_{\Delta\times\Delta} \to \mathbb{C}_{\Pi}$ на уровне замен.

Определение 4.1.16. Морфизм $\mathbf{c}_{[n]}^{[m]} \to \mathbf{c}'^{[k]}_{[l]}$ в $\mathbb{C}_{\Delta\times\Delta}$ — *анти-сигалов* если он определяется единственным образом по вложению $([l],[k]) \hookrightarrow ([m],[n])$, даваемому парой анти-сигаловых отображений $[l] \hookrightarrow [m]$ и $[k] \hookrightarrow [n]$ in Δ.

Если мы представим $\mathbf{c}_{[n]}^{[m]}$ диаграммой

$$\begin{tikzcd} c_0^0 \arrow[r] \arrow[dd] & \ldots \arrow[r] & c_n^0 \arrow[dd] \\ & \ldots & \\ \ldots \arrow[dd] & \ldots & \ldots \arrow[dd] \\ & \ldots & \\ c_0^m \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & c_n^m, \end{tikzcd}$$

тогда $\mathbf{c}'^{[k]}_{[l]}$ даётся прямоугольником, содержащим правый нижний угол.

Определение 4.1.17. Пусть дана изо-подкатегория $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$, тогда морфизм $\mathbf{c}_{[n]}^{[m]} \to \mathbf{c}'^{[k]}_{[l]}$ называется $\mathcal{S}$-*стирающим*, если он анти-сигалов, и отображения

$$c_{j-1}^i \to c_j^i,\ \ c_j^{i-1} \to c_j^i\ \ 1 \le i \le m-k,\ \ 1 \le j \le n-l,$$

лежат в $\mathcal{S}$.

Морфизм $\mathbf{c}_{[n]}^{[m]} \to \mathbf{c}'^{[k]}_{[l]}$ — сильно $\mathcal{S}$-стирающий, если он $\mathcal{S}$-стирающий и, вдобавок, не существует $\mathcal{S}$-стирающих отображений из $\mathbf{c}'^{[k]}_{[l]}$.

Определение 4.1.18. Пусть дано модельное опрасслоение $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ и изо-подкатегория $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$, Сечение $X : \mathbb{C}_{\Delta\times\Delta} \to \mathbf{E}$ называется $\mathcal{S}$-*локально постоянным* если для всякого $\mathcal{S}$-стирающего морфизма $\alpha : \mathbf{c}_{[n]}^{[m]} \to \mathbf{c}'^{[k]}_{[l]}$, образ $X(\alpha)$ — слабая эквивалентность.

Легко видеть, что достаточно потребовать, чтобы $X(\alpha)$ было слабой эквивалентностью для всякого сильно $\mathcal{S}$-стирающего морфизма α.

Предложение 4.1.19. *Пусть $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — модельное опрасслоение и $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ — изо-подкатегория в $\mathcal{C}$. Тогда функтор*

$$\mathsf{h}\nu_{\mathcal{C}}^{*}\mathbb{R}\delta_{\mathcal{C},*} : \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}(\mathcal{C},\mathcal{E}) \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{Sect}(\mathbb{C}_{\Delta\times\Delta},\mathbf{E})$$

отправляет $\mathcal{S}$-локально постоянные производные сечения в $\mathcal{S}$-локально постоянные сечения над $\mathbb{C}_{\Delta\times\Delta}$.

Доказательство. Рассмотрим фибрантное $\mathcal{S}$-локально постоянное производное сечение X. Предложение 1.3.15 даёт индуктивную формулу для $\delta_{\mathcal{C},*}$, по которой

$$\delta_{\mathcal{C},*}X(\nu_{\mathcal{C}}\mathbf{c}_{[n]}^{[k]}) = \varprojlim_{Mat(\mathbf{c}_{[n]}^{[k]})} Res_{\mathbf{c}_{[n]}^{[k]}}\delta_{\mathcal{C},*}X|_{Mat(\mathbf{c}_{[n]}^{[k]})}$$

где категория $Mat(\mathbf{c}_{[n]}^{[k]})$ состоит из всех морфизмов $\mathbf{c}_{[n]}^{[k]} \to x$ в $\mathbb{C}_{\Pi}$ которые накрывают нетривиальные инъекции $[n]\times[k] \xhookrightarrow{\neq} P$ в Π.

Поскольку анти-сигаловы отображения $\Delta\times\Delta$ — часть факторизационной системы, существует финальная подкатегория $Mat^{aS}(\mathbf{c}_{[n]}^{[k]}) \subset Mat(\mathbf{c}_{[n]}^{[k]})$ состоящая из анти-сигаловых отображений, с необходимостью принимающих вид $\mathbf{c}_{[n]}^{[k]} \to \mathbf{c}'^{[k-K]}_{[n-N]}$ с $c'^{i}_{j} = c^{i+K}_{j+N}$. А потому,

$$\delta_{\mathcal{C},*}X(\nu_{\mathcal{C}}\mathbf{c}_{[n]}^{[k]}) = \varprojlim_{(\mathbf{c}_{[n]}^{[k]}\to\mathbf{c}'^{[k-K]}_{[n-N]})\in Mat^{aS}(\mathbf{c}_{[n]}^{[k]})} \delta_{\mathcal{C},*}X(\nu_{\mathcal{C}}\mathbf{c}'^{[k-K]}_{[n-N]}).$$

Легко видать, что всякое анти-сигалово отображение $\alpha : \mathbf{c}_{[n]}^{[k]} \to \mathbf{c}'^{[k-K]}_{[n-N]}$ единственным образом определяется как выбор крайней левой вершины внутреннего прямоугольника, соответствующей c_N^K. В частности, есть три объекта,

$$A : \mathbf{c}_{[n]}^{[k]} \to \mathbf{c}'^{[k-1]}_{[n]},\;\; B : \mathbf{c}_{[n]}^{[k]} \to \mathbf{c}''^{[k]}_{[n-1]},\;\; C : \mathbf{c}_{[n]}^{[k]} \to \mathbf{c}'''^{[k-1]}_{[n-1]},$$

которые определяются вершинами c_0^1, c_1^0 и c_1^1 соответственно. Можно видеть, что

$$\delta_{\mathcal{C},*}X(\nu_{\mathcal{C}}\mathbf{c}_{[n]}^{[k]}) = \delta_{\mathcal{C},*}X(\nu_{\mathcal{C}}\mathbf{c}'^{[k-1]}_{[n]}) \times_{\delta_{\mathcal{C},*}X\left(\nu_{\mathcal{C}}\mathbf{c}'''^{[k-1]}_{[n-1]}\right)} \delta_{\mathcal{C},*}X(\nu_{\mathcal{C}}\mathbf{c}''^{[k]}_{[n-1]}),$$

причём это — гомотопически расслоённое произведение, поскольку X — фибрантно. По индуктивной процедуре, подобной той, что описана в Предложении 4.1.14, мы получаем искомый результат. □

4.1.3. K-замены и башни функторов

Определение 4.1.20. Пусть $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — функтор. Полная симплициальная башня функтора F, $\mathbb{T}_{\Delta\times\Delta}(F)$, определяется следующим образом:

- Объект $\mathbb{T}_{\Delta\times\Delta}(F)$ даётся объектом $\mathbf{d}^{[n]}_{[k]} \in \mathbb{D}_{\Delta\times\Delta}$, объектом $\mathbf{c}_{[k]}$ категории $\mathbb{C}_\Delta$, и изоморфизмами
$$\begin{tikzcd} F(d^i_0) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & \dots \arrow[r] & F(d^i_k) \arrow[d, "\sim"'] \\ c_0 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & c_k \end{tikzcd} \tag{4.1.1}$$
для $0 \leq i \leq k$, которые совместимы с вертикальными отображениями в том смысле, что диаграммы
$$\begin{tikzcd} Fd^j_i \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & Fd^{j+1}_i \arrow[d, "\sim"'] \\ c_i \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "="] & c_i \end{tikzcd}$$
коммутативны для каждого $0 \leq i \leq k$ и $0 \leq j < n$. В частности, это означает, что все вертикальные отображения в $\mathbf{d}^{[n]}_{[k]}$ переходят в изоморфизмы в $\mathcal{C}$.

- Морфизмы даются отображениями $\Delta^{\mathsf{op}} \times \Delta^{\mathsf{op}}$, совместимыми с объектами в смысле, обычном для бисимплициальных замен.

Мы будем обозначать через $(\mathbf{d}^{[n]}_{[k]}, \mathbf{c}_{[k]})$ объекты $\mathbb{T}_{\Delta\times\Delta}(F)$, без явного упоминания изоморфизмов (*4.1.1*). Сопоставление $(\mathbf{d}^{[n]}_{[k]}, \mathbf{c}_{[k]}) \mapsto \mathbf{c}_{[k]}$ задаёт функтор $\bar{p}_F : \mathbb{T}_{\Delta\times\Delta}(F) \to \mathbb{C}$, являющийся опрасслоением, со слоями, равными симплициальным заменам категорий $\mathcal{D}(\mathbf{c}_{[k]})$.

Замечание 4.1.21. Имея модельное опрасслоение $\mathcal{E} \to \mathbb{C}$, функтор
$$\bar{p}^*_F : \mathsf{Sect}(\mathbb{C}_\Delta, \mathcal{E}) \to \mathsf{Sect}(\mathbb{T}_{\Delta\times\Delta}(F), \mathcal{E})$$
не является правым квилленовым. Проблема связана с тем, что каждый Δ-фактор в $\mathbb{T}_{\Delta\times\Delta}(F)$ даёт вклад в мэтчинг-объект для фибраций в определении модельной структуры Риди.

Можно решить эту проблему следующим образом.

Определение 4.1.22. Обозначим через K категорию следующего вида. Объект K — инъекция $[m] \hookrightarrow [n]$, с которой мы связываем число $2n - m$. Морфизм в K — коммутативная диаграмма вида
$$\begin{tikzcd} {[m]} \arrow[r, hook] & {[n]} \arrow[d, hook] \\ {[m']} \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & {[n']}, \end{tikzcd}$$
так что мы имеем $2n - m \leq 2n' - m'$.

Также имеются естественные функторы $\mathrm{K} \to \Delta_i$, $\mathrm{K} \to \Delta_i^{\mathsf{op}}$.

Лемма 4.1.23. *Категория* K *с описанной функцией степени — прямая категория Риди. Любой функтор* $\mathcal{F} \to \mathrm{K}$ *с дискретными слоями также даёт структуру прямой категории Риди на* $\mathcal{F}$.

Доказательство. Очевидно. □

По этой причине всякое модельное полурасслоение над K или $\mathcal{F}$ как выше будет по факту предопрасслоением, и мэтчинг-объекты будут тривиальны (см. 2.2.2).

Определение 4.1.24. Пусть $\mathcal{X} \to \Delta^{\mathsf{op}}$ — Δ-индексированная категория. Её *ассоциированная* K-*категория* — категория $\mathrm{K}(\mathcal{X})$, объекты которой — пары (f, α), где $f : [m] \hookrightarrow [n]$ — объект в K, а $y \xleftarrow{\alpha} x$ — морфизм в $\mathcal{X}$ над f. Морфизм $(f : [m] \hookrightarrow [n], y \xleftarrow{\alpha} x) \to (g : [m'] \hookrightarrow [n'], t \xleftarrow{\beta} z)$ даётся парой из морфизма

$$\begin{tikzcd} {[m]} \arrow[r, hook, "f"] & {[n]} \arrow[d, hook] \\ {[m']} \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, "g"'] & {[n']}, \end{tikzcd} \tag{4.1.2}$$

в K и диаграммы в $\mathcal{X}$,

$$\begin{tikzcd} y \arrow[d] & x \arrow[l, "\alpha"'] \\ t & z, \arrow[l, "\beta"] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

накрывающей K-диаграмму (*4.1.2*).

Если взять категорию $\mathcal{C}$ и её симплициальную замену $\mathbb{C}$, то можно применить вышеописанный функтор и получить категорию $\mathrm{K}(\mathbb{C})$, морфизмы в которой выглядят как диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathbf{c}'_{[m]} \arrow[d] & \mathbf{c}_{[n]} \arrow[l] \\ \mathbf{d}'_{[m']} & \mathbf{d}_{[n']}, \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

накрывающие диаграммы типа (*4.1.2*).

Предложение 4.1.25. *Пусть* $\mathcal{X} \to \Delta^{\mathsf{op}}$ *—* Δ*-индексированная категория. Тогда у следующих объектов одинаковый гомотопический тип:*

1. *Симплициальное множество* $[n] \mapsto \mathcal{X}([n])$*, ассоциированное с* $\mathcal{X}$*,*

2. *Нерв категории* $\mathcal{X}$*,*

3. *Нерв категории* $\mathcal{X}_-$*, даваемый ограничением* $\mathcal{X} \to \Delta^{\mathsf{op}}$ *на инъекции* Δ_i^{op}

4. Нерв категории $\mathrm{K}(\mathcal{X})$.

Доказательство. То, что (1) $\sim$ (2) — известный результат, следствие того факта, что функтор

$$\mathbf{SSet} \to \mathbf{SSet}, \ \ S \mapsto N \int S$$

сохраняет копределы, инъекции и имеет естественное преобразование в тождественный функтор, $N \int \to id$, которое является слабой эквивалентностью на стандартных n-симплексах Δ^n. Отсюда можно показать, что $N \int S$ слабо эквивалентно S для всякого симплициального множества S.

Для (2) $\sim$ (3), применим теорему Квиллена A к функтору $\mathcal{X}_- \to \mathcal{X}$. Рассматривая комма-слои, достаточно доказать, что $i/[n]$ стягиваемо для всякого $[n] \in \Delta$, где $i : \Delta_i \hookrightarrow \Delta$ — функтор вложения.

Докажем по индукции. База индукции, — категория $i/[0]$, —- эквивалентна Δ_i. Диагональ $\Delta_i \to \Delta_i \times \Delta_i$ — гомотопическая эквивалентность, поскольку допускает гомотопически обратный “функтор конкатенации”

$$j : \Delta_i \times \Delta_i \to \Delta_i, \ \ ([n], [m]) \mapsto [n + m + 1],$$

который соединяет последний элемент $[n]$ с первым элементом $[m]$ дополнительной стрелкой. Имеются естественные преобразования $id \to ij$ и $id \to ji$, а потому $|N\Delta_i| \times |N\Delta_i| \cong |N\Delta_i|$, что даёт $|N\Delta_i| \cong *$.

Покажем шаг индукции для $[n] = [1]$; высшие шаги делаются подобным же образом. Рассмотрим две подкатегории $(i/[1])_0$ и $(i/[1])_1$ в $i/[1]$, состоящие из тех морфизмов $[m] \to [1]$, которые содержат 0 и 1 в своём образе, соответственно. Каждая из этих категорий эквивалентна $\Delta_i \times \mathrm{O}_i$, где O_i — категория конечных полностью упорядоченных множеств и инъекций. Обе категории Δ_i и O_i, а потому и каждая из $(i/[1])_0$, $(i/[1])_1$, стягиваемы. Если мы обозначим через $(i/[1])_{01}$ пересечение $(i/[1])_0$ и $(i/[1])_1$, то мы имеем следующую кодекартову диаграмму в **Cat**

$$\begin{tikzcd}
(i/[1])_{01} \arrow[r] \arrow[d] & (i/[1])_0 \arrow[d] \\
(i/[1])_1 \arrow[r] & i/[1] \arrow[ul, phantom, "\lrcorner", very near start]
\end{tikzcd}$$

где левая вертикальная и верхняя горизонтальная стрелка инъективны на объектах. Можно проверить, что на уровне нервов также получается прямой образ, причём гомотопический в **SSet**. Потому получаем, что $i/[1]$ стягиваема.

Для (3) $\sim$ (4), заметим что проекция $p : \mathrm{K} \to \Delta_i$ накрывается функтором $p_{\mathcal{X}} : \mathrm{K}(\mathcal{X}) \to \mathcal{X}_{-}^{\mathsf{op}}$, который отправляет $x \leftarrow y$ в y. Слои $z \backslash p_{\mathcal{X}}$ стягиваемы (они имеют начальные объекты), потому по теореме А Квиллена (и благодаря тому, что $N\mathcal{X}_{-}^{\mathsf{op}}$ эквивалентен $N\mathcal{X}_{-}$) получаем гомотопическую эквивалентность. □

Определение 4.1.26. Пусть $\mathcal{X}$ — Δ-индексированная категория. Назовём Δ - индексированным опрасслоением над $\mathcal{X}$ опрасслоение $p : \mathcal{O} \to \mathcal{X}$, такое что всякий слой $\mathcal{O}(x)$ является Δ - индексированной категорией, и функторы перехода совместимы с индексацией.

Существует проекция-композиция $\pi_1 : \mathcal{O} \xrightarrow{p} \mathcal{X} \to \Delta^{\mathsf{op}}$. Проекции $\pi_x : \mathcal{O}(x) \to \Delta^{\mathsf{op}}$, отвечающие индексации слоёв, формируют вторую проекцию $\pi_2 : \mathcal{O} \to \Delta^{\mathsf{op}}$. Естественно получаемая диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O} \arrow[r, "\pi_1 \times \pi_2"] \arrow[d, "p"'] & \Delta^{\mathsf{op}} \times \Delta^{\mathsf{op}} \arrow[d, "pr_1"] \\ \mathcal{X} \arrow[r] & \Delta^{\mathsf{op}} \end{tikzcd}$$

коммутативна, где $pr_1 : \Delta^{\mathsf{op}} \times \Delta^{\mathsf{op}} \to \Delta^{\mathsf{op}}$ означает проекцию на первый аргумент.

