Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Гайфулин Дмитрий Радиславович

Неравенства с континуантами и цепными дробями и их применения

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация

на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель —
доктор физико–математических
наук Н.Г. Мощевитин

Москва 2016

Оглавление

Стр.

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Данная диссертация посвящена изучению экстремальных свойств величин, выражающихся через цепные дроби и континуанты и их применению в различных теоретико-числовых задачах. Аппарат цепных дробей, формирование которого связано с такими именами как Л. Эйлер, Ж. Л. Лагранж, А. Лежандр, К.Ф. Гаусс, А. Гурвиц и другие, является одним из важнейших инструментом в теории диофантовых приближений. Систематическое изложение теории цепных дробей имеется, например, в книгах О. Перрона [15] и А. Я. Хинчина [28].

Другим классическим объектом теории чисел, непосредственно связанным с цепными дробями являются последовательности Штерна-Броко, появившееся в середине 19-го века в работах М. Штерна [18] и А. Броко [1]. Эти последовательности могут быть определены следующим образом. Для любого натурального n последовательность Штерна-Броко F_n есть конечная последовательность рациональных чисел отрезка $[0,1]$, которые представляются в виде цепной дроби с суммой неполных частных, не превосходящих $n+1$, расположенных в порядке возрастания. Хорошо известно, что предельной функцией распределения последовательностей Штерна-Броко является функция Минковского $?(x)$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{\xi \in F_n : \quad \xi \leqslant x\}}{\#F_n} = ?(x), \quad x \in [0,1]. \tag{1}$$

Равенство (1) является одним из возможных определений $?(x)$, введенной Г. Минковским в [13]. Функцию Минковского можно эквивалентно определить другим образом: на концах отрезка $[0,1]$ положим $?(\frac{0}{1}) = 0, ?(\frac{1}{1}) = 1$. Далее, пусть функция определена в точках $\frac{p}{q}$ и $\frac{r}{s}$, но не определена ни в какой точке между ними. В этом случае положим

$$?\left(\frac{p+r}{q+s}\right) = \frac{?(\frac{p}{q})+?(\frac{r}{s})}{2}. \tag{2}$$

В иррациональных точках отрезка $[0,1]$ функция Минковского определяется по непрерывности.

В 1938 году А. Данжуа рассмотрел [4], [5] семейство непрерывных монотонных функций $g_\lambda(x)$, где λ - действительный параметр из интервала $(0,1)$, обобщающих функцию Минковского. Как и функция $?(x)$, они определяются на отрезке $[0,1]$. В начале для любого λ положим $g_\lambda(\frac{0}{1}) = 0$, $g_\lambda(\frac{1}{1}) = 1$. Теперь, если функция $g_\lambda(x)$ задана в точках $\frac{p}{q}$ и $\frac{r}{s}$ и не определена между ними, правило (2) заменяется на

$$g_\lambda\left(\frac{p+r}{q+s}\right) = (1-\lambda)g_\lambda\left(\frac{p}{q}\right) + \lambda g_\lambda\left(\frac{r}{s}\right). \tag{3}$$

Как и в предыдущем случае, в иррациональных точках функция $g_\lambda(x)$ определяется по непрерывности. Легко видеть, что при $\lambda = \frac{1}{2}$ функция $g_\lambda(x)$ совпадает с функцией Минковского. Отметим, что семейство функций Данжуа было переоткрыто в 1995 году Р.Ф. Тихим и Ж. Уитцом [19].

Любопытным обобщением обыкновенных цепных дробей являются так называемые приведенные регулярные цепные дроби (см. [25], [15]). Известно, что любое действительное число x можно однозначно представить в виде

$$x = [[b_0; b_1, b_2, \ldots, b_t, \ldots]] = b_0 - \cfrac{1}{b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \ldots - \cfrac{1}{b_t - \cfrac{1}{\ldots}}}}, \tag{4}$$

где b_0 - произвольное целое число, а все остальные b_i больше либо равны двум. Аналогом последовательностей Штерна-Броко для приведенных регулярных цепных дробей являются множества Ξ_n, состоящие из всех рациональных чисел отрезка $[0,1]$, которые представляются в виде дроби $[[1;b_1,b_2,\dots,b_t]]$, причем $b_1+b_2+\dots+b_t=n+1$. В 2010 году Е. Жабицкая показала [20], что предельной функцией распределения Ξ_n является функция $g_\tau(x)$, принадлежащая семейству Данжуа, где $\tau=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Другие результаты об арифметической природе функций из семейства Данжуа на настоящий момент неизвестны.

Хорошо известно, что все функции семейства Данжуа принадлежат к классу сингулярных функций. Более того, их производная может принимать только два значения - 0 и $+\infty$. Исследование производной функций семейства Данжуа проводилось только для случая функции Минковского, который, как мы покажем в дальнейшем, является наиболее простым. В 2010 году А.А. Душистова и Н.Г.Мощевитин доказали [21] следующие две теоремы.

Теорема I. *Пусть* $x=[0;a_1,a_2,\dots,a_t,\dots]$ - *произвольное иррациональное число на отрезке* $[0,1]$. *Тогда существует положительная постоянная* κ_1 *такая, что если выполнено неравенство*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{a_1+a_2+\dots+a_t}{t}<\kappa_1, \tag{5}$$

то производная $?(x)$ *существует и равна* $+\infty$.

Теорема II. *Пусть* $x=[0;a_1,a_2,\dots,a_t,\dots]$ - *произвольное иррациональное число на отрезке* $[0,1]$. *Тогда существует положительная постоянная* κ_2 *такая, что если выполнено неравенство*

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{a_1+a_2+\dots+a_t}{t}>\kappa_2, \tag{6}$$

то производная $?(x)$ *существует и равна* 0.

Неулучшаемые значения постоянных κ_1 и κ_2 в работе [21] были вычислены явно. Среди других работ на данную тему следует отметить более раннюю статью Дж. Парадиза, П. Виадера и Л. Бибилони [14], в которой была вычислена константа κ_1 и содержалась более слабая оценка константы κ_2, а также статью А.А. Душистовой, И.Д. Кана и Н.Г. Мощевитина [7], в которой неравенства (5) и (6) в теоремах I и II были заменены на более точные с тем же самым главным членом. Одной из целей настоящей работы является получение аналогов теорем I и II для функции $g_\tau(x)$.

Основным методом в получении теорем I и II и их аналогов является поиск экстремумов знаменателей цепных дробей при некоторых условиях на неполные частные. Знаменатель цепной дроби $[0; a_1, a_2, \ldots, a_t]$ выражается через $a_1, a_2, \ldots, a_t$ при помощи многочлена, называемого *континуантом.* О континуантах и их свойствах имеется обширная литература (см. книги Т. Кузика и М. Флахив [2], Д. Хенсли [9] и библиографию оттуда). Многие методы вычисления экстремумов континуантов описаны в работе И.Д. Кана [23]. В настоящей работе развиваются и обобщаются методы статьи [23] и улучшаются некоторые полученные в ней оценки экстремумов.

Другим известным объектом, при исследовании которого применяется аппарат цепных дробей и континуантов, является спектр Лагранжа $\mathbb{L}$. Напомним одно из возможных его определений (см.[2]). Пусть A - бесконечная в обе стороны последовательность, состоящая из натуральных чисел:

$$A = \ldots, a_{-t}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_t, \ldots \tag{7}$$

Через $\lambda_i(A)$ обозначим следующую сумму двух цепных дробей:

$$\lambda_i(A) = [a_i; a_{i-1}, a_{i-2}, \ldots] + [0; a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots]. \tag{8}$$

Определим $L(A)$ следующим образом

$$\limsup_{i\to\infty} \lambda_i(A) = L(A). \tag{9}$$

Спектром Лагранжа $\mathbb{L}$ называется множество значений $L(A)$, где A пробегает всевозможные последовательности натуральных чисел. Хорошо известно, что минимальный элемент спектра Лагранжа - $\sqrt{5}$. Систематическое изложение результатов о спектре Лагранжа (и родственному ему спектру Маркова) содержится в книге Т.Кузика и М.Флахив [2]. Среди важнейших исследований по спектру Лагранжа следует упомянуть работы Маркова [11], [12], описавшего структуру дискретной части спектра, М.Холла [8], доказавшего существование константы c такой, что $\mathbb{L}$ содержит любое число большее c. В его честь луч $[c, +\infty)$ принято называть лучом Холла. Оценку числа c неоднократно улучшали разные авторы, среди работ на эту тему следует отметить статьи Г.А.Фреймана [26] и Х.Шекера [17], в которых доказывается, что $[\sqrt{21}, +\infty) \in \mathbb{L}$. В 1975 году Г.А. Фрейман опубликовал работу [27], в которой приводилось точное вычисление начала луча Холла.

Спектр Лагранжа является замкнутым множеством ([2]). Следовательно, его дополнение состоит из счетного числа интервалов, называемых пропусками (англ. gap). Структура пропусков в спектре Лагранжа к настоящему моменту остается практически неисследованной, описаны лишь крупнейшие из них. Одной из целей настоящей работы является описание и изучение левых концов пропусков в спектре Лагранжа.

Цели работы. Получение оценок максимумов и минимумов континуантов по различным множествам. Получение аналогов теорем I и II для функций семейства Данжуа. Описание и исследование свойств левых концов пропусков в спектре Лагранжа.

Методы исследования. В работе использованы элементарные методы теории чисел, методы математического анализа, подходы, связанные с комбинаторикой слов, и компьютерные вычисления.

Научная новизна. Полученные результаты являются новыми и получены автором самостоятельно. Основными результатами данной работы можно считать следующие:

- Найдены точные оценки максимумов и минимумов континуантов по различным множествам. Построен алгоритм получения максимума для континуанта, в котором фиксирована сумма неполных частных с весами 1 и 2. Вычислена соответствующая экспонента роста при длине континуанта, стремящейся к бесконечности.
- Получены аналоги теорем I и II для функции $g_\tau(x)$ с неулучшаемыми

константами $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$.

Кроме того, получен ряд новых результатов о спектре Лагранжа.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, и разработанные в ней методы могут быть применены в задачах теории цепных дробей и исследований спектра Лагранжа. Кроме того, полученные результаты могут использоваться в учебном процессе в рамках специальных курсов и специальных семинаров.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались автором на следующих конференциях:

- «Diophantine Analysis» — Астрахань, Россия (30 июля — 3 августа 2012);
- «Moscow Workshop on Combinatorics and Number Theory» — Москва (Долгопрудный), Россия (27 января — 2 февраля 2014);

и научно-исследовательских семинарах:

- «Московский семинар по теории чисел» (рук. Ю.В. Нестеренко, Н.Г. Мощевитин), МГУ;
- «Дискретная геометрия и геометрия чисел» (рук. Н.П. Долбилин, М.Д. Ковалев, Н.Г. Мощевитин), МГУ;
- «Арифметика и геометрия» (рук. Н.Г. Мощевитин, О.Н. Герман), МГУ;

Публикации. По теме диссертации опубликовано 2 статьи в ведущих российских рецензируемых изданиях [29] — [30], а также электронный препринт на сервере arXiv.org [31].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, приложения и библиографии. Общий объем диссертации составляет 108 страниц. Библиография включает 31 наименование.

Об основных обозначениях

Последовательности натуральных чисел произвольной длины в настоящей работе мы будем обозначать большими буквами, а их элементы - маленькими $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Если не оговорено иное, все последовательности натуральных чисел считаются конечными. Как обычно, квадратными скобками будет обозначаться обыкновенная цепная дробь $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_t]$, треугольные скобки будут обозначать континуант $\langle a_1, a_2, \ldots, a_t \rangle$, а круглые скобки $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ - произвольную последовательность натуральных чисел. Мы нередко будем называть их элементы неполными частными, подчеркивая связь последовательностей с соответствующими цепными дробями. Цепную дробь $[0; a_1, a_2, \ldots, a_t]$ мы будем иногда для краткости писать как $[a_1, a_2, \ldots, a_t]$. Последовательностью (A, B) будем обозначать последовательность, состоящую из элементов A и B, выписанных по порядку. Через $\overleftarrow{A}$ будем обозначать последовательность элементов A, выписанных в обратном порядке, а через $\overrightarrow{A}$ - в исходном порядке. Для произвольной последовательности $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ будем обозначать $A_- = (a_2, a_3, \ldots, a_n)$, $A^-=(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ и $A_-^-=(a_2, \ldots, a_{n-1})$. Обозначим последовательность $(\underbrace{a, a, \ldots, a}_{n\ \text{чисел}})$ как $a^{(n)}$. При нулевом n положим эту последовательность пустой. Аналогично определим $A^{(n)} = (\underbrace{A, A, \ldots, A}_{n\ \text{раз подряд}})$.

Будем обозначать через $p_i(x)$ и $q_i(x)$ соответственно числители и знаменатели $i-$х подходящих дробей к числу $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$, то есть $\frac{p_i(x)}{q_i(x)} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i]$. В тех случаях, когда это не вызовет путаницы, мы будем опускать аргумент x и писать просто $\frac{p_i}{q_i}$.

Числом $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033989$ мы всегда будем обозначать положительный корень уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, так называемое "золотое сечение". Через τ будем обозначать величину $\frac{1}{\varphi^2} \approx 0.381966011$.

Краткое содержание диссертации и основные результаты

Первая глава диссертации посвящена экстремальным значениям континуантов. Напомним, что *континуантом* называется функция от произвольного (возможно пустого) конечного набора натуральных чисел, определенная по следующему правилу:

$\langle\ \rangle = 1,$

$\langle a_1 \rangle = a_1.$

Далее, для $n \geqslant 2$ значение континуанта выражается рекуррентно:

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \rangle = a_n \langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \rangle + \langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-2} \rangle. \tag{10}$$

Ряд задач на поиск экстремумов континуантов решается в работе И.Д. Кана [23]. Чтобы сформулировать его результаты, введем следующие обозначения. Для натуральных n, t и S определим $U(S,t,n)$ как множество последовательностей натуральных чисел длины t, элементы которых не превосходят n и сумма элементов которых равна S

$$U(S,t,n) = \{(a_1, a_2, \ldots, a_t)) :\ 1 \leqslant a_i \leqslant n,\ a_1 + a_2 + \ldots + a_t = S\}. \tag{11}$$

Определим также множества $U_n(S)$ и $U(S,t)$ следующим образом

$$U_n(S) = \bigcup_t U(S,t,n), \quad U(S,t) = \bigcup_n U(S,t,n). \tag{12}$$

Для $m \in \mathbb{N}_0$ положим $m_- = [m/2]$, $m_+ = m - m_-$. Для $x \in \mathbb{Z}$, n, $z \in \mathbb{N}$ определим следующие множества

$$N_z(x) = \begin{cases} (n^{(x)}, z), & \text{если } \ x \geqslant 0 \\ (1^{(-1-x)}, z, 1), & \text{если } \ x < 0 \end{cases} \tag{13}$$

$$T_z(m,x) = \langle \underbrace{1, n, 1, n, \ldots, 1, n}_{m_+ \text{ пар чисел}}, N_z(x), \underbrace{n, 1, n, 1, \ldots, n, 1}_{m_- \text{ пар чисел}} \rangle \tag{14}$$

Теорема III. *При $n \geqslant 2, S \geqslant 2n+2$ минимальный континуант на множестве $U_n(S)$ может быть найден по формуле*

$$\min_{U_n(S)} = \min_{1 \leqslant z \leqslant n-1} T_z(m,x), \tag{15}$$

где

$$0 \leqslant x \leqslant n, \quad x \equiv 1 - S \pmod{n+1}, \quad m = \frac{S - nx - 1}{n+1}, \quad m(z) > 0.$$

Теорема IV. *При $2 \leqslant t \leqslant S < nt$ максимальный континуант на множестве $U(S,t)$ может быть найден по формуле*

$$\max_{U(S,t)} = \begin{cases} \langle h_1^{(t)} \rangle, & \text{если } S \equiv 0 \pmod t \\ \langle h_2, h_1^{(c)}, h_2^{(d-1)} \rangle, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{16}$$

где $h_1 = \left[\frac{S}{t}\right]$, $h_2 = h_1 + 1$, $c = t\left\{-\frac{S}{t}\right\}$, $d = t\left\{\frac{S}{t}\right\}$.

Чтобы сформулировать наши результаты, введем дополнительные обозначения. Для f натуральных чисел $h_1 < h_2 < \ldots < h_f$ и для их кратностей $p_1, p_2, \ldots, p_f \geqslant 1$ определим множество

$$W_f = W_f(\overline{h}, \overline{p}) = \{(a_1, a_2, \ldots, a_t) : \ a_i \in \{h_1, h_2, \ldots, h_f\}, \ \#\{i : \ a_i = h_j\} = p_j\}\}, \tag{17}$$

где t равно $p_1 + p_2 + \ldots + p_f$. Обозначим множество последовательностей вида $(a, b_1, a, b_2, a, \ldots, a, b_n, a)$, длины $2n+1$, в которых на нечетных местах все элементы равны a, а последовательность $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, образуемая элементами, стоящими на четных местах, принадлежит множеству $W_f(\overline{h}, \overline{p})$ через $W_f^a(\overline{h}, \overline{p})$.

$$\begin{gathered} W_f^a(\overline{h}, \overline{p}) = \{(a, b_1, a, b_2, a, \ldots, a, b_t, a) : \\ a_i \in \{h_1, h_2, \ldots, h_f\}, \ \#\{i : \ a_i = h_j\} = p_j\}\}, \end{gathered} \tag{18}$$

Для $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_f)$ целочисленные коэффициенты p_i^l, p_i^r определяются по следующим правилам.

1. $p_f^r = [p_f/2]$, $p_f^l = p_f - p_f^r$.
2. При $i < f$ $\ p_i^r = p_i^l = p_i/2$ если p_i четно.
3. Если p_i нечетно и для всех $j > i$ верно, что p_j четно, то $p_i^r = [p_i/2]$, $p_f^l = p_i - p_i^r$.

4. Если p_i нечетно и j - минимальное число, большее i такое, что $p_j^l \neq p_j^r$, то p_i^l и p_i^r определяются из соотношения $(p_j^l - p_j^r)(p_i^l - p_i^r) = -1$.

Определим также параметры

$$\lambda_n = \frac{n + \sqrt{n^2+4}}{2}, \quad \mu_n = \frac{n+2+\sqrt{n^2+4n}}{2}. \tag{19}$$

Положим $c_0 \approx 0.203188$ - единственное решение уравнения

$$xe^{2(1-x)} = 1$$

на отрезке $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

В настоящей диссертации мы доказываем следующие теоремы. Теорема 1 уточняет теорему III И.Д. Кана.

Теорема 1. *Пусть $n \geqslant 2, S \geqslant (n+1)^2$ и $S = (n+1)m + z_0,\ 0 \leqslant z_0 \leqslant n$, x находится из соотношения*

$$0 \leqslant x \leqslant n, \quad x \equiv 1 - S \pmod{n+1}.$$

Тогда минимальный континуант на множестве $U_n(S)$ имеет следующий вид

Если $z_0 > \frac{n}{2}$, то

$$\min_{U_n(S)} = T_n(m,x). \tag{20}$$

Если $z_0 \leqslant \frac{n}{2}$, то минимум достигается в одном из двух континуантов:

$$\begin{gathered}\min_{U_n(S)} = T_n(m,x) = \frac{\mu_n^{m-n+z+2}}{(\mu_n+1)^2}\frac{\lambda_n^{n+3-z}}{\lambda_n^2+1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{или} \\ \min_{U_n(S)} = T_z(m,0) = \frac{\mu_n^{m+2}}{(\mu_n+1)^2}\left(z+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),\end{gathered} \tag{21}$$

причем при $\frac{z}{n} > c_0 + O(\frac{1}{n})$ минимум достигается в $T_n(m,x)$, а при $\frac{z}{n} < c_0 + O(\frac{1}{n})$ - в $T_z(m,0)$.

В главе 2 будет показано, что для исследования функций семейства Данжуа особое значение имеет задача поиска экстремумов по множеству континуантов, в котором все неполные частные нечетного индекса равны друг другу. Следующие две теоремы описывают наиболее простой случай, в котором удается получить точный результат.

Теорема 2. *Минимальный континуант на множестве* $W_f^a(\overline{h},\overline{p})$ *может быть найден по формуле*

$$\min_{W_f^a(\overline{h},\overline{p})} = \langle (a,h_f)^{(p_f^l)}, (a,h_{f-1})^{(p_{f-1}^l)}, \dots, (a,h_1)^{(p_1)}, \dots, (h_{f-1},a)^{(p_{f-1}^r)}, (h_f,a)^{(p_f^r)} \rangle. \tag{22}$$

Теорема 3. *Максимальный континуант на множестве* $W_f^a(\overline{h},\overline{p})$ *при условии* $p_{f-i} = p_{i+1}\ \forall i:\ 0 \leqslant i \leqslant f-1$ *может быть найден по формуле*

$$\begin{aligned} \max_{W_f^a(\overline{h},\overline{p})} = \langle (a,h_1,a,h_f)^{(p_f^l)}, (a,h_2,a,h_{f-1})^{(p_{f-1}^l)}, \dots, \\ (h_{f-1},a,h_2,a)^{(p_{f-1}^r)}, (h_f,a,h_1,a)^{(p_f^r)} \rangle. \end{aligned} \tag{23}$$

Пусть $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_t, \rangle$ - произвольный континуант длины t. Обозначим

$$S_t^\tau(A) = 2a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 + \ldots = \sum_{i=1}^{t} a_i\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^{i-1}\right).$$

Как будет показано в главе 2, для получения оценок производной функции $g_\tau(x)$, требуется оценить максимум континуантов с фиксированной взвешенной суммой $S_t^\tau(x)$ и фиксированной длиной t. Для этого в первой главе строится *итерационный алгоритм* вычисления максимума континуанта по данному множеству.

Вторая глава посвящена изучению производной функций семейства Данжуа. Известна следующая формула, выражающая значение функции Минковского в точке $x = [a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ через неполные частные разложения числа x в цепную дробь [16]:

$$?(x) = \frac{1}{2^{a_1-1}} - \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3-1}} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_n-1}} + \ldots \tag{24}$$

Для функции $g_\lambda(x)$ в работе [20] доказана аналогичная формула, имеющая следующий громоздкий вид

$$g_\lambda(x) = \lambda^{a_1-1} - \lambda^{a_1-1}(1-\lambda)^{a_2} + \lambda^{a_1+a_3-1}(1-\lambda)^{a_2} - \ldots +$$
$$+\lambda^{a_1+a_3+\ldots+a_{2t-1}-1}(1-\lambda)^{a_2+a_4+\ldots+a_{2t-2}} - \lambda^{a_1+a_3+\ldots+a_{2t-1}-1}(1-\lambda)^{a_2+a_4+\ldots+a_{2t}} + \ldots \tag{25}$$

Поскольку $1 - \frac{1}{\varphi^2} = \frac{1}{\varphi}$, для функции $g_\tau(x)$ ввиду (25) верна следующая формула:

$$g_\tau(x) = \frac{1}{\varphi^{2a_1-2}} - \frac{1}{\varphi^{2a_1+a_2-2}} + \frac{1}{\varphi^{2a_1+a_2+2a_3-2}} - \ldots \tag{26}$$

В частности, для иррационального x формула (26) примет вид

$$g_\tau(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{\varphi^{S_i^\tau(x)-2}} \tag{27}$$

Введем также сумму

$$S_t^\varphi(x) = a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4 + \ldots = \sum_{i=1}^{t} a_i(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^i).$$

Поскольку φ удовлетворяет соотношению $\varphi^2 = 1+\varphi$, формула (25) принимает для значения параметра $\lambda = \frac{1}{\varphi}$ вид

$$g_{\varphi^{-1}}(x) = \frac{1}{\varphi^{a_1-1}} - \frac{1}{\varphi^{a_1+2a_2-1}} + \frac{1}{\varphi^{a_1+2a_2+a_3-1}} - \ldots \tag{28}$$

или, с учетом введенных обозначений,

$$g_{\varphi^{-1}}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{\varphi^{S_i^\varphi(x)-1}}. \tag{29}$$

Кроме того, нетрудно видеть, что

$$g_{\varphi^{-1}}(x) + g_\tau(1-x) = 1.$$

Хорошо известно, что для любого $\lambda \in (0,1)$ производная функции $g_\lambda(x)$ равна нулю в рациональных точках. Поэтому в настоящей работе везде предполагается, что x иррационально, следовательно раскладывается в бесконечную цепную дробь. В силу монотонности, функция $g_\lambda(x)$ при любом $\lambda \in (0,1)$

почти всюду дифференцируема по теореме Лебега. Поскольку, как говорилось выше, производная $g_\lambda(x)$ может равняться только 0 или $+\infty$, почти всюду производная $g_\lambda(x)$ равна нулю.

Сформулируем наши результаты. Теорема 4 является обобщением теоремы I А.Душистовой и Н.Мощевитина.

Теорема 4. *Положим $\varkappa_1 = 4$.*

(***i***) *Пусть $x = [a_1, \ldots, a_t, \ldots]$ - иррациональное число и*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{S_{2t}^{\varphi}(x)}{t} = \varkappa_{sup}(x) < \varkappa_1.$$

Тогда производная $g'_{\varphi^{-1}}(x)$ существует и равна $+\infty$.

(***ii***) *Для любого положительного δ существует иррациональное $y = [b_1, \ldots, b_t, \ldots]$ такое, что*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{2t}^{\varphi}(y)}{t} < \varkappa_1 + \delta \text{ и } g'_{\varphi^{-1}}(y) = 0.$$

Аналогом теоремы II является наша следующая теорема.

Теорема 5.

Существует алгоритмически вычислимая с любой точностью константа $\varkappa_2 \approx 13.05\ldots$ такая, что выполнены следующие утверждения:

(***i***) *Пусть $x = [a_1, \ldots, a_t, \ldots]$ - иррациональное число и*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{S_{2t}^{\varphi}(x)}{t} = \varkappa_{inf}(x) > \varkappa_2 \approx 13.05.$$

Тогда производная $g'_{\varphi^{-1}}(x)$ существует и равна 0.

(***ii***) *Для любого положительного δ существует иррациональное $y = [b_1, \ldots, b_t, \ldots]$ такое, что*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{2t}^{\varphi}(y)}{t} > \varkappa_2 - \delta \text{ и } g'_{\varphi^{-1}}(y) = +\infty.$$

Вторые утверждения в теоремах 4 и 5 показывают, что константы $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ являются неулучшаемыми. Кроме того, нами доказана следующая теорема, аналогичное утверждение есть в работе [7]

Теорема 6.

(***i***) *Если все неполные частные числа* $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ *меньше либо равны 2, то* $g'_{\varphi^{-1}}(x) = +\infty$

(***ii***) *Существует* $y \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ *такое, что все неполные частные числа* y *меньше либо равны* 3 *и* $g'_{\varphi^{-1}}(y) = 0$.

Третья глава посвящена изучению спектра Лагранжа и достижимых чисел. Пусть α - иррациональное число из отрезка $[0,1]$, представимое в виде бесконечной цепной дроби следующим образом

$$\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots]. \tag{30}$$

Определим величину $\lambda_i(\alpha)$

$$\lambda_i(\alpha) = [a_i; a_{i-1}, a_{i-2}, \ldots, a_1] + [0; a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots]. \tag{31}$$

Величина

$$\limsup_{i\to\infty} \lambda_i(\alpha) = \mu(\alpha) \tag{32}$$

называется *постоянной Лагранжа* для иррационального числа α. Множество $\mu(\alpha)$ для всевозможных иррациональных α является спектром Лагранжа $\mathbb{L}$. Это определение эквивалентно данному выше.

Число α называется достижимым, если неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\mu(\alpha) q^2} \tag{33}$$

имеет бесконечно много решений для целых p и q.

В обзоре А.В. Малышева [24] было сформулировано без доказательства следующее утверждение: *Для любого* $\lambda \in \mathbb{L}$ *найдется иррациональное число* α *такое, что* $\mu(\alpha) = \lambda$ *и* α *достижимо.*

В главе 3 настоящей работы мы построим контрпример к данному утверждению.

Основные результаты главы 3 состоят в следующем

Теорема 7. *Число* $\lambda_0 = [3; 3, 3, 2, 1, \overline{1, 2}] + [0; 2, 1, \overline{1, 2}] = \frac{62976 - 1498\sqrt{3}}{16357} \approx 3.6914708$ *принадлежит спектру Лагранжа. При этом любое иррациональное* α *такое, что* $\mu(\alpha) = \lambda_0$, *не является достижимым.*

Эта теорема предоставляет контрпример к утверждению Малышева. Следующая теорема утверждает, что любой контрпример к утверждению Малышева является левым концом пропуска в спектре Лагранжа.

Теорема 8. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{L}$ *удовлетворяет следующему свойству: любое иррациональное* α *такое, что* $\mu(\alpha) = \lambda$, *не является достижимым. Тогда* λ *является левым концом пропуска в спектре Лагранжа.*

Кроме того, мы даем описание левых концов в спектре Лагранжа

Теорема 9. *Любой левый конец в спектре Лагранжа представим в виде суммы двух квадратичных иррациональностей.*

Доказательство теоремы 9 было приведено Б. Дитцем [6], однако, как показали Т.Кузик и М.Флахив [2], его доказательство было ошибочным. В третьей главе мы приводим новое доказательство данной теоремы.

Глава 1

Экстремумы континуантов

В начале данной главы приведем общеизвестные свойства континуантов, которыми мы будем пользоваться на протяжении всей работы.

