На правах рукописи

Гайфулин Дмитрий Радиславович

Неравенства с континуантами и цепными дробями и их применения

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2016

Работа выполнена *на кафедре теории чисел механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».*

Научный руководитель:	*доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории чисел МГУ им. М. В. Ломоносова, МОЩЕВИТИН Николай Германович.*
Официальные оппоненты:	*доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа физико–математического факультета Владимирского Государственного Университета имени А.Г. и Н.Г. Столетовых, ЖУРАВЛЕВ Владимир Георгиевич*;
	кандидат физико-математических наук, доцент кафедры 311 Московского Авиационного Института, КАН Игорь Давидович.
Ведущая организация:	*Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук.*

Защита состоится *22 ноября 2016 г.* в *17 часов* на заседании диссертационного совета *Д 002.077.03* при *Институте проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН*, расположенном по адресу: *Большой Каретный пер., д. 19, стр. 1, Москва, 127051.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *ИППИ РАН*, а также на сайте *ИППИ РАН* http://iitp.ru/ru/dissertation/1260.htm.

Автореферат разослан _____ *октября 2016 г.*

Ученый секретарь диссертационного совета,

доктор физико-математических наук, *Соболевский А. Н.*

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Настоящая диссертация посвящена изучению экстремальных свойств величин, выражающихся через цепные дроби и континуанты и их применению в различных теоретико-числовых задачах. Аппарат цепных дробей, формирование которого связано с такими именами как Л. Эйлер, Ж. Л. Лагранж, А. Лежандр, К.Ф. Гаусс, А. Гурвиц и другие, является одним из важнейших инструментом в теории диофантовых приближений. Систематическое изложение теории цепных дробей имеется, например, в книгах О. Перрона[1] и А. Я. Хинчина[2].

Другим классическим объектом теории чисел, непосредственно связанным с цепными дробями являются последовательности Штерна-Броко, появившееся в середине 19-го века в работах М. Штерна[3] и А. Броко[4]. Эти последовательности могут быть определены следующим образом. Для любого натурального n последовательность Штерна-Броко F_n есть конечная последовательность рациональных чисел отрезка $[0,1]$, которые представляются в виде цепной дроби с суммой неполных частных, не превосходящих $n+1$, расположенных в порядке возрастания. Хорошо известно, что предельной функцией распределения последовательностей Штерна-Броко является функция Минковского $?(x)$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{\xi \in F_n : \quad \xi \le x\}}{\# F_n} = ?(x), \quad x \in [0,1]. \tag{1}$$

Равенство (1) является одним из возможных определений функции $?(x)$. Функцию Минковского можно также эквивалентно определить другим образом: на концах отрезка $[0,1]$ положим $?(\frac{0}{1}) = 0, ?(\frac{1}{1}) = 1$. Далее, пусть функция определена в точках $\frac{p}{q}$ и $\frac{r}{s}$, но не определена ни в какой точке между ними. В этом случае положим

$$?\left(\frac{p+r}{q+s}\right) = \frac{?(\frac{p}{q}) + ?(\frac{r}{s})}{2}. \tag{2}$$

В иррациональных точках отрезка $[0,1]$ функция Минковского определяется по непрерывности.

В 1938 году А. Данжуа рассмотрел[5][6] семейство непрерывных монотонных функций $g_\lambda(x)$, где λ - действительный параметр из интервала $(0,1)$, обобщающих функцию Минковского. Как и функция $?(x)$, они определяются на отрезке $[0,1]$. В начале для любого λ

[1] O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbruechen*, B.G. Teubner, Stuttgart (1977).

[2] А.Я. Хинчин, *Цепные дроби*, М.: Эдиториал УРСС (2004), ISBN 5-354-00551-5.

[3] M.A.Stern *Uber eine zahlentheoretische Funktion* J. reine angew. Math. 55 (1858), 193-220.

[4] A. Brocot *Calcul des Rouages par Approximations. Nouvelles Methodes*, Paris (1892).

[5] A. Denjoy *Sur quelques points de la theorie des fonctions*, CR Acad. Sci. Paris, 194 (1932), 44-46.