Определение 4.1.27. Пусть $p : \mathcal{O} \to \mathcal{X}$ — Δ-индексированное опрасслоение. Его *ассоциированным* K-*опрасслоением*, обозначаемым через $p_{\mathrm{K}} : \mathrm{K}(\mathcal{O}) \to \mathcal{X}$, называется опрасслоение, получаемое применением $\mathrm{K}(-)$ к слоям $\mathcal{O}(x)$ функтора p.

Как и выше, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K}(\mathcal{O}) \arrow[r, "\pi_\Delta \times \pi_{\mathrm{K}}"] \arrow[d, "p_{\mathrm{K}}"'] & \Delta^{\mathsf{op}} \times \mathrm{K} \arrow[d, "pr_1"] \\ \mathcal{X} \arrow[r] & \Delta^{\mathsf{op}}, \end{tikzcd}$$

где $\pi_\Delta : \mathrm{K}(\mathcal{O}) \to \Delta^{\mathsf{op}}$, $\pi_{\mathrm{K}} : \mathrm{K}(\mathcal{O}) \to \mathrm{K}$ и $pr_1 : \Delta^{\mathsf{op}} \times \mathrm{K} \to \Delta^{\mathsf{op}}$ обозначают очевидные проекции.

Определение 4.1.28. Пусть F — функтор. Его *башней* $p_F : \mathbb{T}(F) \to \mathbb{C}$ называется K - опрасслоение, ассоциированное с $\mathbb{T}_{\Delta\times\Delta}(F) \to \mathbb{C}$, полной симплициальной башней (Определение 4.1.20) функтора F.

Объект $\mathbb{T}(F)$ можно, таким образом, представить как морфизм $\mathbf{d}_{[n]}^{[k]} \to \mathbf{d}_{[n]}^{\prime[m]}$ в $\mathbb{D}_{\Delta\times\Delta}$, вместе с когерентными изоморфизмами $\mathbb{F}(\mathbf{d}_{[n]}^{i}) \cong \mathbb{F}(\mathbf{d}_{[n]}^{\prime j}) \cong \mathbf{c}_{[n]}$. Функтор p_F действует как $p_F(\mathbf{d}_{[n]}^{[k]} \to \mathbf{d}_{[n]}^{\prime[m]}) = \mathbf{c}_{[n]}$.

Определение 4.1.29. Морфизм в $\mathrm{K}(\mathcal{O})$ — *сигалов*, если его проекция в $\mathcal{X}$ принадлежит к $\mathscr{S}_{\mathcal{X}}$. Обозначим через $\mathscr{S}_{\mathrm{K}(\mathcal{O})}$ подкатегорию сигаловых морфизмов в $\mathrm{K}(\mathcal{O})$.

Определение 4.1.30. Пусть $\mathcal{E} \to \mathcal{X}$ — модельное расслоение Сигала, а $p : \mathcal{O} \to \mathcal{X}$ — Δ-индексированное опрасслоение. Обозначим через $\mathsf{Sect}_{\mathscr{S}}(\mathrm{K}(\mathcal{O}), \mathcal{E})$ подкатегорию *сигаловых* сечений, отправляющих $\mathscr{S}_{\mathrm{K}(\mathcal{O})}$ в слабо декартовы отображения. Далее, обозначим также через $\mathsf{Sect}^{LC}_{\mathscr{S}}(\mathrm{K}(\mathcal{O}), \mathcal{E})$ подкатегорию $\mathsf{Sect}_{\mathscr{S}}(\mathrm{K}(\mathcal{O}), \mathcal{E})$ тех сигаловых сечений X, таких что для всякого $x \in \mathcal{X}$, ограничение $X|_{\mathrm{K}(\mathcal{O})(x)} : \mathrm{K}(\mathcal{O})(x) \cong \mathrm{K}(\mathcal{O}(x)) \to \mathcal{E}(x)$ отправляет все морфизмы в слабые эквивалентности в $\mathcal{E}(x)$. Назовём такие сечения p_{K}-локально постоянными на $\mathrm{K}(\mathcal{O})$.

Предложение 4.1.31. *Пусть $p : \mathcal{O} \to \mathcal{X}$ — Δ-индексированное опрасслоение над $\mathcal{X}$, и $\mathcal{E} \to \mathcal{X}$ — модельное сигалово расслоение. Тогда имеем квилленову пару*

$$p_{\mathrm{K},!} : \mathsf{Sect}(\mathrm{K}(\mathcal{O}), \mathcal{E}) \rightleftarrows \mathsf{Sect}(\mathcal{X}, \mathcal{E}) : p^*_{\mathrm{K}},$$

в которой левый сопряжённый вычисляется как

$$p_{\mathrm{K},!}X(x) = \varinjlim_{\mathrm{K}(\mathcal{O})(x)} X|_{\mathrm{K}(\mathcal{O})(x)}.$$

Более того, если слои $\mathcal{O} \to \mathcal{X}$ стягиваемы, то посредством ограничения получаем сопряжённую эквивалентность

$$\mathbb{L}p_{\mathrm{K},!} : \mathrm{Ho}\,\mathsf{Sect}^{LC}_{\mathscr{S}}(\mathrm{K}(\mathcal{O}), \mathcal{E}) \overset{\sim}{\rightleftarrows} \mathrm{Ho}\,\mathsf{Sect}_{\mathscr{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{E}) : \mathbb{R}p^*_{\mathrm{K}}.$$

Доказательство. Выражение для левого сопряжённого происходит прямо из Предложения 1.3.3. Поскольку категория K — прямая категория Риди, мы видим, что для модельной категории $\mathcal{M}$, функтор $pr_1^* : \mathsf{Fun}(\Delta^{\mathsf{op}}, \mathcal{M}) \to \mathsf{Fun}(\Delta^{\mathsf{op}} \times \mathrm{K}, \mathcal{M})$ сохраняет (тривиальные) фибрации Риди. Факт о том, что p^*_{K} право квилленов, можно доказать тем же способом.

Имея локально постоянное сечение X, заметим, что $X|_{\mathrm{K}(\mathcal{O})(x)} : \mathrm{K}(\mathcal{O})(x) \to \mathcal{E}(x)$ — локально постоянный функтор, а потому [13] для каждого $a \leftarrow b$ из $\mathrm{K}(\mathcal{O})(x)$ (стягиваемой, а потому непустой категории), следующее естественное отображение в $\mathrm{Ho}\,\mathcal{E}(x)$ — слабая эквивалентность:

$$X(a \leftarrow b) \to \mathrm{hocolim}_{\mathrm{K}(\mathcal{O})(x)} X|_{\mathrm{K}(\mathcal{O})(x)} \cong \mathbb{L}p_{\mathrm{K},!}X(x). \tag{4.1.3}$$

Рассмотрим сигалово отображение $\alpha : x \to y$. Тогда есть опдекартово отображение $(a \leftarrow b) \to \alpha_!(a \leftarrow b)$, накрывающее α в $\mathrm{K}(\mathcal{O})$, и этот морфизм является сигаловым по определению. Коммутативная диаграмма $\mathrm{Ho}\,\mathcal{E}(x)$ вида

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{L}p_{\mathrm{K},!}X(x) \arrow[d] & X(a \leftarrow b) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d] \\
\alpha^*\mathbb{L}p_{\mathrm{K},!}X(y) & \alpha^*X(\alpha_!(a \leftarrow b)) \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

имеет то свойство, что правая стрелка — изоморфизм, а потому и левая, доказывая что $\mathbb{L}_{\mathrm{K},!}X$ — производное сечение.

Легко видеть, что $\mathbb{R}p_{\mathrm{K}}^*$ строго полон, поскольку для фибрантного $Y \in \mathsf{Sect}_{\mathscr{S}}(\mathcal{X}, \mathcal{E})$, отображение $(4.1.3)$ даёт

$$Y(x) = Y(p_{\mathrm{K}}(a \leftarrow b)) = \mathbb{R}p_{\mathrm{K}}^* Y(a \leftarrow b) \cong \mathbb{L}p_{\mathrm{K},!}(F^*Y)(x)$$

и это отображение, компонированное вместе с коединицей сопряжения, даёт тождественный морфизм в $\mathrm{Ho}\,\mathcal{E}(x)$. Двойственным образом, и снова используя $(4.1.3)$,

$$\mathbb{R}p_{\mathrm{K}}^* \mathbb{L}p_{\mathrm{K},!}X(a \leftarrow b) = \mathbb{L}p_{\mathrm{K},!}X(x) \cong X(a \leftarrow b),$$

и можно проверить, что этот морфизм в точности совпадает с компонентой единицы сопряжения. $\square$

4.2. Прямой образ и эквивалентность

Совместим две предыдущие конструкции. Во-первых, изучим, как башня $\mathbb{T}(F) \to \mathbb{C}_\Delta$ для функтора $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ отображается в Π-расслоение $\mathbb{D}_\Pi$.

Напомним, что есть функторы $s : \mathrm{K} \to \Delta_i^{\mathsf{op}}$ и $t : \mathrm{K} \to \Delta_i$. Используя первый, можно сделать композицию

$$\mu : \Delta^{\mathsf{op}} \times \mathrm{K} \longrightarrow \Delta^{\mathsf{op}} \times \Delta_i^{\mathsf{op}} \longrightarrow \Pi^{\mathsf{op}}.$$

Покажем, как эта композиция индуцирует $\mathbb{T}(F) \to \mathbb{D}_\Pi$. Напомним, что объект $\mathbb{T}(F)$ может быть представлен как пара $(\mathbf{c}_{[n]}, \mathbf{d}_{[n]}^{[m]} \to \mathbf{d}_{[n]}^{\prime[k]})$, вместе с изоморфизмами совместимости.

Лемма 4.2.1. *Существует диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{T}(F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{D}_\Pi|_{\Delta^{\mathsf{op}} \times \Delta_i^{\mathsf{op}}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{D}_\Pi \arrow[d] \\
\Delta^{\mathsf{op}} \times \mathrm{K} \arrow[r] & \Delta^{\mathsf{op}} \times \Delta_i^{\mathsf{op}} \arrow[r] & \Pi^{\mathsf{op}}
\end{tikzcd}$$

где правый квадрат — декартов, и скомпонированный морфизм $\mu_F : \mathbb{T}(F) \to \mathbb{D}_\Pi$ даётся отображением $(\mathbf{c}_{[n]}, \mathbf{d}_{[n]}^{[m]} \to \mathbf{d}_{[n]}^{\prime[k]})$ в образ $\mathbf{d}_{[n]}^{[m]}$ под действием вложения $\mathbb{D}_\Pi|_{\Delta^{\mathsf{op}} \times \Delta_i^{\mathsf{op}}} \to \mathbb{D}_\Pi$. Следственно, имеет место быть факторизация

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{T}(F) \arrow[r, "\omega_F"] \arrow[d] & \mathbb{T}_{\Delta \times \Delta}(F) \arrow[r, "\bar{\mu}_F"] \arrow[d] & \mathbb{D}_\Pi \arrow[d] \\
\Delta^{\mathsf{op}} \times \mathrm{K} \arrow[r] & \Delta^{\mathsf{op}} \times \Delta^{\mathsf{op}} \arrow[r] & \Pi^{\mathsf{op}}
\end{tikzcd}$$

через полную симплициальную башню $\bar{p}_F : \mathbb{T}_{\Delta \times \Delta}(F) \to \mathbb{C}$, с $\omega_F \bar{p}_F = p_F$.

Доказательство. Очевидно. $\square$

Напомним, что есть функтор $\delta_{\mathcal{C}} : \mathbb{C}_\Delta \to \mathbb{C}_\Pi$ между Δ и Π-заменой категории $\mathcal{C}$. Можно нарисовать следующую диаграмму,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}(F) \arrow[r, "\mu_F"] \arrow[d, "p_F"'] & \mathbb{D}_\Pi \arrow[d, "\mathbb{F}_\Pi"] \\ \mathbb{C}_\Delta \arrow[r, "\delta_{\mathcal{C}}"] & \mathbb{C}_\Pi \end{tikzcd}$$

которая априори некоммутативна.

Лемма 4.2.2. *В ситуации выше, обозначим также через $t_{\mathcal{C}} : \mathbb{C}_\Pi \to \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ функтор вычисления на конечном объекте. Тогда есть естественный изоморфизм $t_{\mathcal{C}}\delta_{\mathcal{C}}p_F \cong t_{\mathcal{C}}\mathbb{F}_\Pi\mu_F$ функторов $\mathbb{T}(F) \to \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.*

Доказательство. Значение $\mathbb{F}_\Pi\mu_F((\mathbf{c}_{[m]}, \mathbf{d}_{[m]}^{[k]} \leftarrow \mathbf{d}'^{[n]}_{[m]}))$ равно диаграмме

$$\begin{tikzcd} Fd_0^0 \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \arrow[r] & Fd_m^0 \arrow[d] \\ \ldots \arrow[d] & \ldots & \ldots \arrow[d] \\ Fd_0^k \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & Fd_m^k \end{tikzcd}$$

которую можно перерисовать как

$$\begin{tikzcd} c_0^0 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \ldots \arrow[r] & c_m^0 \arrow[d, "\cong"] \\ \ldots \arrow[d, "\cong"] & \ldots & \ldots \arrow[d, "\cong"] \\ c_0^k \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & c_m^k \end{tikzcd}$$

так что все горизонтальные ряды изоморфны $c_0 \to \ldots \to c_m$ в когерентном смысле. Значение $\delta_{\mathcal{C}}p_F((\mathbf{c}_{[m]}, \mathbf{d}_{[m]}^{[k]} \leftarrow \mathbf{d}'^{[n]}_{[m]}))$ равно $c_0 \to \ldots \to c_m$. В частности, после проекции в $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$, можно видеть, что $c_m \cong c_m^k$ естественным образом. $\square$

Следствие 4.2.3. *Пусть $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — модельное опрасслоение и $\mathbf{E} \to \mathbb{C}_\Pi$ — индуцированное модельное сигалово опрасслоение. Тогда имеем естественную эквивалентность $(\delta_{\mathcal{C}}p_F)^*\mathbf{E} \cong (\mathbb{F}_\Pi\mu_F)^*\mathbf{E}$.*

Примем соглашение, что $\mathbb{F}$ без индекса обозначает Δ-индексированный функтор, и мы изучаем функтор обратного образа $\mathbb{F}^* : \mathsf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to \mathsf{DSect}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$. Можно нарисовать следующую диаграмму,

$$\mathbb{D}_\Delta \xrightarrow{\delta_{\mathcal{D}}} \mathbb{D}_\Pi \xleftarrow{\mu_F} \mathbb{T}(F) \xrightarrow{p_F} \mathbb{C}_\Delta. \qquad (4.2.1)$$

Соответственно, получаем следующую последовательность функторов

$$\mathsf{Sect}(\mathbb{D}_\Delta, \mathbf{E}) \xrightarrow{\delta_{\mathcal{D},*}} \mathsf{Sect}(\mathbb{D}_\Pi, \mathbf{E}) \xrightarrow{\mu_F^*} \mathsf{Sect}(\mathbb{T}(F), \mathbf{E}) \xrightarrow{p_{F,!}} \mathsf{Sect}(\mathbb{C}_\Delta, \mathbf{E}).$$

Мы утверждаем, что композиция производных функторов,

$$\mathsf{h}\mathbb{F}_! \;:=\; \mathbb{L}p_{F,!} \circ \mathsf{h}\mu_F^* \circ \mathbb{R}\delta_{\mathbb{D},*},$$

даёт искомый функтор прямого образа, который становится эквивалентностью на локально постоянных производных сечениях.

Лемма 4.2.4. *Пусть X — F-локально постоянное производное сечение над $\mathcal{D}$ (Определение 4.0.9). Тогда $\mu_F^*\mathbb{R}\delta_{\mathbb{D},*}X$ — p_F-локально постоянное сигалово сечение (Определение 4.1.30) на категории $\mathbb{T}(F)$ башни $p_F : \mathbb{T}(F) \to \mathbb{C}$.*

Доказательство. Предложение 4.1.19 утверждает, что ограничение $\mathbb{R}\delta_{\mathbb{D},*}X$ на $\mathbb{D}_{\Delta\times\Delta}$ — $\mathcal{F}$-локально постоянно для подкатегории $\mathcal{F}$ морфизмов $\mathcal{D}$, которые послойны по отношению к F. Композиция $\mathbb{T}(F) \overset{\omega_F}{\to} \mathbb{T}_{\Delta\times\Delta}(F) \to \mathbb{D}_{\Delta\times\Delta} \to \mathbb{D}_\Pi$ равна μ_F, потому мы видим, что $\mu_F^*\mathbb{R}\delta_{\mathbb{D},*}X$ — p_F-локально постоянно, как и требовалось. □

Лемма 4.2.5. *ПустьF — резольвента, тогда $\mathsf{h}\mathbb{F}_! : \mathrm{Ho}\,\mathsf{Sect}(\mathbb{D}_\Delta, \mathbf{E}) \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{Sect}(\mathbb{C}_\Delta, \mathbf{E})$ переводит F-локально постоянные производные сечения над $\mathcal{D}$ в производные сечения над $\mathcal{C}$.*

Доказательство. Следствие Леммы 4.2.4 и Предложения 4.1.31. □

Рассмотрим для начала тождественный функтор $id_\mathcal{C}$ и его башни, $\bar{p}_{id_\mathcal{C}} : \mathbb{F}_{\Delta\times\Delta}(id_\mathcal{C}) \to \mathbb{C}_\Delta$ и $p_{id_\mathcal{C}} : \mathbb{F}(id_\mathcal{C}) \to \mathbb{C}_\Delta$. Чтобы упростить происходящее, переопределим $\mathbb{F}_{\Delta\times\Delta}(id_\mathcal{C})$ как категорию объектов $\mathbf{c}_{[m]}^{[n]} \in \mathbb{C}_{\Delta\times\Delta}$ таких что $\mathbb{F}(\mathbf{c}_{[m]}^i) = \mathbb{F}(\mathbf{c}_{[m]}^j)$ для всех i, j, с тождественными вертикальными отображениями. Модифицируем $\mathbb{F}(id_\mathcal{C})$ соответствующим образом.