Пусть $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Хорошо известны следующие тождества

$$
\begin{aligned}
[\overrightarrow{A}] &= [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] = \frac{\langle A_- \rangle}{\langle A \rangle}, \\
[\overleftarrow{A}] &= [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1] = \frac{\langle A^- \rangle}{\langle A \rangle}.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Известно также следующее свойство (см, например, [10]):

$$
\langle A, B \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle + \langle A^- \rangle \langle B_- \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle (1 + [\overleftarrow{A}][\overrightarrow{B}]). \tag{1.2}
$$

Из формулы (1.2) нетрудно получить полезное в дальнейшем следствие

$$
\langle A, b, B \rangle = \langle A \rangle b \langle B \rangle + \langle A \rangle \langle B_- \rangle + \langle A^- \rangle \langle B \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle (b + [\overleftarrow{A}] + [\overrightarrow{B}]). \tag{1.3}
$$

Кроме того, нетрудно показать по индукции, что

$$
\langle \overleftarrow{A} \rangle = \langle \overrightarrow{A} \rangle. \tag{1.4}
$$

1.1. Континуанты с фиксированной суммой ограниченных неполных частных

Этот раздел посвящен доказательству теоремы 1. Приведем еще раз ее формулировку.

Теорема 1. *Пусть $n \geqslant 2, S \geqslant (n+1)^2$ и $S = (n+1)m + z_0,\ 0 \leqslant z_0 \leqslant n$, x находится из соотношения*

$$
0 \leqslant x \leqslant n, \quad x \equiv 1 - S \pmod{n+1}.
$$

Тогда минимальный континуант на множестве $U_n(S)$ имеет следующий вид

Если $z_0 > \frac{n}{2}$, то

$$\min_{U_n(S)} = T_n(m,x). \tag{1.5}$$

Если $z_0 \leqslant \frac{n}{2}$, то минимум достигается в одном из двух континуантов:

$$\begin{gathered}\min_{U_n(S)} = T_n(m,x) = \frac{\mu_n^{m-n+z+2}}{(\mu_n+1)^2}\frac{\lambda_n^{n+3-z}}{\lambda_n^2+1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{или} \\ \min_{U_n(S)} = T_z(m,0) = \frac{\mu_n^{m+2}}{(\mu_n+1)^2}\left(z+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),\end{gathered} \tag{1.6}$$

причем при $\frac{z}{n} > c_0 + O(\frac{1}{n})$ минимум достигается в $T_n(m,x)$, а при $\frac{z}{n} < c_0 + O(\frac{1}{n})$ - в $T_z(m,0)$.

Для доказательства нам понадобятся несколько лемм.

Лемма 1.1 (Правило азбуки Морзе)**.**

$$\langle A,B,C\rangle = \langle A\rangle\langle B\rangle\langle C\rangle + \langle A^-\rangle\langle B_-\rangle\langle C\rangle + \langle A\rangle\langle B^-\rangle\langle C_-\rangle + \langle A^-\rangle\langle B_-^-\rangle\langle C_-\rangle \tag{1.7}$$

Доказательство. Применим дважды тождество (1.2), далее очевидно. □

Следствие 1.1. *Если последовательности D и B таковы, что*

$$\langle D\rangle \geqslant \langle B\rangle, \quad \langle D^-\rangle \geqslant \langle B^-\rangle, \quad \langle D_-\rangle \geqslant \langle B_-\rangle, \quad \langle D_-^-\rangle \geqslant \langle B_-^-\rangle,$$

то для любых последовательностей A, C выполнено неравенство

$$\langle A,D,C\rangle \geqslant \langle A,B,C\rangle. \tag{1.8}$$

Доказательство. Очевидно. Отметим также, что если хотя бы одно из четырех неравенств выше строгое, то неравенство (1.8) также превращается в строгое.

Лемма 1.2. *Для произвольных A и C и $m \geqslant 0$ имеет место равенство:*

$$\langle A, n^{(m+1)}, C\rangle = \langle n^{(m)}\rangle(\langle A,n,C\rangle + \langle A,C\rangle[0;n^{(m)}]). \tag{1.9}$$

Доказательство. Будем доказывать равенство (1.9) для непустых A и C и при $m \geqslant 1$. Применим (1.7) для $B = n^{(m+1)}$ и вынесем за скобки $\langle n^{(m)} \rangle$, пользуясь (1.1). Получим:

$$\begin{aligned} &\langle A, n^{(m+1)}, C \rangle = \\ &= \langle n^{(m)} \rangle (\langle A \rangle \langle C \rangle [n; n^{(m)}] + \langle A^- \rangle \langle C \rangle + \langle A \rangle \langle C_- \rangle + \langle A^- \rangle \langle C_- \rangle [0; n^{(m)}]) = \\ &= \langle n^{(m)} \rangle (n \langle A \rangle \langle C \rangle + \langle A^- \rangle \langle C \rangle + \langle A \rangle \langle C_- \rangle + (\langle A \rangle \langle C \rangle + \langle A^- \rangle \langle C_- \rangle)[0; n^{(m)}]) = \\ &= \langle n^{(m)} \rangle (\langle A, n, C \rangle + \langle A, C \rangle [0; n^{(m)}]). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Случаи, когда A или C пустые, рассматриваются аналогично. При $m = 0$ континуант $\langle n^{(m)} \rangle$ равен 1, а $[0; n^{(m)}] = 0$ т.к. последовательность $(n^{(m)})$ пустая. Утверждение леммы в этом случае является тавтологией. □

Лемма 1.3. *Для произвольных A и C при $m \geqslant 1, n \geqslant 3$ и $1 \leqslant z \leqslant n-1$ выполнены неравенства:*

$$\begin{aligned} \langle A, 1, n, 1, n^{(m+1)}, z, n, 1, C \rangle < \langle A, 1, n^{(m+2)}, z+1, n, 1, C \rangle \quad \text{при} \quad z \leqslant \frac{n}{2}, \\ \langle A, 1, n, 1, n^{(m+1)}, z, n, 1, C \rangle > \langle A, 1, n^{(m+2)}, z+1, n, 1, C \rangle \quad \text{при} \quad z > \frac{n}{2}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

□

Доказательство. Воспользуемся следствием 1.1 и леммой 1.2 для последовательностей B и D.

$$\langle B \rangle = \langle 1, n, 1, n^{(m+1)}, z, n, 1 \rangle, \ \langle D \rangle = \langle 1, n^{(m+2)}, z+1, n, 1 \rangle.$$

Вычислим разность $\langle B \rangle - \langle D \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle B \rangle - \langle D \rangle = \langle 1, n, 1, n^{(m+1)}, z, n, 1 \rangle - \langle 1, n^{(m+2)}, z+1, n, 1 \rangle = \\ \langle n^{(m)} \rangle \Big(\langle 1, n, 1, n, z, n, 1 \rangle - \langle 1, n, n, z+1, n, 1 \rangle + \\ + (\langle 1, n, 1, z, n, 1 \rangle - \langle 1, n, z+1, n, 1)[0; n^{(m)}] \Big). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Докажем утверждение леммы для $m \geqslant 1$, случай $m = 0$ разбирается аналогично. Несложные вычисления показывают, что выражение в больших круглых скобках равно

$$2n^2z - n^3 + 2nz - 2n^2 + n + (nz - n + z)[0; n^{(m)}]. \tag{1.13}$$

Очевидно, что (1.13) есть монотонно возрастающая функция от z. При $z = \frac{n}{2}$ она равна

$$\begin{gathered} n^3 - n^3 + n^2 - 2n^2 + n + \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right)[0; n^{(m)}] = \\ = -n^2 + n + \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right)[0; n^{(m)}] \leqslant -n^2 + \frac{3n}{2} - \frac{1}{2}, \end{gathered} \tag{1.14}$$

что, очевидно, меньше нуля при $n \geqslant 2$. В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что $[0; n^{(m)}] \leqslant \frac{1}{n}$. Таким образом $\langle B \rangle - \langle D \rangle \leqslant 0$ при $z \leqslant \frac{n}{2}$. Рассмотрим второй из случаев в (1.11). Поскольку n и z - целые числа, $z \geqslant \frac{n+1}{2}$. Подставляя $z = \frac{n+1}{2}$ в (1.13), получаем

$$\begin{gathered} 2n^2z - n^3 + 2nz - 2n^2 + n + (nz - n + z)[0; n^{(m)}] > \\ > n^3 + n^2 - n^3 + n^2 + n - 2n^2 + n = 2n > 0. \end{gathered} \tag{1.15}$$

Здесь мы оценили снизу слагаемое, содержащее цепную дробь, нулем, поскольку оно положительно. Таким образом, второй случай также разобран. Аналогичные неравенства несложно проверяются и для $\langle B^- \rangle - \langle D^- \rangle$, $\langle B_- \rangle - \langle D_- \rangle$, $\langle B_-^- \rangle - \langle D_-^- \rangle$. Лемма доказана. $\square$

Сформулируем еще раз в виде леммы теорему III, доказанную И.Д. Каном в статье [23].

Лемма 1.4 ([23], Теорема 7)**.** *При $n \geqslant 2, S \geqslant 2n + 2$ минимальный континуант на множестве $U_n(S)$ может быть найден по формуле*

$$\min_{U_n(S)} = \min_{1 \leqslant z \leqslant n-1} T_z(m, x), \tag{1.16}$$

где

$$0 \leqslant x \leqslant n, \quad x \equiv 1 - S \pmod{n+1}, \quad m = \frac{S - nx - 1}{n+1}, \quad m(z) > 0.$$

В статье [23] было доказано даже более сильное утверждение, но нам достаточно сформулированной более простой и слабой формы. Как видим, для доказательства теоремы 1 достаточно найти значение z, при котором континуант $T_z(m,x)$ минимален.

Лемма 1.5. *Пусть $n \geqslant 2, S \geqslant (n+1)^2$ и $S=(n+1)m+z_0,\ 0 \leqslant z_0 \leqslant n$. При $z > \frac{n}{2}$ минимальный континуант на множестве $U_n(S)$ имеет вид $T_n(m_1,x)$, где x и m_1 однозначно находятся из соотношения*

$$(n+1)m_1 + n(x+1) = S, \quad 0 \leqslant x \leqslant n. \tag{1.17}$$

При $z \leqslant \frac{n}{2}$ минимальный континуант на множестве $U_n(S)$ достигается в одной из двух точек - $T_n(m_1,x)$ или $T_z(m,0)$, где x и m_1 определяется из (1.17).

Доказательство. Как показывает лемма 1.4, минимум достигается на множестве континуантов вида

$$T_z(m',x) = \langle (1,n)^{(m'_+)}, n^{(x)}, z, (n,1)^{(m'_-)} \rangle,$$

где $0 \leqslant x \leqslant n$ и $m' > 0$. Рассмотрим произвольный континуант из данного множества. Если $2 \leqslant z \leqslant \frac{n}{2}$ и $x \geqslant 1$, то из первого неравенства (1.11) следует, что

$$\langle (1,n)^{(m'_+ +1)}, n^{(x-1)}, z-1, (n,1)^{(m'_-)} \rangle < \langle (1,n)^{(m'_+)}, n^{(x)}, z, (n,1)^{(m'_-)} \rangle,$$

поэтому данный континуант не является минимальным. Если же $\frac{n}{2} < z < n$, то из второго неравенства (1.11) следует, что

$$\langle (1,n)^{(m'_+ -1)}, n^{(x+1)}, z+1, (n,1)^{(m'_-)} \rangle < \langle (1,n)^{(m'_+)}, n^{(x)}, z, (n,1)^{(m'_-)} \rangle,$$

поэтому данный континуант также не является минимальным. Таким образом, минимальный континуант обязан быть следующего вида:
либо

$$\langle (1,n)^{(m_+)}, z, (n,1)^{(m_-)} \rangle, \quad z \leqslant \frac{n}{2}, \tag{1.18}$$

либо

$$\langle (1,n)^{(m_{1+})}, n^{(x)}, n, (n,1)^{(m_{1-})} \rangle, \quad x \leqslant n, \tag{1.19}$$

откуда вытекает соотношение (1.17). □

Таким образом, минимум по множеству $U_n(S)$ может достигаться не более, чем в двух точках, осталось научиться сравнивать значения континуантов в них. Для этого полезна следующая лемма:

Лемма 1.6 ([23], лемма 7)**.** *Выполнены следующие равенства:*

$$\langle n^{(l)} \rangle = \frac{\lambda_n^{l+2}}{\lambda_n^2+1} + O(1), \quad \langle (1,n)^{(l)} \rangle = \frac{\mu_n^{l+1}}{\mu_n+1} + O(1), \tag{1.20}$$

где λ_n, μ_n определяются равенствами (19).

Теперь мы можем приступить к доказательству теоремы 1.

Доказательство теоремы 1 Осталось сравнить два континуанта вида (1.18) и (1.19) из множества $U_n(S)$ при $z \leqslant \frac{n}{2}$. Они имеют вид

$$\langle (1,n)^{(m_+)}, z, (n,1)^{(m_-)} \rangle \ \text{ и } \ \langle (1,n)^{(k_+)}, n^{(l)}, (n,1)^{(k_-)} \rangle, \text{ где } l \leqslant n+1 \tag{1.21}$$

Выразим k и l через m и z. Поскольку сумма неполных частных обоих континуантов равна S, выполнено равенство

$$(n+1)m + z = (n+1)k + nl$$

Поскольку $0 \leqslant l \leqslant n+1$, рассматривая обе части равенства по модулю $n+1$ находим, что $l = n+1-z$, следовательно $k = m-n+z$.

Вычислим континуант из (1.18)

$$\begin{aligned} &\langle (1,n)^{(m_+)}, z, (n,1)^{(m_-)} \rangle = \\ &= \langle (1,n)^{(m_+)} \rangle \langle (n,1)^{(m_-)} \rangle \Big(z + [0;(n,1)^{(m_+)}] + [0;(n,1)^{(m_+)}] \Big) = \\ &= \langle (1,n)^{(m_+)} \rangle \langle (1,n)^{(m_-)} \rangle \left(z + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \end{aligned} \tag{1.22}$$

Применяя лемму 1.6, получаем, что данный континуант равен

$$\frac{\mu_n^{m_+ +1}+O(1)}{\mu_n+1}\frac{\mu_n^{m_- +1}+O(1)}{\mu_n+1}\left(z+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{\mu_n^{m+2}}{(\mu_n+1)^2}\left(z+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad (1.23)$$

Теперь найдем, чему равен континуант из (1.19)

$$\begin{gathered}\langle(1,n)^{(k_+)},n^{(l)},(n,1)^{(k_-)}\rangle=\langle(1,n)^{(k_+)}\rangle\langle n^{(l)}\rangle\langle(n,1)^{(k_-)}\rangle\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\\ =\frac{\mu_n^{k+2}}{(\mu_n+1)^2}\frac{\lambda_n^{l+2}}{\lambda_n^2+1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\end{gathered} \quad (1.24)$$

Таким образом, достаточно сравнить величины:

$$\frac{\mu_n^{m+2}}{(\mu_n+1)^2}\left(z+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{и} \quad \frac{\mu_n^{k+2}}{(\mu_n+1)^2}\frac{\lambda_n^{l+2}}{\lambda_n^2+1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad (1.25)$$

что эквивалентно сравнению

$$\mu_n^{m-k}\left(z+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{и} \quad \frac{\lambda_n^{l+2}}{\lambda_n^2+1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad (1.26)$$

Подставляем $m-k=n-z,\ l=n+1-z$, получаем сравнение

$$\mu_n^{n-z}\left(z+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{и} \quad \frac{\lambda_n^{n-z+3}}{\lambda_n^2+1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad (1.27)$$

что эквивалентно

$$\left(\frac{\mu_n}{\lambda_n}\right)^{n-z}\left(z+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{и} \quad \frac{\lambda_n^3}{\lambda_n^2+1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (1.28)$$

Заметим, что

$$\frac{\mu_n}{\lambda_n}=\frac{n+2+\sqrt{n^2+4n}}{n+\sqrt{n^2+4}}=\frac{1+\frac{2}{n}+\sqrt{1+\frac{4}{n}}}{1+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}=\frac{2+\frac{4}{n}+O(\frac{1}{n^2})}{2+O(\frac{1}{n^2})}=1+\frac{2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

При этом

$$\frac{\lambda_n^3}{\lambda_n^2+1}=\frac{\lambda_n^3+\lambda_n-\lambda_n}{\lambda_n^2+1}=\lambda_n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)=n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Пусть $z=cn,\quad c\leqslant\frac{1}{2}$. Тогда (1.28) эквивалентно сравнению

$$\left(1+\frac{2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{(1-c)n}\left(cn+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{и} \quad n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

что равносильно

$$ce^{2(1-c)} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{и} \quad 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Напомним, что уравнение

$$ce^{2(1-c)} = 1$$

Имеет единственное решение при $0 \leqslant c \leqslant \frac{1}{2}$, равное $c_0 \approx 0.203188$. Следовательно, при $c < c_0 + O(\frac{1}{n})$ меньше континуант из (1.18), а при $c > c_0 + O(\frac{1}{n})$ - из (1.19). Теорема доказана.

1.2. Континуанты с одинаковыми неполными частными нечетного индекса

В этом разделе доказываются теоремы 2 и 3. Приведем еще раз их формулировки.

Теорема 2. *Минимальный континуант на множестве $W_f^a(\overline{h}, \overline{p})$ может быть найден по формуле*

$$\min_{W_f^a(\overline{h},\overline{p})} = \langle (a, h_f)^{(p_f^l)}, (a, h_{f-1})^{(p_{f-1}^l)}, \ldots, (a, h_1)^{(p_1)}, \ldots, (h_{f-1}, a)^{(p_{f-1}^r)}, (h_f, a)^{(p_f^r)} \rangle. \tag{1.29}$$

Теорема 3. *Максимальный континуант на множестве $W_f^a(\overline{h}, \overline{p})$ при условии $p_{f-i} = p_{i+1}$ $\forall i: \ 0 \leqslant i \leqslant f-1$ может быть найден по формуле*

$$\begin{aligned} \max_{W_f^a(\overline{h},\overline{p})} = \langle (a, h_1, a, h_f)^{(p_f^l)}, (a, h_2, a, h_{f-1})^{(p_{f-1}^l)}, \ldots, \\ (h_{f-1}, a, h_2, a)^{(p_{f-1}^r)}, (h_f, a, h_1, a)^{(p_f^r)} \rangle. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Ключевым методом, используемым в доказательствах данных теорем, является следующее простое соображение:

Лемма 1.7. *Если для любого континуанта X из множества S существует конечная последовательность неуменьшающих (неувеличивающих) преобразований, приводящая его в фиксированный континуант $\langle M \rangle \in S$*

$$\langle X \rangle \leqslant \langle A_1 \rangle \leqslant \langle A_2 \rangle \leqslant \ldots \leqslant \langle A_{n-1} \rangle \leqslant \langle M \rangle, \tag{1.31}$$

то $\langle M\rangle$ является максимальным (минимальным) континуантом на множестве S.

Доказательство. Рассмотрим максимальный континуант на множестве S, построим для него цепочку неуменьшающих преобразований (1.31) из условия леммы. Дальнейшее очевидно. □

Будем строить максимум и минимум по множеству $W_f^a(\overline{h},\overline{p})$ преобразованиями следующего вида:

$$\langle A, \overrightarrow{B}, C\rangle \to \langle A, \overleftarrow{B}, C\rangle \tag{1.32}$$

Очевидно, что если B имеет нечетную длину, то рассмотренное преобразование не выводит из множества $W_f^a(\overline{h},\overline{p})$. Следующая лемма из статьи [22] дает ответ на вопрос, в каких случаях замена (1.32) увеличивает или уменьшает континуант:

Лемма 1.8. *Неравенство*

$$\langle A, \overrightarrow{B}, C\rangle \geqslant \langle A, \overleftarrow{B}, C\rangle$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$([0;\overleftarrow{A}] - [0;\overrightarrow{C}])([0;\overrightarrow{B}] - [0;\overleftarrow{B}]) \geqslant 0.$$

При этом оба неравенства могут обращаться в равенства только одновременно.[1]

Для континуантов из множества $W_f^a(\overline{h},\overline{p})$ эту лемму проще применять в следующей формулировке:

Следствие 1.2. *Пусть $d_i \neq d_j$. Тогда неравенство*

$$\langle A, d_i, \overrightarrow{D}, d_j, C\rangle \geqslant \langle A, d_j, \overleftarrow{D}, d_i, C\rangle \tag{1.33}$$

[1] В статье [22] в формулировке данного утверждения (теорема 1) допущена опечатка. Вместо $([\overleftarrow{p}]-[\overrightarrow{p}])$ должно стоять $([\overleftarrow{p}] - [\overrightarrow{r}])$

Выполнено тогда и только тогда, когда

$$([0;\overleftarrow{A}] - [0;\overrightarrow{C}])(d_j - d_i) \geqslant 0 \tag{1.34}$$

При этом оба неравенства могут обращаться в равенства только одновременно.

Доказательство. Применим лемму 1.8 для $B = (d_i, \overrightarrow{D}, d_j)$. Заметим, что знак $([0;\overrightarrow{B}] - [0;\overleftarrow{B}])$ совпадает со знаком $(d_j - d_i)$, дальнейшее очевидно. □

Неформально говоря, для увеличения континуанта надо большее неполное частное ставить к меньшей цепной дроби, а для уменьшения - большее неполное частное к большей цепной дроби. Таким образом, задача сравнения $\langle A, d_i, \overrightarrow{D}, d_j, C\rangle$ и $\langle A, d_j, \overleftarrow{D}, d_i, C\rangle$ сводится к сравнению цепных дробей $[0,\overleftarrow{A}]$ и $[0;\overrightarrow{C}]$. Для этого удобна следующая лемма:

Лемма 1.9. *Пусть цепные дроби* $[0,\overleftarrow{A}]$ *и* $[0;\overrightarrow{C}]$ *имеют нечетное количество неполных частных (не считая нулевое), причем все неполные частные нечетного индекса для обеих дробей равны a. Тогда из двух дробей больше та, в которой первое отличающееся неполное частное больше. Если цепные дроби имеют разную длину, но при этом все неполные частные более короткой цепной дроби совпадают с соответствующими неполными частными более длинной, то более короткая цепная дробь больше.*

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из базовых свойств цепных дробей, см. [28]. Второе утверждение следует из того, что более короткая цепная дробь является нечетной подходящей дробью к более длинной. □

Лемма 1.10. *Минимальный континуант на множестве* $W_f^a(\overline{h},\overline{p})$*, где*
$\overline{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_f)$,
$\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_f)$, *имеет вид*

$$\langle (a, h_f)^{(p_f^l)}, X, (h_f, a)^{(p_f^r)}\rangle \tag{1.35}$$

для некоторого $X \in W^a_{f-1}((h_1, h_2, \dots h_{f-1}), (p_1, p_2, \dots p_{f-1}))$.

Доказательство. Докажем, что из любого континуанта $\langle C \rangle \in W^a_f(\overline{h}, \overline{p})$ можно уменьшающими преобразованиями сделать континуант вида (1.35). Прежде всего, пусть первое неполное частное четного индекса в $\langle C \rangle$ - h_i, меньше h_f. Тогда выберем неполное частное, равное h_f, не стоящее на правом конце континуанта. Рассмотрим замену

$$\langle a, h_i, \overrightarrow{D}, h_f, C \rangle \to \langle a, h_i, \overleftarrow{D}, h_f, C \rangle.$$

Она уменьшает континуант, поскольку $[0; a] > [0; \overrightarrow{C}]$ по лемме 1.9. Аналогично можно добиться того, чтобы и последнее неполное частное четного индекса было равно h_f. Пусть теперь континуант имеет вид

$$\langle (a, h_f)^{(k)}, a, h_i, D, h_f, a, h_j, C \rangle,$$

где $h_i < h_f,\ h_j < h_f$. Тогда замена

$$\langle (a, h_f)^{(k)}, a, h_i, \overrightarrow{D}, h_f, a, h_j, C \rangle \to \langle (a, h_f)^{(k)}, a, h_f, \overleftarrow{D}, h_i, a, h_j, C \rangle$$

является уменьшающей в силу леммы 1.9. Следовательно можно уменьшающими заменами перевести $\langle C \rangle$ в континуант вида

$$\langle (a, h_f)^{(k)}, a, D, a, (h_f, a)^{(l)} \rangle,$$

где $k + l = p_f$, а D не содержит элементов, равных h_f. Будем считать, что $k \geqslant l$, в противном случае перейдем к симметричному континуанту. Если $k - l \leqslant 1$, то утверждение леммы доказано. В противном случае пусть $D = (h_f, E, a, h_i)$, рассмотрим замену

$$\langle (a, h_f)^{(k-1)}, a, h_f, \overrightarrow{E}, a, h_i, a, (h_f, a)^{(l)} \rangle \to \langle (a, h_f)^{(k-1)}, a, h_i, \overleftarrow{E}, a, (h_f, a)^{(l+1)} \rangle$$

Она уменьшает континуант, поскольку цепная дробь $[0; (a, h_f)^{(k-1)}, a]$ длиннее цепной дроби $[0; a, (h_f, a)^{(l)}]$. Такими заменами можно добиться, чтобы количество неполных частных, равных h_f у левого конца континуанта было больше количества таких неполных частных у правого конца не более, чем на 1. Лемма доказана. $\square$

Теперь мы готовы доказать теорему 2.

Доказательство теоремы 2

Доказательство. Будем строить минимум индуктивно по f, основание индукции доказано в лемме 1.10. Пусть мы находимся на $i-$м шаге, то есть континуант имеет вид

$$\langle\underbrace{(a,h_f)^{(p^l_f)},\ldots,(a,h_{f-i+1})^{(p^l_{f-i+1})}}_{A},X,\underbrace{(a,h_{f-i+1})^{(p^r_{f-i+1})},\ldots,(a,h_f)^{(p^r_f)}}_{C}\rangle. \quad (1.36)$$

Пусть для определенности $[0;\overleftarrow{A}]\geqslant[0;\overrightarrow{C}]$. Будем рассуждать аналогично лемме 1.10. Докажем, что можно уменьшающими преобразованиями добиться того, чтобы первый и последний элемент X из формулы (1.36) под четным номером были равны h_{f-i}. Действительно, пусть континуант имеет вид

$$\langle A,a,h_j,a,D,a,h_{f-i},a,h_k,a,E\rangle,$$

где $h_j<h_{f-i}$. Тогда замена

$$\langle A,a,h_j,a,\overrightarrow{D},a,h_{f-i},a,h_k,a,E\rangle\to\langle A,a,h_{f-i},a,\overleftarrow{D},a,h_j,a,h_k,a,E\rangle$$

уменьшает континуант, т.к. первое неполное частное цепной дроби $[0;\overleftarrow{A}]$ равно h_{f-i+1}, что больше h_k, поскольку $h_k\leqslant h_{f-i}<h_{f-i+1}$. Аналогичное рассуждение работает и для правого конца X. Рассуждая так же, как и в лемме 1.10 можно уменьшающими преобразованиями привести континуант к виду

$$\langle A,(a,h_{f-i})^{(k)},Y,(h_{f-i},a)^{(l)},C\rangle$$

для $k+l=p_{f-i}$. Если p_{f-i} четно, то рассуждая как и в лемме 1.10, континуант легко привести к виду

$$\langle A,(a,h_{f-i})^{(p^l_{f-i})},Z,(h_{f-i},a)^{(p^r_{f-i})},C\rangle$$

и шаг индукции выполнен. Если же p_{f-i} нечетно, то такими же рассуждениями континуант приводится к виду

$$\langle A,(a,h_{f-i})^{(k)},Y_1,(h_{f-i},a)^{(l)},C\rangle,$$

где $k-l=\pm1$. Если $k=l-1$, рассмотрим замену:

$$\langle A,(a,h_{f-i})^{(k)},\overrightarrow{Y_1},h_{f-i},a,(h_{f-i},a)^{(k)},C\rangle\to\langle A,(a,h_{f-i})^{(k)},a,h_{f-i}\overleftarrow{Y_1},(h_{f-i},a)^{(k)},C\rangle$$

Поскольку все неполные частные четного индекса Y меньше h_{f-i}, а

$$[0;(h_{f-i},a)^{(k)},\overleftarrow{A}]\geqslant[0;(h_{f-i},a)^{(k)},\overrightarrow{C}]$$

т.к. $[0;\overleftarrow{A}]\geqslant[0;\overrightarrow{C}]$, данная замена увеличивает континуант, шаг индукции выполнен.

Осталось разобраться с коэффициентами p_i^l и p_i^r. Определим j - минимальное число большее i такое, что p_j нечетно. Заметим, что если $[0;\overleftarrow{A}]>[0;\overrightarrow{C}]$, то $p_j^l<p_j^r$. Тогда мы получили, что $p_i^l>p_i^r$, что и требовалось доказать. □

Рассмотрим теперь задачу на поиск максимума. В общем случае она гораздо труднее, даже в случае, когда число различных неполных частных равно двум, ответ имеет весьма сложную структуру, см. [29]. В дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда множество $W_f^a(\overline{h},\overline{p})$ таково, что для любого индекса i, не превосходящего f, выполнено равенство $p_i=p_{f-i+1}$.

Лемма 1.11. *При $p_f=p_1\geqslant2$ максимум по множеству $W_f^a(\overline{h},\overline{p})$ имеет вид*

$$\langle a,h_1,a,h_f,a,X,a,h_f,a,h_1,a\rangle \tag{1.37}$$

для некоторой конечной последовательности X.

Доказательство. Аналогично лемме 1.10 легко из произвольного континуанта получить при помощи увеличивающих замен континуант вида $\langle a,h_1,a,Y,a,h_1,a\rangle$ для некоторого Y. Заметим, что в последовательности

Y неполных частных, равных h_f на 2 больше, чем равных h_1. Следовательно в ней есть участки $(\dots a, h_f, a, h_i, a \dots)$ и $(\dots a, h_j, a, h_f, a \dots)$, где $h_i > h_1$, $h_j > h_1$. Следовательно, если начало континуанта имеет вид $\langle a, h_1, a, h_k, a, \dots, \rangle$, $h_k < h_f$, то замена

$$\langle a, h_1, a, h_k, a, \overrightarrow{D}, a, h_f, a, h_i, a, C \rangle \to \langle a, h_1, a, h_f, a, \overleftarrow{D}, a, h_k, a, h_i, a, C \rangle \quad (1.38)$$

увеличивает континуант. Аналогично с правым концом. □

Лемма 1.12. *При $p_f = p_1 \geqslant 2$ максимум по множеству $W_f^a(\overline{h}, \overline{p})$ имеет вид*

$$\langle (a, h_1, a, h_f)^{(p_f^l)}, X, (h_f, a, h_1, a)^{(p_f^r)} \rangle \quad (1.39)$$

для некоторого $X \in W_{f-2}^a((h_2, \dots h_{f-1}), (p_2, \dots p_{f-1}))$.

