На правах рукописи

Бальзин Эдуард Рафитович

Расслоения Гротендика и гомотопическая алгебра

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2016

Работа выполнена на *факультете математики Национального исследовательского университета «Высшая Школа Экономики»*.

Научный руководитель:	*доктор физико-математических наук, профессор РАН Каледин Дмитрий Борисович, ведущий научный сотрудник Математического института имени В. А. Стеклова РАН*,
Официальные оппоненты:	*кандидат физико-математических наук Батанин Михаил Александрович, старший лектор математического факультета университета Маккуори, Австралия*; *доктор физико-математических наук Ягунов Сергей Алексеевич, старший научный сотрудник отдела алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского отделения Математического института имени В.А. Стеклова РАН*
Ведущая организация:	*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Санкт — Петербургский государственный университет» (СПбГУ)*

Защита состоится 25 октября 2016 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета *Д002.077.03* на базе *ИППИ РАН*, расположенном по адресу: *Большой Каретный переулок, д.19, стр.1, Москва, 127051.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *ИППИ РАН.*

Автореферат разослан «_____» _______________ 2016 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя учёного секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н. *Соболевский Андрей Николаевич*

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования, степень разработанности

Формализм операд [34] появился как способ описывать алгебраическую структуру n — кратных пространств петель. Операдой $\mathcal{O}$ в категории топологических пространств **Top** называется симметрическая последовательность пространств $\{\mathcal{O}(l)\}_{l\in\mathbb{N}}$, где каждое $\mathcal{O}(l) \in$ **Top** следует воспринимать как пространство операций с l входами и одним выходом. Вдобавок должны быть заданы отображения композиции $\mathcal{O}(l) \times \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(l+m-1)$ уважающие действие симметрической группы, ассоциативные и с единицами. Важный набор примеров операд даётся так называемыми операдами маленьких n-дисков E_n, для которых $\mathrm{E}_n(m)$ — с точностью до гомотопии, конфигурационное пространство l точек в n-диске. Любое n-кратное пространство петель X является алгеброй над E_n, другими словами, заданы отображения $\mathrm{E}_n(m) \times X^m \to X$ удовлетворяющие определённым условиям.

Вместо категории топологических пространств можно рассмотреть произвольную симметрическую моноидальную категорию $\mathcal{M}$ с моноидальным произведением, обозначенным через $\otimes$. Определения операды и алгебры над ней легко обобщить: как в отображениях композиции, $\mathcal{O}(l) \otimes \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(l+m-1)$, так и в отображениях структуры $\mathcal{O}$-алгебры, $\mathcal{O}(m) \otimes X^{\otimes m} \to X$, нужно вставить моноидальное произведение $\otimes$ вместо $\times$. В **Top** естественно рассматривать операды и алгебры над ними с точностью до гомотопической эквивалентности. Если мы работаем в моноидальной категории $\mathcal{M}$ с заданной гомотопической структурой (например, $\mathcal{M}$ может быть моноидальной модельной категорией [24]), можно также изучать операды в $\mathcal{M}$ с точностью до слабой эквивалентности в смысле категорной теории гомотопий [15]. С этой точки зрения, в качестве операды в **Top** обычно обозначаемой как E_∞ можно взять любую операду $\mathcal{O}$ такую что $\mathcal{O}(m)$ стягиваемо со свободным действием симметрической группы [9, 11, 38].

Конкретный пример категории, отличной от **Top**, даётся $\mathbf{DVect}_k$, категорией цепных комплексов векторных пространств над полем k. Взяв сингулярный цепной комплекс каждого из пространств $\mathrm{E}_n(m)$, составляющих операду n-дисков, мы получим операду в $\mathbf{DVect}_k$, обозначаемую нами $\mathbb{E}_n$. Алгебры над операдами $\mathbb{E}_n$ изучались с большим интересом в последние годы. Примером $\mathbb{E}_2$-алгебры является когомологический комплекс Хохшильда $CH^\bullet(A)$ для dg-алгебры A, который появляется во многих областях математики, например в контексте топологических квантовых теорий поля [14]. Проблема существования структуры $\mathbb{E}_2$-алгебры на $CH^\bullet(A)$ также известна как гипотеза Делиня, и чёткая её формулировка даётся с точностью до квази-изоморфизма: существует операда $\mathcal{O}$ в $\mathbf{DVect}_k$, квази-изоморфная $\mathbb{E}_2$, которая действует на $CH^\bullet(A)$. Доказательства этого результата (см., например, [8, 32, 39]) состоят из большого количества работы по конструированию явной версии $\mathcal{O}$, её действия на $CH^\bullet(A)$, и цепочки квази-изоморфизмов, соединяющих $\mathcal{O}$ с $\mathbb{E}_2$.

Громоздкость доказательств гипотезы Делиня и формализма операд вообще происходит из того факта, что две операды могут быть очень разных сложности и размера, и при этом описывать эквивалентные структуры. Однако, существует другой подход к $\mathbb{E}_n$-алгебрам, и, более общо, к структурам, связанным с конфигурационными пространствами, который основан на формализме факторизационных алгебр, впервые введённых в [7]. Факторизационная алгебра $\mathcal{A}$ над пространством X состоит из, грубо говоря, $\mathbf{DVect}_k$-предпучка $\mathcal{A}_m$ на X^m для каждой степени $m \in \mathbb{N}$, вместе с дополнительной структурой. Во-первых, даны отображения вида

$$\Delta_m^* \mathcal{A}_m \longrightarrow \mathcal{A}_1 \tag{i}$$

между ограничением $\Delta_m^* \mathcal{A}_m$ of $\mathcal{A}_m$ на самую малую диагональ $\Delta_m : X \to X^m$ и $\mathcal{A}_1$. Во вторых, если обозначить через $i_m : U_m \subset X^m$ дополнение $\{(x_i) \in X^m | x_k \neq x_l\}$ до всех диагоналей, то должны быть заданы отображения

$$i_m^* \mathcal{A}_m \longrightarrow \mathcal{A}_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \mathcal{A}_1 \tag{ii}$$

между ограничением $\mathcal{A}_m$ на U_m и m-кратным внешним произведением $\mathcal{A}_1$ [7], от которых требуется, чтобы они были квази-изоморфизмами. В случае, когда X это n-диск, можно доказать [31], что $\mathbb{E}_n$-алгебры отвечают тем факторизационным алгебрам на X, которые конструктивны, что означает что каждый предпучок $\mathcal{A}_m$ локально постоянен на стратах для стандартной стратификации X^m.