Лемма 4.2.6. *Пусть $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — модельное опрасслоение. Тогда существует естественное преобразование $p_{id_\mathcal{C}}^* \to \mu_{id_\mathcal{C}}^*\mathbb{R}\delta_{\mathcal{C},*}$ функторов из $\mathrm{Ho}\,\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ в $\mathrm{Ho}\,\mathsf{Sect}(\mathbb{T}(id_\mathcal{C}), \mathbf{E})$. Это естественное преобразование — изоморфизм, будучи ограниченным на производные сечения.*

Мы часто будем писать $\mathcal{C}$ вместо $id_\mathcal{C}$.

Доказательство. Построим отображение $\bar{p}_\mathcal{C}^* \to \bar{\mu}_\mathcal{C}^*\mathbb{R}\delta_{\mathcal{C},*}$ для сечений полной симплициальной башни $\mathsf{Sect}(\mathbb{T}_{\Delta\times\Delta}(id_\mathcal{C}), \mathbf{E})$, и затем возьмём композицию с функтором

$$\omega_\mathcal{C}^* : \mathsf{Sect}(\mathbb{T}_{\Delta\times\Delta}(id_\mathcal{C}), \mathbf{E}) \to \mathsf{Sect}(\mathbb{T}(id_\mathcal{C}), \mathbf{E}),$$

помня о том, что $\omega_{\mathcal{C}}^*\bar{\mu}_{\mathcal{C}}^* = \mu_{\mathcal{C}}^*$ и $\omega_{\mathcal{C}}^*\bar{p}_{\mathcal{C}}^* = p_{\mathcal{C}}^*$.

Заметим, что $\bar{p}_{\mathcal{C}} : \mathbb{T}_{\Delta\times\Delta}(id_{\mathcal{C}}) \to \mathbb{C}$ — (постоянное) опрасслоение, допускающее выделенное сечение $e_{\mathcal{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{T}_{\Delta\times\Delta}(id_{\mathcal{C}})$, которое посылает $\mathbf{c}_{[n]}$ в ту же самую диаграмму, сконцентрированную в нуле в вертикальном направлении; таким образом, $e_{\mathcal{C}}\bar{p}_{\mathcal{C}}(\mathbf{c}_{[n]}^{[k]}) = \mathbf{c}_{[n]}^0 \in \mathbb{T}_{\Delta\times\Delta}(id_{\mathcal{C}})$. Тогда мы имеем равенство $\delta_{\mathcal{C}} = \bar{\mu}_{\mathcal{C}}e_{\mathcal{C}}$.

Оба функтора $\bar{p}_{\mathcal{C}}$ и $e_{\mathcal{C}}$ позволяют брать обратный образ сечений вдоль них, индуцируя сопряжённую пару

$$\bar{p}_{\mathcal{C}}^* : \mathsf{Sect}(\mathbb{C}, \mathbf{E}) \rightleftarrows \mathsf{Sect}(\mathbb{T}_{\Delta\times\Delta}(id_{\mathcal{C}}), \mathbf{E}) : e_{\mathcal{C}}^*.$$

а потому имеем отображение коединицы $\bar{p}_{\mathcal{C}}^*e_{\mathcal{C}}^*X \to X$ для всякого X над $\mathbb{T}_{\Delta\times\Delta}(id_{\mathcal{C}})$. В компонентах, это отображение имеет вид $X(\mathbf{c}_{[n]}^0) \to X(\mathbf{c}_{[n]}^{[k]})$, что в конечном счёте отвечает отображению из 0-части симплициального объекта в весь объект. Это отображение — слабая эквивалентность, если X — обратный образ вдоль $\bar{\mu}$ сигалова сечения на $\mathbb{C}_\Pi$.

Подставим теперь $X = \bar{\mu}_{\mathcal{C}}^*\delta_{\mathcal{C},*}Y$ для $Y \in \mathsf{Sect}(\mathbb{C}, \mathbf{E})$ и получим

$$\bar{\mu}_{\mathcal{C}}^*\delta_{\mathcal{C},*}Y \longleftarrow \bar{p}_{\mathcal{C}}^*e_{\mathcal{C}}^*\bar{\mu}_{\mathcal{C}}^*\delta_{\mathcal{C},*}Y \cong \bar{p}_{\mathcal{C}}^*\delta_{\mathcal{C}}^*\delta_{\mathcal{C},*}Y \cong \bar{p}_{\mathcal{C}}^*Y, \tag{4.2.2}$$

где мы также помним, что $\delta_{\mathcal{C}}^*\delta_{\mathcal{C},*} \cong id$, поскольку $\delta_{\mathcal{C},*}$ строго полон (Предложение 4.1.14). Заметим, что если Y — фибрантное производное сечение над $\mathcal{C}$, то самое левое отображение в *(4.2.2)* — слабая эквивалентность, поскольку $\delta_{\mathcal{C},*}$ переводит фибрантные производные сечения в сигаловы сечения над $\mathbb{C}_\Pi$.

Наконец, применим ω^* и получим искомое отображение $p_{\mathcal{C}}^* \to \mu_{\mathcal{C}}^*\delta_{\mathcal{C},*}$, являющееся эквивалентностью на фибрантных производных сечениях. Взятие фибрантных замен в исходной категории заканчивает доказательство. □

Обозначим через $q_F : \mathbb{T}(F) \to \mathbb{T}(id_{\mathcal{C}})$ функтор, индуцированный отображением объекта $(\mathbf{c}_{[m]}, \mathbf{d}_{[m]}^{[k]} \leftarrow \mathbf{d}_{[m]}'^{[n]})$ в $\mathbf{c}_{[m]}'^{[k]} \leftarrow \mathbf{c}_{[m]}''^{[n]}$ с каждым $\mathbf{c}_{[m]}'^{i} = \mathbf{c}_{[m]}''^{j} = \mathbf{c}_{[m]}$ и тождественными вертикальными стрелками. Этот функтор коммутирует с проекциями в $\mathbb{C}$, $p_{\mathcal{C}}q_F = p_F$.

Следствие 4.2.7. *Пусть $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — модельное опрасслоение и $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — функтор. Рассмотрим диаграмму (4.2.1). Тогда существует естественный изоморфизм функторов*

$$\mathbb{R}p_F^* \cong \mu_F^*\mathbb{R}\delta_{\mathbb{D},*}\mathsf{h}\mathbb{F}^*$$

где $\mathsf{h}\mathbb{F}^*$ — функтор обратного образа.

Доказательство. Заметим, что $\mathbb{F}_\Pi\mu_F = \mu_{\mathcal{C}}q_F$ и что $p_{\mathcal{C}}q_F = p_F$. Поскольку мы ограничены до производных сечений, Предложение 4.1.14 и предыдущая Лемма 4.2.6 дают следующую цепочку эквивалентностей на фибрантных сечениях:

$$\mu_F^*\mathbb{R}\delta_{\mathbb{D},*}\mathbb{F}^* \cong \mu_F^*\mathbb{F}_\Pi^*\mathbb{R}\delta_{\mathcal{C},*} \cong q_F^*\mu_\mathcal{C}^*\mathbb{R}\delta_{\mathcal{C},*} \cong q_F^*p_\mathcal{C}^* \cong \mathbb{R}p_F^*,$$

— а при взятии производных мы также берём и фибрантную замену. □

Выделенное сечение $e_\mathcal{C}$ Леммы 4.2.6 допускает обобщение. С функтором $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ мы связываем как симплициальную замену $\mathbb{F} : \mathbb{D}_\Delta \to \mathbb{C}_\Delta$ — дискретное расслоение со слоями, обозначаемыми $\mathbb{D}_0(\mathbf{c})$, — и его башню $\mathbb{T}(F) \to \mathbb{C}_\Delta$, а связаны они следующим образом.

Лемма 4.2.8. *Существует функтор $e_F : \mathbb{D}_\Delta \to \mathbb{T}(F)$, такой что $p_F e_F = \mathbb{F}$ и $\mu_F e_F = \delta_\mathbb{D} : \mathbb{D}_\Delta \to \mathbb{D}_\Pi$.*

Доказательство. Отображение e_F отправляет $\mathbf{d}_{[n]}, \mathbb{F}(\mathbf{d}_{[n]}) = \mathbf{c}_{[n]}$, в $\mathbf{d}_{[n]} \xleftarrow{id} \mathbf{d}_{[n]}$ над объектом $[0] \overset{id}{\hookrightarrow} [0]$ категории K. □

Предложение 4.2.9. *Пусть $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — модельное опрасслоение и $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — резольвента. Предположим, что сопряжённая пара $\mathbb{L}p_{F,!} \dashv \mathbb{R}p_F^*$ сохраняет сигаловы сечения и является строго полным сопряжением при ограничении на них. Тогда функторы $\mathsf{h}\mathbb{F}^*$ и $\mathsf{h}\mathbb{F}_! = \mathbb{L}p_{F,!}\mu_F^*\mathbb{R}\delta_{\mathbb{D},*}$ сопряжены,*

$$\mathsf{h}\mathbb{F}_! : \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}(\mathcal{D},\mathcal{E}) \rightleftarrows \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}(\mathcal{C},\mathcal{E}) : \mathsf{h}\mathbb{F}^*$$

так что вдобавок $\mathsf{h}\mathbb{F}^*$ строго полон.

Доказательство. Забывая про h, соберём тождества, необходимые для доказательства:

$$\mathbb{R}p_F^* \cong \mu_F^*\mathbb{R}\delta_{\mathbb{D},*}\mathbb{F}^*, \quad \mathbb{F}^* \cong e_F^*\mathbb{R}p_F^*, \quad e_F^*\mu_F^* \cong \mathbb{L}\delta_\mathbb{D}^*,$$

— а также необходимые сопряжённые пары,

$$\mathbb{L}p_{F,!} \dashv \mathbb{R}p_F^*, \quad \mathbb{L}p_{F,!}\mathbb{R}p_F^* \xrightarrow{\sim} id, \qquad \mathbb{L}\delta_\mathbb{D}^* \dashv \mathbb{R}\delta_{\mathbb{D},*}, \quad \mathbb{L}\delta_\mathbb{D}^*\mathbb{R}\delta_{\mathbb{D},*} \xrightarrow{\sim} id,$$

Для построения коединицы, заметим, что

$$\mathbb{F}_!\mathbb{F}^* = \mathbb{L}p_{F,!}\mu_F^*\mathbb{R}\delta_{\mathbb{D},*}\mathbb{F}^* \cong \mathbb{L}p_{F,!}\mathbb{R}p_F^* \cong id.$$

Для построения единицы, заметим, что

$$\mathbb{F}^*\mathbb{F}_! = \mathbb{F}^*\mathbb{L}p_{F,!}\mu_F^*\mathbb{R}\delta_{\mathbb{D},*} \cong e_F^*\mathbb{R}p_F^*\mathbb{L}p_{F,!}\mu_F^*\mathbb{R}\delta_{\mathbb{D},*} \leftarrow e_F^*\mu_F^*\mathbb{R}\delta_{\mathbb{D},*} \cong \mathbb{L}\delta_\mathbb{D}^*\mathbb{R}\delta_{\mathbb{D},*} \cong id. \qquad (4.2.3)$$

Таким образом, (ко)единица происходит из таковой для $\mathbb{L}p_{F,!} \dashv \mathbb{R}p_F^*$. Мы докажем треугольные тождества и увидим, что $\mathbb{F}^*$ автоматически будет строго полным. Записывая композицию $\mathbb{F}^* \to \mathbb{F}^*\mathbb{F}_!\mathbb{F}^* \to \mathbb{F}^*$,

$$\mathbb{F}^* \to \mathbb{F}^*\mathbb{F}_!\mathbb{F}^* = \mathbb{F}^*\mathbb{L}p_{F,!}\mu_F^*\mathbb{R}\delta_{\mathbb{D},*}\mathbb{F}^* \cong \mathbb{F}^*\mathbb{L}p_{F,!}\mathbb{R}p_F^* \cong \mathbb{F}^*,$$

мы видим, что достаточно проверить, что $\mathbb{F}^* \to \mathbb{F}^*\mathbb{F}_!\mathbb{F}^*$ — изоморфизм. Однако, из (*4.2.3*) мы видим, что это эквивалентно тому, что отображение

$$\mu_F^*\mathbb{R}\delta_{\mathbb{D},*}\mathbb{F}^* \cong \mathbb{R}p_F^* \to \mathbb{R}p_F^*\mathbb{L}p_{F,!}\mathbb{R}p_F^*$$

— изоморфизм, а это действительно так, поскольку $\mathbb{R}p_F^*$ строго полон.

Другое треугольное тождество, $\mathbb{F}_! \to \mathbb{F}_!\mathbb{F}^*\mathbb{F}_! \to \mathbb{F}_!$, можно разобрать подобным же образом, и мы видим, что нужно проверить, что

$$\mathbb{L}p_{F,!}\mu_F^*\mathbb{R}\delta_{\mathbb{D},*} \to \mathbb{L}p_{F,!}\mu_F^*\mathbb{R}\delta_{\mathbb{D},*}\mathbb{F}^*\mathbb{L}p_{F,!}\mu_F^*\mathbb{R}\delta_{\mathbb{D},*} \cong \mathbb{L}p_{F,!}\mathbb{R}p_F^*\mathbb{L}p_{F,!}\mu_F^*\mathbb{R}\delta_{\mathbb{D},*}$$

— изоморфизм. Однако, это отображение получается применением $\mathbb{L}p_{F,!} \to \mathbb{L}p_{F,!}\mathbb{R}p_F^*\mathbb{L}p_{F,!}$ к $\mu_F^*\mathbb{R}\delta_{\mathbb{D},*}$. Отображение $\mathbb{L}p_{F,!} \to \mathbb{L}p_{F,!}\mathbb{R}p_F^*\mathbb{L}p_{F,!}$ является, в свою очередь, изоморфизмом, потому что $\mathbb{R}p_F^*$ строго полон. $\square$

Предложение 4.2.10. *Пусть $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — модельное опрасслоение и $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — резольвента. Тогда функторы $\mathsf{h}\mathbb{F}^*$ и $\mathsf{h}\mathbb{F}_! = \mathbb{L}p_{F,!}\mu_F^*\mathbb{R}\delta_{\mathbb{D},*}$ — сопряжённая эквивалентность:*

$$\mathsf{h}\mathbb{F}_! : \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{F^*Iso(\mathcal{C})}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \overset{\sim}{\rightleftarrows} \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) : \mathsf{h}\mathbb{F}^*.$$

Доказательство. Можно дословно повторить вычисления из Предложения 4.2.9, теперь работая с F-локально постоянными производными сечениями и p_F-локально постоянными сигаловыми сечениями на башне. Как мы видели, как единица, так и коединица индуцируются с одноимённых отображений для $\mathbb{L}p_{F,!}$ и $\mathbb{R}p_F^*$. Последние — эквивалентность, а потому то же верно и про $\mathsf{h}\mathbb{F}_!$ и $\mathsf{h}\mathbb{F}^*$. $\square$

Наконец,

Теорема 4.2.11. *Пусть $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — резольвента, $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ — изо-подкатегория, а $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — модельное опрасслоение. Тогда имеет место быть эквивалентность категорий:*

$$\mathsf{h}\mathbb{F}_! : \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{F^*\mathcal{S}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \overset{\sim}{\rightleftarrows} \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{\mathcal{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) : \mathsf{h}\mathbb{F}^*.$$

Доказательство.

Покажем для начала, что эквивалентность Предложения 4.1.31 даёт нам функтор

$$\mathbb{L}p_{F,!} : \mathrm{Ho}\,\mathsf{Sect}_{\mathscr{S}}^{F^*\mathcal{S}}(\mathbb{T}(F), \mathbf{E}) \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{\mathcal{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}).$$

Здесь $\mathsf{Sect}_{\mathscr{S}}^{F^*\mathcal{S}}(\mathbb{T}(F), \mathbf{E})$ — подкатегория тех сигаловых сечений $Y : \mathbb{T}(F) \to \mathbf{E}$ которые переводят в слабую эквивалентность всякое отображение $\beta : \varphi \to \xi$ башни $\mathbb{T}(F)$, чей образ $\mathbb{D}_{\Delta\times\Delta}$ — $F^*\mathcal{S}$-стирающий (Определение 4.1.17).