Доказательство. Докажем, что из произвольного континуанта $\langle C \rangle$ можно увеличивающими преобразованиями получить континуант вида

$$\langle a, h_1, a, h_f, a, X, a, h_f, a, h_1, a \rangle,$$

Причем X не содержит участков вида $(\dots, a, h_i, a, h_1, a, \dots)$ и $(\dots, a, h_1, a, h_i, a, \dots)$. Действительно, из $\langle C \rangle$ можно увеличивающими преобразованиями получить континуант вида (1.37). Пусть X в нем содержит отрезок вида $\dots, a, h_i, a, h_1, a$, где $h_i < h_f$. Тогда замена

$$\langle a, h_1, a, h_f, a, \overrightarrow{D}, a, h_i, a, h_1, a, C \rangle \to \langle a, h_1, a, h_i, a, \overleftarrow{D}, a, h_f, a, h_1, a, C \rangle \quad (1.40)$$

увеличивает континуант, поскольку цепная дробь $[0; a, h_1, a]$ короче, чем $[0; a, h_1, a, C]$. Аналогично рассматривается второй случай. Однако к континуанту вида

$$\langle a, h_1, a, h_i, a, \overleftarrow{D}, a, h_f, a, h_1, a, C \rangle$$

применима лемма 1.11. Поскольку для любого континуанта любая цепочка увеличивающих преобразований имеет конечную длину, то чередуя преобразования вида (1.38) и (1.40) мы рано или поздно получим континуант, не содержащий отрезков вида $(\ldots, a, h_i, a, h_1, a, \ldots)$ и $(\ldots, a, h_1, a, h_i, a, \ldots)$ при любом $i < f$. А поскольку количество неполных частных, равных h_1 и h_f совпадает, это значит, что данный континуант имеет вид

$$\langle (a, h_1, a, h_f)^{(k)}, a, D, a, (h_f, a, h_1, a)^{(l)} \rangle,$$

где D не содержит неполных частных, равных h_1 или h_f. Как и в лемме 1.10 можем считать, что $k \geqslant l$. Пусть $k - l > 1$. Полагая $D = (E, h_i),\ h_i > h_1$, рассмотрим замену

$$\begin{aligned} &\langle (a, h_1, a, h_f)^{(k-1)}, a, h_1, a, h_f, \overrightarrow{E}, h_i, a, (h_f, a, h_1, a)^{(l)} \rangle \to \\ &\langle (a, h_1, a, h_f)^{(k-1)}, a, h_i, \overleftarrow{E}, a, h_f, a, h_1, a, (h_f, a, h_1, a)^{(l)} \rangle. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Она увеличивает континуант, поскольку цепная дробь $[0; a, (a, h_1, a, h_f)^{(k-1)}]$ длиннее, чем $[0; a, (a, h_1, a, h_f)^{(l)}]$. Лемма доказана. $\square$

Докажем теперь теорему 3. Наше доказательство будет строиться полностью аналогично доказательству теоремы 2, поэтому мы приведем его менее подробно.

Доказательство теоремы 3

Доказательство. Как и в предыдущей теореме, будем рассуждать индуктивно. Основание индукции доказано в лемме 1.11. На $i-$м шаге континуант имеет вид

$$\begin{aligned} &\langle \underbrace{(a, h_1, a, h_f)^{(p^l_f)}, \ldots, (a, a_i, h_{f-i+1})^{(p^l_{f-i+1})}}_{A}, X, \\ &\underbrace{(a, h_{f-i+1}, a, h_i)^{(p^r_{f-i+1})}, \ldots, (a, h_f, a, h_1)^{(p^r_f)}}_{C} \rangle. \end{aligned} \tag{1.42}$$

шаг индукции выполняется полностью аналогично предыдущей теореме с применением лемм 1.11 и 1.12. Теорема доказана. $\square$

1.3. Континуанты с фиксированной взвешенной суммой неполных частных

Этот раздел посвящен изучению экстремумов континуантов с фиксированной длиной и фиксированной взвешенной суммой неполных частных, в которой неполные частные под нечетными номерами берутся с весом 1, а под четными - с весом 2. При этом мы будем исследовать не точное значение экстремума, а его асимптотику при стремлении длины континуанта к бесконечности.

Пусть $\langle A\rangle = \langle a_1, a_2, \ldots, a_t\rangle$ - произвольный континуант длины t. Напомним, что $S_t^{\tau}(A)$ и $S_t^{\varphi}(A)$ есть следующие суммы

$$\begin{aligned} S_t^{\tau}(A) = 2a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 + \ldots = \sum_{i=1}^{t} a_i(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^{i-1}), \\ S_t^{\tau}(A) = a_1 + a2_2 + a_3 + 2a_4 + \ldots = \sum_{i=1}^{t} a_i(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^{i}). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Обозначим через $M^{\tau}(n, S_n)$ множество континуантов $\langle A\rangle$ с фиксированной длиной n и фиксированной суммой $S_n^{\tau}(A) = S_n$, введем также $\max(M^{\tau}(n, S_n))$ и $\min(M^{\tau}(n, S_n))$ - соответственно максимальное и минимальное значение континуантов из множества $M^{\tau}(n, S_n)$. Без ограничения общности будем в дальнейшем считать, что n четно. Аналогично можем определить множество $M^{\varphi}(n, S_n)$. Заметим, что между множествами $M^{\varphi}(n, S_n)$ и $M^{\tau}(n, S_n)$ существует биективное соответствие: если $\langle\overrightarrow{A}\rangle \in M^{\varphi}(n, S_n)$, то, поскольку все неполные частные $\langle\overrightarrow{A}\rangle$ при замене $\langle\overrightarrow{A}\rangle \to \langle\overleftarrow{A}\rangle$ изменят четность индекса (т.к. n четно), $\langle\overleftarrow{A}\rangle$ лежит в множестве $M^{\tau}(n, S_n)$. А значит, так как $\langle\overrightarrow{A}\rangle = \langle\overleftarrow{A}\rangle$, максимумы и минимумы по данным множествам совпадают. Поэтому достаточно исследовать только $\max^{\varphi}(n, S_n)$ и $\min^{\varphi}(n, S_n)$. Будем до конца данной части для простоты опускать верхний индекс φ и писать просто $M(n, S_n), \max(M(n, S_n)), \min(M(n, S_n))$ и $S_n = S_n(A)$.

Для нахождения $\max(M(n, S_n))$ и $\min(M(n, S_n))$ будем пользоваться следующим методом: пусть $\langle A\rangle = \langle a_1,\dots,a_n\rangle$ - произвольный континуант из $M(n,S_n)$. Будем действовать на него некоторыми преобразованиями, то есть изменять континуант так, чтобы его длина и взвешенная сумма неполных частных S_n сохранялись. Замену континуанта $\langle X\rangle$ на $\langle Y\rangle$ обозначим $\langle X\rangle \to \langle Y\rangle$. Будем пользоваться заменами следующего вида

1. Отражение - замена

$$\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R}\rangle \to \langle \overrightarrow{P}, \overleftarrow{Q}, \overrightarrow{R}\rangle \tag{1.44}$$

   где $Q = (a_i, a_{i+1}\dots, a_{j-1}, a_j)$, i и j имеют одинаковую четность.
   Пример: замена $\langle 1,2,3,4,5\rangle \to \langle 1,4,3,2,5\rangle$, в данном случае $P = (1)$, $Q = (2,3,4), R = (5)$.

2. Единичная вариация (термин взят из [7]) - замена

$$\begin{aligned}\langle a_1,\dots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\dots,a_{j-1},a_j,a_{j+1},\dots,a_n\rangle \to\\ \langle a_1,\dots,a_{i-1},a_i-x,a_{i+1},\dots,a_{j-1},a_j+x,a_{j+1},\dots,a_n\rangle,\end{aligned} \tag{1.45}$$

   где $x\in\mathbb{Z}, a_i - x > 0, a_j + x > 0$, i и j имеют одинаковую четность.
   Пример:

$$\langle 1,2,3,4,5\rangle \to \langle 3,2,3,4,3\rangle.$$

3. $(1,2)$-вариация - замена одного из двух видов. В первом случае одно неполное частное четного индекса уменьшается (увеличивается) на x, а другое неполное частное с нечетным индексом увеличивается (уменьшается) на $2x$.

$$\begin{aligned}\langle a_1,\dots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\dots,a_{j-1},a_j,a_{j+1},\dots,a_n\rangle \to\\ \langle a_1,\dots,a_{i-1},a_i-x,a_{i+1},\dots,a_{j-1},a_j+2x,a_{j+1},\dots,a_n\rangle\end{aligned} \tag{1.46}$$

   где $x\in\mathbb{Z}, a_i - x > 0, a_j + 2x > 0$, i четно, а j нечетно. Пример:

$$\langle 1,2,3,4,5\rangle \to \langle 1,3,1,4,5\rangle.$$

Во втором случае одно неполное частное четного индекса уменьшается (увеличивается) на x, а два других неполных частных с нечетным индексом соответственно увеличиваются (уменьшаются) на x.:

$$\langle a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_k, \ldots, a_n \rangle \to$$
$$\langle a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i - x, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j + x, a_{j+1}, \ldots, a_k + x, \ldots, a_n \rangle \tag{1.47}$$

где $x \in \mathbb{Z}, a_i - x > 0, a_j + x > 0, a_k + x > 0,$ i четно, а j и k нечетны.

Пример:

$$\langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle \to \langle 1, 3, 2, 4, 4 \rangle$$

Очевидно, что все рассмотренные замены сохраняют длину n и сумму S_n, то есть не выводят из множества $M(n, S_n)$. Нетрудно видеть, что действуя на произвольный континуант композицией указанных преобразований, можно получить любой континуант из множества $M(n, S_n)$, в том числе минимальный и максимальный.

Свойства замены первого типа описаны в лемме 1.8, доказанной в работе [22]. В статье [22] приводится также следующая полезная формула

$$\frac{\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R} \rangle - \langle \overrightarrow{P}, \overleftarrow{Q}, \overrightarrow{R} \rangle}{\langle \overrightarrow{P} \rangle \langle \overrightarrow{Q} \rangle \langle \overrightarrow{R} \rangle} = ([\overleftarrow{P}] - [\overrightarrow{R}])([\overrightarrow{Q}] - [\overleftarrow{Q}]) \tag{1.48}$$

Отсюда выводится простое, но полезное следствие.

Следствие 1.3. *[7]. В результате преобразования отражения континуант изменяется не более, чем в 2 раза.*

Доказательство. Поскольку каждая из цепных дробей в числителе правой части равенства (1.48) не превосходит 1, имеем

$$|\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R} \rangle - \langle \overrightarrow{P}, \overleftarrow{Q}, \overrightarrow{R} \rangle| \leqslant \langle \overrightarrow{P} \rangle \langle \overrightarrow{Q} \rangle \langle \overrightarrow{R} \rangle. \tag{1.49}$$

А поскольку выполнены неравенства

$$\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R} \rangle > \langle \overrightarrow{P} \rangle \langle \overrightarrow{Q} \rangle \langle \overrightarrow{R} \rangle \text{ и } \langle \overrightarrow{P}, \overleftarrow{Q}, \overrightarrow{R} \rangle > \langle \overrightarrow{P} \rangle \langle \overrightarrow{Q} \rangle \langle \overrightarrow{R} \rangle, \tag{1.50}$$

то, очевидно, получаем требуемое. □

Оценим теперь, насколько меняется континуант при преобразованиях типа 2, то есть единичных вариациях. Эти преобразования будут использоваться нами как в весьма простой задаче поиска минимума, так и в гораздо более сложной задаче поиска максимума. Пользуясь следующей теоремой мы докажем, что максимум по $M(n, S_n)$ не более, чем в константу раз, отличается от максимума по $M_4(n, S_n) \subset M(n, S_n)$. Здесь в качестве $M_4(n, S_n)$ обозначено подмножество континуантов из $M(n, S_n)$, в котором все неполные частные одинаковой четности отличаются не более, чем на 1 т.е. имеют вид $\{a, a+1\}$ и $\{b, b+1\}$ соответственно. Введем для краткости для произвольного континуанта $\langle A \rangle$ следующие обозначения:

$Odd(A)$ - множество $k \in \mathbb{N}$ таких, что $\exists j \in \mathbb{N} : j -$ нечетно$, a_j = k.$

$Even(A)$ - множество $k \in \mathbb{N}$ таких, что $\exists j \in \mathbb{N} : j -$ четно$, a_j = k.$

Введем также множество $N(A) = \{Odd(A), Even(A)\}$.

Например, для $\langle A \rangle = \langle 1, 2, 1, 3, 5, 3, 1, 4 \rangle$ $Odd(A) = \{1, 5\}$, $Even(A) = \{2, 3, 4\}, N(A) = (\{1, 5\}, \{2, 3, 4\})$.

Покажем, что для любого континуанта из $M(n, S_n)$ существует последовательность единичных вариаций, переводящая исходный континуант $\langle A \rangle$ в некоторый зависящий от него континуант $\langle A' \rangle$, из множества $M_4(n, S_n)$. То есть, $N(A') \subseteq (\{a, a+1\}, \{b, b+1\})$ для некоторых натуральных a и b. Причем все преобразования в последовательности кроме, возможно, двух является увеличивающими. Это и будет означать, что максимум по множеству $M_4(n, S_n)$ не более, чем в константу раз отличается от максимума по $M(n, S_n)$.

Теорема 1.1 (О единичной вариации). $\max(M(n, S_n)) \asymp \max(M_4(n, S_n))$.

Доказательство. Будем доказывать теорему, действуя на исходный континуант $\langle A \rangle$ преобразованиями типа 2 так, чтобы он перешел в описанное множество, то есть рассмотрим последовательность континуантов

$$\langle A \rangle \to \langle A_1 \rangle \to \langle A_2 \rangle \to \ldots \to \langle A_m \rangle \tag{1.51}$$

такую, что $\langle A_m \rangle \in M_4(n, S_n)$ и для любого числа $i \leqslant m$ кроме, возможно, двух, $\langle A_i \rangle \geqslant \langle A_{i-1} \rangle$, при этом $\langle A_i \rangle$ получается из $\langle A_{i-1} \rangle$ действием преобразования типа 2. Доказательство будет состоять из нескольких лемм.

Уточнение параметров. Пусть $\langle A \rangle = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \in M(n, S_n)$ не лежит в $M_4(n, S_n)$. Тогда в нем есть 2 элемента a_i и a_j с индексами одинаковой четности такие, что $|a_i - a_j| > 1$. Запишем a_i как $a + x$ и a_j как $a - x$, сам континуант тогда примет вид

$$\langle P, a + x, Q, a - x, R \rangle = f(x).$$

При этом если a_i и a_j одинаковой четности, то a - целое и если они разной четности, то a - полуцелое. Соответственно, $f(x)$ есть функция целого или полуцелого аргумента. Рассматривая континуанты при разных x, мы, очевидно, не выходим из $M(n, S_n)$. Найдем, при каких x значение $f(x)$ максимально.

Следующая лемма представляет собой видоизменение соответствующей леммы из [7].

Лемма 1.13. *Максимум f(x) достигается в одной из следующих точек:* $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *(при a полуцелом) или* $(-1, 0, 1)$ *(при a целом).*

Доказательство. Докажем лемму для случая, когда P и R непусты. Применяя (1.2), распишем конитнуант:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \langle \underbrace{P, a + x, Q}, \underbrace{a - x, R} \rangle = \\ &= \langle P, a + x, Q \rangle \langle a - x, R \rangle + \langle P, a + x, Q^- \rangle \langle R \rangle \end{aligned} \tag{1.52}$$

Будем использовать в сумме знак $O(1)$, означающий сумму не зависящих от x членов, поскольку на максимум $f(x)$ они, очевидно, не влияют. Применяя формулу (1.3), перепишем первое слагаемое:

$$\begin{aligned} \langle P, a + x, Q \rangle \langle a - x, R \rangle &= \langle P \rangle \langle Q \rangle ((a + x) + [\overleftarrow{P}] + [\overrightarrow{Q}]) \langle R \rangle ((a - x) + [\overrightarrow{R}]) = \\ &= \langle P \rangle \langle Q \rangle \langle R \rangle (-x^2 + ([\overrightarrow{R}] - [\overleftarrow{P}] - [\overrightarrow{Q}])x) + O(1) \end{aligned} \tag{1.53}$$

Второе слагаемое преобразуется аналогично, но проще

$$\begin{aligned}\langle P, a+x, Q^-\rangle\langle R\rangle &= \langle P\rangle\langle Q^-\rangle((a+x)+[\overleftarrow{P}]+[\overrightarrow{Q^-}])\langle R\rangle = \\ &= \langle P\rangle\langle Q^-\rangle\langle R\rangle x + O(1) = \langle P\rangle\langle Q\rangle\langle R\rangle[\overleftarrow{Q}]x + O(1)\end{aligned} \quad (1.54)$$

Итого:

$$\langle A\rangle = \langle P\rangle\langle Q\rangle\langle R\rangle(-x^2 + ([\overrightarrow{R}] - [\overleftarrow{P}] - [\overrightarrow{Q}] + [\overleftarrow{Q}])x) + O(1) \quad (1.55)$$

Получаем квадратный трехчлен, выразим координату его вершины x_m :

$$x_m = \frac{[\overleftarrow{Q}] - [\overrightarrow{Q}] + [\overrightarrow{R}] - [\overleftarrow{P}]}{2}. \quad (1.56)$$

Так как все цепные дроби в формуле (1.56) лежат на отрезке от 0 до 1, то, очевидно, $-1 < x_m < 1$, а значит, если $x_m > 0$, то $f(1) > f(n+1), f(\frac{1}{2}) > f(\frac{1}{2}+n)\ \forall n \in \mathbb{N}$, аналогично для $x_m < 0$. Случай, когда P или R пустые, - аналогичен. Лемма доказана. $\square$

Таким образом, в случае, когда число $a_i - a_j$ нечетно, замена

$$\langle P, a+x, Q, a-x, R\rangle \to \langle P, a \pm \frac{1}{2}, Q, a \mp \frac{1}{2}, R\rangle \quad (1.57)$$

увеличивает континуант. При этом если $x_m \geqslant 0$, в формуле (1.57) сначала идет знак $+$, а затем $-$, а если $x_m \leqslant 0$, то наоборот. Рассмотрим случай, когда число $a_i - a_j$ четно. Из доказанной леммы следует, что если $|a_i - a_j| \geqslant 4$, то к этой паре неполных частных можно применить увеличивающую единичную вариацию. Если же $|a_i - a_j| = 2$, то ситуация сложнее. Разбору этого случая и будет посвящено все дальнейшее доказательство теоремы. Прежде всего выведем из леммы 1.13 важное следствие, которое мы будем неоднократно использовать в дальнейшем:

Следствие 1.4. *Если $|a_i - a_j| = 2$ и $|x_m| \leqslant \frac{1}{2}$, то замена*

$$\langle P, a \pm 1, Q, a \mp 1, R\rangle \to \langle P, a, Q, a, R\rangle$$

увеличивает континуант.

Доказательство. Действительно, в этом случае, $f(0) \geqslant f(1)$ и $f(0) \geqslant f(-1)$, а следовательно максимум $f(x)$ по целым точкам достигается в точке 0, что и требовалось доказать. □

Таким образом, применяя единичную вариацию, мы можем сделать так, чтобы все неполные частные континуанта $\langle A_k \rangle$ с индексами одинаковой четности отличались не более, чем на 2, где A_k принадлежит последовательности континуантов (1.51), то есть

$$N(A_k) \subseteq (\{a-1, a, a+1\}, \{b-1, b, b+1\}).$$

Если существуют неполные частные a_i и a_j с индексами одинаковой четности такие, что $a_i - a_j = 2$, то рассмотрим замену

$$\langle P', a_i, Q', a_j, R' \rangle \to \langle P', a_i - 1, Q', a_j + 1, R' \rangle. \tag{1.58}$$

Не ограничивая общности, будем считать, что i и j четные. Тогда выполнено следующее:

Лемма 1.14. *Если $Even(A_k) = \{a-1, a, a+1\}$, $a \neq 2$ и $Odd(A_k) \nsubseteq \{1, 2\}$, то существует единичная вариация, увеличивающая $\langle A_k \rangle$.*

Доказательство. Выберем в $\langle A_k \rangle$ произвольные неполные частные $a_i = a + 1$ и $a_j = a - 1$, i и j четные. Рассмотрим замену, определенную формулой (1.58). Заметим, что если $1 \notin Odd(A_k)$, то все цепные дроби из формулы (1.56) меньше $\frac{1}{2}$, следовательно, $|x_m| < \frac{1}{2}$, а значит по следствию 1.4 замена (1.58) увеличивает континуант.

Пусть теперь $\{1\} \in Odd(A_k)$, тогда $Odd(A_k) \subseteq \{1, 2, 3\}$. Докажем, что если $\{3\} \in Odd(A_k)$, то увеличивающая единичная вариация существует. Действительно, поскольку по условию $1 \notin Even(A_k)$, то применяя единичную вариацию к произвольным неполным частным, равным 1 и 3, мы можем сказать, что все цепные дроби в формуле (1.56) меньше $\frac{1}{2}$, а значит по следствию 1.4 замена

$$\langle P_1, 3, Q_1, 1, R_1 \rangle \to \langle P_1, 2, Q_1, 2, R_1 \rangle \tag{1.59}$$

увеличивает континуант. Что и требовалось доказать. $\square$

Докажем теперь, что в случае, когда $Odd(A_k) \subseteq \{1,2\}$ также существует увеличивающая единичная вариация:

Лемма 1.15. *Пусть* $N(A_k) = (\{a-1, a, a+1\}, \{1,2\}), a > 2$*, тогда единичная вариация, определенная формулой (1.58) увеличивает континуант.*

Доказательство. Воспользуемся Леммой 1.13. Максимальное значение цепных дробей из формулы (1.56) меньше либо равно

$$[1, a+1, 1] = \frac{a+2}{a+3} = 1 - \frac{1}{a+3},$$

а минимальное больше либо равно

$$[2, a-1] = \frac{a-1}{2a-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4a-2}.$$

Поэтому, подставляя данные оценки в формулу (1.56), получим:

$$|x_m| \leqslant \frac{2(1 - \frac{1}{a+3} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{4a-2}))}{2} = 1 - \frac{1}{a+3} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{4a-2}) =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{a+3} + \frac{1}{4a-2} = \frac{1}{2} - \frac{3a-5}{(a+3)(4a-2)}. \quad (1.60)$$

Поскольку $\frac{3a-5}{(a+3)(4a-2)} > 0$ при $a \geqslant 2$, имеем $|x_m| < \frac{1}{2}$. Пользуясь следствием 1.4, получаем утверждение леммы. $\square$

Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда $N(A_k) \subseteq (\{1,2,3\}, \{1,2,3\})$.

Лемма 1.16. *Если* $Even(A_k) = \{1,2,3\}$ *или* $Odd(A_k) = \{1,2,3\}$*, то для самой близкой в смысле разности индексов пары* (a_i, a_j) *такой, что* $a_i = 3$ *и* $a_j = 1$*, где* i *и* j *имеют одинаковую четность, замена (1.59) увеличивает континуант.*

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что i и j четные. Рассмотрим замену (1.59) и разность $[\overleftarrow{Q}] - [\overrightarrow{Q}]$ из формулы (1.56). Заметим, что все неполные частные Q, имеющие в $\langle A_k \rangle$ четный индекс, равны

2, т.к. иначе существовала бы более близкая пара с 1 или 3, а все неполные частные Q, имеющие в $\langle A_k\rangle$ нечетный индекс, отличаются не более, чем на 1 (т.е. равны 1 и 2 или 2 и 3). Таким образом

$$|[\overleftarrow{Q}]-[\overrightarrow{Q}]| \leqslant [1,2,1,2\ldots]-[2,2,2,2\ldots] \leqslant [1,2,1]-[2,2] = \frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{7}{20}.$$

Рассмотрим теперь внешнюю разность

$$|[\overrightarrow{R}]-[\overleftarrow{P}]| \leqslant [1,3,1,3\ldots]-[3,1,3,1\ldots] \leqslant [1,3,1]-[3,1] = \frac{4}{5}-\frac{1}{4}=\frac{11}{20}.$$

Следовательно

$$|x_m| = \frac{|[\overleftarrow{Q}]-[\overrightarrow{Q}]|+|[\overrightarrow{R}]-[\overleftarrow{P}]|}{2} \leqslant \frac{\frac{7}{20}+\frac{11}{20}}{2} = \frac{9}{20} < \frac{1}{2}.$$

Отсюда, применяя следствие 1.4, получаем утверждение леммы. $\square$

Отметим, что в случае, когда мы применяем единичную вариацию к паре неполных частных, одно из которых является правым концом континуанта, соответствующая x_m из формулы (1.56) равна $\frac{[\overleftarrow{B}]-[\overrightarrow{B}]-[\overleftarrow{A}]}{2}$, что больше -1 и меньше $\frac{1}{2}$, аналогично для левого конца. В этих случаях единичная вариация может уменьшать континуант, но таких преобразований будет не более двух, и каждое уменьшит континуант не более, чем в 2 раза.

Таким образом, из лемм 1.13-1.16 следует, что если

$$N(A) \not\subseteq (\{a,a+1\},\{b,b+1\})$$

ни для каких натуральных a и b, то существует единичная вариация, увеличивающая $\langle A\rangle$. Теорема 1.1 доказана полностью. $\square$

Введем новое обозначение. Пусть дан произвольный континуант $\langle C\rangle = \langle c_1,\ldots,c_n\rangle$, тогда обозначим через

$$((c_{i_1}\to c'_{i_1}),(c_{i_1}\to c'_{i_1}),\ldots,(c_{i_k}\to c'_{i_k}))$$

замену

$$\langle c_1, c_2, \ldots, c_{i_1-1}, c_{i_1}, c_{i_1+1} \ldots, c_{i_2-1}, c_{i_2}, c_{i_2+1} \ldots, c_{i_k-1}, c_{i_k}, c_{i_k+1} \ldots, c_{n-1}, c_n\rangle \to$$
$$\langle c_1, c_2, \ldots, c_{i_1-1}, c'_{i_1}, c_{i_1+1} \ldots, c_{i_2-1}, c'_{i_2}, c_{i_2+1} \ldots, c_{i_k-1}, c'_{i_k}, c_{i_k+1} \ldots, c_{n-1}, c_n\rangle, \tag{1.61}$$

то есть заменяем только элементы c_{i_j}, остальные неполные частные остаются теми же.

Докажем теперь теорему о минимуме.

Теорема 1.2. $\min(M(n, S_n)) \asymp \langle \underbrace{1, \ldots, 1,}_{n-1} s\rangle$, *где* $s = S_n - \frac{3n-4}{2}$.

Доказательство. Пусть $\langle A\rangle = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$, выберем $a_i = \max(Even(A))$ - максимальное неполное частное четного индекса. Если существует четное h такое, что $a_i = a_h$, произведем замену

$$((a_i \to a_i + a_h - 1), (a_h \to 1)),$$

она увеличит континуант не более, чем в 2 раза. Тогда в новом континуанте $\langle A\rangle$ элемент a'_i станет единственным максимальным неполным частным.

Из леммы 1.13 следует, что поскольку график функции

$$f(x) = \langle A, a + x, B, a - x, C\rangle -$$

парабола с вершиной $x_m,\ |x_m| < 1$, то

$$f(x+1) < f(x)\ \forall x \geqslant \frac{1}{2} \text{ и } f(x-1) < f(x)\ \forall x \leqslant -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, любая замена

$$((a_i \to a_i + a_j - 1), (a_j \to 1)),\ \text{где } j - \text{четно},$$

уменьшит континуант, поскольку при этом разность между неполными частными, для которых мы применяем единичную вариацию, увеличится. Будем производить такие замены, пока все неполные частные четного индекса, кроме a_i, не станут равны 1.

Произведем аналогичную процедуру для неполных частных нечетного индекса. Получим континуант содержащий не более 2 неполных частных, отличных от 1. Он будет иметь вид

$$\langle 1,\ldots,1,\widetilde{a_i},1,\ldots,1,\widetilde{a_j},1,\ldots,1\rangle.$$

Если a_j нечетно, произведем следующую замену

$$((\widetilde{a_i}\to\widetilde{a_i}+2\widetilde{a_j}),(\widetilde{a_j}\to 1))$$

Если же a_j четно, то произведем другую замену

$$((\widetilde{a_i}\to\widetilde{a_i}+2\widetilde{a_j}-2),(\widetilde{a_j}\to 2))$$

Очевидно, что любая такая замена увеличит континуант не более, чем в 2 раза. Таким образом, полученный континуант имеет вид

$$\langle\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},s,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-i}\rangle \text{ или } \langle\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},s,\underbrace{1,\ldots,1}_{j-i-1},2,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-j}\rangle,$$

что не более, чем в константу раз отличается от $\langle\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1},s\rangle$, что и требовалось доказать. □

Займемся теперь поиском максимума по $M_4(n,S_n)$. Введем новые обозначения:

$$\begin{aligned} c^{(1)}_{a,a+1;b}&=[b,a+1,b], & c^{(2)}_{a,a+1;b}&=[b+1,a],\\ c^{(1)}_{a;b,b+1}&=[a,b+1,a], & c^{(2)}_{a;b,b+1}&=[a+1,b]. \end{aligned} \tag{1.62}$$

Лемма 1.17. *Пусть $\langle A\rangle=\langle P,a,R\rangle=\langle P_1,b,R_1\rangle$-континуант, для которого $N(A)\subseteq(\{a,a+1\},\{b,b+1\})$ и при этом P,Q,P_1,Q_1 состоят по крайней мере из 2 неполных частных. Тогда выполнены следующие оценки:*

(i)
$$1+\frac{1}{a+2c^{(1)}_{a,a+1;b}}=\frac{a+1+2c^{(1)}_{a,a+1;b}}{a+2c^{(1)}_{a,a+1;b}}\leqslant\frac{\langle P,a+1,R\rangle}{\langle P,a,R\rangle}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{a+1+2c(2)_{a,a+1;b}}{a+2c^{(2)}_{a,a+1;b}}=1+\frac{1}{a+2c^{(2)}_{a,a+1;b}} \tag{1.63}$$

$$\textbf{\textit{(ii)}}\quad 1+\frac{1}{b+2c^{(1)}_{a;b,b+1}}=\frac{b+1+2c^{(1)}_{a;b,b+1}}{b+2c^{(1)}_{a;b,b+1}}\leqslant\frac{\langle P_1,b+1,R_1\rangle}{\langle P_1,b,R_1\rangle}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{b+1+2c^{(2)}_{a;b,b+1}}{b+2c^{(2)}_{a;b,b+1}}=1+\frac{1}{b+2c^{(2)}_{a;b,b+1}}\quad(1.64)$$

Доказательство. Докажем первую оценку. Применяя (1.3), получаем:

$$\frac{\langle P,a+1,R\rangle}{\langle P,a,R\rangle}=\frac{a+1+[\overleftarrow{P}]+[\overrightarrow{R}]}{a+[\overleftarrow{P}]+[\overrightarrow{R}]}=1+\frac{1}{a+[\overleftarrow{P}]+[\overrightarrow{R}]}.\quad(1.65)$$

Оценивая цепные дроби правой части последнего равенства снизу через $c^{(2)}_{a,a+1;b}$, а сверху через $c^{(1)}_{a,a+1;b}$, получаем оценку (1.63); оценка (1.64) доказывается аналогично. При этом мы пользуемся тем, что увеличение неполного частного нечетного индекса увеличивает цепную дробь, а увеличение неполного частного четного индекса, соответственно, уменьшает. Кроме того, любая подходящая к x дробь четного порядка меньше x, а нечетного порядка - больше x.