Можно утверждать, что понятие факторизационной алгебры более естественно и канонично в сравнении с понятием алгебры над операдой. Разница между двумя подходами особенно заметна в малой размерности, например, в размерности 2. В этом случае можно заменить 2-диск D и его степени D^m на их стратифицированные [43] фундаментальные категории $\Pi_1^{EP}(D^m)$, и рассмотреть, вместо конструктивных пучков, функторы $\Pi_1^{EP}(D^m) \to \mathbf{DVect}_k$. Таким образом, можно работать с куда меньшим набором данных, чем с парой, состоящее из операды $\mathcal{O}$, квазиизоморфной $\mathbb{E}_2$, и $\mathcal{O}$-алгебры. Это приводит к вопросу о том, существует ли общий «алгебро-гомотопический» формализм, который не имеет проблем неканоничности, связанных с выбором операды, и естественно воспроизводит подход факторизационных алгебр к разного рода алгебраическим структурам.

В контексте пространств петель, подобный подход действительно существует и очень полезен на практике [37]. Обозначим через Г категорию конечных множеств и их отображений, а через Γ_+ категорию конечных множеств и частично определённых отображений: морфизмом $S \to T$ в Γ_+ является отображение множеств, $U \to T$ определённое на подмножестве $U \subset S$. Тогда Г-пространство A определяется как функтор

$$\Gamma_+ \xrightarrow{A} \mathbf{Top}$$

в категорию топологических пространств, который удовлетворяет условиям Сигала, описанным ниже. Зафиксируем одноэлементное множество 1. Тогда для любого множества S и элемента $x \in S$ мы имеем соответствующее частично определённое отображение $i_x : S \to 1$, заданное на подмножестве $\{x\}$. Условия сигала заключаются в том, что, для каждого $S \in \Gamma_*$, индуцированное отображение

$$A(S) \xrightarrow{\prod_{x\in S} A(i_x)} A(1)^S \tag{iii}$$

является гомотопической эквивалентностью топологических пространств.

Для каждого $S \in \Gamma_+$ есть ещё одно отображение в 1, $\pi_S : S \to 1$, определённое на всём множестве S. Мы можем рассмотреть диаграмму следующего вида

$$\begin{tikzcd} & A(S) \arrow[dl, "\prod_{x\in S} A(i_x)"'] \arrow[dr, "A(\pi_S)"] & \\ A(1)^S & & A(1). \end{tikzcd} \tag{iv}$$

Выбирая гомотопически обратный морфизм к левому отображению, мы получаем, неканонически, операцию умножения $m_S : A(1)^S \to A(1)$ in **Top**. Можно проверить, что в гомотопической категории Ho **Top**, тип, соответствующий $A(1)$, оснащён структурой коммутативного моноида.

Следует заметить, однако, что Г-пространство A несёт в себе значительно больше информации, нежели чем структура гомотопического моноида на $A(1)$. В своей работе Сигал, точно так же как Мэй в случае с операдами, использовал Г-пространства для описания бесконечнократных пространств петель и машины распетливания. С современной точки зрения, Г-пространство является правильным описанием гомотопически когерентно коммутативного моноида в топологических пространствах. В частности, Г-пространства описывают тот же класс структур, что и E_∞-алгебры в **Top**.

Вместо Г можно рассмотреть другие категории, например, категорию O конечных полностью упорядоченных множеств. Можно затем похожим образом определить категорию O_+, с отображениями $O \to O'$ даваемыми морфизмами $P \to O'$, где $P \subset O$ — вложение интервала. Модифицируя определения надлежащим образом, можно моделировать ассоциативные моноиды (без коммутативности) как функторы $\mathrm{O}_+ \to \mathbf{Top}$ со специальными условиями. Явные примеры таких функторов можно получать из обычных пространств петель. Более общо, можно рассмотреть, вместо Γ и O, операторную категорию C в смысле [6]: с точностью до некоторых условий конечности, в C, по определению, существует конечный объект 1 и выделенный класс «допустимых» мономорфизмов, которые получаются как композиции обратных образов отображений $1 \to c$ для $c \in \mathrm{C}$ (требуется, чтобы эти обратные образы существовали). С помощью допустимых мономорфизмов можно ввести понятие частично определённых отображений и построить категории C_+ (которые в основном тексте мы обозначаем A_{C}). В работе [6] показано, что существуют операторные категории O_n, такие что n-кратные пространства петель — примеры E_n-алгебр — могут быть описаны как сигалоподобные объекты $(\mathrm{O}_n)_+ \to \mathbf{Top}$. С другой стороны, вместо $\mathbf{Top}$ можно рассмотреть любую другую гомотопическую категорию, то есть, категорию $\mathcal{M}$ с подкатегорией слабых эквивалентностей $\mathcal{W}$, такую что $\mathcal{M}$ имеет (гомотопические) произведения, и определить объекты Сигала как функторы $\mathrm{C}_+ \to \mathcal{M}$, такие что отображения, подобные описанным в диаграмме (iii), являются слабыми эквивалентностями.

Подход Сигала контрастирует с операдным в том, что умножения $m_S : A(1)^S \to A(1)$ для Γ-пространства A не заданы канонически и вместо этого строятся с помощью свойств A, в то время как задать модель $\mathcal{O}$ для $\mathbb{E}_\infty$-операды в $\mathbf{Top}$ и алгебру над ней значит задать большое количество разных структур. В частности, для $|S|$-элементного множества S не требуется, чтобы $A(S)$ было равно или даже эквивалентно $\mathcal{O}(|S|) \times A(1)^S$. Информация о свойствах умножения в формализме Сигала кодируется, таким образом, целиком и полностью категорией Γ, так что для выбора остаётся куда меньше свободы. Можно было бы надеяться, что в некоторых ситуациях намного проще строить и работать с сигаловыми структурами, нежели чем с операдами. Более того, имеется значительное сходство между Γ-пространствами Сигала и факторизационными алгебрами: для факторизационной алгебры $\mathcal{A}$, отображения вида (i) и (ii) дают, после перехода к слоям, диаграммы, в точности подобные (iv).

Тем не менее, если мы попробуем продолжить формализм Сигала в недекартовы моноидальные категории, например в категорию цепных комплексов, то мы немедленно попадём в тупиковую ситуацию. Чтобы получить отображения вида (iii) в подходе Γ-пространств, мы использовали универсальное свойство декартового произведения $\times$, которое отсутствует для тензорного произведения $\otimes_k$ в $\mathbf{DVect}_k$.