Пусть $\alpha : \mathbf{c}_{[n]} \to \mathbf{c}'_{[k]}$ — анти-сигалов морфизм с $c_{i-1} \to c_i$ принадлежащими к $\mathcal{S}$ для $1 \leq i \leq n-k$. Поскольку функтор F — резольвента, мы видим, что в $\mathrm{Ho}\,\mathbf{E}(\mathbf{c}_{[n]})$, значение

$$\mathbb{L}p_{F,!}X(\mathbf{c}_{[n]}) \cong X((\mathbf{c}_{[n]}, \mathbf{d}_{[n]}^{[l]} \leftarrow \mathbf{d}'^{[m]}_{[n]}))$$

для некоторого $\mathbf{d}_{[n]}^{[l]} \xleftarrow{\varphi} \mathbf{d}'^{[m]}_{[n]}$ в $\mathbb{T}(F)$ над $\mathbf{c}_{[n]}$. Образ $\mathbb{L}p_{F,!}Y(\alpha)$ тогда изоморфен (в категории морфизмов $\mathrm{Ho}\,\mathbf{E}(\mathbf{c}_{[n]})$) морфизму $Y(\varphi) \to Y(\alpha_!\varphi)$, где $\varphi \to \alpha_!\varphi$ — опдекартов морфизм в опрасслоении $\mathbb{T}(F) \to \mathbb{C}$. Можно проверить, что образ $\varphi \to \alpha_!\varphi$ в $\mathbb{D}_{\Delta\times\Delta}$ является $F^*\mathcal{S}$-стирающим. Это происходит потому, что всякий объект $\mathbf{d}_{[n]}^{[l]}$ над $\mathbf{c}_{[n]}$ имеет вертикальные отображения, которые отправляются в $Iso(\mathcal{C})$; также, для всякого значения j и для $1 \leq i \leq n-k$, отображение $d_{i-1}^j \to d_i^j$ принадлежит к $F^*\mathcal{S}$. Тогда отображение $Y(\varphi) \to Y(\alpha_!\varphi)$ — слабая эквивалентность по предположению. То есть, $\mathbb{L}p_{F,!}Y$ действительно попадает в $\mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{\mathcal{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, как и хотелось.

Наконец, пусть X — $F^*\mathcal{S}$-локально постоянное производное сечение над $\mathcal{D}$. Его расширение на башню F, вычисляемое как $\mu_F^*\mathbb{R}\delta_{\mathcal{D},*}X$, принадлежит категории $\mathrm{Ho}\,\mathsf{Sect}_{\mathscr{S}}^{F^*\mathcal{S}}(\mathbb{T}(F), \mathbf{E})$. Это — следствие Предложения 4.1.19 и того факта, что композиция $\mathbb{T}(F) \to \mathbb{T}_{\Delta\times\Delta}(F) \to \mathbb{D}_{\Delta\times\Delta} \to \mathbb{D}_{\Pi}$ равна μ_F. Всё это говорит нам о том, что эквивалентность категорий можно ограничить желаемым образом. $\square$

Следствие 4.2.12. *Пусть $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — эквивалентность категорий. Тогда*

$$\mathsf{h}F^* : \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$$

— эквивалентность.

Доказательство. F — резольвента, и, вдобавок, $F^*(Iso(\mathcal{C})) = Iso(\mathcal{D})$. $\square$

4.3. Резольвенты факторизационных категорий

Допустим, что дан факторизационный функтор $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, который является резольвентой при ограничении на правые классы. В этой секции мы покажем, что в некоторых случаях (выполненных в наших примерах) функтор $\mathbb{F}^*$ — эквивалентность на производных сечениях, которые локально постоянны вдоль $\mathscr{L} \subset \mathcal{C}$ и её прообраза.

Напомним, что Γ обозначает категорию конечных множеств. Обозначим через $I \subset \Gamma^{\mathsf{op}}$ категорию, противоположную к категории конечных множеств и инъективных отображений.

Определение 4.3.1. Пусть $\mathcal{C}$ — категория. Её *сплетённое произведение* $\mathcal{C} \wr I$ — категория

- с объектами, даваемыми парами из $S \in I$ и семейства $\{c_s\}_{s\in S}$ объектов $c_s \in \mathcal{C}$
- морфизмами из $(S, \{c_s\}_{s\in S})$ в $(T, \{c'_t\}_{t\in T})$, даваемыми парами $(f, \{f_t\}_{t\in T})$, где $S \xleftarrow{f} T$ — морфизм в I и $f_t : c_{f(t)} \to c'_t$ — семейство отображений в $\mathcal{C}$.

Естественный функтор$\mathcal{C} \wr I \to I$, $(S, \{c_s\}_{s\in S}) \mapsto S$, — опрасслоение. Слой над S — произведение $\mathcal{C}^S$ из $|S|$ копий $\mathcal{C}$. Имеем функтор тавтологического вложения $j : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \wr I$ с $j(c) = (1, \{c\})$ для одноэлементного множества 1.

Лемма 4.3.2. *Для всякого модельного опрасслоения* $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$*, его сплетённое произведение* $p \wr I : \mathcal{E} \wr I \to \mathcal{C} \wr I$ *— модельное опрасслоение, чьё ограничение вдоль* $j : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \wr I$ *изоморфно* p.

Доказательство. Слой $\mathcal{E} \wr I$ над $(S, \{c_s\})$ даётся произведением слоёв $\prod_{s\in S} \mathcal{E}(c_s)$. Имея отображение из $(S, \{c_s\})$ в$(T, \{c'_t\})$, обозначенное через $(f, \{f_t\})$, соответствующий функтор перехода $\mathcal{E} \wr I(S, \{c_s\}) \to \mathcal{E} \wr I(T, \{c'_t\})$ даётся композицией $\prod_{s\in S} \mathcal{E}(c_s) \to \prod_{t\in T} \mathcal{E}(c_{f(t)}) \to \prod_{t\in T} \mathcal{E}(c'_t)$, где первый функтор — проекция, а второй индуцирован с функторов перехода $f_{t,!} : \mathcal{E}(c_{f(t)}) \to \mathcal{E}(c'_t)$. Остальное очевидно. $\square$

Можно потому рассматривать $\mathcal{S} \wr I$-локально постоянные производные сечения модельного опрасслоения $\mathcal{E} \wr I \to \mathcal{C} \wr I$.

Предложение 4.3.3. *Пусть* $\mathcal{C}$ *категория,* $\mathcal{S}$ *— изо-полная подкатегория,* $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ *— модельное опрасслоение. Тогда функтор* $\mathsf{h}j^* : \operatorname{Ho}\mathsf{DSect}_{\mathcal{S}\wr I}(\mathcal{C} \wr I, \mathcal{E} \wr I) \to \operatorname{Ho}\mathsf{DSect}_{\mathcal{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ *— эквивалентность категорий. Более того, имея функтор* $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$*, получаем коммутативную диаграмму категорий*

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ho}\mathsf{DSect}_{\mathcal{S}\wr I}(\mathcal{C} \wr I, \mathcal{E} \wr I) \arrow[r, "\mathsf{h}j^*_{\mathcal{C}}", "\cong"'] \arrow[d, "\mathsf{h}(\mathbb{F}\wr I)^*"'] & \operatorname{Ho}\mathsf{DSect}_{\mathcal{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \arrow[d, "\mathsf{h}\mathbb{F}^*"] \\
\operatorname{Ho}\mathsf{DSect}_{F^*(\mathcal{S}\wr I)}(\mathcal{D} \wr I, F^*\mathcal{E} \wr I) \arrow[r, "\mathsf{h}j^*_{\mathcal{D}}", "\cong"'] & \operatorname{Ho}\mathsf{DSect}_{F^*\mathcal{S}}(\mathcal{D}, F^*\mathcal{E}),
\end{tikzcd} \tag{4.3.1}$$

где $\mathbb{F} \wr I$ *— симплициальная замена* $F \wr I$*, функторы* $j_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \wr I$ *и* $j_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \wr I$ *отвечают вложениям, и обе горизонтальные стрелки — эквивалентности категорий.*

Доказательство. Коммутативность диаграммы (*4.3.1*) легко проверить. Докажем первую часть предложения.

Обозначим через I_* категорию отмеченных объектов (S, s) в I, с морфизмами, сохраняющими отмеченные точки $s \in S$. Функтор забывания точки, $\pi : I_* \to I$, — дискретное расслоение. Определим$\mathcal{C} \wr I_* := \pi^*(\mathcal{C} \wr I)$ как обратный образ $\mathcal{C} \wr I \to I$ вдоль π. Индуцированный функтор $\pi_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \wr I_+ \to \mathcal{C} \wr I$ тогда также является дискретным расслоением. Мы также имеем функтор $\rho : \mathcal{C} \wr I_+ \to \mathcal{C}$, который действует, как проекция на слой над отмеченным элементом $s \in S$. Функтор ρ — предопрасслоение, слои которого $\rho^{-1}(c)$ имеют конечные объекты $(c, 1_*)$ где 1_* — множество из отмеченной точки. Лемма 4.0.4 тогда даёт нам, что ρ — резольвента.

Пока что мы получили эквивалентность $\mathsf{h}\rho^* : \operatorname{Ho}\mathsf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ho}\mathsf{DSect}(\mathcal{C} \wr I_+, \rho^*\mathcal{E})$. Осталось сравнить эту категорию с $\operatorname{Ho}\mathsf{DSect}(\mathcal{C}\wr I, \mathcal{E}\wr I)$. Вспомним о Лемме 1.2.6 и рассмотрим прямой образ $\pi_{\mathcal{C},*}\rho^*\mathcal{E} \to \mathcal{C}\wr I$. Поскольку $\pi_{\mathcal{C}}$ — дискретное расслоение, опрасслоение $\pi_{\mathcal{C},*}\rho^*\mathcal{E} \to \mathcal{C} \wr I$ модельно. Более того, имеем декартову эквивалентность опрасслоений $\mathcal{E} \wr I \cong \pi_{\mathcal{C},*}\rho^*\mathcal{E}$: взятие ρ^* отвечает постановке слоя в отмеченную точку, а применение $\pi_{\mathcal{C},*}$ отвечает взятию произведения по всем имеющимся точкам.

Потому получаем $\operatorname{Ho}\mathsf{DSect}(\mathcal{C} \wr I, \mathcal{E} \wr I) \cong \operatorname{Ho}\mathsf{DSect}(\mathcal{C} \wr I, \pi_{\mathcal{C},*}\rho^*\mathcal{E})$. Можно проверить (в духе Леммы 1.2.6), что $\operatorname{Ho}\mathsf{DSect}(\mathcal{C} \wr I, \pi_{\mathcal{C},*}\rho^*\mathcal{E}) \cong \operatorname{Ho}\mathsf{DSect}(\mathcal{C} \wr I_+, \rho^*\mathcal{E})$. □

Определение 4.3.4. Пусть $(\mathcal{C}, \mathscr{L}, \mathscr{R})$ — факторизационная категория. Её *факторизационный нерв* — расслоение $\mathsf{N}_{(\mathscr{L},\mathscr{R})}(\mathcal{C}) \to \Delta$, определённое как фибрационная конструкция Гротендика

$$[n] \quad \mapsto \quad \mathsf{Fun}_{\mathscr{L}}([n], \mathscr{R})$$

где $\mathsf{Fun}_{\mathscr{L}}([n], \mathscr{R})$ — категория

- с объектами, даваемыми функторами $[n] \to \mathcal{C}$, которые пропускаются через $\mathscr{R}$,
- с естественными преобразованиями между этими функторами, поточечно лежащими в $\mathscr{L}$.

Слой $\mathsf{N}_{(\mathscr{L},\mathscr{R})}(\mathcal{C}) \to \Delta$ над $[n]$ является потому категорией последовательностей $c_0 \to \ldots \to c_n$ отображений в $\mathscr{R}$, с морфизмами, даваемыми коммутативными диаграммами

$$\begin{tikzcd} c_0 \arrow[r, "\in \mathscr{R}"] \arrow[d, "\mathscr{L} \ni"'] & \ldots \arrow[r, "\in \mathscr{R}"] & c_n \arrow[d, "\in \mathscr{L}"] \\ c'_0 \arrow[r, "\in \mathscr{R}"] & \ldots \arrow[r, "\in \mathscr{R}"] & c'_n, \end{tikzcd}$$

в которых вертикальные стрелки принадлежат к $\mathscr{L}$. Имеются также декартовы отображения, которые такие же, как и в обычном нерве категории. Сопоставление $c_0 \to ... \to c_n$ задаёт функтор $\tau_{\mathcal{C}} : \mathsf{N}_{(\mathscr{L},\mathscr{R})}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$.

Лемма 4.3.5. *Функтор $\tau_{\mathcal{C}}$ — левая резольвента.*

Доказательство. С помощью факторизационной системы $(\mathscr{L},\mathscr{R})$ на $\mathcal{C}$, мы видим, что $\tau_{\mathcal{C}}$ — предопрасслоение. А потому есть сопряжённая пара функторов между $\mathsf{N}_{(\mathscr{L},\mathscr{R})}(\mathcal{C})(y)$ и подкатегорией $\mathcal{X}$ комма-категории $\mathsf{N}_{(\mathscr{L},\mathscr{R})}(\mathcal{C})/y$ состоящей из пар $(\mathbf{c}_{[n]}, c_n \overset{\in\mathscr{R}}{\to} y)$. Определим также $\mathcal{X}_*$, категорию, естественно расслоённую над категорией $\Delta_* \subset \Delta$ отображений в Δ, сохраняющих конечный объект: слой $\mathcal{X}_*([n])$ состоит из всех $\mathscr{R}$-сечений морфизмов $c_0 \to ... \to c_{[n-1]} \to y$. Любое расслоение $\mathcal{F} \to \Delta_*$ имеет свойство, что вложение $\mathcal{F}([0]) \hookrightarrow \mathcal{F}$ допускает сопряжённый. Легко видеть, что функтор $\Delta \to \Delta_*$, который добавляет последний элемент, приводит к сопряжённой паре функторов $\mathcal{X} \rightleftarrows \mathcal{X}_*$. Учитывая, что $\mathcal{X}_*([0]) = \{y\}$, получаем стягиваемость $\mathcal{X}$.

А потому наше предрасслоение $\tau_{\mathcal{C}} : \mathsf{N}_{(\mathscr{L},\mathscr{R})}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ имеет стягиваемы слои, и по Лемме 4.0.4 получаем, что это — левое разрешение. $\square$

Следствие 4.3.6. *Пусть дано модельное опрасслоение $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ над факторизационной категорией $(\mathcal{C}, \mathscr{L}, \mathscr{R})$, тогда функтор*

$$\mathsf{h}\tau_{\mathcal{C}}^* : \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{\mathscr{L}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{\tau_{\mathcal{C}}^*\mathscr{L}}(\mathsf{N}_{(\mathscr{L},\mathscr{R})}(\mathcal{C}), \mathcal{E})$$

— эквивалентность категорий, функториальная по отношению к $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ в том смысле, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{\mathscr{L}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \arrow[r, "\mathsf{h}\tau_c^* C", "\cong"'] \arrow[d] & \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{\tau_{\mathcal{C}}^*\mathscr{L}}(\mathsf{N}_{(\mathscr{L},\mathscr{R})}(\mathcal{C}), \mathcal{E}) \arrow[d] \\
\mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{F^*\mathscr{L}}(\mathcal{D}, F^*\mathcal{E}) \arrow[r, "\mathsf{h}\tau_c^* C", "\cong"'] & \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{\tau_{\mathcal{D}}^* F^*\mathscr{L}}(\mathsf{N}_{(\mathscr{L}_{\mathcal{D}},\mathscr{R}_{\mathcal{D}})}(\mathcal{D}), F^*\mathcal{E})
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Рассмотрим факторизационную категорию $(\mathcal{C}, \mathscr{L}, \mathscr{R})$, и возьмём сплетённое произведение $\mathcal{C} \wr I$. Тройка $(\mathcal{C} \wr I, \mathscr{L}_I, \mathscr{R}_I)$ — факторизационная категория, где $\mathscr{L}_I = \mathscr{L} \wr I$, а правый класс $\mathscr{R}_I$ даётся всеми морфизмами $(f, \{f_s\})$, такими что f обратимо, и все f_s лежат в $\mathscr{R} \subset \mathcal{C}$. Обозначим через $\mathsf{N}\,\mathsf{N}_{(\mathscr{L},\mathscr{R})}(\mathcal{C}) := \mathsf{N}_{(\mathscr{L}_I,\mathscr{R}_I)}(\mathcal{C} \wr I)$, категорию, для которой есть проекция $\tau_{\mathcal{C}\wr I} : \mathsf{N}\,\mathsf{N}_{(\mathscr{L},\mathscr{R})}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C} \wr I$.

Следствие 4.3.7. *Пусть* $(\mathcal{C}, \mathscr{L}, \mathscr{R})$ *— факторизационная категория, и* $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ *— модельное опрасслоение. Тогда естественный функтор*

$$\mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{\mathscr{L}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{\mathscr{L} \wr I}(\mathcal{C} \wr I, \mathcal{E} \wr I) \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{\tau^*_{\mathcal{C} \wr I}(\mathscr{L} \wr I)}(\mathsf{N}\,\mathsf{N}_{(\mathscr{L},\mathscr{R})}(\mathcal{C}), \tau^*(\mathcal{E} \wr I))$$

— эквивалентность категорий.

Определение 4.3.8. Пусть $(\mathcal{C}, \mathscr{L}, \mathscr{R})$ — факторизационная категория, и $e \in \mathcal{C}$. Назовём $\mathcal{C}$ *e-дискретной* если функтор

$$i_e : I \to \mathscr{L}_I = \mathscr{L} \wr I, \;\; S \mapsto (S, \{e, ..., e\}),$$

строго полный и допускает левый сопряжённый $p_e : \mathscr{L}_I \to I$.

Дискретная факторизационная категория — набор $(\mathcal{C}, \mathscr{L}, \mathscr{R}, e)$ из факторизационной категории $(\mathcal{C}, \mathscr{L}, \mathscr{R})$ и $e \in \mathcal{C}$ такого, что $\mathcal{C}$ — e-дискретна. Морфизм $F : (\mathcal{D}, \mathscr{L}_{\mathcal{D}}, \mathscr{R}_{\mathcal{D}}, e_{\mathcal{D}}) \to (\mathcal{C}, \mathscr{L}_{\mathcal{C}}, \mathscr{R}_{\mathcal{C}}, e_{\mathcal{C}})$ между двумя дискретными факторизационными категориями состоит из факторизационного функтора F, такого что $F(e_{\mathcal{D}}) = e_{\mathcal{C}}$ и что морфизм замены базы для сопряжённых пар $p_{e_{\mathcal{D}}} \dashv i_{e_{\mathcal{D}}}$ и $p_{e_{\mathcal{C}}} \dashv i_{e_{\mathcal{C}}}$ — изоморфизм.