Соответственно, дробь $[b,a+1,b]$ является максимумом по множеству цепных дробей вида $[A]$, где $N(A)\subseteq(\{a,a+1\},\{b,b+1\})$ и длина A больше 1. По тем же причинам дробь $[b+1,a]$ является минимумом на описанном множестве цепных дробей. Второй случай абсолютно аналогичен. $\square$

Таким образом, мы получили верхние и нижние оценки изменения континуанта при заменах вида

$$(a\to a+1)\text{ и }(b\to b+1)$$

Отметим, что если P или R в формуле (1.65) имеют длину меньше 2, то можно оценить цепные дроби сверху единицей, а снизу нулем, тогда формула (1.65) превратится в

$$\frac{4}{3}\leqslant\frac{\langle P,a+1,R\rangle}{\langle P,a,R\rangle}\leqslant\frac{a+3}{a+2}\leqslant\frac{a+1}{a}\leqslant 2$$

Обозначим через

$$c_l(a,a+1;b)=1+\frac{1}{a+2c^{(1)}_{a,a+1;b}}\text{ и }c_r(a,a+1;b)=1+\frac{1}{a+2c^{(2)}_{a,a+1;b}}$$

нижнюю и верхнюю оценки на величину $\frac{\langle P,a+1,R\rangle}{\langle P,a,R\rangle}$ из неравенства (1.63).

Аналогично определим

$$c_l(a;b,b+1) = 1 + \frac{1}{b + 2c^{(1)}_{a;b,b+1}} \text{ и } c_r(a;b,b+1) = 1 + \frac{1}{b + 2c^{(2)}_{a;b,b+1}}$$

нижнюю и верхнюю оценки на величину $\frac{\langle P',a+1,R'\rangle}{\langle P',a,R'\rangle}$ из неравенства (1.64).

Рассмотрим теперь замену

$$((a \to a+1), (b+1 \to b), (b+1 \to b))$$

в континуанте $\langle A\rangle$, для которого $N(A) \subseteq (\{a, a+1\}, \{(b, b+1\})$, то есть замену *любого* неполного частного с нечетным индексом, равного a, на $a+1$ и замена *любых* двух неполных частных с четным индексом, равных $b+1$, на b. Нетрудно видеть, что рассмотренная замена является $(1,2)-$вариацией. Выясним, пользуясь оценками предыдущей леммы, в каких случаях можно заведомо утверждать, что она увеличивает континуант. Для этого докажем следующее простое, но крайне полезное в дальнейшем утверждение.

Лемма 1.18. *Пусть $\langle A\rangle$ - произвольный континуант, для которого выполнено включение $N(A) \subseteq (\{a, a+1\}, \{b, b+1\})$. Если при этом*

$$c_l(a, a+1, b) > c_r^2(a, b, b+1),$$

то замена

$$((a \to a+1), (b+1 \to b), (b+1 \to b))$$

увеличивает континуант.

Если же

$$c_r(a, a+1, b) < c_l^2(a, b, b+1),$$

то замена

$$((a+1 \to a), (b \to b+1), (b \to b+1))$$

также увеличивает континуант.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно один раз применить неравенство (1.63) и дважды - неравенство (1.64). Второе утверждение доказывается аналогично. □

Назовем $(1, 2)-$вариации, для которых выполняются условия леммы 1.18, **абсолютно увеличивающими**. Найдем конкретное выражение таких замен.

Лемма 1.19. $(1, 2)-$*вариации*

$$((a \to a+1), (2a+2 \to 2a+1), (2a+2 \to 2a+1))$$

при $N(A) \subseteq (\{a, a+1\}, \{2a+1, 2a+2\})$ *и* $a \geqslant 1$

и

$$((a+1 \to a), (2a \to 2a+1), (2a \to 2a+1))$$

при $N(A) \subseteq (\{a, a+1\}, \{2a, 2a+1\})$ *и* $a \geqslant 2$

являются абсолютно увеличивающими.

Доказательство. Проверим выполнение условий предыдущей леммы. Поскольку

$$c_l(a, a+1; 2a+1) = \frac{4a^4 + 12a^3 + 21a^2 + 18a + 7}{4a^4 + 8a^3 + 13a^2 + 9a + 4}$$

$$c_r^2(a; 2a+1, 2a+2) = \frac{4(2a^3 + 5a^2 + 7a + 3)^2}{(4a^3 + 8a^2 + 11a + 4)^2},$$

то, сравнивая оценки, получаем:

$$\begin{gathered} c_l(a, a+1; 2a+1) - c_r^2(a; 2a+1, 2a+2) = \\ = \frac{16a^8 + 96a^7 + 264a^6 + 432a^5 + 417a^4 + 198a^3 - 29a^2 - 92a - 32}{(4a^3 + 8a^2 + 11a + 4)^2 (4a^4 + 8a^3 + 13a^2 + 9a + 4)} \end{gathered} \tag{1.66}$$

что, очевидно, больше нуля при $a \geqslant 1$.

Докажем аналогично вторую часть леммы: из равенств

$$c_r(a, a+1; 2a) = \frac{2a^3 + 3a^2 + 4a + 1}{2a^3 + a^2 + 3a},$$

$$c_l^2(a;2a,2a+1)=\frac{(4a^4+4a^3+9a^2+4a+2)^2}{4(2a^4+a^3+4a^2+a+1)^2},$$

получаем, что

$$\begin{aligned}&c_l^2(a;2a,2a+1)-c_r(a,a+1;2a)=\\&=\frac{8a^9+12a^8+18a^7+13a^6-13a^5-24a^4-36a^3-28a^2-12a-4}{4a(2a^4+a^3+4a^2+a+1)^2(2a^2+a+3)},\end{aligned}\quad(1.67)$$

что больше нуля при $a\geqslant 2$. Лемма доказана. $\square$

Доказанная лемма представляет собой "граничный"случай: при $N(A)\subseteq(\{a,a+1\},\{2a,2a+1\})$ для увеличения континуанта необходимо увеличить неполные частные с четным индексом и уменьшить с нечетным, а при $N(A)\subseteq(\{a,a+1\},\{2a+1,2a+2\})$ - наоборот увеличить с нечетным и уменьшить с четным. Остальные случаи, как утверждает следующая лемма, проще:

Лемма 1.20 (Лемма о монотонности). *Если замена*

$$((a\to a+1),(b+1\to b),(b+1\to b))\ \textit{при}\ N(A)=(\{a,a+1\},\{b,b+1\})-$$

абсолютно увеличивающая $(1,2)-$ *вариация, то замены*

$$((a-1\to a),(b+1\to b),(b+1\to b))\ \textit{при}\ N(A)=(\{a-1,a\},\{b,b+1\}),$$

$$((a\to a+1),(b+2\to b+1),(b+2\to b+1))\ \textit{при}\ N(A)=(\{a,a+1\},\{b+1,b+2\})$$

также являются абсолютно увеличивающими.
Если же, напротив

$$((a+1\to a),(b\to b+1),(b\to b+1))\ \textit{при}\ N(A)=(\{a,a+1\},\{b,b+1\})-$$

абсолютно увеличивающая замена, то $(1,2)-$*вариации*

$$((a+2\to a+1),(b\to b+1),(b\to b+1))\ \textit{при}\ N(A)=(\{a+1,a+2\},\{b,b+1\}),$$

$$((a+1\to a),(b-1\to b),(b-1\to b))\ \textit{при}\ N(A)=(\{a,a+1\},\{b-1,b\})$$

также являются абсолютно увеличивающими заменами.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Поскольку первые неполные частные цепных дробей $c^{(1)}_{a,a+1;b}$ и $c^{(1)}_{a-1,a;b}$ совпадают, эти дроби отличаются не более, чем на $\frac{1}{2}$. Следовательно, выполнена цепочка неравенств:

$$c_l(a, a+1; b) = 1 + \frac{1}{a + 2c^{(1)}_{a,a+1;b}} < 1 + \frac{1}{a - 1 + 2c^{(1)}_{a-1,a;b}} = c_l(a-1, a; b)$$

Сравним теперь $c_r^2(a; b, b+1)$ и $c_r^2(a-1; b, b+1)$. Они равны соответственно

$$(1 + \frac{1}{b + 2c^{(2)}_{a;b,b+1}})^2 \text{ и } (1 + \frac{1}{b + 2c^{(2)}_{a-1;b,b+1}})^2.$$

Заметим, что

$$c^{(2)}_{a;b,b+1} = [a+1, b] < [a, b] = c^{(2)}_{a-1;b,b+1},$$

а следовательно

$$c_r^2(a; b, b+1) > c_r^2(a-1; b, b+1)$$

Поскольку по условию $c_r^2(a, b, b+1) < c_l(a, a+1, b)$, получаем, что

$$c_r^2(a-1; b, b+1) < c_r^2(a; b, b+1) < c_l(a, a+1; b) < c_l(a-1, a; b).$$

Для завершения доказательства первого утверждения остается применить лемму 1.18. Остальные утверждения доказываются аналогично. □

Во всех дальнейших леммах данной части мы будем пользоваться следующим, не ограничивающим общность, предположением:
если рассматривается замена

$$((a \to a+1), (b+1 \to b), (b+1 \to b)) \text{ при } N(A) \subseteq (\{a, a+1\}, \{b, b+1\}),$$

то существует хотя бы 2 неполных частных нечетного индекса, равных $b+1$;
если же рассматривается замена

$$((a+1 \to a), (b \to b+1), (b \to b+1)) \text{ при } N(A) \subseteq (\{a, a+1\}, \{b, b+1\}),$$

то существует хотя бы 2 неполных частных нечетного индекса, равных b.

Замечание. Возможны ситуации, когда сформулированное выше предположение не выполнено. То есть, к примеру, в континуанте $\langle A\rangle$ осталось ровно одно неполное частное нечетного индекса, равное b; в этом случае абсолютно увеличивающая замена

$$((a+1\to a),(b\to b+1),(b\to b+1))$$

не может быть проведена. Тогда заменим единственное неполное частное нечетного индекса, равное b на $b+1$, получим континуант $\langle A'\rangle$, отличающийся от исходного не более, чем в $\frac{b+1}{b}$ раз (оценка следует из формулы (1.3)). В ходе цепочки абсолютно увеличивающих замен мы получим из континуанта

$$\langle A_1\rangle, N(A_1)\subseteq(\{a,a+1\},\{b,b+1\})$$

континуант

$$\langle A_1\rangle, N(A_n)\subseteq(\{a',a'+1\},\{b',b'+1\}).$$

Таким образом, из-за вышеописанной ситуации отсутствия парного неполного частного суммарно континуант изменится не более чем в $\frac{b'+1}{b}$ раз.

Однако при этом мы выйдем за пределы множества $M(n,S_n)$. Но заметим, что максимум по множеству $M(n,S_n)$ не более чем в константу раз отличается от максимума по множеству $M(n,S_n+c)$, где c ограничено по абсолютной величине некоторой не зависящей от n и S_n константой. Очевидно, что количество замен, при которых изменяется S_n не превосходит b'. Поскольку b' есть $O(\frac{S_n}{n})$, наш метод находит максимум с точностью до мультипликативной константы порядка $O(\frac{S_n}{n})$.

Следствие 1.5. *Если* $N(A)=(\{a,a+1\},\{b,b+1\}), a\geqslant 2$, *то для континуанта* $\langle A\rangle$ *существует абсолютно увеличивающая* $(1,2)-$*вариация.*

Доказательство. Действительно, если $b\leqslant 2a$, то по леммам 1.19 и 1.20 замена

$$((a+1\to a),(b\to b+1),(b\to b+1))$$

является абсолютно увеличивающей. Если же $b \geqslant 2a+1$, то аналогично замена

$$((a \to a+1), (b+1 \to b), (b+1 \to b))$$

является абсолютно увеличивающей, что и требовалось доказать. □

Лемма 1.21. *Если* $N(A) = (\{a\}, \{b, b+1\})$ *и при этом* b *не равно* $2a-1$ *или* $2a$ *и* $a > 1$, *то для данного континуанта существует абсолютно увеличивающая* $(1,2)-$*вариация.*

Доказательство. Пусть $b < 2a-1$. Тогда рассмотрим замену

$$((a \to a-1), (b \to b+1), (b \to b+1))$$

Поскольку $N(A) \subset (\{a-1, a\}, \{b, b+1\})$, по леммам 1.19 и 1.20 она будет абсолютно увеличивающей, что и требовалось доказать. Аналогично рассматривается случай $b > 2a$. □

Лемма 1.22. *Если* $N(A) = (\{a, a+1\}, \{b\})$ *и при этом* $b \neq 2a+1$ *и* $a > 1$, *то для данного континуанта существует абсолютно увеличивающая* $(1,2)-$*вариация.*

Доказательство. Пусть $b < 2a-1$. Тогда рассмотрим замену

$$((a+1 \to a), (b \to b+1), (b \to b+1))$$

Поскольку $N(A) \subset (\{a, a+1\}, \{b, b+1\})$, по леммам 1.19 и 1.20 она будет абсолютно увеличивающей, что и требовалось доказать. Аналогично рассматривается случай $b > 2a-1$. □

Лемма 1.23. *Если* $N(A) = (\{a\}, \{b\}), a \geqslant 2$ *и при этом* b *не равно* $2a-1, 2a$ *или* $2a+1$, *то для данного континуанта существует абсолютно увеличивающая* $(1,2)-$*вариация.*

Доказательство. Аналогично леммам 1.21 и 1.22. □

Введем множество $M_3(n, S_n) \subset M_4(n, S_n) \subset M(n, S_n)$ - подмножество $M_4(n, S_n)$, состоящее из континуантов $\langle A\rangle$, для которых выполнено одно из следующих трех условий:

$$\begin{aligned}1)N(A) &\subseteq (\{a\}, \{2a-1, 2a\})\\ 2)N(A) &\subseteq (\{a\}, \{2a, 2a+1\})\\ 3)N(A) &\subseteq (\{a, a+1\}, \{2a+1\})\end{aligned} \tag{1.68}$$

Во всех случаях считаем, что $a \geqslant 2$. Рассмотрим также $\max(M_3(n, S_n))$ - максимум по множеству $M_3(n, S_n)$.

Теорема 1.3 (О сведении к трем неполным частным).
Если $\frac{S_n}{n} \geqslant 3.5$, *то* $\max(M(n, S_n)) \asymp \max(M_3(n, S_n))$

Доказательство. Рассмотрим произвольный континуант $\langle A\rangle \in M(n, S_n)$. Докажем, что если он не лежит в $M_3(n, S_n)$, то существует последовательность увеличивающих преобразований, сохраняющих длину n и S_n и приводящих $\langle A\rangle$ в данное множество. Для этого покажем, что существует $(1, 2)$-вариация, увеличивающая континуант $\langle A\rangle$. На основании теоремы 1.1 можно считать, что данный континуант лежит в множестве $M_4(n, S_n) \setminus M_3(n, S_n)$. Пусть $N(A) \subseteq (\{a, a+1\}, \{b, b+1\})$. Если $a > 1$ и $\langle A\rangle \notin (M_3(n, S_n))$, то существование увеличивающего преобразования прямо следует из лемм 1.21, 1.22, 1.23 и следствия 1.5.

Рассмотрим случай $a = 1$. Поскольку $\frac{S_n}{n} \geqslant 3.5$, то $b \geqslant 3$. Из первого утверждения леммы (1.19) следует, что замена

$$((a \to a+1), (b+1 \to b), (b+1 \to b))$$

является абсолютно увеличивающей при $a = 1, b = 3$, а следовательно, по лемме 1.20 она является также увеличивающей при $b > 3$.

Таким образом, показано, что если континуант $\langle A\rangle \notin M_3(n, S_n)$, то для него существует абсолютно увеличивающая $(1,2)-$вариация. Что и требовалось доказать. $\square$

Случай, когда $\frac{S_n}{n} < 3.5$, остается неразобран. Однако, как будет показано в доказательстве теоремы 5, данный случай никак не влияет на наши рассуждения.

Заметим также, что вид (одно из трех условий в (1.68)), в который можно привести произвольный континуант в множестве $M_3(n, S_n)$ однозначно определяется отношением $\frac{S_n}{n}$, поскольку для видов 1), 2) и 3) значение $\frac{S_n}{n}$ принадлежит, соответственно, отрезкам $[4a-1, 4a], [4a, 4a+1]$ или $[4a+1, 4a+3]$. То есть отрезки пересекаются только по концам, соответствующим случаям, когда все неполные частные одинаковой четности совпадают. Таким образом, при фиксированном a выполнено свойство

$$\frac{S_n}{n} \in [4a-1, 4a+3]. \tag{1.69}$$

Следствие 1.6. *Если* $\langle A\rangle \in M_3(n, S_n)$, $N(A) \subset (\{a, a+1\}, \{b, b+1\})$ *то* $a \geqslant \frac{\frac{S_n}{n}-3}{4}$, *а* $b \geqslant 2a-1$.

Доказательство. Первое неравенство очевидно следует из (1.69), а второе - из (1.68). $\square$

Осталось, таким образом, найти максимум по континуантам, в которых неполные частные могут принимать не более 3 различных значений. Пусть для определенности $N(A) = (\{a, a+1\}, \{b\})$. Рассмотрим замены отражением

$$\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R}\rangle \to \langle \overrightarrow{P}, \overleftarrow{Q}, \overrightarrow{R}\rangle,$$

где $Q = (a, b, \ldots, a+1)$ или $(a+1, b, \ldots, a)$, то есть Q имеет разные начало и конец. Пусть, например, $Q = (a, b, \ldots, a+1)$, тогда

$$[\overrightarrow{Q}] - [\overleftarrow{Q}] = [a, \ldots] - [a+1, \ldots] > 0,$$

поэтому неравенство

$$\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R}\rangle > \langle \overrightarrow{P}, \overleftarrow{Q}, \overrightarrow{R}\rangle$$

выполняется тогда и только тогда, когда $[\overleftarrow{P}] > [\overrightarrow{R}]$.

В случае, если

$$[\overrightarrow{Q}] - [\overleftarrow{Q}] = [a+1, \ldots] - [a, \ldots] < 0,$$

неравенство

$$\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R} \rangle > \langle \overrightarrow{P}, \overleftarrow{Q}, \overrightarrow{R} \rangle$$

выполнено тогда и только тогда, когда $[\overleftarrow{P}] < [\overrightarrow{R}]$. А поскольку все неполные частные с четными индексами совпадают, то цепные дроби $[\overleftarrow{P}]$ и $[\overrightarrow{R}]$ имеют вид $[b, a_1, b, a_2 \ldots]$, где $a_i \in \{a, a+1\}$. Обозначим их $[b, a_1^P, b, a_2^P, \ldots]$ и $[b, a_1^R, b, a_2^R, \ldots]$ соответственно. Сформулируем еще один критерий сравнения континаунтов.

Лемма 1.24. *Пусть $\langle A \rangle = \langle P, Q, R \rangle$ - произвольный континуант, причем $N(A) \subseteq (\{a, a+1\}, \{b\})$, $Q = (q_1, \ldots, q_m)$ и $q_1 \neq q_m$. Тогда:*

(***i***) *Если $q_1 = a, q_m = a+1$, то замена*

$$\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R} \rangle \to \langle \overrightarrow{P}, \overleftarrow{Q}, \overrightarrow{R} \rangle \tag{1.70}$$

увеличивает континуант тогда и только тогда, когда $\exists k : a_k^P < a_k^R$, причем $\forall i < K \ a_i^P = a_i^R$, то есть первое отличающееся неполное частное цепных дробей $[\overleftarrow{P}]$ и $[\overrightarrow{R}]$ больше в $[\overrightarrow{R}]$.

(***ii***) *Если $q_1 = a+1, q_m = a$, то замена, задаваемая формулой (1.70) увеличивает континуант тогда и только тогда, когда $\exists k : a_k^P > a_k^R$, $\forall i < K \ a_i^P = a_i^R$, то есть первое отличающееся неполное частное цепных дробей $[\overleftarrow{P}]$ и $[\overrightarrow{R}]$ больше в $[\overrightarrow{P}]$.*

Доказательство. Заметим, что если цепные дроби $[\overleftarrow{P}]$ и $[\overrightarrow{R}]$ отличаются неполным частным с четным индексом, то больше та дробь, у которой отличающееся неполное частное больше. Для завершения доказательства остается только воспользоваться леммой 1.8. □

Заметим, что если одна из цепных дробей (более короткая) обрывается там, где заканчивается континуант, а все неполные частные более короткой цепной дроби совпадают с соответствующими неполными частными длинной, то следующее неполное частное короткой дроби можно считать равным $+\infty$. В самом деле, если короткая цепная дробь состоит из нечетного количества неполных частных, то она больше длинной, а если из четного, то меньше, поскольку является подходящей дробью к более длинной.

Научимся теперь находить максимум по континуантам из множества $M_3(n, S_n)$. Без ограничения общности можем считать, что произвольный континуант $\langle A\rangle \in M_3(n, S_n)$ состоит из блоков (a, b) и $(a+1, b)$. Обозначим их C_0^0 и C_1^0 соответственно.

Лемма 1.25. *Если отношение количества блоков C_0^0 к количеству блоков C_1^0 равно $m+\alpha$, где $m \in \mathbb{N},\ 0 < \alpha < 1$, то можно увеличивающими преобразованиями отражения добиться того, чтобы континуант состоял только из блоков*

$$C_0^1 = (\underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m}, C_1^0) \text{ и } C_1^1 = (\underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m+1}, C_1^0).$$

Если, напротив, отношение количества блоков C_1^0 к количеству блоков C_0^0 равно $m+\alpha$, где $m \in \mathbb{N},\ 0 < \alpha < 1$, то можно увеличивающими преобразованиями добиться того, чтобы континуант состоял только из блоков

$$C_0^1 = (\underbrace{C_1^0, \ldots, C_1^0}_{m}, C_0^0) \text{ и } C_1^1 = (\underbrace{C_1^0, \ldots, C_1^0}_{m+1}, C_0^0).$$

Если, наконец, отношение количества блоков равно $m \in \mathbb{N}$, то максимум достигается на периодическом континуанте, состоящим из блоков

$$(C_1^0 \underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m}) \text{ или } (\underbrace{C_1^0, \ldots, C_1^0}_{m}, C_0^0)$$

в зависимости от того, каких блоков больше - C_0^0 или же C_1^0.

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы. Пусть в континуанте встречается блок $C_k = (C_1^0, \underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m-k}, C_1^0)$, где $k > 0$. Поскольку отношение числа блоков C_0^0 и C_1^0 больше m, то существует блок $C_t = (\underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m+t})$, где $t > 0$. Пусть блок C_k встречается в континуанте раньше C_t. Тогда посмотрим на предпоследнее неполное частное блока C_k, равное $a_i = a + 1$ и первое неполное частное блока C_t, равное $a_j = a$. Континуант в этом случае имеет вид

$$\langle \overbrace{\ldots, C_1^0, \underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m-k},}^{\overrightarrow{P}} \underbrace{\overbrace{a+1}^{a_i}, b, \ldots, \overbrace{a}^{a_j}}_{\overrightarrow{Q}}, \overbrace{b, \underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m+t-1} \ldots}^{\overrightarrow{R}} \rangle$$

Тогда по лемме 1.24 отражение набора Q увеличивает континуант, поскольку первый отличающийся блок перед a_i равен $C_1^0 = (a+1, b)$, а за a_j - $C_0^0 = (a, b)$, что и требовалось доказать. Если же напротив C_t идет раньше C_k, то отражение Q

$$\langle \overbrace{\ldots, \underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m+t-1}}^{\overrightarrow{P}} \underbrace{a, b, \ldots, a+1,}_{\overrightarrow{Q}} \overbrace{b, \underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0,}_{m-k} C_1^0, \ldots}^{\overrightarrow{R}} \rangle$$

аналогично увеличивает континуант. Таким же образом поступаем, если существует блок $C_t = (\underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m+t+1})$, $t > 0$. В этом случае найдется блок $C_k = (C_1^0, \underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m-k}, C_1^0)$, $k \geqslant 0$, и аналогичная замена увеличит континуант.

Докажем теперь второе утверждение. Пусть существует блок $C_k = (C_0^0, \underbrace{C_1^0, \ldots, C_1^0}_{m-k}, C_0^0)$, где $k > 0$. По тем же соображением найдется блок $C_t = (\underbrace{C_1^0, \ldots, C_1^0}_{m+t}), t > 0$. Аналогично предположим, что блок C_k идет раньше C_t. Тогда рассмотрим замену отражением Q :

$$\langle \overbrace{\ldots, C_0^0, \underbrace{C_1^0, \ldots, C_1^0,}_{m-k}}^{\overrightarrow{P}} \underbrace{a, b, \ldots, a+1}_{\overrightarrow{Q}}, \overbrace{b, \underbrace{C_1^0, \ldots, C_1^0,}_{m+t-1} \ldots}^{\overrightarrow{R}} \rangle$$

При данной замене первое различие цепных дробей $[\overleftarrow{P}]$ и $[\overrightarrow{Q}]$ будет в $m - k + 1$–ом нечетном неполном частном. Поскольку у $[\overleftarrow{P}]$ оно меньше, то отражение Q, которое начинается с a и заканчивается на $a+1$ увеличивает континуант. Вторая часть доказывается аналогично.

Докажем третье утверждение леммы. Пусть доля C_0^0 больше. Если существует блок C_k, в котором идут менее $m-1$ раз подряд идет C_0^0, то существует блок, в котором идут менее $m-1$ раз подряд идет C_1^0, а значит, аналогично первым двум частям первым двум частям, если C_k не является началом или концом континуанта, существует увеличивающая замена. Рассмотрим теперь концы континуанта. Легко видеть, что континуант должен начинаться с C_1^0 и заканчиваться на C_0^0. Пусть есть нарушение блоковой структуры в начале, то есть континуант имеет вид

$$\langle C_1^0, \underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m-k}, C_1^0, \ldots, \underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m+t}, \ldots \rangle, \text{ где } k > 0, t > 0$$

В этом случае, очевидно, работает тот же самые прием, что и в первой части. Если же нарушение в конце, то есть

$$\langle \ldots, \underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m+t}, \ldots, C_1^0, \underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m-k} \rangle, \ k > 0, t > 0,$$

то отражение Q

$$\langle \overbrace{\ldots, \underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m+t-1}}^{\overrightarrow{P}}, \underbrace{a, b, \ldots, a+1}_{\overrightarrow{Q}}, \overbrace{b, \underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m-k}}^{\overrightarrow{R}} \rangle, \text{ где } k > 0, \ t > 0,$$

увеличивает континуант, поскольку первое отличающееся неполное частное $[\overleftarrow{P}]$ и $[\overrightarrow{R}]$ у $[\overrightarrow{R}]$ равно $+\infty$ и имеет четный индекс. Что и требовалось доказать. $\square$

Замечание. Нетрудно доказать, что периодический континуант, составленный из блоков $(C_1^0 \underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m})$, не более, чем в 2 раза отличается от континуанта той же длины, составленного из блоков $(\underbrace{C_0^0, \ldots, C_0^0}_{m}, C_1^0)$.

Приведем теперь индуктивное обобщение доказанной леммы. Для этого дадим индуктивное определение блоковой структуры i-го уровня.

1) Континуант имеет блоковую структуру 0-го уровня, если его последовательность неполных частных можно представить в виде последовательности блоков C_0^0 и C_1^0. Как было сказано выше, мы без ограничения общности считаем, что любой континуант из $M_3(n, s_n)$ имеет блоковую структуру $0-$го уровня.
2) Если континуант имеет блоковую структуру $k-$го уровня, то есть представим в виде

$$\langle C_{i_1}^k, C_{i_2}^k, \ldots, C_{i_m}^k \rangle, i_l \in \{0, 1\}$$

и при этом его также можно представить в виде

$$\langle C_{j_1}^{k+1}, C_{j_2}^{k+1}, \ldots, C_{j_n}^{k+1} \rangle, j_l \in \{0, 1\}, \tag{1.71}$$

где

$$C_0^{k+1} = (\underbrace{C_b^k, \ldots, C_b^k}_{n}, C_s^k), \quad C_1^{k+1} = (\underbrace{C_b^k, \ldots, C_b^k}_{n+1}, C_s^k), \quad b + s = 1,$$

то такое представление назовем блоковой структурой $k + 1-$го уровня. Блок C_b^k мы назовем доминирующим блоком, а парный ему блок C_s^l - доминируемым. Назовем блоковую структуру $k + 1-$го уровня вырожденной, если все j_l в (1.71) одновременно равны между собой, и невырожденной в противном случае. Лемму 1.25 можно с помощью новых определений сформулировать в следующем, более кратком виде:

(i) *Если континуант имеет невырожденную блоковую структуру $0-$го уровня, то его можно при помощи увеличивающих преобразований перевести в континуант, имеющий блоковую структуру 1-го уровня.*

(ii) *Если в континуанте блоковая структура 1-го уровня вырождена, то данный континуант является максимумом по множеству $M_3(n, S_n)$ с точностью до некоторой, не зависящей от n мультипликативной константы.*

Итак, пусть континуант состоит из блоков $k-$го уровня C_0^k и C_1^k. Тогда проведем индуктивный переход к блокам $k + 1-$го уровня.