Человечеству известен способ справиться, а точнее, уйти от этой проблемы. Весьма известное наблюдение [31, 37, 41] говорит нам о том, что всякая симметрическая моноидальная категория $\mathcal{M}$ является слабо коммутативным моноидом в категории всех категорий, а значит, её можно описать, с точностью до эквивалентности, как Γ-категорию M. То есть, M — функтор из Γ_+ в категории, такой что $M(1) \cong \mathcal{M}$, и что отображения (iii),

$$M(S) \longrightarrow \prod_S M(1),$$

являются эквивалентностями категорий. Для того чтобы не выбирать эквивалентность между $\mathcal{M}$ и $M(1)$, необходимо либо работать с псевдофункторами из Γ_+ в категории, либо, что эквивалентно, с опрасслоениями Гротендика [19, 42] над Γ_+: каждое из понятий описывает слабое ковариантное Γ_+-индексированное семейство категорий.

Для того чтобы [31] непосредственно получить опрасслоение Гротендика из симметрической моноидальной категории $\mathcal{M}$ с моноидальным произведением $\otimes$, определим $\mathcal{M}^{\otimes}$ как категорию

- с объектами $(S, \{X_s\}_{s\in S})$ где $S \in \Gamma_+$ и каждый X_s является объектом $\mathcal{M}$.
- с морфизмами $(S, \{X_s\}_{s\in S}) \to (T, \{Y_t\}_{t\in T})$ состоящими из частично определённого отображения $f : S \to T$, и для каждого $t \in T$, морфизма $\otimes_{s\in f^{-1}(t)} X_s \to Y_t$. В случае, когда $f^{-1}(t)$ пусто, моноидальное произведение над этим множеством равно единичному объекту. Композиции тогда можно определить с помощью изоморфизмов когерентности для произведения $\otimes : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ и единичного объекта.

Естественный функтор $p : \mathcal{M}^{\otimes} \to \Gamma_+$ — опрасслоение Гротендика, что, повторим, означает, что отображение $S \mapsto p^{-1}(S) = \mathcal{M}^S$ функториально в слабом, но когерентном смысле.

Рассмотрим коммутативный моноид $A \in \mathcal{M}$. Тогда можно задать сечение $\Gamma_+ \to \mathcal{M}^{\otimes}$ опрасслоения $p : \mathcal{M}^{\otimes} \to \Gamma_+$ по правилу $S \mapsto (S, \{X_s\})$, так что каждый $X_s = A$. Сечения этого типа могут быть охарактеризованы посредством подходящих условий нормировки: если рассмотреть отображение $f : S \to T$ in Γ_+, значение сечения B на f определяется морфизмом $f_! B(S) \to B(T)$ в $\mathcal{M}^T$, где $f_! : \mathcal{M}^S \to \mathcal{M}^T$ — функтор «перехода»

$$f_! : (S, \{X_s\}_{s\in S}) \mapsto (T, \{Y_t\}_{t\in T}), \quad Y_t = \otimes_{s\in f^{-1}t} X_s. \tag{v}$$

В таком случае, сечение B происходит из коммутативного моноида в $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда для каждого инертного отображения $p : S \to T$, — частично определённого отображения, индуцированного вложением $i : T \hookrightarrow S$, $p \circ i = id_T$, — соответствующее отображение $p_! B(S) \to B(T)$ — изоморфизм. Отсюда следует, что $B(S) \cong (B(1), ...B(1))$ естественным образом.

Нет, однако, очевидного способа написать диаграммы для условий сигала, используя язык сечений опрасслоения $\mathcal{M}^{\otimes} \to \Gamma_+$. Очень важно заметить, что когда $\mathcal{M} = \mathbf{DVect}_k$ и

$char k > 0$, коммутативные dg-алгебры (которые описываются как сечения) не являются верными объектами для рассмотрения и не совпадают, даже с точностью до квази-изоморфизма, с $\mathbb{E}_\infty$-алгебрами. Наконец, можно проверить, что операторные категории в смысле [6], отвечающие $\mathbb{E}_n$-структурам, не дают ничего большего, чем коммутативные или ассоциативные алгебры в $\mathcal{M}$, будучи рассмотренными в контексте категорных сечений.

Вышеописанные наблюдения мотивируют [31] перейти к рассмотрению моноидальных ∞-категорий, и в то время как получающийся формализм в принципе решает упомянутые проблемы, размеры получающейся машинерии огромны. Философским объяснением этого факта может быть то, что замена $\mathcal{M}^{\otimes} \to \Gamma_+$ на высшекатегорный аналог означает взятие фибрантной замены внутри выбранной модели для высших категорий. Получающиеся в результате соотношения когерентности могут быть очень сложны для того, чтобы с ними работать.

Цели и задачи диссертации

Наша основная цель — получить сигалово описание алгебраических структур, не меняя данных со стороны $\mathcal{M}$. Мы бы предпочли иметь объект, который производит диаграммы в $\mathcal{M}$ следующей формы:

$$\begin{tikzcd} & A_{\pi_S} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A(1)^S \cong (\pi_S)_! A(S) & & A(1), \end{tikzcd} \tag{vi}$$

где $(\pi_S)_!$ — функтор перехода вдоль отображения $\pi_S : S \to 1$, $\pi_S^{-1}(1) = S$. Можно затем потребовать, чтобы левое отображение было слабой эквивалентностью, в случае если такие есть в $\mathcal{M}$. В большей общности, вместо $\mathcal{M}^{\otimes} \to \Gamma_+$ можно рассмотреть общие опрасслоения Гротендика $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ и задаться вопросом: есть ли способ определить объекты, такие что по отображению $f : c \to c'$ в $\mathcal{C}$ мы бы получали диаграммы формы $f_! A(c) \longleftarrow A_f \longrightarrow A(c')$ (где $f_! : \mathcal{E}(c) \to \mathcal{E}(c')$ — функтор перехода, индуцированный свойствами опрасслоения $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$). Тогда можно было бы потребовать, чтобы левая стрелка была слабой эквивалентностью, в подходящем смысле. Наконец, условия нормировки (подобные тем, что появлялись для сечений-алгебр выше) вдоль подмножества $\mathcal{S}$ отображений $\mathcal{C}$ можно было бы сформулировать как требования для $A_f \longrightarrow A(c')$ быть слабой эквивалентностью в случае, когда f принадлежит $\mathcal{S}$.

В рамках данной диссертации мы вводим производные, или сигаловы, сечения опрасслоений со слабыми эквивалентностями, которые воспроизводят, в частности, диаграммы вида (vi).