[6] A. Denjoy *Sur une fonction rélle de Minkowski*, Journal de Mathématiques Pures et Appliqués, 17 (1938), 105—151.

положим $g_\lambda(\frac{0}{1}) = 0$, $g_\lambda(\frac{1}{1}) = 1$. Теперь, если функция $g_\lambda(x)$ задана в точках $\frac{p}{q}$ и $\frac{r}{s}$ и не определена между ними, правило (2) заменяется на

$$g_\lambda\left(\frac{p+r}{q+s}\right) = (1-\lambda)g_\lambda\left(\frac{p}{q}\right) + \lambda g_\lambda\left(\frac{r}{s}\right). \tag{3}$$

Как и в предыдущем случае, в иррациональных точках функция $g_\lambda(x)$ определяется по непрерывности. Легко видеть, что при $\lambda = \frac{1}{2}$ функция $g_\lambda(x)$ совпадает с функцией Минковского. Отметим, что семейство функций Данжуа было переоткрыто в 1995 году Р.Ф. Тихим и Ж. Уитцом [7].

Любопытным обобщением обыкновенных цепных дробей являются так называемые приведенные регулярные цепные дроби[8]. Известно, что любое действительное число x можно однозначно представить в виде

$$x = [[b_0; b_1, b_2, \ldots, b_t, \ldots]] = b_0 - \cfrac{1}{b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \ldots - \cfrac{1}{b_t - \cfrac{1}{\ldots}}}}, \tag{4}$$

где b_0 - произвольное целое число, а все остальные b_i больше либо равны двум. Аналогом последовательностей Штерна-Броко для приведенных регулярных цепных дробей являются множества Ξ_n, состоящие из всех рациональных чисел отрезка $[0,1]$, которые представляются в виде дроби $[[1; b_1, b_2, \ldots, b_t]]$, причем $b_1 + b_2 + \ldots + b_t = n+1$. В 2010 году Е. Жабицкая показала [9], что предельной функцией распределения Ξ_n является функция $g_\tau(x)$, принадлежащая семейству Данжуа, где $\tau = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Другие результаты об арифметической природе функций из семейства Данжуа на настоящий момент неизвестны.

Хорошо известно, что все функции семейства Данжуа принадлежат к классу сингулярных функций. Более того, их производная может принимать только два значения - 0 и $+\infty$. Исследование производной функций данного семейства проводилось только для наиболее простого случая функции Минковского. В 2010 году А.А. Душистова и Н.Г.Мощевитин доказали [10] следующие две теоремы.

[7] R. F. Tichy, J. Uitz. *An extension of Minkowski's singular function* Appl. Math. Lett., 8 (1995), 39-46.

[8] Ю. Ю. Финкельштейнv*Полигоны Клейна и приведенные регулярные непрерывные дроби*, УМН, 48:3 (1993), 205-206.

[9] E. Zhabitskaya *On arithmetical nature of Tichy-Uitz's function* Funct. Approx. Comment. Math., 43:1 (2010), 15-22.

[10] А.А. Душистова, Н.Г. Мощевитин *О производной функции Минковского ?(x)* Фундаментальная и прикладная математика, 16:6 (2010), 33-44.

Теорема I. *Пусть* $x = [0; a_1, a_2, \ldots, a_t, \ldots]$ *- произвольное иррациональное число на отрезке* $[0,1]$. *Тогда существует положительная постоянная* κ_1 *такая, что если выполнено неравенство*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_t}{t} < \kappa_1, \tag{5}$$

то производная $?(x)$ *существует и равна* $+\infty$.

Теорема II. *Пусть* $x = [0; a_1, a_2, \ldots, a_t, \ldots]$ *- произвольное иррациональное число на отрезке* $[0,1]$. *Тогда существует положительная постоянная* κ_2 *такая, что если выполнено неравенство*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_t}{t} > \kappa_2, \tag{6}$$

то производная $?(x)$ *существует и равна* 0.