Теорема 1.4 (Рекурсивный алгоритм поиска максимума).
(i) *Если континуант имеет невырожденную блоковую структуру $k-$го уровня, то его можно при помощи увеличивающих преобразований перевести в континуант, имеющий блоковую структуру $k+1$-го уровня.*
(ii)*Если в континуанте блоковая структура $k+1$-го уровня вырождена, то данный континуант отличается от максимума по множеству $M_3(n, S_n)$ не более чем в 8 раз.*

Доказательству утверждения **(i)** предпошлем ряд вспомогательных лемм и следствий. Прежде всего, изучим более подробно структуру блоков $k+1-$го уровня. Обозначим

$$C_{tail}^k = (b, C_s^0, C_s^1, \ldots, C_s^{k-1}).$$

Легко видеть, что $C_{tail}^k = (C_{tail}^{k-1}, C_s^{k-1}.)$ Назовем C_{tail}^k *хвостом k-го уровня.* Введем еще одно обозначение: пусть последовательность неполных частных X представима в виде $X = (A, B)$. Тогда в качестве $X \setminus B$ мы будем обозначать A. Если же данное представление X не имеет места, то обозначение $X \setminus B$ некорректно.

Лемма 1.26 (Лемма о существовании хвоста). *Любой блок $k-$го уровня C_i^k представим в виде $(C_i^k \setminus C_{tail}^k, C_{tail}^k)$, $i \in \{0, 1\}$.*

Доказательство. Утверждение несложно доказывается по индукции. Для $k = 0$ оно очевидно, C_{tail}^k в этом случае равно b. Пусть утверждение верно для всех $k < l+1$, тогда, пользуясь предположением индукции, получаем:

$$C_0^{l+1} = (\underbrace{C_b^l, \ldots, C_b^l}_{n}, C_s^l) = (\underbrace{C_b^l, \ldots, C_b^l}_{n-1}, C_b^l \setminus C_{tail}^l, \underbrace{C_{tail}^l, C_s^l}_{C_{tail}^{l+1}}). \tag{1.72}$$

Аналогично для C_1^{l+1}. □

Лемма 1.27 (Основная лемма о хвосте). $\overleftarrow{C_i^k} = (C_{tail}^k, C_i^k \setminus C_{tail}^k)$.

Доказательство. Докажем по индукции. Для $k = 0$ очевидно, что

$$\overleftarrow{C_0^0} = (b, C_0^0 \setminus b), \quad \overleftarrow{C_1^0} = (b, C_1^0 \setminus b).$$

Пусть утверждение верно для всех $k \leqslant l$; рассмотрим $k = l + 1$:

$$C_0^{l+1} = (\underbrace{C_b^l, \ldots, C_b^l}_{n}, C_s^l), \quad \overleftarrow{C_0^{l+1}} = (\overleftarrow{C_s^l}, \underbrace{\overleftarrow{C_b^l}, \ldots, \overleftarrow{C_b^l}}_{n}).$$

Пользуясь предположением индукции, получаем:

$$\overleftarrow{C_0^{l+1}} = (\overbrace{C_{tail}^l, C_s^l \setminus C_{tail}^l}^{\overleftarrow{C_s^l}}, \underbrace{\overbrace{C_{tail}^l, C_b^l \setminus C_{tail}^l}^{\overleftarrow{C_b^l}}, \ldots, \overbrace{C_{tail}^l, C_b^l \setminus C_{tail}^l}^{\overleftarrow{C_b^l}}}_{n}) =$$

$$= (C_{tail}^l, C_s^l, \underbrace{C_b^l, \ldots, C_b^l, C_b^l \setminus C_{tail}^l}_{n}) = (C_{tail}^{l+1}, \underbrace{C_b^l, \ldots, C_b^l, C_b^l \setminus C_{tail}^l}_{n}) =$$

$$= (C_{tail}^{l+1}, C_0^{l+1} \setminus C_{tail}^{l+1}). \quad (1.73)$$

Абсолютно аналогично утверждение доказывается для C_1^{l+1}. Лемма доказана.

□

Выведем три простых следствия доказанной леммы.

Следствие 1.7. $\overleftarrow{C_i^k \setminus C_{tail}^k} = C_i^k \setminus C_{tail}^k, \quad \overleftarrow{C_{tail}^k} = C_{tail}^k.$

Доказательство. По предыдущей лемме имеем:

$$\overleftarrow{C_i^k} = (C_{tail}^k, C_i^k \setminus C_{tail}^k).$$

С другой стороны,

$$\overleftarrow{C_i^k} = \overleftarrow{(C_i^k \setminus C_{tail}^k, C_{tail}^k)} = (\overleftarrow{C_{tail}^k}, \overleftarrow{C_i^k \setminus C_{tail}^k}).$$

Что и требовалось доказать. □

Лемма 1.28 (Обобщенная лемма о хвосте)**.**

$$\overleftarrow{(C_{i_1}^k, C_{i_2}^k, \ldots, C_{i_n}^k)} = (C_{tail}^k, C_{i_n}^k, \ldots, C_{i_2}^k, C_{i_1}^k \setminus C_{tail}^k), \quad i_j \in \{0, 1\}.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\overleftarrow{(C_{i_1}^k, C_{i_2}^k, \ldots, C_{i_n}^k)} = (\overleftarrow{C_{i_n}^k}, \ldots, \overleftarrow{C_{i_2}^k}, \overleftarrow{C_{i_1}^k}).$$

Применяя лемму 1.27 к каждому из блоков $C^k_{i_j}$, получаем

$$(\overleftarrow{C^k_{i_n}},\dots,\overleftarrow{C^k_{i_2}},\overleftarrow{C^k_{i_1}}) = (C^k_{tail}, C^k_{i_n}\setminus C^k_{tail},\dots,C^k_{tail},C^k_{i_2}\setminus C^k_{tail},C^k_{tail},C^k_{i_1}\setminus C^k_{tail}) =$$
$$= (C^k_{tail}, C^k_{i_n},\dots,C^k_{i_2},C^k_{i_1}\setminus C^k_{tail}). \quad (1.74)$$

□

Следствие 1.8.

$$\overleftarrow{(C^k_{i_1},C^k_{i_2},\dots,C^k_{i_n}\setminus C^k_{tail})} = (C^k_{i_n},\dots,C^k_{i_2},C^k_{i_1}\setminus C^k_{tail}),\quad i_j\in\{0,1\}.$$

Доказательство. Утверждение очевидно следует из леммы 1.28 и следствия 1.7. □

Лемма 1.29. *Если в континуанте встречаются последовательности неполных частных*

$$(C^k_1,\underbrace{C^k_0,\dots,C^k_0}_{m-k},C^k_1)$$

и

$$(\underbrace{C^k_0,\dots,C^k_0}_{m+t})$$

для каких-то натуральных k и t, то для данного континуанта существует абсолютно увеличивающая замена отражением.

Доказательство. Рассмотрим следующее разбиение континуанта:

$$\langle \overbrace{\dots,C^k_1,\underbrace{C^k_0,\dots,C^k_0,}_{m-k}}^{\overrightarrow{P}}\overbrace{C^k_1,\dots,C^k_0\setminus C^k_{tail},}^{\overrightarrow{Q}}\overbrace{C^k_{tail},\underbrace{C^k_0,\dots,C^k_0}_{m+t-1},\dots}^{\overrightarrow{R}}\rangle. \quad (1.75)$$

Заметим, что первое отличающееся неполное частное в цепных дробях $[\overleftarrow{P}]$ и $[\overrightarrow{R}]$ есть первое отличающееся неполное частное дробей $[C^k_1]$ и $[C^k_0]$. Действительно,

$$[\overrightarrow{R}] = [C^k_{tail},\underbrace{C^k_0,\dots,C^k_0}_{m+t-1},\dots].$$

С другой стороны, по лемме 1.28

$$[\overleftarrow{P}] = [C_{tail}^k, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{m-k}, C_1^k, \ldots],$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим $Q = (q_1, \ldots, q_l)$, найдем такое минимальное i, что $q_i \neq q_{l+1-i}$. Для этого сравним $\overrightarrow{Q}$ и $\overleftarrow{Q}$. По следствию 1.8

$$\overleftarrow{Q} = (\overleftarrow{C_0^k \setminus C_{tail}^k} \overleftarrow{C_0^k} \ldots),$$

что по лемме 1.28 и следствию 1.7 равно

$$(C_0^k \setminus C_{tail}^k, C_{tail}^k, C_i^k \setminus C_{tail}^k \ldots) = (C_0^k \ldots).$$

Таким образом, поскольку $\overrightarrow{Q} = (C_k^1 \ldots)$, получаем, что искомое i есть первое отличающееся неполное частное цепных дробей $[C_1^k]$ и $[C_0^k]$. Следовательно выражения $([\overleftarrow{P}] - [\overrightarrow{R}])$ и $([\overrightarrow{Q}] - [\overleftarrow{Q}])$ имеют одинаковый знак, то есть

$$([\overleftarrow{P}] - [\overrightarrow{R}])([\overrightarrow{Q}] - [\overleftarrow{Q}]) > 0.$$

Отсюда по лемме 1.8 отражение $\overrightarrow{Q}$ в формуле (1.75) увеличивает континуант, что и требовалось доказать. □

Замечание. Нетрудно видеть, что в результате замены континуант примет вид

$$\begin{aligned}\langle \overbrace{\ldots, C_1^k, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{m-k}}^{\overrightarrow{P}} \overbrace{C_0^k, \ldots, C_1^k \setminus C_{tail}^k}^{\overleftarrow{Q}}, \overbrace{C_{tail}^k, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{m+t-1} \ldots}^{\overrightarrow{R}} \rangle &= \\ = \langle \overbrace{\ldots, C_1^k, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{m-k}}^{\overrightarrow{P}} \overbrace{C_0^k, \ldots, C_1^k}^{\overleftarrow{Q}}, \overbrace{\underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{m+t-1}, \ldots}^{\overrightarrow{R}} \rangle&\end{aligned} \tag{1.76}$$

и будет также иметь блоковую структуру $k-$го уровня.

Следствие 1.9. *Если континуант состоит из блоков C_0^k и C_1^k т.е. имеет вид*

$$\langle X, C_0^k, Y, C_1^k, Z \rangle, \tag{1.77}$$

то существует замена отражением, в результате которой континуант примет вид

$$\langle X, C_1^k, Y', C_0^k, Z\rangle$$

и будет также иметь блоковую структуру $k-$го уровня.

Доказательство. Пусть континуант имеет вид (1.77) Произведем следующее отражение Q:

$$\langle X, \overbrace{C_0^k, Y, C_1^k \setminus C_{tail}^k}^{\overrightarrow{Q}}, C_{tail}^k, Z\rangle.$$

Из вышедоказанного следует, что континуант в результате отражения примет вид

$$\langle X, \overbrace{C_1^k, Y', C_0^k \setminus C_{tail}^k}^{\overleftarrow{Q}}, C_{tail}^k, Z\rangle = \langle X, C_1^k, Y', C_0^k, Z\rangle,$$

где Y' состоит из блоков C_i^k. Что и требовалось доказать. □

Докажем теперь теорему 1.4.

Доказательство. Докажем утверждение **(i)**.

Если континуант не имеет блоковой структуры $k+1-$го уровня, то это означает одну из трех возможных ситуаций:

1) В континуанте встречаются последовательности неполных частных $(C_1^k, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{m-k}, C_1^k)$ и $(\underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{m+t})$ для каких-то натуральных k и t. В этом случае, как показано в лемме 1.29, существует абсолютно увеличивающая замена отражением. Это означает, что произвольный континуант $\langle A\rangle$ можно при помощи увеличивающих отражений перевести в некоторый континуант $\langle A'\rangle$, в котором не реализуется ситуация 1)

2)Континуант начинается с блока C_k^1 или заканчивается на блок C_0^k.

3)Континуант имеет вид

$$\langle\underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{m-k}, \ldots, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{m+t}, \ldots\rangle \text{ или } \langle \ldots, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{m+t}, \ldots, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{m-k}\rangle$$

для каких-то натуральных k и t.

Разберем 2) и 3). Покажем, что в этих случаях $\langle A' \rangle$ можно при помощи отражений перевести в континуант, имеющий блоковую структуру $k+1-$го уровня. Обозначим за $len(k)$ длину (т.е. количество неполных частных) блока C_0^k. Очевидно, $len(k) \geqslant 2^{k+1}$.

2) Пусть континуант $\langle A \rangle$ начинается с блока C_1^k. Выберем в $\langle A \rangle$ произвольный блок C_0^k.

$$\langle A \rangle = \langle C_1^k, \ldots, C_0^k, \ldots \rangle.$$

Тогда по следствию 1.9 существует отражение Q

$$\langle \overbrace{C_1^k, \ldots, C_0^k \setminus C_{tail}^k}^{\overrightarrow{Q}}, C_{tail}^k, \ldots \rangle,$$

превращающее континуант в

$$\langle A' \rangle = \langle C_0^k, \ldots, C_1^k, \ldots \rangle.$$

Данное отражение может быть уменьшающим. Оценим, во сколько раз оно может уменьшить $\langle A \rangle$. Из формулы (1.48) следует, что

$$\left| \frac{\langle A \rangle - \langle A' \rangle}{\langle A \rangle} \right| < |[\overleftarrow{Q}] - [\overrightarrow{Q}]|.$$

Оценим по модулю разность $[\overleftarrow{Q}] - [\overrightarrow{Q}]$. Как уже было показано, $[\overleftarrow{Q}]$ имеет вид

$$[C_0^k \ldots] = [C_b^{k-1}, \ldots, C_b^{k-1}, C_s^{k-1} \ldots].$$

Аналогично

$$[\overrightarrow{Q}] = [C_1^k \ldots] = [C_b^{k-1}, \ldots, C_b^{k-1}, C_s^{k-1} \ldots].$$

Следовательно, первые $len(k-1)$ неполных частных цепных дробей $[\overleftarrow{Q}]$ и $[\overrightarrow{Q}]$ совпадают, а значит

$$|[\overleftarrow{Q}] - [\overrightarrow{Q}]| \leqslant \frac{1}{2^{len(k-1)}} \leqslant \frac{1}{2^{2^k}}.$$

То есть:

$$\frac{\langle A' \rangle}{\langle A \rangle} > 1 - \frac{1}{2^{2^k}}.$$

Аналогичным преобразованием отражения можно добиться, чтобы континуант заканчивался на блок C_1^k. Тогда $\langle A' \rangle$ имеет вид

$$\langle A' \rangle = \langle \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{l_0}, C_1^k, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{l_1}, C_1^k, \ldots, C_1^k \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{l_{d-1}}, C_1^k, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{l_d}, C_1^k \rangle.$$

3) Описанными выше увеличивающими преобразованиями (1.75) можно добиться, чтобы все l_i кроме l_0 отличались не более чем на 1, а $l_0 \leqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant d} l_i$. Если $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant d} l_i - l_0 \leqslant 1$, то $\langle A' \rangle$ имеет блоковую структуру $k+1-$го уровня, и индуктивный переход выполнен. В противном случае существует i такое, что $l_i - l_0 > 1$. Рассмотрим отражение Q:

$$\begin{aligned} \langle \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{l_0} \overbrace{C_1^k, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{l_1}, \ldots, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{l_{i-1}} C_1^k \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k \setminus C_{tail}^k}_{l_i - l_0},}^{\overrightarrow{Q}} \\ C_{tail}^k, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{l_0} C_1^k \ldots \rangle. \end{aligned} \tag{1.78}$$

Данное преобразование, аналогично, уменьшает континуант не более, чем в $1 + \frac{1}{2^{2^k - 1}}$ раз. В результате отражения получим континуант

$$\langle \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{l_i}, C_1^k, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{l_{i-1}}, C_1^k, \ldots, C_1^k \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{l_1}, C_1^k, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{l_0}, C_1^k, \ldots \rangle,$$

который увеличивающими преобразованиями (1.75) приводится к виду

$$\langle A'' \rangle = \langle \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{\overline{l_0}}, C_1^k, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{\overline{l_1}}, C_1^k, \ldots, C_1^k \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{\overline{l_{d-1}}}, C_1^k, \underbrace{C_0^k, \ldots, C_0^k}_{\overline{l_d}}, C_1^k \rangle,$$

где $\overline{l_0} = l_i$, а все $\overline{l_j}$ отличаются друг от друга не более, чем на 1, $|\overline{l_i} - \overline{l_j}| \leqslant 1$. Таким образом, на каждом шаге уменьшающие преобразования уменьшают континуант не более, чем в $\left(1 + \frac{1}{2^{2^k - 1}}\right)^3$ раз. Следовательно, в результате k шагов континуант под действием уменьшающихся преобразований уменьшится суммарно не более, чем в $\prod\limits_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{2^i - 1}}\right)^3 < 8$ раз.

Докажем утверждение **(ii)**.

Применяя k раз утверждение **(i)** можно произвольный континуант $\langle A \rangle$ из $M_3(n, S_n)$ увеличивающими преобразованиями отражения перевести в континуант $\langle A'_m \rangle$, имеющий блоковую структуру $k+1-$го уровня. Поскольку данная структура по условию леммы является вырожденной, конец цепочки преобразований не зависит от выбора начального континуанта в $M_3(n, S_n)$. А значит, поскольку под действием уменьшающих преобразований континуант уменьшится суммарно не более, чем в 8 раз, то и континуант $\langle A'_m \rangle$ отличается от максимума по множеству $M_3(n, S_n)$ не более, чем в 8 раз.

Таким образом, теорема доказана полностью. □

Следствие 1.10. *Если* $\langle A_m \rangle = \max(M_3(n, S_n))$, *то*

(i) *Существует такое натуральное* k, *что* $\langle A_m \rangle$ *не более, чем в* 8 *раз отличается от некоторого алгоритмически построимого континуанта* $\langle A'_m \rangle$ *из* $M_3(n, S_n)$, *имеющего вырожденную блоковую структуру* $k-$*го уровня.*

(ii) $\langle \underbrace{A'_m, A'_m, \ldots, A'_m}_{l} \rangle$ *не более, чем в* 8 *раз отличается от* $\max(M_3(ln, lS_n))$

Доказательство.

(i) Применим к $\langle A_m \rangle$ рекурсивный алгоритм поиска максимума. В результате данного алгоритма он перейдет в $\langle A'_m \rangle$ под действием некоторой цепочки отражений. Как следует из теоремы 1.4 $\langle A'_m \rangle$ не более, чем в 8 раз отличается от $\langle A_m \rangle$, что и требовалось доказать.

(ii) Поскольку $\langle A'_m \rangle$ имеет вырожденную блоковую структуру $k-$го уровня для некоторого натурального k, то $\langle \underbrace{A'_m, A'_m, \ldots, A'_m}_{l} \rangle$ также имеет вырожденную блоковую структуру $k-$го уровня. Для завершения доказательства следствия остается только воспользоваться утверждением **(ii)** теоремы 1.4. □

Таким образом, задача на поиск асимптотики максимума решена, предъявлен алгоритм, позволяющий прийти к нему за конечное число шагов. Назовем результат работы алгоритма *асимптотическим максимумом* по множеству $M(n, S_n)$ и обозначим его $\max_a(n, S_n)$. Из теорем 1.1, 1.3 и 1.4 следует, что существует некоторая не зависящая от n и S_n константа c_0, что выполнено неравенство:

$$1 \leqslant \frac{\max(n, S_n)}{\max_a(n, S_n)} < c_0.$$

В завершении первой главы докажем лемму об асимптотике периодического континуанта.

Лемма 1.30.

$$\langle\underbrace{A, \ldots, A}_{n}\rangle \sim c(\langle A\rangle + \langle A^-\rangle\lambda)^n, \tag{1.79}$$

где $\lambda = [\overline{A}]$– квадратичная иррациональность, а c - некоторая, зависящая от A, но не зависящая от n константа.

Доказательство. Пользуясь правилом раскрытия континуантов (1.2), получаем:

$$\begin{aligned}\langle\underbrace{A, \ldots, A}_{n}\rangle = \langle A\rangle\langle\underbrace{A, \ldots, A}_{n-1}\rangle + \langle A^-\rangle\langle A_-\underbrace{A, \ldots, A}_{n-2}\rangle = \\ = \langle\underbrace{A, \ldots, A}_{n-1}\rangle(\langle A\rangle + \langle A^-\rangle[\underbrace{A, \ldots, A}_{n-1}]).\end{aligned} \tag{1.80}$$

Следовательно:

$$\langle\underbrace{A, \ldots, A}_{n}\rangle = \langle A\rangle \prod_{i=2}^{n}(\langle A\rangle + \langle A^-\rangle[\underbrace{A, \ldots, A}_{i-1}]).$$

Докажем, что отношение этого выражения к $(\langle A\rangle + \langle A^-\rangle\lambda)^n$ стремится к константе. Рассмотрим отношение

$$\prod_{i=2}^{\infty}\frac{\langle A\rangle + \langle A^-\rangle\lambda}{\langle A\rangle + \langle A^-\rangle[\underbrace{A, \ldots, A}_{i-1}]} = \prod_{i=2}^{\infty}\frac{\langle A\rangle + \langle A^-\rangle([\overbrace{A, \ldots, A}^{i-1}] - r_n)}{\langle A\rangle + \langle A^-\rangle[\underbrace{A, \ldots, A}_{i-1}]},$$

где $r_n = [\underbrace{A, \ldots, A}_{i-1}] - \lambda$.

Поскольку $|r_n| < \frac{1}{2^n}$, получаем:

$$\prod_{i=2}^{\infty} \frac{\langle A\rangle + \langle A^-\rangle([\overbrace{A,\ldots,A}^{i-1}] - r_n)}{\langle A\rangle + \langle A^-\rangle[\underbrace{A,\ldots,A}_{i-1}]} = \prod_{i=2}^{\infty}(1 - \frac{\langle A^-\rangle r_n}{\langle A\rangle + \langle A^-\rangle[\underbrace{A,\ldots,A}_{i-1}]}).$$

По известному свойству это бесконечное произведение сходится тогда и только тогда, когда абсолютно сходится ряд

$$\sum_{i=2}^{\infty} r_n \frac{\langle A^-\rangle}{\langle A\rangle + \langle A^-\rangle[\underbrace{A,\ldots,A}_{i-1}]},$$

что выполнено, поскольку выражение

$$\frac{\langle A^-\rangle}{\langle A\rangle + \langle A^-\rangle[\underbrace{A,\ldots,A}_{i-1}]}$$

ограниченно положительными константами. А следовательно, бесконечное произведение имеет предел, лемма доказана. $\square$

Глава 2
Производные функций семейства Данжуа

2.1. Оценки конечных приращений

В этом разделе будут доказаны леммы об оценках сверху и снизу на величины
$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta)-g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \quad \text{и} \quad \frac{g_\tau(x+\delta)-g_\tau(x)}{\delta}$$
через $S_t^\varphi(x), S_t^\tau(x)$ и знаменатели подходящих дробей к иррациональному числу x. Все леммы данного раздела будут доказаны только для случая $\delta > 0$, поскольку случай $\delta < 0$ полностью аналогичен.

Прежде всего отметим следующее важное свойство.

Лемма 2.1. *[28, с. 23]. Если x - число, заключенное между двумя подходящими дробями $\frac{p_{l-1}}{q_{l-1}}$ и $\frac{p_l}{q_l}$, то $l+1$-е неполное частное x - это максимальное m такое, что*
$$\frac{p_{l+1}}{q_{l+1}} = \frac{p_{l-1}}{q_{l-1}} \oplus \underbrace{\frac{p_l}{q_l} \oplus \ldots \oplus \frac{p_l}{q_l}}_{m}$$
лежит по ту же самую сторону от x, что и $\frac{p_{l-1}}{q_{l-1}}$.

В условиях предыдущей леммы если $i < m$, то дробь
$$\frac{p_{l-1}}{q_{l-1}} \oplus \underbrace{\frac{p_l}{q_l} \oplus \ldots \oplus \frac{p_l}{q_l}}_{i}$$
называется *промежуточной дробью* числа x.

Лемма 2.2. *Пусть $x = [a_1, \ldots, a_t, \ldots]$ - иррациональное число, тогда для любого достаточно малого по абсолютной величине δ существует $t = t(x, \delta)$ такое, что*
$$\begin{aligned} \frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta)-g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} &\geqslant \frac{q_t q_{t-1}}{\varphi^{S_t^\varphi(x)+7}}, \\ \frac{g_\tau(x+\delta)-g_\tau(x)}{\delta} &\geqslant \frac{q_t q_{t-1}}{\varphi^{S_t^\tau(x)+9}}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Доказательство. Будем доказывать утверждение леммы для обеих функций параллельно.

Пусть ξ– промежуточная или подходящая дробь к числу x с минимальным знаменателем, попавшая в интервал $(x, x+\delta)$. По лемме 2.1 она имеет вид

$$\xi = \frac{p_{l-1}}{q_{l-1}} \oplus \underbrace{\frac{p_l}{q_l} \oplus \ldots \oplus \frac{p_l}{q_l}}_{k+1}, \quad k \geqslant 0.$$

С другой стороны, ξ представима в виде $\xi = \xi_0 \oplus \xi_1$, где среди дробей ξ_0 и ξ_1 одна подходящая к числу x, а вторая подходящая или промежуточная. Обозначим за ξ_0 меньшую из дробей, а за ξ_1 - большую. Поскольку знаменатели ξ_0 и ξ_1 меньше знаменателя ξ, то выполнены неравенства:

$$\xi_0 < x < \xi < x + \delta < \xi_1.$$

Нетрудно видеть, что ξ_0 - подходящая дробь к x. Действительно, если ξ_0 – промежуточная дробь, то по лемме 2.1 медианта $\xi = \xi_0 \oplus \xi_1$ должна лежать по ту же сторону от x, что и ξ_0, противоречие. Отметим также, что если $k = 0$, то обе дроби ξ_0 и ξ_1 являются подходящими к x. В этом случае подходящая дробь ξ_1 имеет меньший порядок, поскольку медианта ξ_0 и ξ_1 лежит по ту же сторону от x, что и ξ_1. Таким образом,

$$\xi_0 = \frac{p_l}{q_l}, \quad \xi_1 = \frac{p_{l-1}}{q_{l-1}} \oplus \underbrace{\frac{p_l}{q_l} \oplus \ldots \oplus \frac{p_l}{q_l}}_{k}.$$

Поскольку $\xi_0 < x < \xi_1$, подходящая дробь ξ_0 имеет четный порядок, т.е. $\xi_0 = [a_1, \ldots, a_{2t}]$. Рассмотрим 2 случая:

1) $k > 0$.

2) $k = 0$.