Опишем вкратце конструкцию. Для категории $\mathcal{C}$, её симплициальной заменой [12] $\mathbb{C}$ назовём категорию

- объекты которой — наборы компонируемых морфизмов $c_0 \to ... \to c_n$ в $\mathcal{C}$ произвольной конечной длины $n \geq 0$,
- морфизм между $c_0 \to ... \to c_n$ и $c'_0 \to ... \to c'_m$ состоит из отображения ординалов $a : [m] \to [n]$ (где $[i]$ обозначает полностью упорядоченное множество из $i+1$ элементов $0, 1, ..., i$) такого что $c_{a(k)} = c'_k$ для $0 \leq k \leq m$.

Если обозначить через Δ категорию конечных ординалов, тогда $\mathbb{C}$ — (опфибрационная) конструкция Гротендика нерва $N\mathcal{C} : \Delta^{\mathsf{op}} \to \mathbf{Set}$. Отображения $(c_0 \to ... \to c_n) \mapsto c_0$ или $(c_0 \to ... \to c_n) \mapsto c_n$ задают функторы $h : \mathbb{C} \to \mathcal{C}$ и $t : \mathbb{C} \to \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.

Предположим теперь, что у нас есть опрасслоение $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$. Также предположим, что каждый его слой $\mathcal{E}(c) := p^{-1}(c)$ имеет слабые эквивалентности, и что, для каждого отображения $f : c \to c'$, функтор $f_! : \mathcal{E}(c) \to \mathcal{E}(c')$, индуцированный свойством опрасслоения, сохраняет эти слабые эквивалентности. Тогда существует функтор $p_{\mathbb{C}} : \mathbf{E} \to \mathbb{C}$, такой что $\mathbf{E}(\mathbf{c}_{[n]}) := p_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbf{c}_{[n]}) \cong \mathcal{E}(c_n)$, и что для каждого $\alpha : \mathbf{c}_{[n]} \to \mathbf{c}'_{[m]}$ существует естественно индуцированный функтор $\mathbf{E}(\mathbf{c}'_{[m]}) \to \mathbf{E}(\mathbf{c}_{[n]})$, изоморфный $t(\alpha)_! : \mathcal{E}(c'_m) \to \mathcal{E}(c_n)$. В отличие от p, функтор $p_{\mathbb{C}}$ — расслоение Гротендика и описывает контравариантное семейство категорий над $\mathbb{C}$.

Определим предсечение $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ как сечение $X : \mathbb{C} \to \mathbf{E}$ функтора $p_{\mathbb{C}}$. Предсечения образуют категорию $\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, которая естественно оснащена слабыми эквивалентностями. Предсечение X, действуя на диаграмме вида

$$\begin{tikzcd} & c \xrightarrow{f} c' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ c & & c', \end{tikzcd} \tag{vii}$$

даёт следующую диаграмму в $\mathcal{E}(c')$:

$$\begin{tikzcd} & X(c \xrightarrow{f} c') \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ f_! X(c) & & X(c'). \end{tikzcd}$$

Если левая стрелка в этой диаграмме, и, более общо, другие стрелки, получаемые применением X к сигаловым отображениям — морфизмам в $\mathbb{C}$, индуцированным вложениями в Δ

на левый край, — в изоморфизмы, то можно доказать, что X определяет обычное сечение $\mathcal{C} \to \mathcal{E}$ исходного опрасслоения $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$. Если же X отправляет сигаловы отображения в слабые эквивалентности, то мы называем такое предсечение X производным сечением. Производные сечения опрасслоения $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ образуют категорию $\mathsf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \subset \mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ с индуцированными слабыми эквивалентностями.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту

1. Модельная структура Риди для полурасслоений

Для того чтобы работать с категорией $\mathsf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ или даже с $\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ гомотопическим образом, необходимо иметь дополнительную структуру, например, модельную структуру в смысле Квиллена [35, 24, 20], или же разумное вложение в модельную категорию.

Во-первых, необходимо иметь какую-то структуру на опрасслоении $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$. Мы предположим, что каждый слой $\mathcal{E}(c)$ — модельная категория, и что каждый функтор перехода $f_! : \mathcal{E}(c) \to \mathcal{E}(c')$ сохраняет фибрации и слабые эквивалентности. Назовём такие опрасслоения модельными. Тогда имеем следующее ([2, Теорема 10]):

Теорема 1. *Для модельного опрасслоения $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$, соответствующая категория предсечений $\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ обладает модельной структурой, со слабыми эквивалентностями заданными поточечно.*

Модельная структура, даваемая этой теоремой, очень конкретна и напоминает во многом обычную структуру Риди.

Пример модельного опрасслоения даётся $\mathbf{DVect}_k^{\otimes} \to \Gamma_+$: функторы перехода в этой ситуации задаются, по существу, n-кратными тензорными произведениями $\otimes : \mathbf{DVect}_k^n \to \mathbf{DVect}_k$, которые сохраняют сюръективные отображения и квази-изоморфизмы, но не коммутируют с пределами или копределами, будучи полилинейными по своей природе. По этой причине, техники для работы с семействами модельных категорий, разработанные ранее (например, [21]), оказываются неприменимы для предсечений.

Таким образом, $\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ — модельная категория, и её локализация $\mathrm{Ho}\,\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ вдоль слабых эквивалентностей хорошо контролируема. То же самое потому верно для локализации $\mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$. Мы не утверждаем существования модельной структуры на категории $\mathsf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, и не видим причин ожидать её существования. Иметь объемлющую модельную категорию $\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, в точности как в случае вычисления гомотопических (ко)пределов

[12, 15], позволяет нам работать с производными сечениями на достаточно эффективном уровне.

2. Резольвенты

Мы бы хотели иметь возможность строить интересные примеры производных сечений.

Определение 2. Функтор $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ называется *резольвентой* если для каждой последовательности компонируемых стрелок $c_0 \to ... \to c_n$ в $\mathcal{C}$, категория $\mathcal{D}(c_0 \to ... \to c_n) := \{d_0 \to ... \to d_n | F(d_i \to d_{i+1}) = c_i \to c_{i+1}\}$ имеет стягиваемый нерв.

Строго говоря, это определение верно только тогда, когда F — изорасслоение. Для простоты изложения мы не будем обращать внимания на этот аспект.

Любое модельное опрасслоение $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ можно перетащить назад вдоль функтора $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, что даёт модельное опрасслоение $F^*\mathcal{E} \to \mathcal{D}$. Мы также имеем естественно индуцированный функтор $\mathbb{F}^* : \mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to \mathsf{PSect}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$, который сохраняет производные сечения и слабые эквивалентности между ними, что индуцирует функтор $\mathsf{h}\mathbb{F}^* : \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}(\mathcal{D}, F^*\mathcal{E})$.