Неулучшаемые значения постоянных κ_1 и κ_2 в работе А.А. Душистовой и Н.Г.Мощевитина были вычислены явно. Среди других работ на данную тему следует отметить более раннюю статью Дж. Парадиза, П. Виадера и Л. Бибилони[11], в которой была вычислена константа κ_1 и содержалась более слабая оценка константы κ_2, а также статью А.А. Душистовой, И.Д. Кана и Н.Г. Мощевитина[12], в которой неравенства (5) и (6) в теоремах I и II были заменены на более точные с тем же самым главным членом. Одной из целей настоящей работы является получение аналогов теорем I и II для функции $g_\tau(x)$.

Основным методом в получении теорем I и II и их аналогов является поиск экстремумов знаменателей цепных дробей при некоторых условиях на неполные частные. Знаменатель цепной дроби $[0; a_1, a_2, \ldots, a_t]$ выражается через $a_1, a_2, \ldots, a_t$ при помощи многочлена, называемого *континуантом*. О континуантах и их свойствах имеется обширная литература (см. книги Т. Кузика и М. Флахив[13], Д. Хенсли [14] и библиографию оттуда). Многие методы вычисления экстремумов континуантов описаны в работе И.Д. Кана [15]. В настоящей работе развиваются и обобщаются методы статьи И.Д. Кана и улучшаются некоторые полученные в ней оценки экстремумов.

Другим известным объектом, при исследовании которого применяется аппарат цепных

[11] J. Paradis, P. Viader, L. Bibiloni *A new light on Minkowski's ?(x) function*, J. Number Theory, 73 (1998), 212-227.

[12] Anna A. Dushistova, Igor D. Kan, Nikolai G. Moshchevitin. *Differentiability of the Minkowski question mark function*, J. Math. Anal. Appl. 401:2 (2013), 774-794.

[13] T. W. Cusick, M. E. Flahive *The Markoff and Lagrange spectra*, Math. Surveys Monogr., 30, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1989), ISBN: 0-8218-1531-8.

[14] D. Hensley *Continued fractions*, World scientific publishing Co. Pte. Ltd (2006).

[15] И.Д. Кан *Методы получения оценок континуантов* Фундаментальная и прикладная математика, 16:6 (2010), 95-108.

дробей и континуантов, является спектр Лагранжа $\mathbb{L}$. Напомним одно из возможных его определений. Пусть A - бесконечная в обе стороны последовательность, состоящая из натуральных чисел:

$$A = \ldots, a_{-t}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_t, \ldots \tag{7}$$

Через $\lambda_i(A)$ обозначим следующую сумму двух цепных дробей:

$$\lambda_i(A) = [a_i; a_{i-1}, a_{i-2}, \ldots] + [0; a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots]. \tag{8}$$

Определим $L(A)$ следующим образом

$$\limsup_{i\to\infty} \lambda_i(A) = L(A). \tag{9}$$

Спектром Лагранжа $\mathbb{L}$ называется множество значений $L(A)$, где A пробегает всевозможные последовательности натуральных чисел. Хорошо известно, что минимальный элемент спектра Лагранжа - $\sqrt{5}$. Систематическое изложение результатов о спектре Лагранжа (и родственном ему спектре Маркова) содержится в книге Т.Кузика и М.Флахив. Среди важнейших исследований по спектру Лагранжа следует упомянуть работы Маркова[16] [17], описавшего структуру дискретной части спектра, М.Холла[18], доказавшего существование константы c такой, что $\mathbb{L}$ содержит любое число большее c. В его честь луч $[c, +\infty)$ принято называть лучом Холла. Оценку числа c неоднократно улучшали разные авторы, среди работ на эту тему следует отметить статьи Г.А.Фреймана[19] и Х.Шекера[20], в которых доказывается, что $[\sqrt{21}, +\infty) \in \mathbb{L}$. В 1975 году Г.А. Фрейман опубликовал работу[21], в которой приводилось точное вычисление начала луча Холла.

Спектр Лагранжа является замкнутым множеством. Следовательно, его дополнение состоит из счетного числа интервалов, называемых пропусками. Структура пропусков в спектре Лагранжа к настоящему моменту остается практически неисследованной, описаны лишь наибольшие из них.

Цели и задачи диссертационной работы: Получение оценок максимумов и минимумов континуантов по различным множествам. Получение аналогов теорем I и II для функ-

[16] A.Markoff *Sur les formes quadratiques binaires indéfinies*, Math. Ann. 15 (1879), 381-406.