Разберем случай 1). Имеем:

$$\xi_1 = [a_1, \ldots, a_{2t}, k], \ \xi = [a_1, \ldots, a_{2t}, k+1], \ k+1 \leqslant a_{2t+1}. \tag{2.2}$$

Пусть теперь z - такое минимальное натуральное число, что выполнено хотя бы одно из условий:

$$\xi_- = \xi_0 \oplus \underbrace{\xi \oplus \ldots \oplus \xi}_{z} > x \text{ или } \xi_+ = \xi_1 \oplus \underbrace{\xi \oplus \ldots \oplus \xi}_{z} < x + \delta.$$

Введем также дроби

$$\xi_{--} = \xi_0 \oplus \underbrace{\xi \oplus \ldots \oplus \xi}_{z-1} < x \text{ и } \xi_{++} = \xi_1 \oplus \underbrace{\xi \oplus \ldots \oplus \xi}_{z-1} > x + \delta.$$

Таким образом,

$$\xi_0 \leqslant \xi_{--} < x < \xi < x + \delta < \xi_{++} \leqslant \xi_1. \tag{2.3}$$

Из монотонности функций $g_{\varphi^{-1}}(x)$ и $g_\tau(x)$ следует, что

$$g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x) \geqslant \min\left[g_{\varphi^{-1}}(\xi) - g_{\varphi^{-1}}(\xi_-),\ g_{\varphi^{-1}}(\xi_+) - g_{\varphi^{-1}}(\xi)\right], \tag{2.4}$$

аналогичное утверждение верно для функции $g_\tau(x)$. Посмотрим, как разлагаются ξ_- и ξ_+ в цепные дроби:

$$\begin{gathered}
\xi_- = \xi_0 \oplus \underbrace{\xi \oplus \ldots \oplus \xi}_{z} = \frac{\langle a_2, \ldots, a_{2t}\rangle + z\langle a_2, \ldots, a_{2t}, k+1\rangle}{\langle a_1, \ldots, a_{2t}\rangle + z\langle a_1, \ldots, a_{2t}, k+1\rangle} = \\
= \frac{\langle a_2, \ldots, a_{2t}, k+1, z\rangle}{\langle a_1, \ldots, a_{2t}, k+1, z\rangle} = [a_1, \ldots, a_{2t}, k+1, z]; \\
\xi_+ = \xi_1 \oplus \underbrace{\xi \oplus \ldots \oplus \xi}_{z} = \frac{\langle a_2, \ldots, a_{2t}, k\rangle + z\langle a_2, \ldots, a_{2t}, k+1\rangle}{\langle a_1, \ldots, a_{2t}, k\rangle + z\langle a_1, \ldots, a_{2t}, k+1\rangle} = \\
= \frac{\langle a_2, \ldots, a_{2t}, k\rangle + z\langle a_2, \ldots, a_{2t}, k, 1\rangle}{\langle a_1, \ldots, a_{2t}, k\rangle + z\langle a_1, \ldots, a_{2t}, k, 1\rangle} = \frac{\langle a_2, \ldots, a_{2t}, k, 1, z\rangle}{\langle a_1, \ldots, a_{2t}, k, 1, z\rangle} = [a_1, \ldots, a_{2t}, k, 1, z].
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Аналогично, при $z > 1$:

$$\xi_{--} = [0; a_1, \ldots, a_{2t}, k+1, z-1],\ \xi_{++} = [0; a_1, \ldots, a_{2t}, k, 1, z-1]. \tag{2.6}$$

Легко видеть, что при $z = 1$ выполняются равенства $\xi_{--} = \xi_0,\ \xi_{++} = \xi_1$. Обозначим $S_t^\varphi(x) - 1 = n_\varphi$,
$S_t^\tau(x) - 1 = n_\tau$. Посчитаем теперь разности

$$g_{\varphi^{-1}}(\xi) - g_{\varphi^{-1}}(\xi_-), g_{\varphi^{-1}}(\xi_+) - g_{\varphi^{-1}}(\xi) \text{ и } g_\tau(\xi) - g_\tau(\xi_-), g_\tau(\xi_+) - g_\tau(\xi).$$

Цепные дроби ξ и ξ_- отличаются только последним неполным частным, поэтому, ввиду (27), (29):

$$\begin{aligned} g_{\varphi^{-1}}(\xi) - g_{\varphi^{-1}}(\xi_-) &= \frac{1}{\varphi^{n_\varphi+k+1+2z}}, \\ g_\tau(\xi) - g_\tau(\xi_-) &= \frac{1}{\varphi^{n_\varphi+2k+2+z}}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Поскольку $\xi = [a_1, \ldots, a_{2t}, k, 1]$, то, аналогично,

$$\begin{aligned} g_{\varphi^{-1}}(\xi_+) - g_{\varphi^{-1}}(\xi) &= \frac{1}{\varphi^{n_\varphi+k+2+z}}, \\ g_\tau(\xi_+) - g_\tau(\xi) &= \frac{1}{\varphi^{n_\varphi+2k+2z+1}}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Из (2.7) и (2.8) несложно видеть, что

$$\begin{aligned} g_{\varphi^{-1}}(\xi) - g_{\varphi^{-1}}(\xi_-) &\leqslant g_{\varphi^{-1}}(\xi_+) - g_{\varphi^{-1}}(\xi), \\ g_\tau(\xi) - g_\tau(\xi_-) &\geqslant g_\tau(\xi_+) - g_\tau(\xi), \end{aligned} \tag{2.9}$$

а, следовательно, ввиду (2.4)

$$\begin{aligned} g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x) &\geqslant \frac{1}{\varphi^{n_\varphi+k+1+2z}}, \\ g_\tau(x+\delta) - g_\tau(x) &\geqslant \frac{1}{\varphi^{n_\varphi+2k+2z+1}}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Оценим теперь δ. Рассмотрим два подслучая:

1.1) ξ -подходящая дробь,

1.2) $\xi-$ промежуточная дробь.

Случай 1.1 разбивается на 2 подслучая:

1.1.1) $z = 1$

1.1.2) $z \geqslant 2$

1.1.1) Имеем ввиду леммы 2.1 $k + 1 = a_{2t+1}$,

$$\delta \leqslant \xi_1 - \xi_0 = \frac{1}{\langle a_1, \ldots, a_{2t}\rangle\langle a_1, \ldots, a_{2t}, k\rangle} \leqslant \frac{2}{q_{2t}q_{2t+1}}. \tag{2.11}$$

Таким образом, применяя оценки (2.11) и (2.10) и учитывая, что $\varphi^2 > 2$, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta)-g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} &\geqslant \frac{q_{2t}q_{2t+1}}{\varphi^{n_\varphi+k+3}} = \frac{q_{2t}q_{2t+1}}{\varphi^{a_1+2a_2+\ldots+2a_{2t}+a_{2t+1}+2}}, \\ \frac{g_{\tau}(x+\delta)-g_{\tau}(x)}{\delta} &\geqslant \frac{q_{2t}q_{2t+1}}{\varphi^{n_\tau+2k+3}} = \frac{q_{2t}q_{2t+1}}{\varphi^{2a_1+a_2+\ldots+a_{2t}+2a_{2t+1}+1}}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

1.1.2) Аналогично, $k+1=a_{2t+1}$. Поскольку $\xi_{--}<x$, то по лемме 2.1 $z-1\leqslant a_{2t+2}$. В этом случае получаем, используя (2.2) и (2.6):

$$\begin{aligned} \delta \leqslant \xi_{++}-\xi_{--} &= (\xi_{++}-\xi)+(\xi-\xi_{--}) = \\ &= \frac{1}{\langle a_2,\ldots,a_{2t},k,1,z-1\rangle\langle a_1,\ldots,a_{2t},k,1\rangle} + \\ &+ \frac{1}{\langle a_1,\ldots,a_{2t},k+1\rangle\langle a_1,\ldots,a_{2t},k+1,z-1\rangle} = \\ &= \frac{1}{q_{2t+1}}\left(\frac{1}{\langle a_1,\ldots,a_{2t},k,1,z-1\rangle} + \frac{1}{\langle a_1,\ldots,a_{2t},k+1,z-1\rangle}\right) \leqslant \\ &\leqslant \frac{2}{q_{2t+1}(z-1)\langle a_1,\ldots,a_{2t},k+1\rangle} = \frac{2}{q_{2t+1}^2(z-1)}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

То есть,

$$\delta \leqslant \frac{2}{q_{2t+1}^2(z-1)}. \tag{2.14}$$

Пользуясь тем, что функция $f(x)=\frac{x}{\varphi^{2x}}$ убывает на множестве натуральных чисел, из (2.10), (2.14) получаем оценку:

$$\begin{aligned} \frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta)-g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} &\geqslant \frac{q_{2t+1}^2(z-1)}{\varphi^{n_\varphi+k+2(z-1)+5}} \geqslant \\ \geqslant \frac{q_{2t+1}^2(a_{2t+2}+1)}{\varphi^{n_\varphi+k+2(a_{2t+2}+1)+5}} &\geqslant \frac{q_{2t+1}q_{2t+2}}{\varphi^{a_1+2a_2+\ldots+2a_{2t}+a_{2t+1}+2a_{2t+2}+6}} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Для функции $g_\tau(x)$ разберем 2 подслучая:

(i) $z-1\leqslant\frac{a_{2t+2}}{2}$. В этом случае, применяя оценки (2.10) и (2.14), заключаем:

$$\begin{aligned} \frac{g_{\tau}(x+\delta)-g_{\tau}(x)}{\delta} &\geqslant \frac{q_{2t+1}^2(z-1)}{\varphi^{n_\tau+2k+2(z-1)+5}} \geqslant \\ \geqslant \frac{q_{2t+1}^2a_{2t+2}}{2\varphi^{n_\tau+2k+a_{2t+2}+5}} &\geqslant \frac{q_{2t+1}q_{2t+2}}{\varphi^{2a_1+a_2+\ldots+a_{2t}+2a_{2t+1}+a_{2t+2}+7}}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Во втором неравенстве мы снова воспользовались монотонностью функции $\frac{x}{\varphi^{2x}}$.

(ii) $z - 1 > \frac{a_{2t+2}}{2}$.

Напомним, что $\xi = \frac{p_{2t+1}}{q_{2t+1}}$. Следовательно, по лемме 2.1 $x < \frac{p_{2t+2}}{q_{2t+2}} \oplus \xi < \xi$. Отсюда по монотонности функции $g_\tau(x)$ имеем ввиду (27):

$$g_\tau(x+\delta) - g_\tau(x) \geqslant g_\tau(\xi) - g_\tau(\xi \oplus \frac{p_{2t+2}}{q_{2t+2}}) = \frac{1}{\varphi^{n_\tau + 2a_{2t+1} + a_{2t+2} + 1}}. \tag{2.17}$$

Теперь, применяя (2.14) и заменяя $z-1$ на $\frac{a_{2t+2}}{2}$, окончательно оцениваем:

$$\begin{gathered} \frac{g_\tau(x+\delta) - g_\tau(x)}{\delta} \geqslant \frac{q_{2t+1}^2 (z-1)}{\varphi^{n_\tau + 2a_{2t+1} + a_{2t+2} + 1}} \geqslant \\ \geqslant \frac{q_{2t+1}^2 a_{2t+2}}{2\varphi^{n_\tau + 2a_{2t+1} + a_{2t+2} + 1}} \geqslant \frac{q_{2t+1} q_{2t+2}}{\varphi^{2a_1 + a_2 + \ldots + a_{2t} + 2a_{2t+1} + a_{2t+2} + 5}}. \end{gathered} \tag{2.18}$$

1.2) Поскольку ξ - промежуточная дробь, то $z = 1$ и

$$\delta \leqslant \frac{1}{\langle a_1, \ldots, a_{2t} \rangle \langle a_1, \ldots, a_{2t}, k \rangle} \leqslant \frac{1}{k q_{2t}^2}.$$

Поскольку $k < a_{2t+1} + 1$, имеем аналогично предыдущим случаям следующие оценки:

$$\begin{gathered} \frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \geqslant \frac{k q_{2t}^2}{\varphi^{n_\varphi + k + 3}} \geqslant \frac{(a_{2t+1} + 1) q_{2t}^2}{\varphi^{n_\varphi + a_{2t+1} + 4}} \geqslant \frac{q_{2t+1} q_{2t}}{\varphi^{a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_{2t} + a_{2t+1} + 4}}, \\ \frac{g_\tau(x+\delta) - g_\tau(x)}{\delta} \geqslant \frac{k q_{2t}^2}{\varphi^{n_\tau + 2k + 3}} \geqslant \frac{(a_{2t+1} + 1) q_{2t}^2}{\varphi^{n_\tau + 2a_{2t+1} + 3}} \geqslant \frac{q_{2t+1} q_{2t}}{\varphi^{2a_1 + a_2 + \ldots + a_{2t} + 2a_{2t+1} + 4}}. \end{gathered} \tag{2.19}$$

Теперь разберем 2), в этом случае соответствующие цепные дроби имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \xi_1 &= [a_1, \ldots, a_{2t-1}], \\ \xi &= [a_1, \ldots, a_{2t} + 1], \\ \xi_- &= [a_1, \ldots, a_{2t}, 1, z]. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Аналогично первому случаю оценим:

$$\begin{gathered} g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x) \geqslant \min\left(g_{\varphi^{-1}}(\xi) - g_{\varphi^{-1}}(\xi_-), g_{\varphi^{-1}}(\xi_+) - g_{\varphi^{-1}}(\xi)\right), \\ g_\tau(x+\delta) - g_\tau(x) \geqslant \min\left(g_\tau(\xi) - g_\tau(\xi_-), g_\tau(\xi_+) - g_\tau(\xi)\right), \\ g_{\varphi^{-1}}(\xi) - g_{\varphi^{-1}}(\xi_-) = \frac{1}{\varphi^{n_\varphi + 1 + 2z}}, \quad g_\tau(\xi) - g_\tau(\xi_-) = \frac{1}{\varphi^{n_\tau + z + 1}}, \\ g_{\varphi^{-1}}(\xi_+) - g_{\varphi^{-1}}(\xi) = \frac{1}{\varphi^{n_\varphi + 1 + z}}, \quad g_\tau(\xi_+) - g_\tau(\xi) = \frac{1}{\varphi^{n_\tau + 1 + 2z}}. \end{gathered} \tag{2.21}$$

А значит:

$$\begin{aligned} g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x) &\geqslant \frac{1}{\varphi^{n_\varphi+1+2z}}, \\ g_\tau(x+\delta) - g_\tau(x) &\geqslant \frac{1}{\varphi^{n_\tau+1+2z}}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Поскольку оценки на величины $g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)$ и $g_\tau(x+\delta) - g_\tau(x)$ совпадают, то достаточно доказать утверждение только для функции $g_{\varphi^{-1}}(x)$

Оценим δ. Так же, как и в случае 1), рассмотрим два подслучая:

2.1) ξ -подходящая дробь;

2.2) $\xi-$ промежуточная дробь.

Случай 2.1) дополнительно разбивается на два подслучая:

2.1.1) $z = 1$;

2.1.2) $z \geqslant 2$.

Разберем все случаи.

2.1.1) Получаем $a_{2t+1} = 1, \delta \leqslant \xi_1 - \xi_0 = \frac{1}{q_{2t-1}q_{2t}}$, следовательно

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \geqslant \frac{q_{2t}q_{2t-1}}{\varphi^{n_\varphi+3}} = \frac{q_{2t}q_{2t-1}}{\varphi^{a_1+2a_2+\ldots+2a_{2t}+2}} \tag{2.23}$$

2.1.2) Аналогично, $a_{2t+1} = 1$, и ввиду леммы 2.1 $z-1 \leqslant a_{2t+2}$. Кроме того, соответствующие цепные дроби в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_{--} &= [a_1, \ldots, a_{2t}, 1, z-1], \\ \xi_{+} &= [a_1, \ldots, a_{2t}+1, z], \\ \xi_{++} &= [a_1, \ldots, a_{2t}+1, z-1]. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Следовательно δ можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} &\delta \leqslant \xi_{++} - \xi_{--} = (\xi_{++} - \xi) + (\xi - \xi_{--}) = \\ &= \frac{1}{\langle a_2, \ldots, a_{2t}+1, z-1\rangle\langle a_1, \ldots, a_{2t}+1\rangle} + \frac{1}{\langle a_1, \ldots, a_{2t}+1\rangle\langle a_1, \ldots, a_{2t}, 1, z-1\rangle} \leqslant \\ &\leqslant \frac{2}{q_{2t+1}(z-1)q_{2t+1}} = \frac{2}{(z-1)q_{2t+1}^2}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{gathered}\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta)-g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta}\geqslant\frac{(z-1)q_{2t+1}^2}{\varphi^{n_\varphi+5+2(z-1)}}\geqslant\\ \geqslant\frac{(a_{2t+2}+1)q_{2t+1}^2}{\varphi^{n_\varphi+5+2(a_{2t+2}+1)}}\geqslant\frac{q_{2t+1}q_{2t+2}}{\varphi^{a_1+2a_2+\ldots+2a_{2t}+a_{2t+1}+2a_{2t+2}+7}}.\end{gathered}\tag{2.26}$$

2.2) Аналогично случаю 1.2) из леммы 2.1 получаем, что $z=1$, тогда $\delta\leqslant\xi_1-\xi_0=\frac{1}{q_{2t-1}q_{2t}}$, следовательно

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta)-g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta}\geqslant\frac{q_{2t}q_{2t-1}}{\varphi^{n_\varphi+3}}=\frac{q_{2t}q_{2t-1}}{\varphi^{a_1+2a_2+\ldots+2a_{2t}+2}}.\tag{2.27}$$

Объединяя все рассмотренные случаи, из формул (2.12), (2.15), (2.16), (2.18), (2.19), (2.23), (2.26) и (2.27) получаем утверждение леммы. □

Лемма 2.3. *Пусть* $x=[a_1,\ldots,a_t,\ldots]$ *- иррациональное число, тогда для любого достаточно малого по абсолютной величине* δ *существует* $t=t(x,\delta)$ *такое, что*

$$\begin{gathered}\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta)-g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta}\leqslant\frac{q_t^2}{\varphi^{S_t^\varphi(x)-5}},\\ \frac{g_\tau(x+\delta)-g_\tau(x)}{\delta}\leqslant\frac{q_t^2}{\varphi^{S_t^\tau(x)-5}}.\end{gathered}\tag{2.28}$$

Доказательство. Мы проведем доказательство только для функции $g_{\varphi^{-1}}(x)$, и при $\delta>0$, поскольку случаи, когда рассматриваемая функция - $g_\tau(x)$ или δ - отрицательно, совершенно аналогичны.

Таким же образом, как и в лемме 2.2 определим числа $\xi,\xi_0,\xi_1,\xi_{++},\xi_{--},\xi_+,\xi_-,n_\varphi$.

Ввиду (2.3) и монотонности функции $g_\varphi(x)$, выполнено неравенство

$$g_{\varphi^{-1}}(x+\delta)-g_{\varphi^{-1}}(x)\leqslant g_{\varphi^{-1}}(\xi_{++})-g_{\varphi^{-1}}(\xi_{--})\tag{2.29}$$

Рассмотрим 2 случая:

1) $z=1$. В этом случае $\xi_{--}=\xi_0,\xi_{++}=\xi_1$. Следовательно, подставляя (2.2) в (29), получаем:

$$g_{\varphi^{-1}}(\xi_{++})-g_{\varphi^{-1}}(\xi_{--})=\frac{1}{\varphi^{n_\varphi+k}}.\tag{2.30}$$

2) $z \geqslant 2$. В этом случае из (2.2), (2.6) и формулы (29) имеем

$$g_{\varphi^{-1}}(\xi_{++}) - g_{\varphi^{-1}}(\xi_{--}) = (g_{\varphi^{-1}}(\xi_{++}) - g_{\varphi^{-1}}(\xi)) + (g_{\varphi^{-1}}(\xi) - g_{\varphi^{-1}}(\xi_{--})) = \\ = \frac{1}{\varphi^{n_\varphi+k+2z-1}} + \frac{1}{\varphi^{n_\varphi+k+1+z}} \leqslant \frac{1}{\varphi^{n_\varphi+k+z-1}}. \quad (2.31)$$

Объединяя случаи, получаем

$$g_{\varphi^{-1}}(\xi_{++}) - g_{\varphi^{-1}}(\xi_{--}) \leqslant \frac{1}{\varphi^{n_\varphi+k+z-1}}. \quad (2.32)$$

Оценим теперь δ. Рассмотрим два случая:

1) $\xi_- > x$

2) $\xi_- < x, \xi_+ < x + \delta$

1)Ввиду (2.3) $\delta > \xi - \xi_-$. Рассмотрим еще 2 подслучая:

1.1) $z = 1$.

1.2) $z \geqslant 2$.

Разберем все случаи:

1.1) $\xi_- = [a_1, \ldots, a_{2t}, k+2],\ k+2 \leqslant a_{2t+1}$.

Тогда

$$\xi - \xi_- = \frac{1}{\langle a_1, \ldots, a_{2t}, k+2\rangle\langle a_1, \ldots, a_{2t}, k+1\rangle} \geqslant \frac{1}{(k+3)^2 q_{2t}^2}. \quad (2.33)$$

Следовательно

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \leqslant \frac{q_{2t}^2(k+3)^2}{\varphi^{n_\varphi+k}} \leqslant \frac{q_{2t}^2}{\varphi^{n_\varphi-4}} = \frac{q_{2t}^2}{\varphi^{a_1+2a_2+\ldots+2a_{2t}-5}}. \quad (2.34)$$

1.2) Получаем по лемме 2.1 $\xi = [a_1, \ldots, a_{2t}, a_{2t+1}]$, а

$\xi_- = [a_1, \ldots, a_{2t}, a_{2t+1}, a_{2t+2}],\ k+1 = a_{2t+1}$.

Следовательно

$$\delta > \xi - \xi_- = \frac{1}{\langle a_1, \ldots, a_{2t}, a_{2t+1}\rangle\langle a_1, \ldots, a_{2t}, a_{2t+1}, z\rangle} \geqslant \frac{1}{(z+1)q_{2t+1}^2}. \quad (2.35)$$

А значит

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \leqslant \frac{(z+1)q_{2t+1}^2}{\varphi^{n_\varphi+a_{2t+1}+z-1}} \leqslant \frac{q_{2t+1}^2}{\varphi^{a_1+2a_2+\ldots+2a_{2t}+a_{2t+1}-1}}. \quad (2.36)$$

2) Аналогично прошлому случаю имеем

$\xi = [0; a_1, \ldots, a_{2t}, a_{2t+1}]$, $k + 1 = a_{2t+1}$.

Поскольку $\delta > \xi_{++} - \xi$, получаем:

$$\delta > \xi_{++} - \xi = \frac{1}{\langle a_1, \ldots, a_{2t}, a_{2t+1}\rangle \langle a_1, \ldots, a_{2t}, a_{2t+1} - 1, 1, z\rangle} \geqslant \frac{1}{(z+1)q_{2t+1}^2}. \tag{2.37}$$

А значит, как и в случае 1.2

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \leqslant \frac{q_{2t+1}^2}{\varphi^{a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_{2t} + a_{2t+1} - 3}}. \tag{2.38}$$

Объединяя все рассмотренные случаи, из формул (2.34), (2.36) и (2.38) получаем утверждение леммы. □

Замечание. Леммы 2.3 и 2.2 являются непосредственным обобщением соответствующих лемм из [7].

2.2. Доказательства теорем

В этом разделе будут доказаны теоремы 4, 5 и 6. Напомним формулировку теоремы 4.

Теорема 4 *Положим* $\varkappa_1 = 4$.

(***i***) *Пусть* $x = [a_1, \ldots, a_t, \ldots]$ *- иррациональное число и*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{S_{2t}^{\varphi}(x)}{t} = \varkappa_{sup}(x) < \varkappa_1.$$

Тогда производная $g'_{\varphi^{-1}}(x)$ *существует и равна* $+\infty$.

(***ii***) *Для любого положительного* δ *существует иррациональное* $y = [b_1, \ldots, b_t, \ldots]$ *такое, что*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{2t}^{\varphi}(y)}{t} < \varkappa_1 + \delta \text{ и } g'_{\varphi^{-1}}(y) = 0.$$

Доказательство. Пользуясь леммой 2.3, получаем

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \geqslant \frac{q_t q_{t-1}}{\varphi^{S_t^{\varphi}(x) - 5}} \geqslant \frac{\varphi^{2t-1}}{\varphi^{\frac{t\varkappa_{sup}(x)}{2}}},$$

что стремится к $+\infty$ при $\varkappa_{inf}(x) < 4$. Первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части выберем следующие параметры:

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1,\ \ 0 < \varepsilon < \alpha - \frac{1}{2},\ \ \alpha \in \mathbb{Q},\ \ m \in \mathbb{N}:\ 3m \leqslant \varphi^{m\varepsilon} \text{ и при этом } m\alpha \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим теперь квадратичную иррациональность $x = [\overline{\underbrace{1,\ldots,1}_{2m-1}, \alpha m + 1}]$.

Для нее

$$\varkappa_{inf}(x) = 1 + 2\frac{m - 1 + \alpha m + 1}{m} = 3 + 2\alpha.$$

Поскольку все неполные частные x ограничены, то из леммы 2.2 следует, что для некоторого $t = 2Nm$ выполнено

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \leqslant C\frac{q_t^2}{\varphi^{a_1+2a_2+\ldots+a_{t-1}+2a_t}}, \tag{2.39}$$

Оценим сверху q_t. Поскольку

$$\langle A, B\rangle \leqslant 2\langle A\rangle\langle B\rangle \text{ и } \langle\underbrace{1,\ldots,1}_{2m-1}\rangle < \varphi^{2m-1},$$

получаем:

$$q_t = \langle\overbrace{\underbrace{1,\ldots,1}_{2m-1}, \alpha m, \ldots, \underbrace{1,\ldots,1}_{2m-1}, \alpha m}^{N \text{ повторений}}\rangle \leqslant 2^N\langle\underbrace{1,\ldots,1}_{2m-1}, \alpha m\rangle^N \leqslant$$
$$\leqslant (4\alpha m)^N\varphi^{2mN-N} \leqslant \left(3\alpha m\varphi^{2m}\right)^N \leqslant \varphi^{(m(2+\varepsilon)^N)} = \varphi^{mN(2+\varepsilon)}. \tag{2.40}$$

Таким образом, объединяя оценки (2.39) и (2.40), имеем:

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \leqslant C\frac{\varphi^{mN(4+2\varepsilon)}}{\varphi^{mN(3+2\alpha)}} = C\varphi^{mN(1+2\varepsilon-2\alpha)},$$

что стремится к 0 при $N \to \infty$.

Таким образом, в силу того, что α можно выбрать сколь угодно близким к $\frac{1}{2}$, второе утверждение теоремы доказано. $\square$

Теперь сформулируем и докажем теорему 5.

Теорема 5 *Существует алгоритмически вычислимая с любой точностью*

константа $\varkappa_2 \approx 13.05\ldots$ *такая, что выполнены следующие утверждения:*
($\boldsymbol{i}$) *Пусть* $x = [a_1, \ldots, a_t, \ldots]$ - *иррациональное число и*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{S_{2t}^{\varphi}(x)}{t} = \varkappa_{inf}(x) > \varkappa_2 \approx 13.05.$$

Тогда производная $g'_{\varphi^{-1}}(x)$ *существует и равна* 0.
($\boldsymbol{ii}$) *Для любого положительного* δ *существует иррациональное* $y = [b_1, \ldots, b_t, \ldots]$ *такое, что*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{2t}^{\varphi}(y)}{t} > \varkappa_2 - \delta \text{ и } g'_{\varphi^{-1}}(y) = +\infty.$$

Доказательство. В доказательстве данного утверждения мы докажем существование $\varkappa_2$ и предъявим алгоритм, позволяющий получить его с любой точностью, а также оценим снизу скорость его сходимости.

Во-первых отметим, что $g'_{\varphi^{-1}}([\overline{7,4}]) = 0$. Действительно, по лемме 1.30

$$q_{2t} = \langle 4, 7, \ldots, 4, 7 \rangle \asymp (29 + 4[\overline{7,4}])^t < 30^t.$$

А поскольку

$$\varphi^{a_1+2a_2+\ldots+a_{2t-1}+2a_{2t}} = \varphi^{15t} > 1000^t,$$

получаем, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{q_{2t}^2}{\varphi^{a_1+2a_2+\ldots+a_{2t-1}+2a_{2t}}} = 0.$$

Следовательно, по лемме 2.3 производная в точке $[\overline{7,4}]$ существует и равна 0. Далее, пусть $x = [a_1, \ldots, a_t, \ldots]$ - иррациональное число и $\varkappa_{inf}(x) > 15$. Тогда по лемме 2.3

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \leqslant \frac{q_t^2}{\varphi^{S_t^{\varphi}(x)-5}} \tag{2.41}$$

Напомним, что $\max(M^{\varphi}(t, S_t))$ - максимум по всем континуантам длины t с $S_t^{\varphi}(x) = S_t$. Очевидно, что

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(x+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(x)}{\delta} \leqslant \frac{q_t^2}{\varphi^{S_t^{\varphi}(x)-5}} \leqslant C\frac{\max^2(M^{\varphi}(t, S_t))}{\varphi^{S_t^{\varphi}(x)}} < C_1\frac{\max_a^2(M^{\varphi}(t, S_t))}{\varphi^{S_t^{\varphi}(x)}}.$$

Поскольку по теореме 1.3 $\langle A_{max}\rangle = \max_a(M^{\varphi}(t,S_t)) \in M_3(t,S_t)$, а $\varkappa_{inf}(x) > 15$, то по следствию 1.6 любое неполное частное $\langle A_{max}\rangle$ больше либо равно любого соответствующего неполного частного континуанта $\langle B\rangle = \langle\underbrace{7,4,\ldots,7,4}_{\text{t/2 пар}}\rangle$. Отсюда следует, что $\langle B\rangle$ можно превратить в $\langle A\rangle$ увеличением некоторых неполных частных на 1 (возможно несколько раз). Однако несложно убедиться, что любая такая замена уменьшает дробь в правой части формулы (2.41). Следовательно $\varkappa_2$ существует и меньше 15.

Аналогично несложно показать, что $g'_{\varphi^{-1}}([\overline{7,3}]) = +\infty$, а значит, $\varkappa_2 > 13$ Тогда из теоремы 1.3 следует, что $\max_a(M^{\varphi}(t,S_t))$ для всех x, для которых выполнено

$$13 < \frac{S_t^{\varphi}(x)}{t} < 15$$

достигается на множестве состоящем из континуантов $\langle A\rangle$ таких, что $N(A) = (\{7\},\{3,4\})$. Обозначим это множество $C_{3,4}^7$. Сформулируем следующий простой принцип:

Пусть $x = [\overline{A}], y = [\overline{B}]$ - периодические цепные дроби, $A, B \in C_{3,4}^7$, $l(A) = t_1, l(B) = t_2$, причем:

$$\langle A\rangle = \max_a(M^{\varphi}(t_1, S_{t_1}^{\varphi}(A))),\ \langle B\rangle = \max_a(M^{\varphi}(t_2, S_{t_2}^{\varphi}(B))) \tag{2.42}$$

И пусть $g'_{\varphi^{-1}}(x) = \infty,\ g'_{\varphi^{-1}}(y) = 0$. Тогда

$$\varkappa_{inf}(x) \leqslant \varkappa_2 \leqslant \varkappa_{inf}(y).$$

Действительно, пусть $\varkappa_2 < \varkappa_{inf}(x)$. Это противоречит определению $\varkappa_2$, поскольку $\varkappa_{inf}(x) > \varkappa_2$, но $g'_{\varphi^{-1}}(x) = \infty$.

Если же $\varkappa_2 > \varkappa_{inf}(y)$, то это означает, что $\exists z : \varkappa_{inf}(y) < \varkappa_{inf}(z) < \varkappa_2$ и при этом $g'_{\varphi^{-1}}(z) = \infty$. Пусть $z = [c_1 \ldots c_t \ldots]$, тогда

$$\frac{g_{\varphi^{-1}}(z+\delta) - g_{\varphi^{-1}}(z)}{\delta} \leqslant \frac{q_t^2(z)}{\varphi^{S_t^{\varphi}(z)-5}} \leqslant \frac{\max^2(M^{\varphi}(t,\ S_t^{\varphi}(z)))}{\varphi^{S_t^{\varphi}(z)-5}}.$$

Лемма 2.4. *Функция*

$$f(S_t^{\varphi}(z)) = \frac{{\max_a}^2(M^{\varphi}(t,\ S_t^{\varphi}(z)))}{\varphi^{S_t^{\varphi}(z)}} \tag{2.43}$$

при достаточно большом t *убывает с ростом* $S_t^{\varphi}(z)$ *при* $13 < \frac{S_t^{\varphi}(z)}{t} < 15$.