Напомним, что для изучения алгебр, нам также нужно рассмотреть подмножество $\mathcal{S}$ отображений в $\mathcal{C}$, и работать с теми сечениями, которые локально постоянны вдоль $\mathcal{S}$. Обычное сечение $X : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ является $\mathcal{S}$-локально постоянным, если X отправляет морфизмы из множества $\mathcal{S}$ в опдекартовы морфизмы $\mathcal{E}$, то есть, образ $f : c \to d$ из $\mathcal{S}$ под действием X есть $X(c) \to f_!X(c)$ для некоторого подходящего выбора функтора перехода $f_!$. Подобное же определение можно сделать для производных сечений. А именно, производное сечение $X : \mathbb{C} \to \mathbf{E}$ является $\mathcal{S}$-локально постоянным если для любого отображения $\mathbb{C}$, индуцированного вложением интервала на правый конец,

$$(c_0 \to ... \to c_k \to ... \to c_n) \longrightarrow (c_k \to ... \to c_n),$$

так что вдобавок $c_{i-1} \to c_i$ принадлежат к $\mathcal{S}$ для $1 \leq i \leq k$, соответствующий образ

$$X(c_0 \to ... \to c_k \to ... \to c_n) \longrightarrow X(c_k \to ... \to c_n)$$

является слабой эквивалентностью $\mathcal{E}(c_n)$. Это определение, в частности, означает, что для любого отображения $f : c_0 \to c_1$ in $\mathcal{S}$, обе стрелки в ассоциированной диаграмме

$$\begin{tikzcd} & X(c_0 \xrightarrow{f} c_1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ f_!X(c_0) & & X(c_1). \end{tikzcd}$$

являются слабыми эквивалентностями.

Обозначим через $\mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{\mathcal{S}}(\mathcal{C},\mathcal{E})$ категорию $\mathcal{S}$-локально постоянных производных сечений. Имея функтор $F:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$, обозначим через $F^*\mathcal{S}$ подмножество стрелок $\mathcal{D}$, которые F отправляет в $\mathcal{S}$. Функтор $\mathsf{h}\mathbb{F}^*$ можно естественно ограничить, индуцировав $\mathsf{h}\mathbb{F}^* : \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{\mathcal{S}}(\mathcal{C},\mathcal{E}) \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{F^*\mathcal{S}}(\mathcal{D},F^*\mathcal{E})$. Тогда имеем следующий результат ([2, Теорема 14]):

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{E}\to\mathcal{C}$ — модельное опрасслоение, $\mathcal{S}$ — подмножество морфизмов в $\mathcal{C}$, и $F:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ — резольвента. Тогда $\mathsf{h}\mathbb{F}^* : \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{\mathcal{S}}(\mathcal{C},\mathcal{E}) \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{F^*\mathcal{S}}(\mathcal{D},\mathcal{E})$ является эквивалентностью категорий.*

Сей результат является своего рожа «швейцарским ножом»: он позволяет переходить от одной категории, $\mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{\mathcal{S}}(\mathcal{C},\mathcal{E})$, к другой, $\mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{F^*\mathcal{S}}(\mathcal{D},\mathcal{E})$, так что обе категории представляют одну и ту же сущность, и этот факт можно использовать для доказательства большого количества более сложных утверждений.

3. Гипотеза Делиня

Применим полученный результат для того, чтобы доказать гипотезу Делиня в рамках подхода производных сечений. Для начала, определим операторные категории B и T.

Операторная категория B получается из стратифицированного фундаментального группоида $\Pi_1^{strat}(Ran(D))$ [43] пространства Рана [7] $Ran(D)$ двумерного диска D. Можно сказать, что B является «утолщением» категории Γ, так что вместо симметрических групп, $Aut_{\mathrm{B}}(S)$ есть группа $|S|$ крашеных кос. Естественный функтор $\mathrm{B}\to\Gamma$ позволяет нам взять опрасслоение $\mathbf{DVect}_k^{\otimes}\to\Gamma_+$ и индуцировать новое опрасслоение $\mathbf{DVect}_k^{\otimes}\to\mathrm{B}_+$. Производные сечения полученного опрасслоения отвечают факторизационным алгебрам на двумерном диске в смысле [7].

Объект категории T — планарное дерево с корнем, частью вершин, отмеченных конечным множеством, так что неотмеченные вершины (кроме корня) стабильны, то есть, имеют валентность не менее трёх. Подобные деревья уже были рассмотрены в [27]. Отображение двух планарных маркированных деревьев $(T,S)\to(T',S')$ даётся отображением конечных множеств $S\to S'$, и отображением определённого вида между клеточными комплексами, $|T|\to|T'|$, связанными с деревьями. Есть ещё одна категория $\tilde{\mathrm{T}}$, чьи объекты те же, что и в категории T, плюс вложение в двумерный диск D, которое отправляет корень каждого дерева в одну и ту же отмеченную точку на границе. Забывание данных вложения индуцирует эквивалентность категорий $\tilde{\mathrm{T}}\tilde{\to}\mathrm{T}$, и забывание всего, кроме отмеченных вершин и их вложений, даёт функтор $\tilde{\mathrm{T}} \to \mathrm{B}$. Таким образом, мы получаем функтор $Cm : \mathrm{T} \to \mathrm{B}$. Можно тогда доказать результат [2, Теорема 18], частично указанный в [26, 27]:

Теорема 4. *Функтор $Cm : \mathrm{T} \to \mathrm{B}$ является резольвентой.*

Этот результат позволяет построить эквивалентность между категориями B и T-алгебр. Обозначим через $\mathsf{DAlg}(\mathrm{B}, \mathbf{DVect}_k)$ полную подкатегорию $\mathsf{DSect}(\mathrm{B}_+, \mathbf{DVect}_k)$, состоящую из производных алгебр — тех производных сечений, которые локально постоянны вдоль подмножества инертных отображений In_{B} категории B_+. Другими словами, можно потребовать условия нормировки ровно так же, как и в случае обычных сечений. Можно затем использовать функтор Cm и получить опрасслоение $\mathbf{DVect}_k^{\otimes} \to \mathrm{T}_+$. Повторное применение Теоремы 3 тогда позволяет доказать, что функтор

$$\mathsf{h}Cm^* : \mathrm{Ho}\,\mathsf{DAlg}(\mathrm{B}, \mathbf{DVect}) \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{DAlg}(\mathrm{T}, \mathbf{DVect})$$

строго полон, и что его образ состоит из тех производных алгебр, которые $Cm^*(Iso(\mathrm{B}_+))$ - локально постоянны, где $Iso(\mathrm{B}_+)$ обозначает подмножество изоморфизмов B_+. грубо говоря говоря, $Cm^*(Iso(\mathrm{B}_+))$-локально постоянная производная T-алгебра отправляет в слабые эквивалентности те отображения T_+, которые становятся изоморфизмами в B_+. Таким образом, мы получаем воспроизведение производно-категорного результата, но в новом, неаддитивном контексте.