[17] A.Markoff *Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. II*, Math. Ann. 19 (1880), 379-399.

[18] Hall, Jr., Marshall *On the sum and product of continued fractions*, Ann. of Math. 48:2 (1947), 966-993.

[19] Г.А. Фрейман *О начале луча Холла*, Теория чисел, часть V, Калининский государственный университет (1973), 87-113.

[20] Hall, Jr., Marshall *On the sum and product of continued fractions*, Ann. of Math. 48:2 (1947), 966-993.

[21] Г.А. Фрейман *Диофантовы приближения и геометрия чисел (задача Маркова)*, Калининский государственный университет (1975).

ций семейства Данжуа. Описание и исследование свойств левых концов пропусков в спектре Лагранжа.

Научная новизна. Полученные результаты являются новыми и получены автором самостоятельно. Основными результатами данной работы можно считать следующие:

- Найдены точные оценки максимумов и минимумов континуантов по различным множествам. Построен алгоритм получения максимума для континуанта, в котором фиксирована сумма неполных частных с весами 1 и 2. Вычислена соответствующая экспонента роста при длине континуанта, стремящейся к бесконечности.
- Получены аналоги теорем I и II для функции $g_\tau(x)$ с неулучшаемыми константами $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$.

Кроме того, получен ряд новых результатов о спектре Лагранжа.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, и разработанные в ней методы могут быть применены в задачах теории цепных дробей и исследований спектра Лагранжа. Кроме того, полученные результаты могут использоваться в учебном процессе в рамках специальных курсов и специальных семинаров.

Методология и методы исследования. В работе использованы элементарные методы теории чисел, методы математического анализа, подходы, связанные с комбинаторикой слов, и компьютерные вычисления.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались автором на следующих конференциях:

- «Diophantine Analysis» — Астрахань, Россия (30 июля — 3 августа 2012);
- «Moscow Workshop on Combinatorics and Number Theory» — Москва (Долгопрудный), Россия (27 января — 2 февраля 2014);

и научно-исследовательских семинарах:

- «Московский семинар по теории чисел» (рук. Ю.В. Нестеренко, Н.Г. Мощевитин), МГУ;
- «Дискретная геометрия и геометрия чисел» (рук. Н.П. Долбилин, М.Д. Ковалев, Н.Г. Мощевитин), МГУ;
- «Арифметика и геометрия» (рук. Н.Г. Мощевитин, О.Н. Герман), МГУ;

Публикации. По теме диссертации опубликовано 2 статьи в ведущих российских рецензируемых изданиях [1] — [2], а также электронный препринт на сервере arXiv.org [3].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и библиографии. Общий объем диссертации составляет 108 страниц. Библиография включает 31 наименование.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана теоретическая значимость полученных результатов.

Первая глава диссертации посвящена экстремальным значениям континуантов. Напомним, что *континуантом* называется функция от произвольного (возможно пустого) конечного набора натуральных чисел, определенная по следующему правилу:
$\langle\ \rangle = 1$,
$\langle a_1 \rangle = a_1$.
Далее, для $n \geqslant 2$ значение континуанта выражается рекуррентно:

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \rangle = a_n \langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \rangle + \langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-2} \rangle. \qquad (10)$$

Ряд задач на поиск экстремумов континуантов решается в работе И.Д. Кана [22]. Чтобы сформулировать его результаты, введем следующие обозначения. Для натуральных n, t и S определим $U(S,t,n)$ как множество последовательностей натуральных чисел длины t, элементы которых не превосходят n и сумма элементов которых равна S

$$U(S,t,n) = \{(a_1, a_2, \ldots, a_t)) :\ 1 \leq a_i \leq n,\ a_1 + a_2 + \ldots + a_t = S\}. \qquad (11)$$

Определим также множества $U_n(S)$ и $U(S,t)$ следующим образом

$$U_n(S) = \bigcup_t U(S,t,n), \quad U(S,t) = \bigcup_n U(S,t,n). \qquad (12)$$

Для $m \in \mathbb{N}_0$ положим $m_- = [m/2],\ m_+ = m - m_-$. Для $x \in \mathbb{Z},\ n,\ z \in \mathbb{N}$ определим следующие множества

$$N_z(x) = \begin{cases} (n^{(x)}, z), & \text{если } x \geqslant 0 \\ (1^{(-1-x)}, z, 1), & \text{если } x < 0 \end{cases} \qquad (13)$$