Определение 4.3.9. Модельное опрасслоение $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ над дискретной факторизационной категорией $(\mathcal{C}, \mathscr{L}, \mathscr{R}, e)$ называется *совместимым с дискретизацией*, если для всякого $x \in \mathcal{C} \wr I$, функтор перехода

$$\eta_{x,!} : \mathcal{E} \wr I(x) \to \mathcal{E} \wr I(p_e i_e x)$$

— эквивалентность категорий.

Достаточно проверять это условие для $x \in \mathcal{C} \subset \mathcal{C} \wr I$.

Определение 4.3.10. Пусть $(\mathcal{C}, \mathscr{L}, \mathscr{R}, e)$ — дискретная факторизационная категория. Её *дискретизованный факторизационный нерв* — полная подкатегория $\mathsf{N}^e_{\mathscr{L},\mathscr{R}}(\mathcal{C}) \subset \mathsf{N}\,\mathsf{N}_{\mathscr{L},\mathscr{R}}(\mathcal{C})$, состоящая из $c_0 \to ... \to c_n$ таких что $\eta_{c_n} : c_n \to i_e p_e c_n$ — изоморфизм.

Лемма 4.3.11. *Естественный функтор* $\mathsf{N}^e_{\mathscr{L},\mathscr{R}}(\mathcal{C}) \to \Delta$ *— расслоение. Имея модельное опрасслоение* $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$*, совместимое с дискретизацией, вложение* $i : \mathsf{N}^e_{\mathscr{L},\mathscr{R}}(\mathcal{C}) \subset \mathsf{N}\,\mathsf{N}_{\mathscr{L},\mathscr{R}}(\mathcal{C})$ *индуцирует естественную эквивалентность*

$$\mathsf{h}i^* : \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{\tau^*(\mathscr{L} \wr I)}(\mathsf{N}\,\mathsf{N}_{(\mathscr{L},\mathscr{R})}(\mathcal{C}), \tau^*(\mathcal{E} \wr I)) \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{i^*\tau^*(\mathscr{L} \wr I)}(\mathsf{N}^e_{(\mathscr{L},\mathscr{R})}(\mathcal{C}), i^*\tau^*(\mathcal{E} \wr I)),$$

где $\tau : \mathsf{N}\,\mathsf{N}_{\mathscr{L},\mathscr{R}}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C} \wr I$ *— функтор, определённый ранее.*

Доказательство. Пусть дан $c_0 \to ... \to c_n$ из $\mathsf{N}\,\mathsf{N}_{\mathscr{L},\mathscr{R}}(\mathcal{C})$. возьмём отображение $c_n \to i_e p_e c_n$ и построим следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} c_0 \arrow[r, "\in \mathscr{R}"] \arrow[d, "\mathscr{L} \ni"'] & ... \arrow[r, "\in \mathscr{R}"] & c_{n-1} \arrow[r, "\in \mathscr{R}"] \arrow[d, "\in \mathscr{L}"] & c_n \arrow[d, "\in \mathscr{L}"] \\ c_0' \arrow[r, "\in \mathscr{R}"] & ... \arrow[r, "\in \mathscr{R}"] & c_{n-1}' \arrow[r, "\in \mathscr{R}"] & i_e p_e c_n, \end{tikzcd} \quad (4.3.2)$$

в которой каждый коммутативный квадрат строится, в порядке справа налево, с помощью факторизации, используя $(\mathscr{L}_I, \mathscr{R}_I)$, композиций $c_{n-1} \to c_n \to i_e p_e c_n$ и $c_{k-1} \to c_k \to c_k'$ (для $1 \leq k \leq n-1$).

Подобная факторизация позволяет доказать оба утверждения следующим образом. Напомним, что имеется сигалова факторизационная система (A, Σ) на Δ. Мы видим, что функторы перехода для $\mathsf{N}^e_{\mathscr{L},\mathscr{R}}(\mathcal{C})$ вдоль анкерных отображений A можно просто взять равными тем, что есть в $\mathsf{N}\,\mathsf{N}_{\mathscr{L},\mathscr{R}}(\mathcal{C})$. Для сигаловых отображений Σ, которые даются вложениями $\sigma : [k] \hookrightarrow [n]$, положим $\sigma^*(c_0 \to ... \to c_n) = (c_0' \to ... \to c_{k-1}' \to i_e p_e c_k)$ и воспользуемся универсальным свойством единицы $id \to i_e p_e$ для того, чтобы показать, что это сопоставление универсально.

Функтор $i : \mathsf{N}^e_{\mathscr{L},\mathscr{R}}(\mathcal{C}) \subset \mathsf{N}\,\mathsf{N}_{\mathscr{L},\mathscr{R}}(\mathcal{C})$ допускает левый сопряжённый p, даваемый формулой $p(c_0 \to ... \to c_n) = c_0' \to ... \to c_{n-1}' \to i_e p_e c_n$ (см. диаграмму (*4.3.2*)). Мы видим, что $p \circ i \cong \mathsf{id}$, и что опрасслоение $\tau^*(\mathcal{E} \wr I)$ локально постоянно вдоль единицы сопряжения $\mathsf{id} \to i \circ p$ (что связано с совместимостью $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ с дискретизацией), а потому мы получаем $\tau^*(\mathcal{E} \wr I) \cong p^* i^* \tau^*(\mathcal{E} \wr I)$. По Лемме 4.0.5, p — разрешение, а потому $\mathsf{h}p^*$ — эквивалентность, обратная к $\mathsf{h}i^*$. □

Основной результат этой секции — следующая

Теорема 4.3.12. *Пусть $F : (\mathcal{D}, \mathscr{L}_\mathcal{D}, \mathscr{R}_\mathcal{D}, e_\mathcal{D}) \to (\mathcal{C}, \mathscr{L}_\mathcal{C}, \mathscr{R}_\mathcal{C}, e_\mathcal{C})$ — морфизм дискретных факторизационных категорий, и $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ — модельное опрасслоение, совместимое с дискретизацией. Предположим, что $F_R : \mathscr{R}_\mathcal{D} \to \mathscr{R}_\mathcal{C}$ — резольвента. Тогда*

$$\mathsf{h}\mathbb{F}^* : \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{\mathscr{L}_\mathcal{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{F^*\mathscr{L}_\mathcal{C}}(\mathcal{D}, F^*\mathcal{E})$$

— эквивалентность категорий.

Доказательство. Следствие 4.3.6 и Лемма 4.3.11 говорят нам, что есть следующая, коммутативная с точностью до изоморфизма, диаграмма категорий

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{\mathscr{L}_{\mathcal{C}}}(\mathcal{C},\mathcal{E}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathsf{h}\mathbb{F}^*"'] & \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{i^*\tau^*(\mathscr{L}_{\mathcal{C}}\wr I)}\left(\mathsf{N}^{e_{\mathcal{C}}}_{(\mathscr{L}_{\mathcal{C}},\mathscr{R}_{\mathcal{C}})}(\mathcal{C}), i^*\tau^*(\mathcal{E}\wr I)\right) \arrow[d, "\mathsf{h}(\mathsf{N}^e\,F)^*"] \\
\mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{F^*\mathscr{L}_{\mathcal{C}}}(\mathcal{D},F^*\mathcal{E}) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{i^*\tau^*(F^*\mathscr{L}_{\mathcal{C}}\wr I)}\left(\mathsf{N}^{e_{\mathcal{D}}}_{(\mathscr{L}_{\mathcal{D}},\mathscr{R}_{\mathcal{D}})}(\mathcal{D}), i^*\tau^*(F^*\mathcal{E}\wr I)\right).
\end{tikzcd}$$

Поскольку $(\mathsf{N}^e\,F)^*i^*\tau^*(\mathscr{L}_{\mathcal{C}}\wr I) = i^*\tau^*(F^*\mathscr{L}_{\mathcal{C}}\wr I)$, нужно доказать только одну вещь: что функтор $\mathsf{h}(\mathsf{N}^e\,F)^*$ — эквивалентность.

Опуская различные индексы, определим $\mathsf{N}^e(\mathcal{D})/\,\mathsf{N}^e(\mathcal{C})$ как категорию троек $\mathbf{d},\mathbf{c},f$, где $\mathbf{d}\in\mathsf{N}^e(\mathcal{D})$, $\mathbf{c}\in\mathsf{N}^e(\mathcal{C})$ и $f:\mathsf{N}^e(F)(\mathbf{d})\to\mathbf{c}$ — декартов подъём сюръективного отображения в Δ. Докажем, что естественная проекция $\mathsf{N}^e(\mathcal{D})/\,\mathsf{N}^e(\mathcal{C})\to\mathsf{N}^e(\mathcal{C})$ — правая резольвента.

Изучим слои $(\mathsf{N}^e(\mathcal{D})/\,\mathsf{N}^e(\mathcal{C}))\,(\mathbf{c})$ над $\mathbf{c}=c_0\to\ldots\to c_n$. Категория сюръекций $[k]=[k_0+\ldots+k_n]\twoheadrightarrow[n]$ естественно эквивалентна Δ^{n+1}. Слой $(\mathsf{N}^e(\mathcal{D})/\,\mathsf{N}^e(\mathcal{C}))\,(\mathbf{c})$ — категория, расслоённая над Δ^{n+1}.

Имея объект $\mathbf{c}_{[n]}=c_0\to\ldots\to c_n$ категории $\mathsf{N}^e(\mathcal{C})$, заметим, что поскольку все $c_i\to c_{i+1}$ принадлежат к $\mathscr{R}_I$, из подлежащие I-морфизмы — изоморфизмы. А потому, если $c_n\cong(S,\{e,\ldots,e\})$, $\mathbf{c}_{[n]}$ задаёт $|S|$ цепочек морфизмов

$$c_0^i\to\ldots\to c_{n-1}^i\to e,\;\; i\in S.$$

А потому естественно определить $\mathscr{R}_{\mathcal{D}}(\mathbf{c}_{[n]}) := \prod_{i\in S}\mathscr{R}_{\mathcal{D}}(c_0^i\to\ldots\to c_{n-1}^i\to e)$. Будучи произведением стягиваемых категорий, эта категория стягиваема. Далее, имеем естественную проекцию $\tau:(\mathsf{N}^e(\mathcal{D})/\,\mathsf{N}^e(\mathcal{C}))\,(\mathbf{c}_{[n]})\to\mathscr{R}_{\mathcal{D}}(\mathbf{c}_{[n]})$, действующую следующим образом. Объект $(\mathsf{N}^e(\mathcal{D})/\,\mathsf{N}^e(\mathcal{C}))\,(\mathbf{c}_{[n]})$ представляется сюръекцией $\sigma:[k_0+\ldots+k_n]\twoheadrightarrow[n]$, и набором

$$\mathbf{d}_{[k_0+\ldots+k_n]}=d_0^0\to\ldots\to d_0^{k_0}\to d_1^0\to\ldots\to d_n^{k_n}$$

отображений в $\mathscr{R}_I$, так что $\mathsf{N}^e(F)(\mathbf{d}_{[k_0+\ldots+k_n]})$ изоморфно

$$\sigma^*\mathbf{c}_{[n]}=c_0\to\ldots\to c_0\to c_1\ldots\to c_n$$

с каждым c_i появляющимся k_i+1 раз подряд. Более того, можно видеть, что всякое отображение $\mathbf{d}\to\mathbf{d}'$ в $(\mathsf{N}^e(\mathcal{D})/\,\mathsf{N}^e(\mathcal{C}))\,(\mathbf{c}_{[n]})$ — декартово.

Отправление $\mathbf{d}_{[k_0+\ldots+k_n]}$ в $d_0^{k_0}\to d_1^{k_1}\to\ldots\to d_n^{k_n}$, как можно видеть, производит искомый функтор

$$\tau_{\mathbf{c}_{[n]}}:(\mathsf{N}^e(\mathcal{D})/\,\mathsf{N}^e(\mathcal{C}))\,(\mathbf{c}_{[n]})\to\mathscr{R}_{\mathcal{D}}(\mathbf{c}_{[n]}).$$

По существу, мы берём конец каждого подразбиения $\mathbf{d}_{[k_0+\ldots+k_n]}$, что отвечает проекциям из нерва категории в саму категорию.

Докажем, что $\tau_{\mathbf{c}_{[n]}}$ индуцирует гомотопическую эквивалентность. Для случая одного объекта, $\mathbf{c} = c_0$, видим, что мы попросту сравниваем категорию $\mathscr{R}_{\mathcal{D}}(c)$ и её нерв. По индукции, рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{N}^e(\mathcal{D})/\,\mathsf{N}^e(\mathcal{C}))\,(\mathbf{c}_{[n]}) \arrow[r, "\tau_n"] \arrow[d] & \mathscr{R}_{\mathcal{D}}(\mathbf{c}_{[n]}) \arrow[d] \\
(\mathsf{N}^e(\mathcal{D})/\,\mathsf{N}^e(\mathcal{C}))\,(\mathbf{c}_{[n-1]}) \arrow[r, "\tau_{n-1}"] & \mathscr{R}_{\mathcal{D}}(\mathbf{c}_{[n-1]}),
\end{tikzcd}$$

где $\mathbf{c}_{[n-1]} = c_0 \to \ldots \to c_{n-1}$ и оба вертикальных функтора даются естественными проекциями. Нижняя стрелка τ_{n-1} — гомотопическая эквивалентность, обе вертикальные стрелки — фибрации, и ограничение τ_n на слои левой стрелки даёт, опять же, стандартный функтор между категорией и её нервом. Потому τ_n — гомотопическая эквивалентность.

Чтобы продолжить, нужно также изучить слои проекции

$$(\mathsf{N}^e(\mathcal{D})/\,\mathsf{N}^e(\mathcal{C}))\,(\mathbf{c}_{[n]} \to \mathbf{c}'_{[k]}) \to (\mathsf{N}^e(\mathcal{D})/\,\mathsf{N}^e(\mathcal{C}))\,(\mathbf{c}_{[k]}). \qquad (4.3.3)$$

Зафиксируем морфизм $s : \mathbf{c}_{[n]} \to \mathbf{c}'_{[k]}$ в $\mathsf{N}^e(\mathcal{C})$ и объект $(\mathbf{d}, \mathbf{c}'_{[k]}, f)$ в $(\mathsf{N}^e(\mathcal{D})/\,\mathsf{N}^e(\mathcal{C}))\,(\mathbf{c}_{[k]})$. Обозначим через $Fibre(s, \mathbf{d}, \mathbf{c}'_{[k]}, f)$ слой проекции (4.3.3) над $(\mathbf{d}, \mathbf{c}'_{[k]}, f)$. Можно проверить, что достаточно рассмотреть два случая: когда s декартов над Δ, и когда s послоен.

Предположим, что s послоен в $\mathsf{N}^e(\mathcal{C})$. Тогда, если разложить $\mathbf{c}_{[n]}$ как $\{c_0^i \to \ldots \to c_{n-1}^i \to e\}_{i\in S}$, мы видим, что s даётся единственным образом как забывание нескольких $c_0^i \to \ldots \to c_{n-1}^i \to e$, так что i не принадлежит подмножеству $T \subset S$. Категория $Fibre(s, \mathbf{d}, \mathbf{c}'_{[k]}, f)$ тогда попросту соответствует категории $\prod_{i\in S\setminus T} \mathscr{R}_{\mathcal{D}}(c_0^i \to \ldots \to c_{n-1}^i \to e)$, которая стягиваема.

Когда $s : \mathbf{c}_{[n]} \to \mathbf{c}'_{[k]}$ декартово, объект $Fibre(s, \mathbf{d}, \mathbf{c}'_{[k]}, f)$ — по определению, пара из объекта $(\mathbf{d}', \mathbf{c}_{[n]}, f')$ и морфизма $s' : \mathbf{d}' \to \mathbf{d}$, такого что $s \circ f' = f \circ F(s')$. Однако, поскольку f, f' и s — декартовы над Δ, имеем, что s' также декартово. Это означает, что s' полностью определяется своим образом в Δ. Категория $Fibre(s, \mathbf{d}, \mathbf{c}'_{[k]}, f)$ не зависит, таким образом, от конкретного устройства категорий $\mathcal{D}, \mathcal{C}$, которые можно заменить на категории из одного объекта и морфизма. Ситуация сводится к следующему: дано отображение $g : [n] \to [k]$ и сюръективное отображение $h : [m] \twoheadrightarrow [k]$, и мы изучаем тройки $[m'], h', g'$, с $h' : [m'] \twoheadrightarrow [n]$ сюръекцией, $g' : [m'] \to [m]$ произвольным, и $h \circ g' = h' \circ g$.

Разложим $[n] \xrightarrow{g} [k]$ как сюръекцию-инъекцию, $[n] \xrightarrow{g_s} [n''] \xrightarrow{g_i} [k]$, и заметим, что мы можем брать обратные образы сюръекций вдоль g_i, так что результаты — снова сюръекции.