В отличие от B, категория T ведёт себя как комбинаторный объект и имеет конечные множества морфизмов, так что строить объекты в $\mathrm{Ho}\,\mathsf{DAlg}(\mathrm{T}, \mathbf{DVect})$ относительно просто. Пример, описанный в диссертации, состоит в производной T-алгебре, соответствующей $CH^\bullet(A, A)$. Благодаря вышеописанной эквивалентности, на комплексе Хохшильда также возникает структура B-алгебры, что даёт доказательство гипотезы Делиня в формализме производных алгебр.

Научная новизна, теоретическая и практическая значимость

Понятия производного сечения, модельного расслоения (и, более общо, полурасслоения) и некоторые вспомогательные математические объекты, например, нётеровы категории, являются новыми. Теоремы 1, 3, а также Теорема 4 в описанной формулировке, — новые результаты.

Данная диссертация имеет теоретический характер, и может быть полезна различным специалистам, как со стороны гомологической и гомотопической алгебры, так и математической физики. Значимость результатов диссертации — в описании алгебраического подхода, альтернативного операдам, который позволяет дать новые, более прозрачные доказательства уже известных утверждений, и исследовать структуры, неизвестные для описания в формализме операд.

Несмотря на то, что гипотеза Делиня — не новый результат и служит для нас как, скорее, тестовый случай, мы склонны считать, что наша перспектива на доказательство гипотезы Делиня имеет определённые преимущества над операдным подходом. Функтор $Cm : \mathrm{T} \to \mathrm{B}$ имеет явную и относительно контролируемую комбинаторику, и существование $\mathbb{E}_2$-структуры на $CH^\bullet(A, A)$ в формализме производных сечений — по большей части, формальное следствие того факта, что Cm является резольвентой. Эта общая прозрачность — то, что заставляет нас верить в высокий потенциал формализма Сигала.

Методология и методы исследования

Основной математический аппарат, применяемый в диссертации — теория модельных категорий в смысле [35, 20, 24, 36]. Методы исследования — применение различных приёмов гомотопической алгебры [12, 15, 36], с полным избежанием неявных конструкций наподобие кофибрантно-порождённых модельных структур или высших категорий.

Апробация результатов

Все основные результаты диссертации опубликованы в работах

1. Бальзин Э. Р., *Разрешения категорий и производные сечения* // Успехи математических наук 69:5 (2014), страницы 918-920

2. Бальзин Э. Р., *Производные сечения, факторизационные алгебры и гипотеза Делиня* // Математические заметки, 2016, том 100, выпуск 2, страницы 291–295

Более подробное изложение и дальнейшие результаты содержатся в препринте

3. Edouard Balzin, *Derived sections of Grothendieck fibrations and the problems of homotopi-cal algebra*, `http://arxiv.org/abs/1410.3387`, to appear in Applied Categorical Structures

Результаты диссертации были доложены на докладах на следующих конференциях и семинарах:

1. Доклад «Factorisation categories, algebras and their applications» на конференции GAGC - 2013 (январь 2013, Марсель, Франция),

2. Доклад «Resolutions of categories and derived sections» на семинаре группы ATG лаборатории Ж. А. Дьедонне (сентябрь 2014, Ницца, Франция) и по той же теме на гомотопическом семинаре ВШЭ (октябрь 2014, Москва, Россия),

3. Доклад «Categorical resolutions in the context of homotopical algebra» на конференции GAGC - 2014, (ноябрь 2014, Марсель, Франция),

4. Доклад «Segal Sections and Categorical Resolutions» на конференции «Young Topologists Meeting 2015» (июль 2015, Лозанна, Швейцария)

5. Доклад «Reedy model structures for families» на семинаре группы ATG (май 2016, Ницца, Франция),

6. Доклад «Grothendieck Fibrations and Homotopical Algebra» в лаборатории Ж. А. Дьедонне (20 июня 2016, Ницца, Франция).

Содержание диссертации

Глава 1: Расслоения Гротендика. В этой главе мы вводим категорные понятия, необходимые для нашего формализма. Во-первых, мы вводим понятие предрасслоений Гротендика, которое, будучи весьма известным в фольклоре, не представлено в достаточном количестве изданных материалов. Более того, обычно рассматриваются расслоения, а не предрасслоения: наш интерес в псевдотензорных категориях требует введения всех нужных понятий для более общего определения предрасслоения. Неверно, что для произвольного предрасслоения, его категория сечений допускает пределы, даже если предрасслоение послойно полно. По этой причине, мы вводим специальный класс «нётеровых» категорий. Предрасслоение $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$ с полными слоями над нётеровой категорией обладает тем свойством, что её категория сечений $\mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ полна. Мы не встречали понятие нётеровой категории в литературе, однако есть определённые сходства между нашим подходом и понятием обобщённых категорий Риди [10]. Затем мы вводим понятие полурасслоения $\mathcal{E} \to \mathcal{D}$ над факторизационной категорией $(\mathcal{D}, \mathscr{L}, \mathscr{R})$, и объясняем, как можно вычислять пределы и сопряжённые функторы через ограничение на правые или левые классы факторизационной системы. Понятие полурасслоения также не встречается в литературе (за исключением похожего, но отличающегося понятия амбирасслоения).

Глава 2: Модельные структуры Риди. В этой главе мы изучаем полурасслоения над категориями Риди, оснащённые модельной структурой. Мы доказываем Теорему 1 и несколько побочных результатов, необходимых в дальнейшем, рассматривая под конец главы полурасслоения над категорией Δ. Наше доказательство Теоремы 1 во многом обобщает наблюдения [21], но мы доказываем всё, от существования (ко)пределов до свойств подъёма и факторизации, по индукции. Индуктивная процедура также позволяет нам строить сопряжённые функторы между категориями сечений, работая с полурасслоениями $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ над факторизационными категориями общего вида, то, что мы используем в этой диссертации для проведения вычислений с производными сечениями.