Доказательство. Действительно, если

$S_t^{\varphi}(z_1) > S_t^{\varphi}(z_2)$ и $\langle A_1\rangle = \max_a(M^{\varphi}(t,\ S_t^{\varphi}(z_1))), \langle A_2\rangle = \max_a(M^{\varphi}(t,\ S_t^{\varphi}(z_2)))$,

то по теореме 1.3 $A_1, A_2 \in C_{3,4}^7$. Докажем неравенство

$$\frac{\langle A_2\rangle}{\langle A_1\rangle} < c_0\left(\frac{4}{3}\right)^{(S_t^{\varphi}(z_2)-S_t^{\varphi}(z_1))/2}. \tag{2.44}$$

Возьмем любые $\frac{S_t^{\varphi}(z_2)-S_t^{\varphi}(z_1)}{2}$ неполных частных $\langle A_2\rangle$, равных 4 и заменим их на 3. Так как каждая такая замена уменьшает континуант не более, чем в $\frac{4}{3}$ раза, имеем оценку

$$\frac{\langle A_2\rangle}{\langle A_2'\rangle} < \left(\frac{4}{3}\right)^{(S_t^{\varphi}(z_2)-S_t^{\varphi}(z_1))/2}.$$

А поскольку $S_t^{\varphi}(A_2') = S_t^{\varphi}(A_1)$, то $\langle A_2'\rangle < c_0\max_a(M^{\varphi}(t,\ S_t^{\varphi}(z_1))) = c_0\langle A_1\rangle$, что доказывает неравенство (2.44).

Далее,

$$\frac{\varphi^{(S_t^{\varphi}(z_2))}}{\varphi^{(S_t^{\varphi}(z_1))}} = \varphi^{(S_t^{\varphi}(z_2)-S_t^{\varphi}(z_1))} > \left(\frac{3}{2}\right)^{(S_t^{\varphi}(z_2)-S_t^{\varphi}(z_1))}, \tag{2.45}$$

откуда, подставляя (2.44) и (2.45) в (2.43), получаем убывание функции $f(S_t^{\varphi}(z))$ при достаточно большом t. □

Таким образом,

$$\frac{\max_a^2(M(t,S_t^{\varphi}(z)))}{\varphi^{S_t^{\varphi}(z)}} \leqslant \frac{\max_a^2(t,S_t^{\varphi}(y)}{\varphi^{S_t^{\varphi}(y)}} \leqslant C_1\frac{q_t^2(y))}{\varphi^{S_t^{\varphi}(y)}},$$

где последнее неравенство выполнено по лемме 1.25. А из того, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{q_t^2(y))}{\varphi^{S_t^{\varphi}(y)}} = 0,$$

мы получаем противоречие с тем, что $g'_{\varphi^{-1}}(z) = +\infty$.

Доказанный принцип позволяет найти $\varkappa_2$ с любой точностью. Вычисления, опирающиеся на леммы 2.2 и 2.3, показывают, что для

$$x = [\underbrace{\overline{7,3,\ldots,7,3}}_{37\text{ пар}}7,4] \qquad g'_{\varphi^{-1}}(x) = 0,$$

а для

$$y = [\underbrace{\overline{7,3,\ldots,7,3}}_{38\ \text{пар}}\overline{7,4}] \qquad g'_{\varphi^{-1}}(y)=\infty.$$

Следовательно

$$13.0513 \asymp 13\frac{2}{39} < \varkappa_2 < 13\frac{2}{38} \asymp 13.0526.$$

Проводя итерации алгоритма с блоками все более высокого уровня можно сосчитать $\varkappa_2$ с любой требуемой точностью. Оценим скорость сходимости алгоритма.

Прежде всего рассмотрим для введенных в (2.42) континуантов $\langle A\rangle$ и $\langle B\rangle$ континуанты $\langle A'\rangle \in M_3(t_1, S^{\varphi}_{t_1}(A))$ и $\langle B'\rangle \in M_3(t_2, S^{\varphi}_{t_2}(B))$, являющиеся асимптотическими максимумами по соответствующим множествам. Ввиду теоремы 1.4 они имеют вырожденную блоковую структуру. Напомним, что t_1 и t_2 - это длины $\langle A\rangle$ и $\langle B\rangle$ соответственно. В силу теоремы 1.4 и следствия 1.10 для любого натурального i выполнены оценки

$$1 \leqslant \frac{\langle\overbrace{A,\ldots,A}^{i}\rangle}{\langle\underbrace{A',\ldots,A'}_{i}\rangle} < 8, \quad 1 \leqslant \frac{\langle\overbrace{B,\ldots,B}^{i}\rangle}{\langle\underbrace{B',\ldots,B'}_{i}\rangle} < 8.$$

Следовательно, поскольку $g'_{\varphi^{-1}}(x) = \infty,\ g'_{\varphi^{-1}}(y) = 0$,

$$g'_{\varphi^{-1}}([\overline{A}]) = g'_{\varphi^{-1}}([\overline{A'}]) = \infty, \quad g'_{\varphi^{-1}}([\overline{B}]) = g'_{\varphi^{-1}}([\overline{B'}]) = 0.$$

Без ограничения общности будем считать, что $t_1 = t_2$, поскольку в противном случае мы можем перейти к рассмотрению цепных дробей

$$[\underbrace{\overline{A',\ldots,A'}}_{t_2}] = [\overline{A'}] \ \text{ и } \ [\underbrace{\overline{B',\ldots,B'}}_{t_1}] = [\overline{B'}],$$

имеющих одинаковую длину. Рассмотрим континуант $\langle A', B'\rangle$, обозначим его $\langle C'\rangle$. Очевидно, что $l(C') = 2t_1$, а $S^{\varphi}_{2t_1}(C') = S^{\varphi}_{t_1}(A') + S^{\varphi}_{t_1}(B')$. Это означает, что

$$\varkappa_{inf}([\overline{C'}]) = \frac{\varkappa_{inf}([\overline{A'}]) + \varkappa_{inf}([\overline{B'}])}{2}.$$

Обозначим $\langle C\rangle = \max(M_3(2t_1, S^{\varphi}_{2t_1}(C')))$. Найдем, чему равна производная в точке $[\overline{C}]$. Если она равна 0, то по сформулированному выше принципу максимума

$$\varkappa_{inf}([\overline{A'}]) < \varkappa_2 < \varkappa_{inf}([\overline{C'}]).$$

Если, напротив, $g'_{\varphi^{-1}}([\overline{C'}]) = \infty$, то, аналогично,

$$\varkappa_{inf}([\overline{C'}]) < \varkappa_2 < \varkappa_{inf}([\overline{B'}]).$$

Таким образом, за один шаг алгоритма отрезок, на котором лежит $\varkappa_2$ уменьшается в 2 раза. Следовательно, для того, чтобы найти $\varkappa_2$ с точностью ε требуется по порядку величины не более $\log\varepsilon^{-1}$ шагов алгоритма. $\square$

Теперь докажем теорему 6. Приведем еще раз ее формулировку.

Теорема 6

(***i***) *Если все неполные частные числа* $x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q}$ *меньше либо равны 2, то* $g'_{\varphi^{-1}}(x) = +\infty$

(***ii***) *Существует* $y \in [0,1]\setminus\mathbb{Q}$ *такое, что все неполные частные числа* y *меньше либо равны* 3 *и* $g'_{\varphi^{-1}}(y) = 0$.

Доказательство. Заметим, что $g'_{\varphi^{-1}}([\overline{1,2}]) = +\infty$, поскольку по лемме 1.30

$$q_{2t}^2 = (3 + (\sqrt{3}-1))^{2t} > 13^t$$

и знаменатель дроби из формулы (2.1) равен $\varphi^{S^{\varphi}_{2t}(x)} = \varphi^{5t} < 12^t$, а значит, по данной лемме производная существует и равна $+\infty$.

Пусть теперь x-произвольное число с неполными частными, ограниченными 2. Рассматривая также для него дробь

$$\frac{q_{2t}^2(x)}{\varphi^{S^{\varphi}_{2t}(x)}}, \tag{2.46}$$

заметим, что континуант $q_{2t}(x)$ получен из континуанта

$$\langle\underbrace{1,2,\ldots,1,2}_{\text{t пар}}\rangle$$

заменой некоторых единиц на двойки для нечетных неполных частных и заменой двоек на единицы для четных неполных частных. Нетрудно видеть, что обе замены увеличивают дробь (2.46). Действительно, замена 1 на 2 по формуле (1.65) увеличивает континуант не менее, чем в $\frac{4}{3}$ раза, а значит числитель увеличится как минимум, в $\frac{16}{9}$ раза в то время, как знаменатель увеличится в φ раз, следовательно дробь (2.46) возрастет. Аналогично, поскольку все цепные дроби с неполными частными из нашего континуанта меньше $\frac{1}{3}$, замена 2 на 1 уменьшит континуант не более, чем в

$$\frac{2+\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{8}{5} < \varphi$$

раз, а следовательно дробь (2.46) также увеличится.

Для доказательства последней части утверждения заметим, что $g'_{\varphi^{-1}}([\overline{1,3}]) = 0$, что проверяется аналогично. Теорема доказана полностью. $\square$

В завершение главы докажем еще одну несложную теорему.

Теорема 2.1. *Для производной функции $g_\tau(x)$ теоремы 4, 5 и 6 верны с теми же самыми константами $\varkappa_1, \varkappa_2$, при этом $S_t^\varphi(x)$ заменяется во всех формулировках на $S_t^\tau(x)$.*

Доказательство. Докажем, что если $x = [\overline{\overrightarrow{A}}]$ - периодическая цепная дробь, причем длина A четная, а $y = [\overline{\overleftarrow{A}}]$, то $g'_{\varphi^{-1}}(x) = g'_\tau(y)$. Действительно, поскольку для любого $m \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\langle \underbrace{\overrightarrow{A}, \ldots, \overrightarrow{A}}_{m} \rangle = \langle \underbrace{\overleftarrow{A}, \ldots, \overleftarrow{A}}_{m} \rangle$$

то для любого натурального t $q_t(x) \asymp q_t(y)$. Аналогично, поскольку для любого $m \in \mathbb{N}$ выполнено

$$S^\varphi(\underbrace{\overrightarrow{A}, \ldots, \overrightarrow{A}}_{m}) = S^\tau(\underbrace{\overleftarrow{A}, \ldots, \overleftarrow{A}}_{m})$$

то для любого натурального t $S_t^\varphi(x) \asymp S_t^\varphi(y)$. Теперь наше утверждение автоматически следует из лемм 2.2 и 2.3. $\square$

Глава 3
Спектр Лагранжа и достижимые числа

3.1. λ_0 как элемент спектра Лагранжа

Напомним, что в качестве λ_0 мы обозначаем число

$$[3; 3, 3, 2, 1, \overline{1, 2}] + [0; 2, 1, \overline{1, 2}] = \frac{62976 - 1498\sqrt{3}}{16357} \approx 3.6914708. \tag{3.1}$$

В этом разделе мы покажем, что λ_0 принадлежит спектру Лагранжа $\mathbb{L}$. Определим бесконечную в обе стороны последовательность A_0 следующим образом:

$$A_0 = \overline{2, 1}, 1, 2, 3, 3^*, 3, 2, 1, \overline{1, 2}. \tag{3.2}$$

Символом * здесь обозначен элемент с нулевым индексом.

Лемма 3.1.

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i(A_0) = \lambda_1(A_0) = \lambda_{-1}(A_0) = \lambda_0.$$

Доказательство. Если i не равно $-1, 0$ или 1, то

$$\lambda_i(A_0) \leqslant 2 + 2[0; \overline{1, 3}] = \sqrt{21} - 1 < 3.6 < \lambda_1(A_0),$$

где первое неравенство выполнено в силу того, что все элементы A не превосходят 3, а значит

$$[0; a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots] \leqslant [0; \overline{1, 3}], \quad [a_i; a_{i-1}, a_{i-2}, \ldots] \leqslant [2; \overline{1, 3}].$$

$\lambda_1(A) = \lambda_{-1}(A)$ в силу симметрии. При этом $\lambda_0(A)$ равно

$$\lambda_0(A) = 3 + 2[0; 3, 2, 1, \overline{1, 2}] = \frac{246 + \sqrt{3}}{69} \approx 3.59032 < \lambda_1(A_0).$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.2. *$\lambda_0 \in \mathbb{L}$.*

Доказательство. Для произвольного натурального n обозначим C_n следующую конечную последовательность неполных частных:

$$C_n = (1_n, (2,1)_n, 1, 2, 3, 3, 3, 2, 1, (1,2)_n, 1_n). \tag{3.3}$$

Определим иррациональное число α_0 следующим образом:

$$\alpha_0 = [0; C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots]. \tag{3.4}$$

Покажем, что

$$\limsup \lambda_i(\alpha_0) = \lambda_0. \tag{3.5}$$

Пусть правая из троек в блоке C_n имеет индекс i_n. Тогда

$$\lambda_{i_n}(\alpha_0) = \lambda_{i_n-2}(\alpha_0) = [3; 2, 1, (1,2)_n, \ldots] + [0; 3, 3, 2, 1, (1,2)_n, \ldots]. \tag{3.6}$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{i_n}(\alpha_0) = \lambda_0 = \lim_{n\to\infty} \lambda_{i_n-2}(\alpha_0).$$

С другой стороны, рассуждая аналогично лемме 3.1 нетрудно получить, что если i не равно i_n или i_{n-2} для какого-то n, то $\lambda_i(\alpha_0) < 3.6$. Следовательно, равенство (3.5) выполнено, что и требовалось доказать. $\square$

3.2. Задача о достижимом числе - контрпример

В этом разделе мы докажем теорему 7 о том, что любое иррациональное α такое, что $\mu(\alpha) = \lambda_0$, не является достижимым. Напомним, что число α называется достижимым, если неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\mu(\alpha) q^2} \tag{3.7}$$

имеет бесконечно много решений для целых p и q. Поскольку $\mu(\alpha) \geqslant \sqrt{5}$, неравенство (3.7) выполнено только когда $\frac{p}{q}$ является подходящей дробью к числу α. Для разности иррационального числа и подходящей дроби к нему хорошо известна следующая формула (см., например, [28])

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{\lambda_{n+1}(\alpha) q_n^2}. \tag{3.8}$$

Следовательно, число α является достижимым тогда и только тогда, когда неравенство

$$\lambda_i(\alpha) > \mu(\alpha) \tag{3.9}$$

выполняется для бесконечно многих i.

Мы будем постоянно пользоваться следующей известной леммой для сравнения цепных дробей.

Лемма 3.3. *[2] Пусть $\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots]$ и $\beta = [a_0; a_1, \ldots, a_n, c_1, \ldots]$ - два произвольных числа, $b_1 \neq c_1$. Если n четное, то $\alpha > \beta$ тогда и только тогда, когда $b_1 > c_1$, если же n нечетное, то $\alpha > \beta$ тогда и только тогда, когда $b_1 < c_1$. Кроме того,*

$$|\alpha - \beta| < 2^{-(n-1)}. \tag{3.10}$$

Обозначим $\varepsilon_n = 2^{-(n-1)}$.

Лемма 3.4. *Если для некоторого иррационального $\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ выполнено равенство*

$$\limsup \lambda_i(\alpha) = \lambda_0, \tag{3.11}$$

то последовательность неполных частных α содержит не более, чем конечное количество неполных частных, больших 3 и не более, чем конечное количество участков из списка ниже

$$(1,3), (3,1), (2,2,3), (3,2,2), (3,2,3), (1,2,3,2,1) \tag{3.12}$$

Доказательство. Если в α бесконечно много неполных частных больше или равно 4, то

$$\limsup \lambda_i(\alpha) \geqslant 4, \tag{3.13}$$

что противоречит (3.11). Поскольку для любого натурального n

$$\limsup \lambda_i([a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]) = \limsup \lambda_i([a_n; a_{n+1} \ldots]), \tag{3.14}$$

можем без ограничения общности считать, что α не содержит неполных частных, больших 3. Если в α бесконечно много участков (3,1), то пусть $a_n = 3,\ a_{n+1} = 1$. В этом случае

$$\lambda_n(\alpha) = [3; 1, a_{n+2}, \ldots] + [0; a_{n-1}, \ldots, a_1] \tag{3.15}$$

Поскольку все неполные частные α не превосходят 3, пользуясь леммой 3.3, первое слагаемое оценим снизу следующим образом:

$$[3; 1, a_{n+2}, \ldots] \geqslant [3; 1, \overline{1, 3}] \tag{3.16}$$

Второе слагаемое не превосходит конечной цепной дроби длины $n-1$, равной $[0; 1, 3, 1, 3, \ldots]$, в которой чередуются 1 и 3, а значение последнего неполного частного определяется четностью n. Обозначим ее как α_n. Поскольку α_n является подходящей дробью к $[0; \overline{1, 3}]$, выполнено

$$\alpha_n \geqslant [0; \overline{1, 3}] - \varepsilon_n, \tag{3.17}$$

где ε_n стремится к нулю при $n \to \infty$. Получаем

$$\lambda_n(\alpha) \geqslant [3; 1, \overline{1, 3}] + [0; \overline{3, 1}] - \varepsilon_n = \frac{39 + 4\sqrt{21}}{15} - \varepsilon_n \approx 3.82202 - \varepsilon_n, \tag{3.18}$$

что больше $\lambda_0 + 10^{-4}$ при достаточно большом n. Противоречие с (3.11).

Пользуясь (3.14), можем без ограничения общности считать, что в разложении α в цепную дробь нет участков $(3, 1)$. Рассуждая абсолютно аналогично, получим, что в разложении α в цепную дробь нет участков $(1, 3)$, симметричных рассмотренным.

Пусть в α бесконечно много участков $(3, 2, 2)$. То есть в разложении α в цепную дробь для бесконечно многих n выполены равенства $a_n = 3, a_{n+1} = 2, a_{n+2} = 2$. Тогда

$$\lambda_n(\alpha) = [3; 2, 2, a_{n+3}, \ldots] + [0; a_{n-1}, \ldots, a_1] \tag{3.19}$$

пользуясь тем, что в разложении α в цепную дробь нет неполных частных, больших 3, и отсутствуют участки $(3,1)$ и $(1,3)$, слагаемые оцениваются снизу следующим образом

$$[3;2,2,a_{n+3},\ldots] \geqslant [3;2,2,\overline{3,2}], \quad [0;a_{n-1},\ldots,a_1] \geqslant [0;\overline{3,2}] - \varepsilon_n \tag{3.20}$$

Итого,

$$\lambda_n(\alpha) \geqslant [3;2,2,\overline{3,2}] + [0;\overline{3,2}] - \varepsilon_n = \frac{39+10\sqrt{15}}{21} - \varepsilon_n \approx 3.70142 - \varepsilon_n, \tag{3.21}$$

что больше $\lambda_0 + 10^{-4}$ при достаточно большом n. Противоречие с (3.11). Рассуждая абсолютно аналогично, получим, что в α не более чем конечное число участков $(2,2,3)$, симметричных рассмотренным.

Утверждение про участок $(3,2,3)$ доказывается полностью аналогично утверждению про участок $(3,2,2)$.

Наконец, предположим, что в разложении α в цепную дробь для бесконечно многих n выполены равенства $a_{n-2} = 1, a_{n-1} = 2, a_n = 3, a_{n+1} = 2$, $a_{n+2} = 1$. В этом случае

$$\lambda_n(\alpha) = [3;2,1,a_{n+3},\ldots] + [0;2,1,a_{n-3},\ldots,a_1]. \tag{3.22}$$

Пользуясь тем, что в α нет неполных частных, больших 3, и отсутствуют участки $(3,1)$ и $(1,3)$, получим следующие оценки

$$[3;2,1,a_{n+3},\ldots] \geqslant [3;2,1,\overline{2,1}], \quad [0;2,1,a_{n-3},\ldots,a_1] \geqslant [0;\overline{2,1}] - \varepsilon_n. \tag{3.23}$$

Итого,

$$\lambda_{i_n}(\alpha) \geqslant [3;2,1,\overline{2,1}] + [0;\overline{2,1}] - \varepsilon_n = 2 + \sqrt{3} - \varepsilon_n \approx 3.73205 - \varepsilon_n, \tag{3.24}$$

что больше $\lambda_0 + 10^{-4}$ при достаточно большом n. Противоречие с (3.11). Лемма доказана полностью. □

Лемма 3.5. *Если для некоторого иррационального* $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ *выполнено равенство*

$$\limsup \lambda_i(\alpha) = \lambda_0, \tag{3.25}$$

то существует N такое, что для любого $n > N$ неравенство

$$\lambda_n(\alpha) > 3.691 \tag{3.26}$$

выполнено только если a_n либо левая, либо правая тройка, принадлежащая участку $(1, 2, 3, 3, 3, 2, 1)$ в последовательности неполных частных α.

Доказательство. По лемме 3.4, в последовательности неполных частных α может быть лишь конечное число неполных частных больших 3 и участков вида (3.12). Назовем эти участки *запрещенными*. Выберем $N > 100$ таким, чтобы в последовательности $a_{N-10}, a_{N-9}, \ldots, a_N, \ldots$ не было запрещенных участков и чтобы для всех n, больших $N - 10$, было выполнено условие $a_n \leqslant 3$. Предположим, что $n > N$ и

$$\lambda_n(\alpha) > 3.691. \tag{3.27}$$

Нетрудно проверить, что в этом случае $\varepsilon_n < 10^{-25}$.

Очевидно, что $a_n = 3$, поскольку если $a_n \leqslant 2$, то

$$\lambda_n(\alpha) \leqslant 2 + 2[0; \overline{1, 2}] + \varepsilon_n = 2\sqrt{3} + \varepsilon_n \approx 3.464101 < 3.691.$$

Если $a_n = 3$, то по лемме 3.4 возможны лишь два варианта: либо $a_{n-1} = a_{n+1} = 3$, либо среди a_{n-1} и a_{n+1} одна тройка и одна двойка. Рассмотрим первый случай:

$$\lambda_n(\alpha) = 3 + [0; 3, a_{n-2}, \ldots, a_1] + [0; 3, a_{n+2}, \ldots]. \tag{3.28}$$

Оценим (3.28) сверху, пользуясь леммой 3.3 и отсутствием участков $(1, 3)$ и $(3, 1)$.

$$[0; 3, a_{n+2}, \ldots] \leqslant [0; 3, \overline{3, 2}].$$

Аналогичная оценка верна и для второго слагаемого

$$[0; 3, a_{n-2}, \ldots, a_1] \leqslant [0; 3, \overline{3, 2}] + \varepsilon_n.$$

Итого получаем

$$\lambda_n(\alpha) = 3 + [0; 3, a_{n-2}, \ldots, a_1] + [0; 3, a_{n+2}, \ldots] \leqslant 3 + 2[0; 3, \overline{3, 2}] + \varepsilon = \\ = \frac{33 - 2\sqrt{15}}{7} + \varepsilon \approx 3.60772 < 3.691, \tag{3.29}$$

что противоречит (3.26). Таким образом, либо $a_{n-1} = 3, a_{n+1} = 2$, либо $a_{n-1} = 2$, $a_{n+1} = 3$. Рассмотрим только первый случай, второй абсолютно аналогичен в силу симметрии. Поскольку участки $(3, 2, 3)$ и $(3, 2, 2)$ запрещены, $a_{n+2} = 1$. Поскольку участок $(1, 3)$ запрещен, a_{n-2} равно 2 или 3. Если $a_{n-2} = 2$, то $a_{n-3} = 1$ в силу запрета участков $(2, 2, 3)$ и $(3, 2, 3)$. Получаем

$$\lambda_n(\alpha) = [3; 3, 2, 1, a_{n-2}, \ldots, a_1] + [0; 2, 1, a_{n+2}, \ldots]. \tag{3.30}$$

В силу запрета участков $(1, 3)$ и $(3, 1)$ первое слагаемое можно оценить сверху следующим образом

$$[3; 3, 2, 1, a_{n-2}, \ldots, a_1] \leqslant [3; 3, 2, 1, \overline{2, 1}] + \varepsilon_n.$$

Аналогично оценивается сверху второе слагаемое

$$[0; 2, 1, a_{i_k+2}, \ldots] \leqslant [0; 2, 1, \overline{1, 2}]. \tag{3.31}$$

Итого

$$\lambda_n(\alpha) = 3 + [0; 3, 2, 1, a_{n-2}, \ldots, a_1] + [0; 2, 1, a_{n+2}, \ldots] \leqslant \\ \leqslant [3; 3, 2, 1, \overline{2, 1}] + [0; 2, 1, \overline{1, 2}] + \varepsilon_n = 4 - \frac{2\sqrt{3}}{11} + \varepsilon_n \approx 3.68508, \tag{3.32}$$

что противоречит (3.26). Следовательно, $a_{n-2} = 3$. В силу запрета участка $(1, 3)$, a_{n-3} равно 2 или 3. Если $a_{n-3} = 3$, то

$$\lambda_n(\alpha) = [3; 3, 3, 3, a_{n-4}, \ldots, a_1] + [0; 2, 1, a_{n+2}, \ldots]. \tag{3.33}$$

Первое слагаемое оценивается сверху следующим образом:

$$[3; 3, 3, 3, a_{n-4}, \ldots, a_1] \leqslant [3; 3, 3, 3, 3, 2, 1, \overline{1, 2}] + \varepsilon_n.$$

Для второго слагаемого используем оценку (3.31), получим

$$\begin{gathered} \lambda_n(\alpha) = [3;3,3,3,a_{n-4},\ldots,a_1] + [0;2,1,a_{n+2},\ldots] \leqslant \\ \leqslant [3;3,3,3,3,2,1,\overline{1,2}] + [0;2,1,\overline{1,2}] = \frac{681609 - 16103\sqrt{3}}{177122} \approx 3.69078, \end{gathered} \tag{3.34}$$

что противоречит (3.26). Таким образом, $a_{n-3} = 2$, следовательно, в силу запрета участков $(2,2,3)$ и $(3,2,3)$, $a_{n-4} = 1$, лемма доказана. □

Лемма 3.6. *Если для некоторого иррационального* $\alpha = [0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ *выполнено равенство*

$$\limsup \lambda_i(\alpha) = \lambda_0, \tag{3.35}$$

то существует число N *такое, что* $\forall n > N$ $\lambda_n(\alpha) < \lambda_0$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует возрастающая последовательность k(j) такая, что для любого натурального j выполнено неравенство

$$\lambda_{k(j)}(\alpha) > \lambda_0.$$

Из леммы 3.5 следует, что существует J такое, что $\forall j > J$ $a_{k(j)}$ - либо левая, либо правая тройка, принадлежащая участку $(1,2,3,3,3,2,1)$ в последовательности неполных частных α. Возьмем произвольное $j_0 > J+2$ и положим $n = k(j_0)$. Пусть a_n - правая тройка, то есть $a_{n-4} = 1, a_{n-3} = 2, a_{n-2} = 3, a_{n-1} = 3, a_n = 3, a_{n+1} = 2, a_{n+2} = 1$. В этом случае

$$\lambda_n(\alpha) = [3;3,3,2,1,\ldots,a_1] + [0;2,1,\ldots]. \tag{3.36}$$

Покажем, что для первого слагаемого верно неравенство

$$[3;3,3,2,1,\ldots,a_1] < [3;3,3,2,1,\overline{1,2}]. \tag{3.37}$$

Предположим противное. Заметим, что $[3;3,3,2,1,\ldots,a_1]$ не может быть подходящей дробью для $[3;3,3,2,1,\overline{1,2}]$, поскольку в первой цепной дроби $a_{k(j_0-1)} = 3$, а во второй соответствующее неполное частное равно 2 или 1.

Следовательно, существует неполное частное, в котором эти дроби отличаются. Обозначим неполные частные первой цепной дроби как $[b_0; b_1, \ldots, b_{n-1}]$, а второй дроби - как $[c_0; c_n, \ldots, c_{n-1}, \ldots]$. Пусть первое отличающееся неполное частное имеет индекс r. Очевидно, $r > 4$. Если r четно, то из леммы 3.3 получаем $b_r > c_r$. Поскольку $c_r = 2$, а неполные частные больше 3 запрещены, имеем $b_r = 3$. Но так как $c_{r-1} = b_{r-1} = 1$, получаем, что в $[3; 3, 3, 2, 1, \ldots, a_1]$ есть запрещенная комбинация $(1, 3)$. Противоречие. Если же r нечетно, то из леммы 3.3 получаем, что $b_r < c_r$, что невозможно поскольку $c_r = 1$.

Абсолютно аналогично доказывается, что

$$[0; 2, 1, \ldots, a_1] < [0; 2, 1, \overline{1, 2}]. \tag{3.38}$$

Объединяя (3.37) и (3.38), получаем

$$\lambda_n(\alpha) = [3; 3, 3, 2, 1, \ldots, a_1] + [0; 2, 1, \ldots] < [3; 3, 3, 2, 1, \overline{1, 2}] + [0; 2, 1, \overline{1, 2}] = \lambda_0. \tag{3.39}$$

Противоречие. Случай, когда a_n - левая тройка, принадлежащая участку $(1, 2, 3, 3, 3, 2, 1)$, полностью аналогичен. Лемма доказана. □

Теперь теорема 7 очевидно вытекает из лемм 3.2 и 3.6.

3.3. Левые концы пропусков в спектре Лагранжа

Доказанная Г.А. Фрейманом[26] и Х.Шекером[17] теорема утверждает, что спектр Лагранжа содержит любое число, большее $\sqrt{21}$. Выведем из нее очевидное следствие.