Видно, что поэтому мы изучаем категории возможных диаграмм

$$\begin{tikzcd}
{[m']} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & {[m'']} \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & {[m]} \arrow[d, "h"] \\
{[n]} \arrow[r, two heads, "g_s"] & {[n'']} \arrow[r, hook, "g_i"] & {[k]}
\end{tikzcd}$$

где правый декартов квадрат и g_s считаются фиксированными. Морфизм $[m'] \twoheadrightarrow [n]$ — то же самое, что и объект Δ^{n+1}. Задать совместимое отображение $[m'] \to [m'']$ — операция, задающая функтор $L : (\Delta^{n+1})^{\mathsf{op}} \to \mathbf{Set}$: между двумя разными подъёмами отсутствуют нетривиальные морфизмы. Более того, если обозначить через $g_{s,*} : \Delta^{n+1} \to \Delta^{n''+1}$ функтор пост-композиции, мы видим, что $L \cong g_{s,*}^* S$, где $S : (\Delta^{n''+1})^{\mathsf{op}} \to \mathbf{Set}$ — функтор, представленный $[m''] \twoheadrightarrow [n'']$.

Потому достаточно доказать следующее. Рассмотрим произвольную сюръекцию $g : [n] \twoheadrightarrow [k]$, и индуцированный функтор $g_* : \Delta^{n+1} \to \Delta^{k+1}$. Нужно показать, что для всякого представимого функтора $S : (\Delta^{k+1})^{\mathsf{op}} \to \mathbf{Set}$, $n+1$-кратное симплициальное множество $(g_*)^* S$ стягиваемо. Индукцией по k, достаточно доказать это для случая $k = 0$. Рассмотрим диагональное вложение $\delta : \Delta \to \Delta^{n+1}$. Тогда $|\delta^*(g_*)^* S|$ эквивалентно $|(g_*)^* S|$, а потому достаточно показать, что для любого $X : \Delta^{\mathsf{op}} \to \mathbf{Set}$, имеется гомотопическая эквивалентность $|i_{n+1}^* X| \cong |X|$, где $i_{n+1} = g_* \circ \delta : \Delta \to \Delta$. Явно, i_{n+1} действует как $n+1$-кратный функтор барицентрического подразбиения, и $|i_{n+1}^* X|$ гомотопически эквивалентно (даже гомеоморфно) $|X|$ для любого симплициального множества X.

Мы доказали, таким образом, что $pr : (\mathsf{N}^e(\mathcal{D}) / \mathsf{N}^e(\mathcal{C})) \to \mathsf{N}^e(\mathcal{C})$ — правая резольвента, а потому индуцированный функтор обратного образа — эквивалентность.

Имеем тавтологическое вложение $i : \mathsf{N}^e(\mathcal{D}) \to (\mathsf{N}^e(\mathcal{D}) / \mathsf{N}^e(\mathcal{C}))$, такое что композиция

$$\mathsf{N}^e(\mathcal{D}) \xrightarrow{i} (\mathsf{N}^e(\mathcal{D}) / \mathsf{N}^e(\mathcal{C})) \xrightarrow{pr} \mathsf{N}^e(\mathcal{C})$$

равна $\mathsf{N}^e(F)$. Функтор i имеет сопряжённый $p : (\mathsf{N}^e(\mathcal{D}) / \mathsf{N}^e(\mathcal{C})) \to \mathsf{N}^e(\mathcal{D})$, $p \circ i \cong \mathsf{id}$. Потому по Лемме 4.0.5 мы видим, что i — резольвента, как и требовалось. $\square$

Глава 5

Сигаловы алгебры и гипотеза Делиня

5.1. Операторные категории

5.1.1. Определение

Определение 5.1.1. *Операторной категорией* называется категория C, такая что

- C имеет конечный объект 1,
- для всякого $c \in \mathrm{C}$, множество морфизмов $\mathrm{C}(1, c)$ конечно,
- всякая диаграмма в C вида $1 \to c \leftarrow c'$ может быть дополнена до декартова квадрата.

Операторным функтором называется функтор $\mathrm{F} : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$, сохраняющий конечные пределы в операторных категориях C, D.

Операторные категорию образуют категорию **Oper**, которая является подкатегорией **Cat**. Существующая ссылка в литературе — работа Барвика [6]. Наше определение отличается от данного в [6] тем, что мы не предполагаем конечность для произвольного множества морфизмов $\mathrm{C}(c, c')$.

Пример 5.1.2. Некоторые стандартные примеры:

- Категория конечных множеств, обозначаемая через Γ,
- Категория конечных (в том числе пустых) упорядоченных множеств, обозначаемая через O. Её связь с категорией (двойственной к) $\Delta \subset$ **Cat** детально объяснена в [6]. Заметим лишь, что имеется функтор $\Delta^{\mathsf{op}} \to \mathrm{O}$, который посылает $[n] \in \Delta$ в полностью упорядоченное множество морфизмов в $[n]$.

Определение 5.1.3. Для всякой операторной категории C, существует операторный функтор

$$\mathrm{C}(1, -) : \mathrm{C} \to \Gamma, \;\; c \mapsto \mathrm{C}(1, c).$$

Мы будем обозначать этот функтор через $| - | : c \mapsto |c|$ и называть *функтором элементов* категории C.

Пример 5.1.4. Для $S \in \Gamma$, обозначим через $X = D^{|S|}$ конфигурационное пространство $|S|$ в открытом единичном диске $D \subset \mathbb{C}$. Точка X — отображение $f : S \to D$, где S оснащено дискретной топологией. Пространство X имеет естественную фильтрацию, которую можно описать следующим образом: точки X_n — те отображения $f : S \to D$, для которых $|f(S)| = n$.

Обозначим теперь через B_S категорию $\Pi_1^{EP}(X)$, являющуюся категорией исходящих путей [43] стратифицированного пространства X. Объекты B_S — конфигурации $S \to D$ из X. Морфизм из $f_0 : S \to D$ в $f_1 : S \to D$ можно представить как отображение $H : f_0(S) \times [0,1] \to D$, такое что

- Для $t \in [0,1)$, ограничение $H_t : f_0(S) \times \{t\} \to D$ инъективно,
- Ограничение $H_1 : f_0(S) \times \{1\} \to D$ отображает $f_0(S)$ на $f_1(S)$, так что композиция $H_1 \circ f_0 : S \to f_0(S) \to f_1(S)$ равна f_1.

Группа автоморфизмов объекта $S \hookrightarrow D$, живущего в максимальном страте, — группа крашеных кос из $|S|$ нитей.

Всякое отображение $a : S \to S'$ индуцирует функтор $a^* : \mathrm{B}_{S'} \to \mathrm{B}_S$. Сформируем категорию B следующим образом:

- её множество объектов $\mathrm{Ob}\,\mathrm{B}$ — набор пар (S, f), где$S \in \Gamma$ и $f : S \hookrightarrow D$ — инъективное отображение.
- Морфизм из (S, f) в (S', f') — пара (a, b), где $a : S \to S'$ — отображение множеств и $b : f \to a^* f'$ — морфизм в B_S между f и $a^* f'$.

Легко проверить, что B — операторная категория. Очевидный функтор забывания $\mathrm{B} \to \Gamma$ совпадает с функтором элементов $\mathrm{B}(1, -)$.

Замечание 5.1.5. Морфизм в B из (S, f) в (S', f') может быть реализован посредством рисования круга вокруг каждой точки в конфигурации-образе (S', f'), разделения всех точек (S, f) по нарисованным кругам без перехода на нижние страты, и затем схлопывания всех точек в каждом круге (если таковые есть в данном круге) в одну, единовременно в каждом круге (и в разные моменты для разных кругов).

Определение 5.1.6. *Подкатегорией допустимых мономорфизмов* $Adm(\mathrm{C})$ операторной категории C называется минимальная подкатегория, содержащая обратные образы мономорфизмов $1 \hookrightarrow c$ для каждого $c \in \mathrm{C}$. Морфизмы в $Adm(\mathrm{C})$ называются *допустимыми мономорфизмами.*

В [6, Definition 2.1],допустимые мономорфизмы называются вложениями слоя. Определение корректно в силу хорошо известного свойства декартовых диаграмм [33]:

Лемма 5.1.7. *Имея категорию $\mathcal{C}$ и коммутативную диаграмму в $\mathcal{C}$*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z', \end{tikzcd}$$

так что правый квадрат декартов. Тогда внешний прямоугольник декартов тогда и только тогда, когда левый квадрат декартов. □

Лемма 5.1.8. *Всякую диаграмму*

$$\begin{tikzcd} & c' \arrow[d] \\ d \arrow[r, hook] & c \end{tikzcd}$$

с $d \hookrightarrow c$, принадлежащим к $Adm(\mathrm{C})$, можно дополнить до декартового квадрата.

Доказательство. Очевидно. □

5.1.2. Классификаторы алгебр

Определение 5.1.9. Пусть C — операторная категория. C-*классификатором алгебр* называется категория A_{C}, определяемая следующим образом.

- $\mathrm{Ob}\ \mathrm{A}_{\mathrm{C}} = \mathrm{Ob}\ \mathrm{C}$,

- Для $c, c' \in \mathrm{A}_{\mathrm{C}}$, морфизм $c \to c'$ — класс эквивалентности диаграмм вида

  $$\begin{tikzcd} & d \arrow[dl, hook'] \arrow[dr] & \\ c & & c' \end{tikzcd}$$

  где $d \hookrightarrow c$ принадлежит $Adm(\mathrm{C})$ и $d \to c'$ — произвольный морфизм C. Две подобных диаграммы эквивалентны, если они изоморфны как домики.

- Композиция морфизмов даётся взятием пределов диаграмм вида

  $$\begin{tikzcd} & d \arrow[dl, hook'] \arrow[dr] & & d' \arrow[dl, hook'] \arrow[dr] & \\ c & & c' & & c'' \end{tikzcd}$$

  что возможно благодаря Лемме 5.1.8.

Имеется функтор $i_{\mathrm{C}} : \mathrm{C} \to \mathrm{A}_{\mathrm{C}}$, отправляющий морфизм $f : c \to c'$ в класс диаграммы

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, hook', "id_c"'] \arrow[dr, "f"] & \\ c & & c'. \end{tikzcd}$$

Определение 5.1.10. Морфизм в A_{C} называется

- *активным*, если он лежит в образе функтора i_{C}, или, что эквивалентно, представим диаграммой

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, hook', "="'] \arrow[dr, "f"] & \\ c & & d \end{tikzcd}$$

  для некоторого f в C.

- *инертным*, если его можно представить диаграммой

$$\begin{tikzcd} & c' \arrow[dl, hook', "i"'] \arrow[dr, "id_{c'}"] & \\ c & & c'. \end{tikzcd}$$

  для некоторого i в $Adm(\mathrm{C})$.

Обозначим через In_{C} и Act_{C} подкатегории инертных и активных морфизмов, соответственно.

Лемма 5.1.11. *Инертные и активные морфизмы образуют факторизационную систему на* A_{C}*: всякий морфизм* f *in* A_{C} *допускает разложение* $f = g \circ h$*, где* h *инертен, а* g *— активен.* $\square$

Лемма 5.1.12. *Любой операторный функтор* $\mathrm{F} : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ *канонически продолжается до факторизационного функтора*

$$\mathrm{A}_{\mathrm{F}} : (\mathrm{A}_{\mathrm{C}}, In_{\mathrm{C}}, Act_{\mathrm{C}}) \to (\mathrm{A}_{\mathrm{D}}, , In_{\mathrm{D}}, Act_{\mathrm{D}}).$$

Доказательство. Очевидно. $\square$

5.2. C-категории и производные алгебры

Определение 5.2.1. Пусть C — операторная категория. C-*моноидальной категорией* называется опрасслоение Гротендика $p : \mathcal{M}^{\otimes} \to \mathrm{A}_{\mathrm{C}}$, такое что для всякого объекта $c \in \mathrm{A}_{\mathrm{C}}$, отображение

$$\mathcal{M}^{\otimes}(c) \to \prod_{\rho : c \to 1} \mathcal{M}^{\otimes}(1), \tag{5.2.1}$$

индуцированное всеми возможными инертными отображениями $\rho : c \to 1$ в $\mathrm{A_C}$ — эквивалентность категорий.

Определение 5.2.2. Пусть C — операторная категория, и $p : \mathcal{M}^{\otimes} \to \mathrm{A_C}$ — C-моноидальная категория. C-алгеброй в $\mathcal{M}^{\otimes}$ называется сечение $A : \mathrm{A_C} \to \mathcal{M}^{\otimes}$ функтора p, которое переводит инертные морфизмы In_{C} в опдекартовы морфизмы $\mathcal{M}^{\otimes}$.

Обозначим через $\mathsf{Alg}(\mathrm{C}, \mathcal{M}) \subset \mathsf{Sect}(\mathrm{A_C}, \mathcal{M}^{\otimes})$ полную подкатегорию C-алгебр.

Имея операторную категорию C, обозначим через $\mathbb{A}_{\mathrm{C}}$ симплициальную замену (Определение 3.1.1) категории $\mathrm{A_C}$. Имея C-моноидальную категорию $\mathcal{M}^{\otimes} \to \mathrm{A_C}$, обозначим её симплициальное расширение (Определение 3.1.6) на $\mathbb{A}_{\mathrm{C}}$ через $\mathbf{M}^{\otimes} \to \mathbb{A}_{\mathrm{C}}$.

Предположим теперь также что опрасслоение $\mathcal{M}^{\otimes} \to \mathrm{A_C}$ модельно (Определение 3.2.4).

Определение 5.2.3. Производной алгеброй A в $\mathcal{M}$ называется производное сечение $A : \mathbb{A}_{\mathrm{C}} \to \mathbf{M}^{\otimes}$ со свойством, что A — In_{C}-локально постоянно в смысле Определения 4.0.8.

Лемма 5.2.4. *Пусть A — алгебра в $\mathcal{M}$. Тогда её образ $\bar{A}$ под действием вложения*

$$\mathsf{Sect}(\mathrm{A_C}, \mathcal{E}) \to \mathsf{DSect}(\mathrm{A_C}, \mathcal{E})$$

— производная алгебра, так что для всякого анти-сигалова морфизма $\alpha : \mathbf{c}_{[n]} \to \mathbf{c}'_{[m]}$ с отображениями $c_{i-1} \to c_i$, $1 \le i \le n-m$, лежащими в In_{C}, образ $\bar{A}(\alpha)$ — изоморфизм.

Доказательство. Очевидно. □

Обозначим через $\mathsf{DAlg}(\mathrm{C}, \mathcal{M})$ полную подкатегорию $\mathsf{DSect}(\mathrm{A_C}, \mathcal{M}^{\otimes})$, состоящую из производных алгебр. Так же, как и в Лемме 3.2.8, имеем, что всякое предсечение, эквивалентное производной алгебре, само является производной алгеброй. Потому получаем корректно определённую полную подкатегорию

$$\mathrm{Ho}\,\mathsf{DAlg}(\mathrm{C}, \mathcal{M}) = \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{In_{\mathrm{C}}}(\mathrm{A_C}, \mathcal{M}^{\otimes}) \subset \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}(\mathrm{A_C}, \mathcal{M}^{\otimes}).$$

5.3. Резольвенты операторных категорий

Определение 5.3.1. Операторный функтор $F : \mathrm{D} \to \mathrm{C}$ называется *(левой, правой) резольвентой* если это — (левая, правая) резольвента в смысле Определения 4.0.2, и вдобавок $\mathrm{D}(1, d) \cong \mathrm{C}(1, Fd)$ для всякого $d \in \mathrm{D}$.

Пусть f — морфизм в $\mathrm{A_D}$, такой что $\mathrm{A}_F(f)$ лежит в In_{C}, тогда можно факторизовать f как gh так что h лежит в In_{D} и $\mathrm{A}_F(g)$ — изоморфизм. А потому запишем следующее определение.

Определение 5.3.2. Пусть $F : \mathrm{D} \to \mathrm{C}$ — операторный функтор и $\mathcal{M}$ — C-моноидальная модельная категория. Производное сечение $X \in \mathsf{DSect}(\mathrm{A}_{\mathrm{D}}, \mathcal{M}^{\otimes})$ — *F-локально постоянная производная алгебра,* если оно $\mathrm{A}^*_F(In_{\mathrm{C}})$-локально постоянное производное сечение в смысле Определения 4.0.8.

Обозначим через $\mathsf{DAlg}_F(\mathrm{D}, \mathcal{M})$ категорию $\mathsf{DSect}_{\mathrm{A}^*_F(In_{\mathrm{C}})}(\mathrm{A}_{\mathrm{D}}, \mathcal{M}^{\otimes})$ F-локально постоянных производных алгебр над D. Обозначая через $\mathbb{A}_F$ симплициальную замену A_F, мы получаем естественно индуцированный функтор обратного образа $\mathbb{A}^*_F : \mathsf{DAlg}(\mathrm{C}, \mathcal{M}) \to \mathsf{DAlg}_F(\mathrm{D}, \mathcal{M})$.

Теорема 5.3.3. *Пусть $F : \mathrm{D} \to \mathrm{C}$ — резольвента операторных категорий, и $\mathcal{M}$ — C - моноидальная модельная категория. Тогда функтор*

$$\mathsf{h}\mathbb{A}^*_F : \mathrm{Ho}\,\mathsf{DAlg}(\mathrm{C}, \mathcal{M}) \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{DAlg}_F(\mathrm{D}, \mathcal{M})$$

— эквивалентность категорий.

Доказательство. Воспользуемся Теоремой 4.3.12, проверив, что все условия выполнены. Для операторной категории C, её классификатор алгебр A_{C} дискретная факторизационная категория для выбора дискретизующего объекта $e = 1 \in \mathrm{C} \subset \mathrm{A}_{\mathrm{C}}$. Соответствующее вложение $i : I \hookrightarrow In_{\mathrm{C}} \wr I$ строго полно. Его левый сопряжённый p задаётся на объектах $In_{\mathrm{C}} \subset In_{\mathrm{C}} \wr I$ как $p(x) = \mathrm{C}(1, x)$, и затем естественно продолжается на всё $In_{\mathrm{C}} \wr I$. Любой операторный функтор $F : \mathrm{D} \to \mathrm{C}$ индуцирует функтор дискретных операторных категорий. Наконец, совместимость $\mathcal{M}^{\otimes} \to \mathrm{A}_{\mathrm{C}}$ с дискретизацией ровно означает условия Сигала (*5.2.1*) для $\mathcal{M}^{\otimes}$. □

Предложим критерий проверки того, что функтор между операторными категориями — разрешение.