[22] И.Д. Кан *Методы получения оценок континуантов* Фундаментальная и прикладная математика, 16:6 (2010), 95-108.

$$T_z(m,x) = \langle \underbrace{1,n,1,n,\ldots,1,n}_{m_+ \text{ пар чисел}}, N_z(x), \underbrace{n,1,n,1,\ldots,n,1}_{m_- \text{ пар чисел}} \rangle \tag{14}$$

Теорема III. *При $n \geqslant 2, S \geqslant 2n+2$ минимальный континуант на множестве $U_n(S)$ может быть найден по формуле*

$$\min_{U_n(S)} = \min_{1\le z\le n-1} T_z(m,x), \tag{15}$$

где

$$0 \leqslant x \leqslant n, \quad x \equiv 1 - S \pmod{n+1}, \quad m = \frac{S-nx-1}{n+1}, \quad m(z) > 0.$$

Теорема IV. *При $2 \le t \le S < nt$ максимальный континуант на множестве $U(S,t)$ может быть найден по формуле*

$$\max_{U(S,t)} = \begin{cases} \langle h_1^{(t)} \rangle, & \textit{если} \;\; S \equiv 0 \pmod t \\ \langle h_2, h_1^{(c)}, h_2^{(d-1)} \rangle, & \textit{в противном случае}, \end{cases} \tag{16}$$

где $h_1 = \left[\frac{S}{t}\right]$, $h_2 = h_1 + 1$, $c = t\left\{-\frac{S}{t}\right\}$, $d = t\left\{\frac{S}{t}\right\}$.

Чтобы сформулировать наши результаты, введем дополнительные обозначения. Для f натуральных чисел $h_1 < h_2 < \ldots < h_f$ и для их кратностей $p_1, p_2, \ldots, p_f \geqslant 1$ определим множество

$$W_f = W_f(\overline{h}, \overline{p}) = \{(a_1, a_2, \ldots, a_t) : \; a_i \in \{h_1, h_2, \ldots, h_f\}, \; \#\{i : \; a_i = h_j\} = p_j\}\}, \tag{17}$$

где t равно $p_1 + p_2 + \ldots + p_f$. Обозначим множество последовательностей вида $(a, b_1, a, b_2, a, \ldots, a, b_n, a)$, длины $2n+1$, в которых на нечетных местах все элементы равны a, а последовательность $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, образуемая элементами, стоящими на четных местах, принадлежит множеству $W_f(\overline{h}, \overline{p})$ через $W_f^a(\overline{h}, \overline{p})$.

$$\begin{gathered} W_f^a(\overline{h}, \overline{p}) = \{(a, b_1, a, b_2, a, \ldots, a, b_t, a) : \\ a_i \in \{h_1, h_2, \ldots, h_f\}, \; \#\{i : \; a_i = h_j\} = p_j\}\}, \end{gathered} \tag{18}$$

Для $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_f)$ целочисленные коэффициенты p_i^l, p_i^r определяются по следующим правилам.

1. $p_f^r = [p_f/2]$, $p_f^l = p_f - p_f^r$.

2. При $i < f$ $\;p_i^r = p_i^l = p_i/2$ если p_i четно.

3. Если p_i нечетно и для всех $j > i$ верно, что p_j четно, то $p_i^r = [p_i/2]$, $p_f^l = p_i - p_i^r$.

4. Если p_i нечетно и j - минимальное число, большее i такое, что $p^l_j \neq p^r_j$, то p^l_i и p^r_i определяются из соотношения $(p^l_j - p^r_j)(p^l_i - p^r_i) = -1$.

Определим также параметры

$$\lambda_n = \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}, \quad \mu_n = \frac{n+2+\sqrt{n^2+4n}}{2}. \tag{19}$$

Положим $c_0 \approx 0.203188$ - единственное решение уравнения

$$xe^{2(1-x)} = 1$$

на отрезке $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

В настоящей диссертации мы доказываем следующие теоремы. Теорема 1 уточняет теорему III И.Д. Кана.