Следствие 3.1. *Пусть a - левый конец пропуска в спектре Лагранжа и $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ - иррациональное число такое, что $\mu(\alpha) = a$. Тогда для любого достаточно большого n выполнено неравенство $a_n \leqslant 4$.*

Рассмотрим иррациональные числа $\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots]$, $\beta = [a_0; a_1, \ldots, a_n, c_1, \ldots]$ такие, что $b_1 \neq c_1$. Лемма 3.3 дает верхнюю оценку для разности $|\alpha - \beta|$. Если же все неполные частные разложения в цепную дробь чисел α и β ограниченны, тогда величину $|\alpha-\beta|$ можно также оценить снизу. Введем обозначение $\delta_n = 5^{-2(n+2)}$.

Лемма 3.7. *Пусть иррациональные α и β удовлетворяют условию леммы 3.3. Предположим также, что все неполные частные разложения в цепную дробь α и β не превосходят 4. Тогда выполнены неравенства*

$$\delta_n < |\alpha - \beta| < \varepsilon_n. \tag{3.40}$$

Доказательство. Обозначим через $\frac{p_n}{q_n}$ и $\frac{p'_n}{q'_n}$ n-ые подходящие дроби к α и β соответственно. Легко видеть, что $q_n < 5^n$ и $q'_n < 5^n$. Поскольку $\frac{p_n}{q_n} \neq \frac{p'_n}{q'_n}$, либо $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, либо $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$ лежит между α и β. Если $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ находится между α и β, то $\frac{p'_{n+2}}{q'_{n+2}}$ также лежит между этими двумя числами. Так как $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \neq \frac{p'_{n+2}}{q'_{n+2}}$, получаем

$$\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p'_{n+2}}{q'_{n+2}}\right| > \frac{1}{q_{n+1}q'_{n+2}} > \delta_n$$

Случай, когда $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$ лежит между α и β, рассматривается полностью аналогично. □

Лемма 3.8. *Пусть n- произвольное четное положительное число. Обозначим $N = N(n) = n(4^{2n+1}+1)$. Пусть $(a_1, a_2, \dots, a_N)$ - произвольная последовательность из натуральных чисел длины N, причем все ее элементы не превосходят 4. Тогда существуют два натуральных числа n_1, n_2 таких, что $a_{n_1+i} = a_{n_2+i}$ для всех $0 \leqslant i \leqslant 2n$. Более того, $n_1 \equiv n_2 \pmod 2$.*

Доказательство. Существует лишь 4^{2n+1} различных последовательностей длины $2n+1$, состоящих из чисел $1, 2, 3, 4$. Рассмотрим $4^{2n+1}+1$ последовательностей

$$(a_1, \dots, a_{2n+1}), (a_{2n+2}, \dots, a_{4n+2}), \dots, (a_{(2n+1)4^{2n+1}+1}, \dots, a_{(2n+1)4^{2n+1}+2n+2}). \tag{3.41}$$

Из принципа Дирихле следует, что среди них есть хотя бы две совпадающих. Обозначим индексы их первых элементов за n_1 и n_2. Последовательности будут иметь вид $(a_{n_1},\ldots,a_{n_1+2n})$ и $(a_{n_2},\ldots,a_{n_2+2n})$. Поскольку длина каждой последовательности в (3.41) четная, $n_1\equiv n_2 \pmod 2$, лемма доказана. $\square$

Пусть $C_N=(c_1,c_2,\ldots,c_N)$ - произвольная последовательность длины N, найдем числа n_1 и n_2 из леммы 3.8. Зададим две новых последовательности натуральных чисел

$$\begin{gathered} C_N^1=(c_1,c_2,\ldots,c_{n_1-1},c_{n_2},c_{n_2+1},\ldots,c_N),\\ C_N^2=(c_1,c_2,\ldots,c_{n_1-1},c_{n_1},\ldots,c_{n_2-1},c_{n_1},\ldots,c_{n_2-1},c_{n_2},c_{n_2+1},\ldots,c_N). \end{gathered} \tag{3.42}$$

Здесь последовательность C_N^1 получена из C_N выкидыванием участка $(c_{n_1},c_{n_1+1},\ldots,c_{n_2-1})$, а последовательность C_N^2 получена из C_N добавлением этого же участка второй раз.

Лемма 3.9. *Пусть* $\gamma=[0;c_1,c_2,\ldots,c_N,\ldots]$ *- произвольное иррациональное число, не являющееся квадратичной иррациональностью. Рассмотрим последовательность* $C_N=(c_1,c_2,\ldots,c_N)$ *и найдем два числа* n_1 *и* n_2 *из леммы 3.8. Определим два новых иррациональных числа*

$$\begin{aligned} \gamma^1=[0;c_1,c_2,\ldots,c_{n_1-1},c_{n_2},c_{n_2+1},\ldots,c_N,c_{N+1}\ldots]=\\ =[0;C_N^1,c_{N+1},\ldots],\\ \gamma^2=[0;c_1,c_2,\ldots,c_{n_1-1},c_{n_1},\ldots,c_{n_2-1},c_{n_1},\ldots,c_{n_2-1},c_{n_2},c_{n_2+1},\ldots,c_N,\ldots]=\\ =[0;C_N^2,c_{N+1},\ldots]. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Тогда $\max(\gamma^1,\gamma^2)>\gamma$.

Доказательство. Обозначим через r наименьшее положительное число такое, что $c_{n_1+r}\neq c_{n_2+r}$. Поскольку γ не является квадратичной иррациональностью, определение r корректно. Пусть $\gamma^-<\gamma$. Первое отличающееся неполное частное в их разложениях в цепную дробь есть c_{n_2+r} в γ^- и c_{n_1+r} в γ. Теперь сравним γ^+ и γ. Первое отличающееся неполное частное в их разложениях в цепную дробь есть c_{n_1+r} в γ^+ и c_{n_2+r} в γ. Поскольку n_1 и n_2 имеют одинаковую четность, либо γ^-, либо γ^+ больше, чем γ. $\square$

Обозначим $\max(\gamma^1, \gamma^2)$ через γ^+. Обозначим соответствующую максимуму последовательность неполных частных (C_N^1 или C_N^2) как C_N^+.

Когда все неполные частные разложения γ в цепную дробь ограниченны, нетрудно вывести количественную версию леммы 3.9, используя лемму 3.7.

Следствие 3.2. *Пусть* $\gamma = [0; c_1, c_2, \ldots, c_N, \ldots]$ *- произвольное иррациональное число, не являющееся квадратичной иррациональностью. Пусть все неполные частные разложения* γ *в цепную дробь не превосходят* 4. *Определим* γ^+ *как описано в предыдущей лемме. Тогда*

$$\gamma^+ - \gamma > \delta_{N+r}.$$

Доказательство. □

Лемма 3.10. *Пусть* $\gamma = [0; c_1, c_2, \ldots, c_N, \ldots]$ *и* $\gamma' = [0; c'_1, c'_2, \ldots, c'_N, \ldots]$ *- два иррациональных числа, причем неполные частные их разложения в цепную дробь не превосходят* 4. *Предположим, что любая последовательность неполных частных длины* $2n+1$, *встречающаяся в последовательности* $(c'_1, c'_2, \ldots, c'_N, \ldots)$ *бесконечно много раз, также встречается бесконечно много раз в последовательности* $(c_1, c_2, \ldots, c_N, \ldots)$. *Тогда выполнено неравенство*

$$\mu(\gamma') < \mu(\gamma) + 2\varepsilon_n.$$

Доказательство. Существует растущая последовательность $k(j)$ такая, что

$$\lim_{j\to\infty} \lambda_{k(j)}(\gamma') = \mu(\gamma'). \tag{3.44}$$

Поскольку все неполные частные разложения γ' в цепную дробь ограниченны, существует подпоследовательность $k'(j)$ такая, что $c'_{k'(j_1)+i} = c'_{k'(j_2)+i}$ для любых натуральных j_1, j_2 и $-n \leqslant i \leqslant n$. Обозначим в качестве D последовательность

$$(c'_{k'(j)-n}, c'_{k'(j)-n+1}, \ldots, c'_{k'(j)}, \ldots, c'_{k'(j)+n}). \tag{3.45}$$

Поскольку последовательности (3.45) по определению $k'(j)$ совпадают при всех j, определение D без индекса корректно. Последовательность D имеет длину $2n+1$, а значит встречается в последовательности неполных частных $(c'_1, c'_2, \ldots, c'_N, \ldots)$ бесконечно много раз. Следовательно, существует растущая последовательность индексов $l(j)$ такая, что

$$c'_{k'(j)+i} = c_{l(j)+i} \tag{3.46}$$

для всех $j \in \mathbb{N}$ и $-n \leqslant i \leqslant n$. Из леммы 3.7 следует, что

$$|\lambda_{k'(j)}(\gamma') - \lambda_{l(j)}(\gamma)| < 2\varepsilon_n \tag{3.47}$$

Заметим, что

$$\lim_{j\to\infty} \lambda_{k'(j)}(\gamma') = \lim_{j\to\infty} \lambda_{k(j)}(\gamma') = \mu(\gamma') \tag{3.48}$$

и

$$\limsup_{j\to\infty} \lambda_{l(j)}(\gamma) \leqslant \mu(\gamma). \tag{3.49}$$

Теперь условие леммы следует из (3.47), (3.48) и (3.49). □

Лемма 3.11. *Для произвольного натурального n определим $N = N(n)$ из леммы 3.8. Пусть C_N - произвольная последовательность N. Рассмотрим произвольное иррациональное $\gamma = [0; c_1, c_2, \ldots, c_N, \ldots]$ такое, что участок C_N встречается в последовательности $C = (c_1, c_2, \ldots, c_m, \ldots)$ бесконечно много раз. Определим бесконечную последовательность C^+ следующим образом: заменим все участки C_N в последовательности C на C_N^+. Обозначим $\gamma' = [0; C^+]$. Тогда*

$$\mu(\gamma') < \mu(\gamma) + 2\varepsilon_n.$$

Доказательство. C_N^+ равно C_N^1 или C_N^2. Нетрудно видеть, что в обоих случаях условия леммы 3.10 выполняются. □

Теорема 3.1. *Если (a, b) - пропуск в спектре Лагранжа $\mathbb{L}$, то существует периодическая в обе стороны последовательность A такая, что $a = \lambda_0(A) = M(A)$. Таким образом a представимо в виде суммы двух квадратичных иррациональностей.*

Доказательство. Пусть (a,b) - пропуск в спектре Лагранжа. Зафиксируем четное n, удовлетворяющее условию $\varepsilon_n < \frac{b-a}{4}$. Определим $N = N(n)$ из леммы 3.8. Далее рассмотрим произвольное иррациональное число $\alpha = [0; c_1, \ldots]$ такое, что $\mu(\gamma) = a$. Без ограничения общности будем предполагать, что все неполные частные разложения γ в цепную дробь не превосходят 4. Поскольку $\mu(\gamma) = a$, существует монотонная последовательность индексов $k(j)$ такая, что

$$\lim_{j\to\infty} \lambda_{k(j)}(\gamma) = a, \tag{3.50}$$

□

причем разность $k(j+1) - k(j)$ стремится к $+\infty$ при $j \to \infty$. Теперь рассмотрим для каждого j следующую конечную последовательность

$$(c_{k(j)-N}, c_{k(j)-N+1}, \ldots, c_{k(j)}, \ldots, c_{k(j)+N}). \tag{3.51}$$

Поскольку все неполные частные разложения α в цепную дробь ограниченны, в $k(j)$ существует такая бесконечная подпоследовательность индексов j_m, что $c_{k(j_{m_1})+i} = c_{k(j_{m_2})+i}$ для всех натуральных m_1 и m_2 и для всех i в диапазоне $-N \leqslant i \leqslant N$. Без ограничения общности можем полагать, что $c_{k(j_1)+i} = c_{k(j_2)+i}$ для всех натуральных j_1 и j_2 и при i, по модулю не превосходящему N. Таким образом, последовательность $(c_{k(j)+1}, c_{k(j)+2}, \ldots, c_{k(j)+N})$ не зависит от j. Обозначим ее как C_N. Обозначим также $c_{k(j)}$ как c, поскольку он тоже не зависит от j. Рассмотрим бесконечную цепную дробь

$$\eta_j(\gamma) = [c_{k(j)}; c_{k(j)+1}, \ldots, c_{k(j)+N}, c_{k(j)+N+1}, \ldots] = [c_{k(j)}; C_N, c_{k(j)+N+1}, \ldots].$$

Из леммы 3.8 следует существование двух натуральных чисел n_1 и n_2 таких, что для всякого натурального j выполнены равенства

$$c_{k(j)+n_1+i} = c_{k(j)+n_2+i}, \ 0 \leqslant i \leqslant n-1.$$

Обозначим через $r(j)$наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию $c_{k(j)+n_1+r(j)} \neq c_{k(j)+n_2+r(j)}$. Такое число существует, поскольку γ - не квадратичная иррациональность. Кроме того, очевидно, что $r(j) \geqslant n$. Рассмотрим два случая:

1. Существует такое число М, что $r(j) = M$ для бесконечно многих индексов j.
2. $r(j) \to \infty$ при $j \to \infty$.

Случай 1.

Без ограничения общности можем считать, что $r(j) = M$ при всех натуральных j. Обозначим последовательность неполных частных

$$\left(c_{k(j)+N+1}, \ldots, c_{k(j+1)}\right)$$

через B_j. Кроме того, обозначим начальный отрезок неполных частных

$$\left(c_1, c_2 \ldots, c_{k(1)-1}\right)$$

как B_0. С учетом введенных обозначений, γ раскладывается в цепную дробь следующим образом

$$\gamma = [0; B_0, c, C_N, B_1, c, C_N, \ldots]. \tag{3.52}$$

Определим новое иррациональное число

$$\gamma' = [0; B_0, c, C_N^+, B_1, c, C_N^+, \ldots]. \tag{3.53}$$

Обозначим индекс элемента c, стоящего перед блоком B_i в разложении в цепную дробь γ', за $l(i+1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_{k(j)}(\gamma) &= [c, C_N, B_j, C_N, \ldots] + [0; \overleftarrow{B_{j-1}}, \overleftarrow{C_N}, \ldots, \overleftarrow{B_0}] \\ \lambda_{l(j)}(\gamma') &= [c, C_N^+, B_j, C_N, \ldots] + [0; \overleftarrow{B_{j-1}}, \overleftarrow{C_N^+}, \ldots, \overleftarrow{B_0}]. \end{aligned} \tag{3.54}$$

По следствию 3.2 имеем

$$[c, C_N^+, B_j, C_N, \ldots] > [c, C_N, B_j, C_N, \ldots] + \delta_{N+r}. \tag{3.55}$$

Поскольку длина блока B_{j-1} стремится к бесконечности, получаем

$$\lim_{j\to\infty} \lambda_{l(j)}(\gamma') \geqslant \lim_{j\to\infty} \lambda_{k(j)}(\gamma) + \delta_{N+r} \geqslant a + \delta_{N+r}. \tag{3.56}$$

Отсюда $\mu(\gamma') > a$. С другой стороны, из леммы 3.11 следует, что

$$\mu(\gamma') < \mu(\gamma) + 2\varepsilon_n < b.$$

Противоречие с тем, что на интервале (a, b) нет точек спектра Лагранжа.

Случай 2

Без ограничения общности можем полагать, что $r(j) > n_2 - n_1$ для любого натурального j. Разделим $r(j)$ на $n_2 - n_1$ с остатком - найдем целые $q(j)$ и $t(j)$ такие, что

$$r(j) = (n_2 - n_1)q(j) + t(j), \quad \text{где } 0 \leqslant t(j) < n_2 - n_1.$$

Тогда имеем следующую последовательность равенств

$$\begin{aligned} c_{k(j)+n_1} = c_{k(j)+n_2} = c_{k(j)+2n_2-n_1} = \ldots = c_{k(j)+n_1+q(j)(n_2-n_1)} \\ c_{k(j)+n_1+1} = c_{k(j)+n_2+1} = c_{k(j)+2n_2+1-n_1} = \ldots = c_{k(j)+n_1+1+q(j)(n_2-n_1)} \\ \ldots \\ c_{k(j)+n_2-1} = c_{k(j)+2n_2-n_1-1} = c_{k(j)+3n_2-2n_1-1} = \ldots = c_{k(j)+n_2-1+q(j)(n_2-n_1)} \end{aligned} \tag{3.57}$$

Таким образом, последовательность

$$(c_{k(j)+n_1}, c_{k(j)+n_1+1} \ldots, c_{k(j)+n_2-1})$$

повторяется $q(j)$ раз. Обозначим ее через P, она не зависит от j. Получаем

$$[c; C_N, B_j, C_N, \ldots] = [c; c_{k(j)+1}, \ldots, c_{k(j)+n_1-1}, \underbrace{P, P, \ldots, P}_{q(j) \text{ раз}}, \ldots] \tag{3.58}$$

Поскольку $r(j)$ стремится к бесконечности, $q(j)$ также стремится к бесконечности, следовательно

$$\lim_{j\to\infty} [c; C_N, B_j, C_N, \ldots] = [c; c_{k(j)+1}, \ldots, c_{k(j)+n_1-1}, \overline{P}] \tag{3.59}$$

является квадратичной иррациональностью.

Для завершения доказательства теоремы, остается показать, что $[0; c_{k(j)-1}, c_{k(j)-2}, \ldots, c_1]$ - второе слагаемое в первом равенстве в (3.54) также стремится к квадратичной иррациональности. Этот факт доказывается абсолютно так же, как и для первого слагаемого. Мы рассматриваем последовательность $C'_N = (c_{k(j)-N}, c_{k(j)-N+1}, \ldots, c_{k(j)-1})$ длины N, находим для нее два числа n'_1 и n'_2 из леммы 3.8. Определяем $r'(j)$ как наименьшее натуральное число такое, что

$$c_{k(j)-n'_1-r(j)} \neq c_{k(j)-n'_2-r(j)}.$$

Аналогично рассуждая, в итоге получим, что

$$[0; c_{k(j)-1}, c_{k(j)-2}, \ldots, c_1] = [0; c_{k(j)-1}, c_{k(j)-2} \ldots, c_{k(j)-n_1+1}, \underbrace{P', P', \ldots, P'}_{q'(j)\ \text{раз}}, \ldots, c_1], \tag{3.60}$$

где через P' обозначена последовательность

$$(c_{k(j)-n_1}, c_{k(j)-n_1-1} \ldots, c_{k(j)-n_2+1}).$$

Обозначим через C^u периодическую в обе стороны последовательность

$$(\overline{P'}, c_{k(j)-n_1+1}, \ldots, c_{k(j)-1}, c^*, c_{k(j)+1}, \ldots, c_{k(j)+n_1-1}, \overline{P}). \tag{3.61}$$

Символом $*$ обозначен элемент под индексом 0. Из доказанного легко видеть, что

$$\lambda_0(C^u) = a.$$

Теорема доказана полностью.

3.4. Задача о достижимом числе - общий случай

В этом разделе мы докажем следующую теорему

Теорема 3.2. *Пусть $\lambda \in \mathbb{L}$ не является левым концом пропуска в спектре Лагранжа. Тогда существует достижимое иррациональное число α такое, что $\mu(\alpha) = \lambda$.*

Пусть Q есть множество всевозможных квадратичных иррациональностей. Известно, что $\mathbb{L} = \overline{\mu(Q)}$ [3]. Таким образом, если λ не является левым концом некоторого пропуска в спектре Лагранжа, возможны два варианта:

1. Существует квадратичная иррациональность γ такая, что $\mu(\gamma) = \lambda$.
2. Существует бесконечная последовательность квадратичных иррациональностей γ_n такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\gamma_n) = \lambda$, причем последовательность $\mu(\gamma_n)$ убывает.

Случай 1

Можем без ограничения общности считать, что γ разлагается в чисто периодическую цепную дробь.

$$\gamma = [0; \overline{P}], \tag{3.62}$$

где $P = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Существует натуральное число j, не превосходящее длины периода n, такое, что

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_{j+mn}(\gamma) = \mu(\gamma) = [c_j; c_{j+1}, \ldots, c_n, \overline{P}] + [0; c_{j-1}, \ldots, c_1, \overline{P}]. \tag{3.63}$$

Заметим, что для любой конечной последовательности R выполнено равенство

$$\mu(\gamma) = \mu([0; R, \overline{P}]).$$

Обозначим число $[0; R, \overline{P}]$ как γ'. Пусть длина последовательности R равна l. Тогда

$$\lambda_{j+mn+l}(\gamma') = [c_j; c_{j+1}, \ldots, c_n, \overline{P}] + [0; c_{j-1}, \ldots, c_1, \underbrace{P, P, \ldots, P}_{m \text{ раз}}, \overleftarrow{R}]. \tag{3.64}$$

Выберем произвольную последовательность R так, чтобы выполнялось неравенство

$$[0; c_{j-1}, \ldots, c_1, \overleftarrow{R}] > [0; c_{j-1}, \ldots, c_1, \overline{P}]. \tag{3.65}$$

Тогда

$$[0; c_{j-1}, \ldots, c_1, \underbrace{P, P, \ldots, P}_{2m \text{ раз}}, \overleftarrow{R}] > [0; c_{j-1}, \ldots, c_1, \overline{P}] \tag{3.66}$$

при всех m. То есть

$$\lambda_{j+2mn+l}(\gamma') > \mu(\gamma) = \mu(\gamma') \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.67}$$

Поскольку

$$\lim_{m\to\infty}\lambda_{j+mn+l}(\gamma') = \mu(\gamma) = \mu(\gamma'), \tag{3.68}$$

число γ' является достижимым, и в случае 1 теорема доказана.

Случай 2

Обозначим через P_n периоды разложения в цепную дробь квадратичных иррациональностей γ_n. Без ограничения общности можем считать, что элементы P_n для всех n не превосходят $\mu(\gamma)+1$. Как и в первом случае полагаем, что все γ_n представляются в виде чисто периодической цепной дроби.

Следующая лемма очевидно следует из общих свойств цепных дробей.

Лемма 3.12. *Пусть γ_n квадратичная иррациональность, разлагающаяся в чисто периодическую цепную дробь с периодом $P_n = (c_1^n, c_2^n, \dots, c_{l_n}^n)$ длины l_n. Рассмотрим натуральное число j, не превосходящее j и обладающее следующим свойством*

$$\lim_{m\to\infty}\lambda_{j+mn}(\gamma_n) = \lim_{m\to\infty}[c_j^n; c_{j+1}^n, \dots, c_{l_n}^n, \overline{P}]+[0; c_{j-1}^n, \dots, c_1^n, \underbrace{P, P, \dots, P}_{m\ \text{раз}}] = \mu(\gamma_n). \tag{3.69}$$

Тогда для любого $\varepsilon_n > 0$ существует число $N = N(\varepsilon_n)$ такое, что для любых конечных или бесконечных последовательностей R, S выполнено неравенство

$$[c_j^n; c_{j+1}^n, \dots, c_{l_n}^n, \underbrace{P, P, \dots, P}_{N\ \text{раз}}, R] + [0; c_{j-1}^n, \dots, c_1^n, \underbrace{P, P, \dots, P}_{N\ \text{раз}}, S] > \mu(\gamma_n) - \varepsilon_n. \tag{3.70}$$

Доказательство. □

Покажем теперь, что длины периодов P_n стремятся к бесконечности.

Лемма 3.13. *Пусть γ_n - последовательность чисто периодических квадратичных иррациональностей с периодом $P_n = (c_1^n, c_2^n, \dots, c_{l_n}^n)$ длины l_n. Пусть λ - иррациональное число, не являющееся квадратичной иррациональностью, такое, что $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\gamma_n) = \lambda$ и последовательность $\mu(\gamma_n)$ убывает. Тогда длины периодов l_n стремятся к бесконечности при $n \to \infty$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует число M такое, что у бесконечно многих периодов длина равна M. Поскольку существует лишь конечное число последовательностей длины M с элементами, не превосходящими $\mu(\gamma)+1$, найдется такой период P' длины M, который встречается в последовательности $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ бесконечно много раз. Пусть i_n - последовательность таких индексов, что $P_{i_n} = P'$. Тогда

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \mu(\gamma_n) = \lim_{n\to\infty} \mu([0; \overline{P_n}]) = \lim_{n\to\infty} \mu([0; \overline{P_{i_n}}]) = \mu([0; \overline{P'}]) > \lambda. \quad (3.71)$$

Противоречие. Лемма доказана. □

Лемма 3.14. *В условиях предыдущей леммы можно выделить из последовательности P_n подпоследовательность P'_n со следующими свойствами: первые n периодов $P'_n, P'_{n+1}, \ldots$ совпадают.*

Доказательство. Поскольку все неполные частные периодов ограниченны, существует число, с которого начинаются бесконечно много периодов. Таким образом от P_n можно перейти к бесконечной подпоследовательности, в которой все периоды начинаются на одно и тоже число. Далее процесс повторяется для второго и всех последующих элементов периодов. Поскольку длина P_n стремится к бесконечности, процесс построения подпоследовательности всегда можно продолжить. □

Докажем теперь теорему 3.2 во втором случае.

Доказательство. Рассмотрим последовательность P'_n из леммы 3.14 и соответствующую ей последовательность квадратичных иррациональностей $\gamma'_n = [0; \overline{P'_n}]$. Выберем $\varepsilon_n = (\mu(\gamma_n) - \lambda)/3$ и $N(n) = N(\varepsilon_n)$. Рассмотрим иррациональное число

$$\gamma' = [0; \underbrace{P'_1, P'_1, \ldots, P'_1}_{2N(1)+1 \text{ раз}}, \underbrace{P'_2, P'_2, \ldots, P'_2}_{2N(2)+1 \text{ раз}}, \ldots, \underbrace{P'_n, P'_n, \ldots, P'_n}_{2N(n)+1 \text{ раз}}, \ldots]. \quad (3.72)$$

Из леммы 3.12 следует, что существует бесконечно много индексов j, удовлетворяющих условию $\lambda_j(\gamma') > \lambda$. Из лемм 3.13 и 3.14 следует, что

$$\mu(\gamma') = \lambda. \tag{3.73}$$

Теорема доказана. $\square$

Список литературы

1. A. Brocot *Calcul des Rouages par Approximations. Nouvelles Methodes*, Paris (1892).
2. T. W. Cusick, M. E. Flahive *The Markoff and Lagrange spectra*, Math. Surveys Monogr., 30, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1989), ISBN: 0-8218-1531-8.
3. T. W. Cusick *The cconnection between the Lagrange and Markoff spectra*, Duke Math. J, 42 (1975), 507-517.
4. A. Denjoy *Sur quelques points de la theorie des fonctions*, CR Acad. Sci. Paris, 194 (1932), 44-46.
5. A. Denjoy *Sur une fonction rélle de Minkowski*, Journal de Mathématiques Pures et Appliqués, 17 (1938), 105—151.
6. B.Dietz *On the gaps of the Lagrange spectrum*, Acta Arith., 45 (1985), 59-64.
7. Anna A. Dushistova, Igor D. Kan, Nikolai G. Moshchevitin. *Differentiability of the Minkowski question mark function*, J. Math. Anal. Appl. 401:2 (2013), 774-794.
8. Hall, Jr., Marshall *On the sum and product of continued fractions*, Ann. of Math. 48:2 (1947), 966-993.
9. D. Hensley *Continued fractions*, World scientific publishing Co. Pte. Ltd (2006).
10. Грэхэм Р., Кнут Д., Паташник *Конкретная математика. Основание информатики*, М.: Мир (1998).
11. A.Markoff *Sur les formes quadratiques binaires indéfinies*, Math. Ann. 15 (1879), 381-406.
12. A.Markoff *Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. II*, Math. Ann. 19 (1880), 379-399.

13. H. Minkowski *Zur Geometrie der Zahlen*, Gesammlete Abhandlungen (1911), 50-51.

14. J. Paradis, P. Viader, L. Bibiloni *A new light on Minkowski's ?(x) function*, J. Number Theory, 73 (1998), 212-227.

15. O. Perron *Die Lehre von den Kettenbruechen* B.G. Teubner, Stuttgart (1977).

16. R.Salem *On some singular monotone functions which are strictly increasing* Trans. Amer. Math. So., 53 (1943), 427 - 439.

17. H. Schecker *Über die Menger der Zahlen, die als Minima quadratischer Formen auftreten* J. Number theory, 9 (1977), 121-141.

18. M.A.Stern *Uber eine zahlentheoretische Funktion* J. reine angew. Math. 55 (1858), 193-220.

19. R. F. Tichy, J. Uitz. *An extension of Minkowski's singular function* Appl. Math. Lett., 8 (1995), 39-46.

20. E. Zhabitskaya *On arithmetical nature of Tichy-Uitz's function* Funct. Approx. Comment. Math., 43:1 (2010), 15-22.

21. А.А. Душистова, Н.Г. Мощевитин *О производной функции Минковского ?(x)* Фундаментальная и прикладная математика, 16:6 (2010), 33-44.

22. И.Д. Кан *Уточнение правила сравнения континуантов* Дискрет. матем. 12:3 (2000), 72–75.

23. И.Д. Кан *Методы получения оценок континуантов* Фундаментальная и прикладная математика, 16:6 (2010), 95-108.

24. А.В. Малышев *Спектры Маркова и Лагранжа (обзор литературы)* Исследования по теории чисел. 4, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 67, Изд-во «Наука», Ленинград (1977), 5-38.

25. Ю. Ю. Финкельштейн *Полигоны Клейна и приведенные регулярные непрерывные дроби*, УМН, 48:3 (1993), 205-206.

26. Г.А. Фрейман *О начале луча Холла*, Теория чисел, часть V, Калининский государственный университет (1973), 87-113.

27. Г.А. Фрейман *Диофантовы приближения и геометрия чисел (задача Маркова)*, Калининский государственный университет (1975).

28. А.Я. Хинчин *Цепные дроби*, М.: Эдиториал УРСС (2004), ISBN 5-354-00551-5.

29. Гайфулин Д.Р. *Производные двух функций семейства Денжуа–Тихого–Уитца*, Алгебра и анализ, 27:1 (2015), 74–124

30. Гайфулин Д.Р. *Экстремальные значения континуантов*, Матем. заметки 100:2 (2016), 304–307

31. Gayfulin D. *Attainable numbers and the Lagrange spectrum*, submitted, preprint at arXiv:1606.01600 (2016), 14 p.