Определение 5.3.4. Операторная категория C называется *ограниченной*, если для всякого $c \in \mathrm{C}$, множество классов изоморфизмов объектов в Adm_{C}/c конечно.

Определение 5.3.5. Пусть C — ограниченная операторная категория. Допустимый мономорфизм называется *элементарным*, если его нельзя разложить в композицию допустимых мономорфизмов. Объект $e \in \mathrm{C}$ называется *элементарным*, если единственный элементарный допустимый мономорфизм в Adm_{C}/e — id_e.

Лемма 5.3.6. *Пусть C — ограниченная операторная категория. Тогда*

- *для всякого $c \in \mathrm{C}$, решётка Adm_{C}/c допускает начальный объект $e_c \to c$, такой что e_c — элементарен,*

- *всякий допустимый мономорфизм $c' \to c$ факторизуется в цепочку $c' \to c_0 \to \ldots \to c$ элементарных допустимых мономорфизмов.*

В частности, в такую композицию можно разложить $e_c \to c$.

Доказательство. Категория C допускает конечные расслоённые произведения допустимых мономорфизмов. Рассматривая категорию Adm_{C}/c для $c \in \mathrm{C}$, возьмём мономорфизм-представитель каждого объекта, и рассмотрим расслоённое произведение этих морфизмов. Это будет искомый допустимый моно $e_c \hookrightarrow c$. Доказательство второго утверждения аналогично. $\square$

Пусть $F : \mathrm{D} \to \mathrm{C}$ — операторный функтор. Для $f : c_1 \to c_2$ и $d, F(d) \cong c_2$, обозначим через $F(f, d)$ слой $\mathcal{D}(c_1 \xrightarrow{f} c_2) \to \mathcal{D}(c_2)$ над d.

Предложение 5.3.7. *Пусть $F : \mathrm{D} \to \mathrm{C}$ — операторный функтор, такой что $\mathrm{D}(1, d) \cong \mathrm{C}(1, F(d))$ и C — ограниченная операторная категория. Перечислим следующие условия.*

1. *Для всякого $f : c_1 \to c_2$ в C с элементарным c_1, и для всякого d с $F(d) \cong c_2$, категория $F(f, d)$ f-подъёмов d стягиваема.*

2. *Для всякого элементарного допустимого моно $f : c_1 \to c_2$ и любого $d, F(d) \cong c_2$, категория $F(f, d)$ стягиваема,*

3. *Для всякого $f : c_1 \to c_2$ в C и $d_2, F(d_2) \cong c_2$, любого элементарного допустимого моно $f_0 : c_0 \to c_1$ и любого морфизма $g : d_0 \to d_2$ с $F(g) \cong f \circ f_0$, категория*

   $$K(f, f_0, g) := \{d_1,\, g_0 : d_0 \to d_1,\, g_1 : d_1 \to d_2 \,|\, F(d_1) \cong c_1,\, F(g_0) \cong f_0,\, F(g_1) \cong f,\, g_1 g_0 = g\}$$

   всех возможных факторизаций g стягиваема.

Если F удовлетворяет перечисленным условиям, то он — правая резольвента.

Доказательство. Поскольку обе категории D и C имеют конечные объекты, стягиваемость $\mathrm{D}(c)$ эквивалентна стягиваемости $F(c \to 1_{\mathrm{C}}, 1_{\mathrm{D}})$. Потому достаточно доказать, что $F(f, d)$ стягиваемо для всякого $f : c_1 \to c_2$ и $d \in \mathcal{D}(c_2)$.

Пусть $f : c_1 \to c_2$ — отображение, и $f_0 : c_0 \to c_1$ — элементарный допустимый моно. Для $d \in \mathcal{D}(c_2)$, определим $F(f_0, f_1, d)$ как слой функтора $\mathcal{D}(c_0 \xrightarrow{f_0} c_1 \xrightarrow{f} c_2) \to \mathcal{D}(c)$ над d. Имеется два очевидных отображения

$$F(f, d) \leftarrow F(f_0, f, d) \to F(f \circ f_0, d).$$

Левое отображение — опрасслоение со слоями $F(f_0, d')$ для некоторых $d' \in \mathcal{D}(c_1)$, которые стягиваемы в силу (2) поскольку f_0 элементарен. Правое отображение — расслоение (мы сохраняем конечный объект d), со слоями, даваемыми $K(f_0, f, g)$ для некоторого $g \in \mathcal{D}(c_0 \xrightarrow{ff_0} c_2)$, которые стягиваемы по (3). По теореме Квиллена А, получаем, что $F(f, d)$ гомотопически эквивалентно $F(ff_0, d)$. Наконец, условие ограниченности на C и Лемма 5.3.6 дают то, что мы можем найти элементарный объект e_{c_1} с допустимым мономорфизмом $i : e_{c_1} \to c_1$, который разлагается в цепочку элементарных допустимых моно. Потому получаем, что $F(f, d)$ гомотопически эквивалентно $F(f \circ i, d)$. Последняя категория стягиваема в силу (1).

5.4. Планарные деревья

5.4.1. Определение

Определение 5.4.1. *Планарным деревом*, или просто деревом T, называется неориентированный конечно представимый граф без петель и с одной отмеченной вершиной r_T валентности 1, называемой корнем, так что для каждой вершины v, имеется циклический порядок на множестве рёбер, присоединённых к v.

Обозначение 5.4.2. Для дерева T, обозначим через $V(T)$ множество всех вершин, а через $E(T)$ — множество всех рёбер. Обозначим также через $\overline{V(T)}$ множество всех вершин, кроме корня, и через $\overline{E(T)}$ — множество всех рёбер, не присоединённых к корню. Условие конечной представимости для T значит, что все вышеописанные множества конечны. Наконец, предположение циклического порядка для всякой вершины $v \in V(T)$ превращает T в ориентированный граф: все рёбра ориентированы в сторону корня, так что всякая вершина валентности $n + 1$ имеет n входящих и 1 исходящее ребро.

Обозначим через $|T| \in \mathbf{Top}$ геометрическую реализацию графа T. Это — ориентированный клеточный комплекс с естественным понятием геодезической между двумя точками.

Определение 5.4.3. Морфизмом планарных деревьев $f : T \to T'$ называется ориентированное клеточное отображение $|f| : |T| \to |T'|$ сохраняющее корни, так что для любых двух вершин a, b и любой геодезической, соединяющей a и b в $|T|$, её $|f|$-образ — геодезическая, соединяющая $|f|(a)$ и $|f|(b)$.

Для всякой вершины a дерева T, мы будем далее писать $f(a)$ вместо $|f|(a)$. По определению, $f(r_T) = r_{T'}$.

Обозначим через $\mathrm{Map}(T, T') \in \mathbf{Top}$ подпространство $\mathrm{Map}(|T|, |T'|)$ (с компактно-открытой топологией), точки которого — морфизмы планарных деревьев. Пространство $\mathrm{Map}(T, T')$

не является связной компонентой $\mathrm{Map}(|T|, |T'|)$: пути в $\mathrm{Map}(T, T')$ отвечают гомотопиям клеточных отображений $|T| \to |T'|$, которые остаются морфизмами планарных деревьев для всякого значения параметра.

Определение 5.4.4. *категория некрашеных, или немаркированных планарных деревьев* T_0 *определяется как категория деревьев* T *Определения 5.4.1 с морфизмами, даваемыми компонентами связности,* $\mathrm{T}_0(T, T') = \pi_0 \mathrm{Map}(T, T')$.

Лемма 5.4.5. T_0 *— операторная категория. Более того, существуют обратные образы вдоль морфизмов вида* $1 \to T$*, где* 1 *(исключительно) обозначает дерево с корнем и одной некорневой вершиной* v.

Доказательство. Конечный объект $0 \in \mathrm{T}_0$ — дерево, состоящее из одного лишь корня. Это также и начальный объект.

Опишем обратные образы вдоль $1 \to T$, случай $0 \to \mathrm{T}$ можно изучить похожим образом. Рассмотрим инъекцию $i : 1 \to T$, которая определяется образом $w = i(v)$ в $\overline{V(T)}$. Чтобы построить декартовы диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(w) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & T' \arrow[d, "f"] \\ 1 \arrow[r, "w"] & T \end{tikzcd}$$

заметим, что $f^{-1}(w)$ можно описать как взятие “короны” в T', натянутой на все вершины $z \in V(T')$, отображаемые в w, все геодезические T', соединяющие эти вершины, и превращая всё это в дерево посредством присоединения ребра-“ствола”, идущего в корень. Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{tikzcd} T'' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & T' \arrow[d, "f"] \\ 1 \arrow[r, "w"] & T. \end{tikzcd}$$

Все вершины в $u \in V(T'')$, такие что $fg(u) = w$, отправятся с помощью g в корону, использованную в определении $f^{-1}(w)$; легко видеть, что имеем единственную факторизацию $T'' \to f^{-1}(w)$. $\square$

Несложно видеть, что T_0 тривиальна как операторная категория, но при этом вышеописанный объект 1 представляет интерес. Потому нам нужна другая операторная категория, которую можно связать с B.

Определение 5.4.6. *Крашеное*, или *маркированное планарное дерево* — пара (T, S) из $T \in \mathrm{T}_0$ и $S \subset \overline{V(T)}$. Мы называем вершины в S маркированными (или крашенными), а те, что лежат в $\overline{V(T)} \setminus S$ немаркированными (или неокрашенными).

Маркированное планарное дерево — *стабильно* (ср. [27]) если всякая немаркированная вершина имеет валентность как минимум 3.

Определение 5.4.7. Категория *маркированных деревьев* T_u определяется следующим образом. Объект T — маркированное планарное дерево (T, S). Отображение $(T, S) \to (T', S')$ состоит из морфизма $f : T \to T'$ в T_0 такого что отображение $\overline{V(T)} \to \overline{V(T')}$, индуцированное f, посылает S в S'. Обозначим через $f_\Gamma : S \to S'$ индуцированное отображение конечных множеств.

Категория *стабильных маркированных деревьев* — полная подкатегория $\mathrm{T} \subset \mathrm{T}_u$, образованная стабильными маркированными деревьями.

Лемма 5.4.8. *Функтор вложения* $\mathrm{T} \hookrightarrow \mathrm{T}_u$ *допускает правый сопряжённый* s*, тождественный на отмеченных вершинах. Назовём* $s : (T, S) \mapsto (sT, S)$ *функтором* стабилизации.

Доказательство. Пусть (T, S) — необязательно стабильное маркированное дерево. Уберём все немаркированные вершины валентности 1 и все рёбра, к ним прилегающие. Уберём затем все вершины валентности 2 и отождествим два ребра, встречающихся в каждой такой вершине. Эта процедура задаёт функтор s.

□

Следствие 5.4.9. *Для* (T, S) *стабильного маркированного дерева, имеем* $(s(T), S) \cong (T, S)$*. Сопоставление* $(T, S) \mapsto (s(T), S)$ *сохраняет пределы.*

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 5.4.10. *Категории* T_u *и* T *— операторные категории.*

Доказательство. Конечный объект 1 в обеих категориях — дерево с одним ребром и одной отмеченной вершиной. Пределы в T_u считаются так же, как в T_0, а в случае с T нужно дополнительно применить функтор стабилизации. □

5.4.2. Деревья как резольвента B

Обозначим через D единичный диск с выделенной точкой 1 на границе.

Определение 5.4.11. Пусть $T \in \mathrm{T}_0$ — планарное дерево. *Вложением* T называется инъективное непрерывное отображение $i : |T| \hookrightarrow D$, которое переводит корень T в 1.

Замечание 5.4.12. Имея вложение $i : |T| \to D$, можно разрезать диск вдоль образа i. Поскольку $|T|$ стягиваемо, результат разрезания $D \setminus i(|T|)$ конформно эквивалентен D.

Лемма 5.4.13. *Пространство* $\mathsf{Emb}(T, D)$ *вложений дерева* T *в* D *стягиваемо.*

Доказательство. Индукция по числу вершин, с очевидной базой. Индуктивный шаг даётся взятием дерева T, выбрасыванием внешней вершины v и присоединённого ребра; обозначим ассоциированное поддерево $T \setminus v \subset T$. Соответственно, получаем отображение $\mathsf{Emb}(T, D) \to \mathsf{Emb}(T \setminus v, D)$ (которое, по факту, расслоение Серра), и изучим его слои, что отвечает добавлению вершины с её ребром. Разрезая D вдоль $T \setminus v$, видим, что слои эквивалентны D, а потому стягиваемы. $\square$

Определение 5.4.14. Пусть $T, T' \in \mathrm{T}_0$, морфизмом между двумя вложениями $i : |T| \to D$ и $j : |T'| \to D$ называется пара из отображения $f : T \to T'$ в T_0 и непрерывного отображения $C(|f|) = (|T| \times [0, 1]) \cup_{|f|} |T'| \to D$ из цилиндра отображения $|f| : |T| \to |T'|$ в D, которое совпадает с i и j по обоим концам $[0, 1]$ и вложение, сохраняющее корень, для всех значений $[0, 1]$.

Рассматривая вложения с точностью до гомотопии, обозначим через $\tilde{\mathrm{T}}_0$ категорию вложений немаркированных деревьев, а через $\tilde{\mathrm{T}}$ — категорию вложений стабильных маркированных деревьев.

Лемма 5.4.15. *Естественные функторы* $\tilde{\mathrm{T}}_0 \to \mathrm{T}_0$ *и* $\tilde{\mathrm{T}} \to \mathrm{T}$ *— эквивалентности категорий.*

Доказательство. По Лемме 5.4.13, слои этих функторов-изорасслоений — стягиваемые группоиды. $\square$

Можно также рассмотреть функтор $\tilde{\mathrm{T}} \to \mathrm{B}$, который отправляет $(T, S, i : |T| \to D)$ в конфигурацию точек, отвечающую применению i к S. Обращая эквивалентность $\tilde{\mathrm{T}} \to \mathrm{T}$, получаем операторный функтор сравнения $Cm : \mathrm{T} \to \mathrm{B}$.

Теорема 5.4.16. *(ср. [26, 27]) Функтор* Cm *— резольвента операторных категорий.*

Доказательство. Очевидно, что всё согласовано на уровне элементов. Воспользуемся критерием из Предложения 5.3.7. Легко видеть, что B ограничена, и что элементарные морфизмы отвечают удалению точки. Проверим необходимые условия.

1. Очевидно: элементарный объект в В — пустая конфигурация.

2. Для всякого допустимого моно $i : (b_1 : S \hookrightarrow D) \to (b_2 : S' \hookrightarrow D)$ в В и $T \in \mathrm{T}(b_2)$, категория $F(f, T)$ допускает конечный объект, даваемый удалением всех вершин T, отвечающих $S' \setminus i(S)$, и затем применением функтора стабилизации Леммы 5.4.8.

3. Рассмотрим функторы $\mathrm{B} \to \Gamma$ и $\mathrm{T} \to \Gamma$ и изучим категории совместимых факторизаций для каждого из функторов.

   Допустим, что задана пара $S_0 \overset{f_0}{\hookrightarrow} S_1 \overset{f}{\to} S_2$ с элементарной левой стрелкой, что отвечает забыванию точки $s \in S$. Категория $K_{\mathrm{B}}(f, f_0, g)$ всех возможных совместимых факторизаций $g : b_0 \to b_2$ эквивалентна $\Pi(D \backslash S')$, где $S' = \{s' \in S_0 | f(s') = f(s)\}$: нужно добавить точку s к b_0, и её образ под действием g должен в точности совпадать с образом точек подконфигурации в b_0, отвечающей S' (см Замечание 5.1.5).

   Для Т, мы видим, что картина следующая. Для отображения $h : T_0 \to T_2$, накрывающего $f \circ f_0$, возьмём вложение h в $\tilde{\mathrm{T}}$ и рассмотрим круг в D? окружающий точки, отвечающие S', вместе с частью $|T_0|$, так что эта часть — поддерево. Изучим возможные добавления вершины и ребра к этой части, с точностью до гомотопии. Эти добавления (ср [27, page 29]) могут происходить четырьмя способами: маркировка ранее немаркированной точки, маркировка ребра, добавление ребра вместе с маркированной вершиной к другой вершине, добавление ребра с маркированной вершиной к середине другого ребра. Можно проверить, что категория $K_{\mathrm{T}}(f, f_0, h)$ отвечает клеточному разбиению $D \setminus S'$. А потому, по теореме Ван Кампена, $K_{\mathrm{T}}(f, f_0, h)$ и $K_{\mathrm{B}}(f, f_0, g)$ гомотопически эквивалентны. $\square$

5.5. Бимодульное опрасслоение

Композиция $\mathrm{T} \overset{Cm}{\to} \mathrm{B} \to \Gamma$ естественно изоморфна функтору $\mathrm{T}(1, -)$. Можно использовать любой из них для взятия обратного образа $\mathbf{DVect}_k^{\otimes} \to \mathrm{A}_{\Gamma}$, получая модельную Т-категорию $\mathbf{DVect}_k^{\otimes} \to \mathrm{A}_{\mathrm{T}}$. Покажем, как построить производное сечение этого опрасслоения, связанное с dg-алгеброй A над k.

Для $T \in \mathrm{T}_0$ и $v \in \overline{V(T)}$, обозначим через $in(v)$ число входящих вершин, равное валентности v минус 1.