Глава 3: Производные сечения. В этой главе, которая во многом перекрывается с введением, мы вводим, на должном уровне строгости, понятия симплициальных замен, предсечений и производных сечений модельных опрасслоений Гротендика. Мы показываем также, как вложить обычные сечения в производные, и доказываем несколько результатов, которые связаны с поведением модельной структуры на предсечениях в ситуации, когда она ограничена на подкатегорию производных сечений. Эти результаты будут нужны нам для доказательств в последующих главах.

Глава 4: Резольвенты. Мы описываем понятие резольвенты и доказываем Теорему 3. Многие из конструкций Главы 4 интересны сами по себе, например, категория Π конечных частично упорядоченных множеств с начальным и конечным элементом, прямая категория Риди K, состоящая из инъекций в Δ (со скрученными отображениями между ними), как и различные операции, проводимые над ними.

Наша стратегия доказательства Теоремы 3 состоит в конструкции функтора прямого образа $\mathsf{h}\mathbb{F}_! : \mathrm{Ho}\,\mathsf{PSect}(\mathcal{D}, F^*\mathcal{E}) \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$. В общей ситуации, этот функтор не сохраняет производные сечения, пусть и можно нарисовать определённые диаграммы-домики, которые указывают на то, что $\mathsf{h}\mathbb{F}_!$ ведёт себя как левый сопряжённый к $\mathsf{h}\mathbb{F}^*$. Тем не менее, если F — резольвента, то $\mathsf{h}\mathbb{F}_!$ ограничивается до функтора $\mathsf{h}\mathbb{F}_! : \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{F^*\mathcal{S}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{\mathcal{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, который, как можно проверить, является эквивалентностью категорий, обратной к $\mathsf{h}\mathbb{F}^*$. В этом смысле, наш подход близок по своей философии к Костелло [14], который строит производную эквивалентность посредством явного представления пары функторов с естественными преобразованиями, которые становятся изоморфизмами после локализации. Функтор $\mathsf{h}\mathbb{F}_!$ вычисляется явным образом, что позволяет проверить сохранение всех необходимых условий.

Чтобы адаптировать наши результаты для ситуации операторных категорий, мы заканчиваем главу доказательством более продвинутого результата, который относится к функторам между факторизационными категориями. Доказательство последнего факта включает в себя повторное применение Теоремы 3 вместе с большим количеством комбинаторики, обращающейся вокруг сплетённых произведений и подходящей версии нерва факторизационных категорий.

Глава 5: Сигаловы алгебры и гипотеза Делиня. Вводятся понятия операторных категорий, моноидальных категорий над ними, и производных алгебр. Мы изучаем резольвенты в этой ситуации, приводя критерий, который позволяет обнаружить, когда функтор между операторными категориями — резольвента. Мы используем этот критерий для доказательства Теоремы 4, утверждающей, что функтор $Cm : \mathrm{T} \to \mathrm{B}$ — резольвента, и затем показываем, как построить сечение, отвечающее комплексу Хохшильда над категорией T.

Заключение

Для того, чтобы покрыть большой класс структур, мы разработали формализм Сигала для (обобщённой версии) операторных категорий [6], и ввели алгебры Сигала как производные сечения опрасслоений над операторными категориями. Нужно принять во внимание множество формальных аспектов, чтобы иметь полную теорию алгебраических структур.

Мы имеем несколько наработок, которые позволяют определять и изучать модули над сигаловыми алгебрами. Модулем над сигаловой алгеброй A в $\mathbf{DVect}_k$ называется расширение A с квадратом ноль, определяемое посредством процедуры, работающей над любой операторной категорией. Более того, весьма ясно, что категория модулей $\mathbf{Mod}_A$ триангулирована. Как следствие, можно попробовать определить деформационный функтор в подходе Сигала, используя для этого язык фильтрованных алгебр Сигала.

Формальные но потенциально интересные вопросы включают в себя существование гомотопических копределов алгебр сигала над данной операторной категорией, или тензорного произведения модулей и алгебр, конструкций свободной алгебры и более общих сопряжённых функторов между разными категориями алгебр Сигала.

В текущей форме, формализм алгебр Сигала не имеет детально проработанной связи ни с формализмом операд, ни с общими факторизационными алгебрами [7]. Связи между совершенными операторными категориями и топологическими операдами объяснены в [6]. Наши примеры, впрочем, не попадают в класс совершенных, а потому связывание с операдами требует отдельных доказательств. Псевдотензорные категории выглядят тем обещающим языком, который может позволить включить структуры типа PROP в наш язык.

Отдельный интерес представляет вопрос, на что же можно заменить операторные категории. Имеются различные соображения на сей счёт, например, работа Батанина-Маркла [5], а также некоторые наработки Клеменса Берже. Мы столкнулись с более общем понятием в рамках данной диссертации, и мы полагаем, что в этом направлении можно сказать больше слов. Опять же, интерес представляют приложения, заключающиеся во вложении в формализм производных сечений тех структур, которые не допускают на данный момент модельно-категорного описания, например, алгебр Хопфа, биалгебр и тому подобного, описываемых на данный момент с помощью языка PROPов.

Включение операд и PROPов в наш формализм интересно ещё и потому, что, в случае $\mathbf{DVect}_k$, наш формализм работает в простой характеристике так же хорошо, как и в характеристике 0, и нам было бы интересно изучить теорию деформаций операд как только удастся вложить их в сигалов подход.

Гипотеза Делиня появляется в интересной физико-математической работе [14]. Вообще говоря, в последние годы стало ясно, что факторизационные алгебры и операды играют важную роль в матфизике, описывая (или даже определяя) топологические квантовые теории поля. С физической перспективы, $\mathbb{E}_2$-алгебры описывают «древесные» диаграммы топологических струн. «Высшие петли» струнных теорий описываются кривыми высшего рода. Можно изучать факторизационные алгебры для общих кривых, и пытаться найти альтернативное комбинаторное описание. Без упоминания деталей, закончим на том, что картину высших родов можно также попробовать разработать в направлении теории Гротендика-Тейхмюллера, и мы надеемся, что алгебры Сигала позволят увидеть что-то новое в этом направлении.