Теорема 1. Пусть $n \geqslant 2, S \geqslant (n+1)^2$ и $S = (n+1)m + z_0,\ 0 \leq z_0 \leq n$, x находится из соотношения

$$0 \leqslant x \leqslant n, \quad x \equiv 1 - S \pmod{n+1}.$$

Тогда минимальный континуант на множестве $U_n(S)$ имеет следующий вид

Если $z_0 > \frac{n}{2}$, то

$$\min_{U_n(S)} = T_n(m,x). \tag{20}$$

Если $z_0 \leq \frac{n}{2}$, то минимум достигается в одном из двух континуантов:

$$\begin{gathered}\min_{U_n(S)} = T_n(m,x) = \frac{\mu_n^{m-n+z+2}}{(\mu_n+1)^2}\frac{\lambda_n^{n+3-z}}{\lambda_n^2+1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{или} \\ \min_{U_n(S)} = T_z(m,0) = \frac{\mu_n^{m+2}}{(\mu_n+1)^2}\left(z+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),\end{gathered} \tag{21}$$

причем при $\frac{z}{n} > c_0 + O(\frac{1}{n})$ минимум достигается в $T_n(m,x)$, а при $\frac{z}{n} < c_0 + O(\frac{1}{n})$ - в $T_z(m,0)$.

В главе 2 будет показано, что для исследования функций семейства Данжуа особое значение имеет задача поиска экстремумов по множеству континуантов, в котором все неполные частные нечетного индекса равны друг другу. Следующие две теоремы описывают наиболее простой случай, в котором удается получить точный результат.

Теорема 2. Минимальный континуант на множестве $W^a_f(\overline{h},\overline{p})$ может быть найден по формуле

$$\min_{W^a_f(\overline{h},\overline{p})} = \langle (a,h_f)^{(p^l_f)}, (a,h_{f-1})^{(p^l_{f-1})}, \ldots, (a,h_1)^{(p_1)}, \ldots, (h_{f-1},a)^{(p^r_{f-1})}, (h_f,a)^{(p^r_f)} \rangle. \tag{22}$$

Теорема 3. Максимальный континуант на множестве $W_f^a(\overline{h},\overline{p})$ при условии $p_{f-i} = p_{i+1}\ \forall i:\ 0 \leqslant i \leqslant f-1$ может быть найден по формуле

$$\begin{aligned}\max_{W_f^a(\overline{h},\overline{p})} = \langle (a,h_1,a,h_f)^{(p_f^l)}, (a,h_2,a,h_{f-1})^{(p_{f-1}^l)}, \ldots, \\ (h_{f-1},a,h_2,a)^{(p_{f-1}^r)}, (h_f,a,h_1,a)^{(p_f^r)}\rangle.\end{aligned} \tag{23}$$

Пусть $A = \langle a_1, a_2, \ldots, a_t, \rangle$ - произвольный континуант длины t. Обозначим

$$S_t^\tau(A) = 2a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 + \ldots = \sum_{i=1}^{t} a_i(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^{i-1}).$$

Как будет показано в главе 2, для получения оценок производной функции $g_\tau(x)$, требуется оценить максимум континуантов с фиксированной взвешенной суммой $S_t^\tau(x)$ и фиксированной длиной t. Для этого в первой главе строится *итерационный алгоритм* вычисления максимума континуанта по данному множеству.

Вторая глава посвящена изучению производной функций семейства Данжуа. Известна следующая формула, выражающая значение функции Минковского в точке $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ через неполные частные разложения числа x в цепную дробь[23]:

$$?(x) = \frac{1}{2^{a_1-1}} - \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3-1}} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_n-1}} + \ldots \tag{24}$$