Определение 5.5.1. Пусть $\mathcal{M}$ — представимая модельная категория с моноидальным произведением, сохраняющем копределы по каждому аргументу. Ассоциированным T_0 - *эндофунк-*

торным опрасслоением, обозначаемым через $\mathrm{End}^{\mathrm{T}_0}(\mathcal{M}) \to \mathrm{A}_{\mathrm{T}_0}$, называется опрасслоение,

- слои в котором —
$$\mathrm{End}^{\mathrm{T}_0}(\mathcal{M})(T) \cong \prod_{v \in \overline{V(T)}} \mathsf{Fun}_c(\mathcal{M}^{in(v)}, \mathcal{M}),$$
где $\mathsf{Fun}_c(\mathcal{M}^{in(v)}, \mathcal{M})$ — категория мультифункторов $\mathcal{M}^{in(v)} \to \mathcal{M}$, сохраняющих копределы по каждой переменной, так что $\mathsf{Fun}_c(\mathcal{M}^{in(v)}, \mathcal{M}) = \mathcal{M}$ когда $in(v)$ пусто,

- функторы перехода в котором заданы следующим образом. Для стягивания ребра $e \in E(T)$, обозначаемого через $T \to T \backslash e$, соответствующий функтор перехода
$$\mathrm{End}^{\mathrm{T}_0}(\mathcal{M})(T) \to \mathrm{End}^{\mathrm{T}_0}(\mathcal{M})(T \backslash e)$$
отвечает композиции мультифункторов вдоль e. Вдоль вложений $T \hookrightarrow T'$ в T_0, функторы перехода
$$\prod_{v \in \overline{V(T)}} \mathsf{Fun}_c(\mathcal{M}^{in(v)}, \mathcal{M}) \to \prod_{w \in \overline{V(T')}} \mathsf{Fun}_c(\mathcal{M}^{in(w)}, \mathcal{M}),$$
отвечают вставлению $in(v)$-кратных моноидальных произведений $\mathcal{M}^{in(v)} \xrightarrow{\otimes} \mathcal{M}$ для $v \in V(T') \setminus V(T)$ (пустое моноидальное произведение — единичный объект), и действие вдоль инертных морфизмов даётся проекциями вместе с подстановкой единичных объектов там, где это необходимо.

Как отмечено в определении, категория $\mathsf{Fun}_c(\mathcal{M}^n, \mathcal{M})$ допускает выделенный элемент, даваемый n-кратным моноидальным произведением $\otimes_n$.

Лемма 5.5.2. *Сопоставление*
$$T \mapsto \{\otimes_{in(v)}\}_{v \in \overline{V(T)}} \in \prod_{v \in \overline{V(T)}} \mathsf{Fun}_c(\mathcal{M}^{in(v)}, \mathcal{M})$$
задаёт сечение $\mathbb{1}_\otimes \in \mathsf{Sect}(\mathrm{A}_{\mathrm{T}_0}, \mathrm{End}^{\mathrm{T}_0}(\mathcal{M}))$.

Используя функтор забывания $U : \mathrm{T} \subset \mathrm{T}_u \to \mathrm{T}_0$, применим обратный образ и получим $p_0 : U^* \mathrm{End}^{\mathrm{T}_0}(\mathcal{M}) \to \mathrm{A}_{\mathrm{T}}$. Определим затем категорию $\mathrm{End}^{\mathrm{T}}(\mathcal{M})$ следующим образом. Объект X категории $U^* \mathrm{End}^{\mathrm{T}_0}(\mathcal{M})$ такой что $p_0 X = (S, T) \in \mathrm{A}_r T$ представляется своими компонентами $X_v \in \mathsf{Fun}_c(\mathcal{M}^{in(v)}, \mathcal{M})$ для каждого $v \in \overline{V(T)}$. Возьмём $\mathrm{End}^{\mathrm{T}}(\mathcal{M})$ равной категории $X \in U^* \mathrm{End}^{\mathrm{T}_0}(\mathcal{M})$ вместе с изоморфизмами $X_v \cong (\mathbb{1}_\otimes)_v$ для $v \in V(T) \backslash S$, с морфизмами, даваемыми отображениями в $U^* \mathrm{End}^{\mathrm{T}_0}(\mathcal{M})$, уважающими эти данные. Индуцированный функтор $p : \mathrm{End}^{\mathrm{T}}(\mathcal{M}) \to \mathrm{A}_{\mathrm{T}}$, как можно видеть, остаётся опрасслоением.

Определение 5.5.3. Назовём $p : \mathrm{End}^{\mathrm{T}}(\mathcal{M}) \to \mathrm{A}_{\mathrm{T}}$ T-*эндофункторным опрасслоением*, связанным с $\mathcal{M}$.

Пусть A — dg-алгебра в $\mathbf{DVect}_k$. Обозначим через A^{op} противоположную алгебру, через A^* — двойственное векторное пространство, и положим, наконец, $\mathcal{M} = A\text{-}\mathbf{Bimod}$, категории A-бимодулей.

Определение 5.5.4. *Бимодульное опрасслоение* $\mathbf{Bimod}_A \to \mathrm{A}_{\mathrm{T}}$ получается взятием категории $\mathbf{Bimod}_A \subset \mathrm{End}^{\mathrm{T}}(\mathcal{M})$, равной подкатегории таких объектов $X, p(X) = (T, S)$ что X_v — функтор $\mathcal{M}^{in(v)} \to \mathcal{M}$, даваемый $A(v) := A^{\otimes in(v)} \otimes A^{\mathsf{op}}$-бимодулем.

Лемма 5.5.5. *Сопоставление когомологического комплекса Хохшильда,*

$$M \cong \{M_v\}_{v \in S} \in \mathbf{Bimod}_A(T) \cong \prod_{v \in S} A(v)\text{-}\mathbf{Bimod} \ \mapsto \ \{CH^\bullet(A(v), M_v)\}_{v \in S} \in \mathbf{DVect}_k^{\otimes}(T),$$

задаёт отображение опрасслоений $CH^\bullet : \mathbf{Bimod}_A \to \mathbf{DVect}_k^{\otimes}$ над A_{T}.

Доказательство. Занудная проверка. □

Наконец, нужно сечение $\mathbf{Bimod}_A \to \mathrm{A}_{\mathrm{T}}$, чтобы подставить его в $CH^\bullet$. Рассмотрим функтор $L : A^{\otimes n} \otimes A^{\mathsf{op}}\text{-}\mathbf{Bimod} \to A\text{-}\mathbf{Bimod}$, определяемый как $L(M) = M \otimes_{A^{\otimes n} \otimes A^{\mathsf{op} \otimes n}} A^{\otimes n}$.

Предложение 5.5.6. *Функтор L допускает точный правый сопряжённый*

$$R : A\text{-}\mathbf{Bimod} \to A^{\otimes n} \otimes A^{\mathsf{op}}\text{-}\mathbf{Bimod},$$

с $R(N) = A^{*\otimes n} \otimes N$. Более того, $HH^\bullet(A^{\otimes n} \otimes A^{\mathsf{op}}, R(M)) = HH^\bullet(A, M)$.

Функтор L можно продолжить до морфизма опрасслоений $L : \mathbf{Bimod}_A \to A\text{-}\mathbf{Bimod} \times \mathrm{A}_{\mathrm{T}}$, где $A\text{-}\mathbf{Bimod} \times \mathrm{A}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{A}_{\mathrm{T}}$ — постоянное опрасслоение. Двойственная версия Предложения 2.3.1 тогда даёт существование $R : \mathsf{Sect}(\mathrm{A}_{\mathrm{T}}, A\text{-}\mathbf{Bimod} \times \mathrm{T}) \to \mathsf{Sect}(\mathrm{A}_{\mathrm{T}}, \mathbf{Bimod}_A)$ правого сопряжённого к L функтора на сечениях.

Потому из сечения $A : \mathrm{A}_{\mathrm{T}} \to A\text{-}\mathbf{Bimod} \times \mathrm{T}$, $A(T) = (A, T)$ мы получаем сечение $R(A)$, и искомое сечение, в итоге, $CH^\bullet(R(A))$. Можно проверить, что $CH^\bullet(R(A))$ — локально постоянная производная алгебра на T. Теоремы 5.3.3 и 5.4.16 тогда дают производноеB-сечение, которое описывает $CH^\bullet(A, A)$ как $\mathbb{E}_2$-алгебру.

Заключение

Для того, чтобы покрыть большой класс структур, мы разработали формализм Сигала для (обобщённой версии) операторных категорий [6], и ввели алгебры Сигала как производные сечения опрасслоений над операторными категориями. Нужно принять во внимание множество формальных аспектов, чтобы иметь полную теорию алгебраических структур.

Мы имеем несколько наработок, которые позволяют определять и изучать модули над сигаловыми алгебрами. Модулем над сигаловой алгеброй A в $\mathbf{DVect}_k$ называется расширение A с квадратом ноль, определяемое посредством процедуры, работающей над любой операторной категорией. Более того, весьма ясно, что категория модулей $\mathbf{Mod}_A$ триангулирована. Как следствие, можно попробовать определить деформационный функтор в подходе Сигала, используя для этого язык фильтрованных алгебр Сигала.

Формальные но потенциально интересные вопросы включают в себя существование гомотопических копределов алгебр сигала над данной операторной категорией, или тензорного произведения модулей и алгебр, конструкций свободной алгебры и более общих сопряжённых функторов между разными категориями алгебр Сигала.

В текущей форме, формализм алгебр Сигала не имеет детально проработанной связи ни с формализмом операд, ни с общими факторизационными алгебрами [7]. Связи между совершенными операторными категориями и топологическими операдами объяснены в [6]. Наши примеры, впрочем, не попадают в класс совершенных, а потому связывание с операдами требует отдельных доказательств. Псевдотензорные категории выглядят тем обещающим языком, который может позволить включить структуры типа PROP в наш язык.

Отдельный интерес представляет вопрос, на что же можно заменить операторные категории. Имеются различные соображения на сей счёт, например, работа Батанина-Маркла [5], а также некоторые наработки Клеменса Берже. Мы столкнулись с более общем понятием в Определении 4.3.8, и мы полагаем, что в этом направлении можно сказать больше слов. Опять же, интерес представляют приложения, заключающиеся во вложении в формализм производных сечений тех структур, которые не допускают на данный момент модельно-категорного описания, например, алгебр Хопфа, биалгебр и тому подобного, описываемых на данный момент с помощью языка PROPов.

Включение операд и PROPов в наш формализм интересно ещё и потому, что, в случае $\mathbf{DVect}_k$, наш формализм работает в простой характеристике так же хорошо, как и в характеристике 0, и нам было бы интересно изучить теорию деформаций операд как только удастся вложить их в сигалов подход.

Гипотеза Делиня появляется в интересной физико-математической работе [14]. Вообще говоря, в последние годы стало ясно, что факторизационные алгебры и операды играют важную роль в матфизике, описывая (или даже определяя) топологические квантовые теории поля. С физической перспективы, $\mathbb{E}_2$-алгебры описывают “древесные” диаграммы топологических струн. “Высшие петли” струнных теорий описываются кривыми высшего рода. Можно изучать факторизационные алгебры для общих кривых, и пытаться найти альтернативное комбинаторное описание. Без упоминания деталей, закончим на том, что картину высших родов можно также попробовать разработать в направлении теории Гротендика-Тейхмюллера, и мы надеемся, что алгебры Сигала позволят увидеть что-то новое в этом направлении.

Список литературы

1. Э. Р. Бальзин, *Разрешения категорий и производные сечения*, Успехи математических наук 69:5 (2014), страницы 918-920
2. Э. Р. Бальзин, *Производные сечения, факторизационные алгебры и гипотеза Делиня* Математические заметки, 2016, том 100, выпуск 2, страницы 291–295
3. John F. Adams, *Infinite Loop Spaces*, Princeton University Press, 1978
4. Edouard Balzin, *Derived sections of Grothendieck fibrations and the problems of homotopical algebra*, http://arxiv.org/abs/1410.3387, submitted for review
5. Michael Batanin, Martin Markl, *Operadic categories and Duoidal Deligne's conjecture*, http://arxiv.org/abs/1404.3886, to appear in Advances in Mathematics
6. Clark Barwick, *From operator categories to topological operads*, preprint http://arxiv.org/abs/1302.5756
7. Alexander Beilinson, Vladimir Drinfeld, *Chiral Algebras*, AMS 2004
8. Clemens Berger, Benoit Fresse, *Combinatorial operad actions on cochains,* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 137 (2004), 135-174
9. Clemens Berger, Ieke Moerdijk, *Axiomatic homotopy theory for operads*, Comment. Math. Helv. Vol. 78(2003), no. 4, http://arxiv.org/abs/math/0206094
10. Clemens Berger, Ieke Moerdijk, *On an extension of the notion of Reedy category*, Math. Z. 269 (2011), 977-1004, http://arxiv.org/abs/0809.3341
11. Clemens Berger, Ieke Moerdijk, *The Boardman-Vogt resolution of operads in monoidal model categories,* Topology, 2006, Volume 45, Issue 5, pp 807-849
12. Aldridge K. Bousfield, Daniel M. Kan, *Homotopy limits, completions and localizations,* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 304. Springer-Verlag, Berlin, 1972
13. Denis-Charles Cisinski, *Locally constant functors,* Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (2009), 147, 593
14. Kevin Costello, *Topological conformal field theories and Calabi-Yau categories,* Advances in Mathematics Volume 210, Issue 1, 20 March 2007, pp 165-214
15. William G. Dwyer, Philip S. Hirschhorn, Daniel M. Kan, and Jeffrey H. Smith, *Homotopy Limit Functors on Model Categories and Homotopical Categories*, AMS 2004
16. Paul G. Goerss, John F. Jardine, *Simplicial Homotopy Theory*, Springer, 2009
17. Moritz Groth, *On the theory of derivators*, doctoral dissertation, Bonn 2011, http://www.math.uni-bonn.de/people/grk1150/DISS/dissertation-groth.pdf
18. Moritz Groth, Kate Ponto, Michael Shulman, *The additivity of traces in monoidal derivators*,

to appear in Journal of K-theory, preprint `http://arxiv.org/abs/1212.3277`

19. Alexander Grothendieck, Michèle Raynaud et al., *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA I)*, Lecture Notes in Mathematics 224, Springer 1971
20. Philip S. Hirschhorn, *Model Categories and Their Localisations*, No. 99. American Mathematical Soc., 2009.
21. André Hirschowitz, Carlos Simpson, *Descente pour les n-champs (Descent for n-stacks)*, preprint `http://arxiv.org/abs/math/9807049`
22. John F. Jardine, *Cocycle Categories*, Algebraic topology, Vol. 4. Abel Symp. Berlin: Springer, 2009, pp. 185?218.
23. Peter T. Johnstone, *Sketches of an elephant: A topos theory compendium*, Vol. 1-2. Oxford University Press, 2002.
24. Mark Hovey, *Model Categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1999.
25. Dmitry Kaledin, *Non-commutative Geometry from the homological point of view*, lecture notes, KIAS, Seoul, October 2009
26. Dmitry Kaledin, *Homological methods in Non-commutative Geometry*, lecture notes, University of Tokyo, October 2007 — March 2008
27. Maxim Kontsevich, Yan Soibelman, *Deformations of algebras over operads and Deligne's conjecture*, `http://arxiv.org/abs/math/0001151`
28. Valery A. Lunts, *Categorical resolution of singularities,* Journal of Algebra, 2010, Volume 323, Issue 10, pp 2977-3003
29. Jacob Lurie, *Derived Algebraic Geometry II: Noncommutative Algebra*, preprint `http://arxiv.org/abs/math/0702299`
30. Jacob Lurie, *Derived Algebraic Geometry III: Commutative Algebra*, preprint `http://arxiv.org/abs/math/0703204`
31. Jacob Lurie, *Higher Algebra*, on-line book, available at `http://www.math.harvard.edu/~lurie/`
32. James E. McClure and Jeffrey H. Smith, *A solution of Deligne's Hochschild cohomology conjecture,* Recent Progress in Homotopy Theory (Baltimore, MD, 2000), volume 293 of Contemp. Math., pp 153-193. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
33. Saunders Mac Lane, *Categories for The Working Mathematician,* Graduate Texts in Mathematics 5 (second ed.). Springer, 1998
34. J. Peter May, *The geometry of iterated loop spaces,* Springer-Verlag, Berlin, 1972, Lectures Notes in Mathematics, Vol. 271

35. Daniel Quillen, *Higher K-theory: I,* Lecture Notes in Mathematics Volume 341, 1973, pp 85-147

36. Emily Riehl, *Categorical Homotopy Theory,* Cambridge University Press, 2014

37. Graeme Segal, *Categories and Cohomology Theories*, Topology Vol. 13 pp. 293-312, Pergamon Press 1974

38. Markus Spitzweck, *Operads, Algebras and Modules in General Model Categories*, `http://arxiv.org/abs/math/0101102`

39. Dmitry E. Tamarkin, *Another proof of M. Kontsevich formality theorem,* `http://arxiv.org/abs/math/9803025`

40. Bertrand Toën, Michel Vaquié, *Moduli of objects in dg-categories,* Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, Volume 40, Issue 3, May–June 2007, pp 387–444

41. Bertrand Toën, Gabriele Vezzosi, *Infinie-catégories monoidales rigides et caractères de Chern,* to appear in Selecta, `http://www.math.univ-montp2.fr/~toen/dag-loop.pdf`

42. Angelo Vistoli, *Notes on Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory,* `http://arxiv.org/abs/math/0412512`

43. Jon Woolf, *The fundamental category of a stratified space.* Preprint, arXiv:0811.2580.