Список литературы

Публикации автора

1. Бальзин Э. Р., *Разрешения категорий и производные сечения* // Успехи математических наук 69:5 (2014), страницы 918-920
2. Бальзин Э. Р., *Производные сечения, факторизационные алгебры и гипотеза Делиня* // Математические заметки, 2016, том 100, выпуск 2, страницы 291–295
3. Edouard Balzin, *Derived sections of Grothendieck fibrations and the problems of homotopical algebra*, `http://arxiv.org/abs/1410.3387`, to appear in Applied Categorical Structures

Цитируемые работы

4. John F. Adams, *Infinite Loop Spaces*, Princeton University Press, 1978
5. Michael Batanin, Martin Markl, *Operadic categories and Duoidal Deligne's conjecture*, `http://arxiv.org/abs/1404.3886`, to appear in Advances in Mathematics
6. Clark Barwick, *From operator categories to topological operads*, preprint `http://arxiv.org/abs/1302.5756`
7. Alexander Beilinson, Vladimir Drinfeld, *Chiral Algebras*, AMS 2004
8. Clemens Berger, Benoit Fresse, *Combinatorial operad actions on cochains,* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 137 (2004), 135-174
9. Clemens Berger, Ieke Moerdijk, *Axiomatic homotopy theory for operads*, Comment. Math. Helv. Vol. 78(2003), no. 4, `http://arxiv.org/abs/math/0206094`
10. Clemens Berger, Ieke Moerdijk, *On an extension of the notion of Reedy category*, Math. Z. 269 (2011), 977-1004, `http://arxiv.org/abs/0809.3341`
11. Clemens Berger, Ieke Moerdijk, *The Boardman-Vogt resolution of operads in monoidal model categories,* Topology, 2006, Volume 45, Issue 5, pp 807-849
12. Aldridge K. Bousfield, Daniel M. Kan, *Homotopy limits, completions and localizations,* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 304. Springer-Verlag, Berlin, 1972
13. Denis-Charles Cisinski, *Locally constant functors,* Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (2009), 147, 593
14. Kevin Costello, *Topological conformal field theories and Calabi-Yau categories,* Advances in Mathematics Volume 210, Issue 1, 20 March 2007, pp 165-214
15. William G. Dwyer, Philip S. Hirschhorn, Daniel M. Kan, and Jeffrey H. Smith, *Homotopy*

Limit Functors on Model Categories and Homotopical Categories, AMS 2004

16. Paul G. Goerss, John F. Jardine, *Simplicial Homotopy Theory*, Springer, 2009
17. Moritz Groth, *On the theory of derivators*, doctoral dissertation, Bonn 2011, http://www.math.uni-bonn.de/people/grk1150/DISS/dissertation-groth.pdf
18. Moritz Groth, Kate Ponto, Michael Shulman, *The additivity of traces in monoidal derivators*, to appear in Journal of K-theory, preprint http://arxiv.org/abs/1212.3277
19. Alexander Grothendieck, Michèle Raynaud et al., *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA I)*, Lecture Notes in Mathematics 224, Springer 1971
20. Philip S. Hirschhorn, *Model Categories and Their Localisations*, No. 99. American Mathematical Soc., 2009.
21. André Hirschowitz, Carlos Simpson, *Descente pour les n-champs (Descent for n-stacks)*, preprint http://arxiv.org/abs/math/9807049
22. John F. Jardine, *Cocycle Categories*, Algebraic topology, Vol. 4. Abel Symp. Berlin: Springer, 2009, pp. 185?218.
23. Peter T. Johnstone, *Sketches of an elephant: A topos theory compendium*, Vol. 1-2. Oxford University Press, 2002.
24. Mark Hovey, *Model Categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1999.
25. Dmitry Kaledin, *Non-commutative Geometry from the homological point of view*, lecture notes, KIAS, Seoul, October 2009
26. Dmitry Kaledin, *Homological methods in Non-commutative Geometry*, lecture notes, University of Tokyo, October 2007 — March 2008
27. Maxim Kontsevich, Yan Soibelman, *Deformations of algebras over operads and Deligne's conjecture*, http://arxiv.org/abs/math/0001151
28. Valery A. Lunts, *Categorical resolution of singularities,* Journal of Algebra, 2010, Volume 323, Issue 10, pp 2977-3003
29. Jacob Lurie, *Derived Algebraic Geometry II: Noncommutative Algebra*, preprint http://arxiv.org/abs/math/0702299
30. Jacob Lurie, *Derived Algebraic Geometry III: Commutative Algebra*, preprint http://arxiv.org/abs/math/0703204
31. Jacob Lurie, *Higher Algebra*, on-line book, available at http://www.math.harvard.edu/~lurie/
32. James E. McClure and Jeffrey H. Smith, *A solution of Deligne's Hochschild cohomology conjecture,* Recent Progress in Homotopy Theory (Baltimore, MD, 2000), volume 293 of

Contemp. Math., pp 153-193. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

33. Saunders Mac Lane, *Categories for The Working Mathematician,* Graduate Texts in Mathematics 5 (second ed.). Springer, 1998
34. J. Peter May, *The geometry of iterated loop spaces,* Springer-Verlag, Berlin, 1972, Lectures Notes in Mathematics, Vol. 271
35. Daniel Quillen, *Higher K-theory: I,* Lecture Notes in Mathematics Volume 341, 1973, pp 85-147
36. Emily Riehl, *Categorical Homotopy Theory,* Cambridge University Press, 2014
37. Graeme Segal, *Categories and Cohomology Theories*, Topology Vol. 13 pp. 293-312, Pergamon Press 1974
38. Markus Spitzweck, *Operads, Algebras and Modules in General Model Categories*, `http://arxiv.org/abs/math/0101102`
39. Dmitry E. Tamarkin, *Another proof of M. Kontsevich formality theorem,* `http://arxiv.org/abs/math/9803025`
40. Bertrand Toën, Michel Vaquié, *Moduli of objects in dg-categories,* Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, Volume 40, Issue 3, May–June 2007, pp 387–444
41. Bertrand Toën, Gabriele Vezzosi, *Infinie-catégories monoidales rigides et caractères de Chern,* to appear in Selecta, `http://www.math.univ-montp2.fr/~toen/dag-loop.pdf`
42. Angelo Vistoli, *Notes on Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory,* `http://arxiv.org/abs/math/0412512`
43. Jon Woolf, *The fundamental category of a stratified space.* Preprint, arXiv:0811.2580.

Научное издание

Бальзин Эдуард Рафитович

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук на тему:

Расслоения Гротендика

и гомотопическая алгебра

Лицензия ЛР № 020832 от «15» октября 1993 г.

Подписано в печать «   » августа 2016 г. Формат 60x84/16

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1.

Тираж 100 экз. Заказ №

Типография НИУ ВШЭ,

125319, г. Москва, Кочновский пр-д., д. 3