Для функции $g_\lambda(x)$ существует[24] аналогичная формула, имеющая следующий громоздкий вид

$$\begin{aligned}g_\lambda(x) = \lambda^{a_1-1} - \lambda^{a_1-1}(1-\lambda)^{a_2} + \lambda^{a_1+a_3-1}(1-\lambda)^{a_2} - \ldots + \\ +\lambda^{a_1+a_3+\ldots+a_{2t-1}-1}(1-\lambda)^{a_2+a_4+\ldots+a_{2t-2}} - \lambda^{a_1+a_3+\ldots+a_{2t-1}-1}(1-\lambda)^{a_2+a_4+\ldots+a_{2t}} + \ldots\end{aligned} \tag{25}$$

Поскольку $1 - \frac{1}{\varphi^2} = \frac{1}{\varphi}$, для функции $g_\tau(x)$ ввиду (25) верна следующая формула:

$$g_\tau(x) = \frac{1}{\varphi^{2a_1-2}} - \frac{1}{\varphi^{2a_1+a_2-2}} + \frac{1}{\varphi^{2a_1+a_2+2a_3-2}} - \ldots \tag{26}$$

В частности, для иррационального x формула (26) примет вид

$$g_\tau(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{\varphi^{S_i^\tau(x)-2}} \tag{27}$$

Введем также сумму

$$S_t^\varphi(x) = a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4 + \ldots = \sum_{i=1}^{t} a_i(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^i).$$

[23] R.Salem *On some singular monotone functions which are strictly increasing* Trans. Amer. Math. So., 53 (1943), 427 - 439

[24] E. Zhabitskaya *On arithmetical nature of Tichy-Uitz's function* Funct. Approx. Comment. Math., 43:1 (2010), 15-22.

Поскольку φ удовлетворяет соотношению $\varphi^2 = 1 + \varphi$, формула (25) принимает для значения параметра $\lambda = \frac{1}{\varphi}$ вид

$$g_{\varphi^{-1}}(x) = \frac{1}{\varphi^{a_1-1}} - \frac{1}{\varphi^{a_1+2a_2-1}} + \frac{1}{\varphi^{a_1+2a_2+a_3-1}} - \dots \qquad (28)$$

или, с учетом введенных обозначений,

$$g_{\varphi^{-1}}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{\varphi^{S_i^{\varphi}(x)-1}}. \qquad (29)$$

Кроме того, нетрудно видеть, что

$$g_{\varphi^{-1}}(x) + g_{\tau}(1-x) = 1.$$

Хорошо известно, что для любого $\lambda \in (0,1)$ производная функции $g_\lambda(x)$ равна нулю в рациональных точках. Поэтому в настоящей работе везде предполагается, что x иррационально, следовательно раскладывается в бесконечную цепную дробь. В силу монотонности, функция $g_\lambda(x)$ при любом $\lambda \in (0,1)$ почти всюду дифференцируема по теореме Лебега. Поскольку, как говорилось выше, производная $g_\lambda(x)$ может равняться только 0 или $+\infty$, почти всюду производная $g_\lambda(x)$ равна нулю.

Сформулируем наши результаты. Теорема 4 является обобщением теоремы I А.Душистовой и Н.Мощевитина.

Теорема 4. Положим $\varkappa_1 = 4$.

(**i**) Пусть $x = [a_1, \dots, a_t, \dots]$ - иррациональное число и

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{S_{2t}^{\varphi}(x)}{t} = \varkappa_{sup}(x) < \varkappa_1.$$

Тогда производная $g'_{\varphi^{-1}}(x)$ существует и равна $+\infty$.

(**ii**) Для любого положительного δ существует иррациональное $y = [b_1, \dots, b_t, \dots]$ такое, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{2t}^{\varphi}(y)}{t} < \varkappa_1 + \delta \text{ и } g'_{\varphi^{-1}}(y) = 0.$$

Аналогом теоремы II является наша следующая теорема.

Теорема 5.

Существует алгоритмически вычислимая с любой точностью константа $\varkappa_2 \approx 13.05\dots$ такая, что выполнены следующие утверждения:

(**i**) Пусть $x = [a_1, \dots, a_t, \dots]$ - иррациональное число и

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{S_{2t}^{\varphi}(x)}{t} = \varkappa_{inf}(x) > \varkappa_2 \approx 13.05.$$

Тогда производная $g'_{\varphi^{-1}}(x)$ существует и равна 0.

(**ii**) Для любого положительного δ существует иррациональное $y = [b_1, \ldots, b_t, \ldots]$ такое, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{2t}^{\varphi}(y)}{t} > \varkappa_2 - \delta \text{ и } g'_{\varphi^{-1}}(y) = +\infty.$$

Вторые утверждения в теоремах 4 и 5 показывают, что константы $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ являются неулучшаемыми. Кроме того, нами доказана следующая теорема.

Теорема 6.

(**i**) Если все неполные частные числа $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ меньше либо равны 2, то $g'_{\varphi^{-1}}(x) = +\infty$

(**ii**) Существует $y \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ такое, что все неполные частные числа y меньше либо равны 3 и $g'_{\varphi^{-1}}(y) = 0$.

Третья глава посвящена изучению спектра Лагранжа и достижимых чисел. Пусть α - иррациональное число из отрезка, представимое в виде бесконечной цепной дроби следующим образом

$$\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots]. \tag{30}$$

Определим величину $\lambda_i(\alpha)$

$$\lambda_i(\alpha) = [a_i; a_{i-1}, a_{i-2}, \ldots, a_1] + [0; a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots]. \tag{31}$$

Величина

$$\limsup_{i\to\infty} \lambda_i(\alpha) = \mu(\alpha) \tag{32}$$

называется *постоянной Лагранжа* для иррационального числа α. Множество $\mu(\alpha)$ для всевозможных иррациональных α является спектром Лагранжа $\mathbb{L}$. Это определение эквивалентно данному выше.

Число α называется достижимым, если неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\mu(\alpha)q^2} \tag{33}$$

имеет бесконечно много решений для целых p и q.

В обзоре А.В. Малышева[25] было сформулировано без доказательства следующее утверждение: *Для любого $\lambda \in \mathbb{L}$ найдется иррациональное число α такое, что $\mu(\alpha) = \lambda$ и α достижимо.*

В главе 3 настоящей работы мы построим контрпример к данному утверждению.

Основные результаты главы 3 состоят в следующем

[25] А.В. Малышев *Спектры Маркова и Лагранжа (обзор литературы)* Исследования по теории чисел. 4, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 67, Изд-во «Наука», Ленинград (1977), 5-38.

Теорема 7. Число $\lambda_0 = [3;3,3,2,1,\overline{1,2}] + [0;2,1,\overline{1,2}] = \frac{62976-1498\sqrt{3}}{16357} \approx 3.6914708$ принадлежит спектру Лагранжа. При этом любое иррациональное α такое, что $\mu(\alpha) = \lambda_0$, не является достижимым.

Эта теорема предоставляет контрпример к утверждению Малышева. Следующая теорема утверждает, что любой контрпример к утверждению Малышева является левым концом пропуска в спектре Лагранжа.

Теорема 8. Пусть $\lambda \in \mathbb{L}$ удовлетворяет следующему свойству: любое иррациональное α такое, что $\mu(\alpha) = \lambda$, не является достижимым. Тогда λ является левым концом пропуска в спектре Лагранжа.

Кроме того, мы даем описание левых концов в спектре Лагранжа

Теорема 9. Любой левый конец в спектре Лагранжа представим в виде суммы двух квадратичных иррациональностей.

Доказательство теоремы 9 было приведено Б. Дитцем[26], однако, как показали Т.Кузик и М.Флахив[27], его доказательство было ошибочным. В третьей главе мы приводим новое доказательство данной теоремы.

Список работ автора по теме диссертации

1. Гайфулин Д.Р. *Производные двух функций семейства Денжуа–Тихого–Уитца*, Алгебра и анализ, 27:1 (2015), 74–124
2. Гайфулин Д.Р. *Экстремальные значения континуантов*, Матем. заметки 100:2 (2016), 304–307
3. Gayfulin D. *Attainable numbers and the Lagrange spectrum*, submitted, preprint at arXiv: (2016), 15 p.

[26] B.Dietz *On the gaps of the Lagrange spectrum*, Acta Arith., 45 (1985), 59-64.

[27] T. W. Cusick, M. E. Flahive *The Markoff and Lagrange spectra*, Math. Surveys Monogr., 30, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1989), ISBN: 0-8218-1531-8.