Национальный исследовательский институт
Высшая Школа Экономики

На правах рукописи

Македонский Евгений Александрович

Некоторые классы циклических модулей над алгебрами Ли

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2016

Работа выполнена на факультете математики национального исследовательского университета Высшая Школа Экономики

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор Панов Александр Николаевич, заведующий кафедрой Алгебры и Геометрии механико-математического факультета Самарского национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева;

доктор физико-математических наук, профессор Кошевой Глеб Алексеевич, главный научный сотрудник лаборатории математической экономики ЦЭМИ РАН.

Ведущая организация:

Институт Теоретической Физики имени Л. Д. Ландау

Защита состоится "____"_______ 2016 года в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.077.03 при Институте проблем передачи информации им. А.А.Харкевича РАН, расположенному по адресу: 127051, г.Москва, Большой Каретный переулок, 19, стр.1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института проблем передачи информации им. А.А.Харкевича РАН.

Автореферат разослан "____"_______ 2016 года

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя учёного секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
Диссертационного совета Д 002.077.03,
доктор физико-математических наук Соболевский А.Н.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Данная работа посвящена изучению некоторых классов циклических представлений алгебр Ли.

Вопросам ручности и дикости посвящено много работ, например, [Gel], [D], [D1], [Han], [Sam] и многие другие. Классификационная задача называется ручной, если множество ее решений параметризуется конечным семейством однопараметрических семейств. Нетривиальными примерами ручных задач являются задачи классификации представлений колчанов, у которых подлежащий граф (то есть граф, получающийся забыванием направлений стрелок) является аффинной диаграммой Дынкина. Дикой называется задача, к которой сводится задача классификации пары линейных операторов с точностью до одновременной замены базиса. Данная задача является эталонной сложной задачей. Так можно считать, например, потому, что к данной задаче сводится задача классификации неприводимых представлений любой конечномерной алгебры. Ю. Дрозд доказал, что задачи классификации конечномерных представлений любой конечномерной ассоциативной алгебры является либо ручной, либо дикой. Поэтому для многих других категорий естественно возникает вопрос о том, является ли задача классификации неразложимых объектов этой категории ручной или дикой. В частности, естественно поставить вопрос о том, всегда ли задача классификации представлений конечномерной алгебры Ли является либо ручной, либо дикой, и если да, то определить, в каких случаях эта задача является ручной.

В статье [2] автора было доказано, что задача классификации конечномерных представлений конечномерной алгебры Ли практически во всех случаях является дикой, то есть в некотором смысле эта классификация является невозможной. Эта классификация возможна (задача классификации является ручной) только для полупростых алгебр Ли и одномерных расширений полупростых. Поэтому имеет смысл изучать специальные классы представлений.

В данной диссертации исследуются модули Вейля. Это циклические представления борелевских подалгебр аффинных алгебр, определенные некоторым набором соотношений. Они изучались во многих работах, например, [CL], [FL1], [FL2], [Kn], [S], [I]. В частности, изучалась из взаимосвязь с многочленами Макдональда. В работах Сандерсон, Иона и Чари было доказано, что характер модулей Вейля совпадает с многочленами $E_\lambda(x, q, 0)$, $\lambda \in -P_+$, то есть со специализациями в нуле несимметрических многочленов Макдональда. Для нескрученных типов A, D, E и для скрученных аффинных алгебр Ли это следует из следующего сопоставления. С одной стороны, несимметрические многочлены Макдональда порождаются друг из друга с помощью применения некоторых сплетающих операторов. С другой стороны, характеры модулей Демазюра переводятся друг в друга с помощью операторов Демазюра. Далее оказывается, что при подстановке $t = 0$ в сплетающие операторы получаются операторы Демазюра, а антидоминантные модули Демазюра совпадают с модулями Вейля.

Однако на этом связь модулей Вейля и специализаций несимметрических многочленов Макдональда не заканчивается. В частности, Чередником и Орром [CO1] изучались специализации несимметрических многочленов Макдональда в $t = \infty$. В частности, у них возникает гипотеза о связи многочленов Макдональда и фильтраций Пуанкаре-Биркгоффа-Витта. Точнее говоря, пусть M – некоторый циклический модуль над алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда на этом модуле можно следующим образом определить ПБВ фильтрацию. В частности, нас будут интересовать ПБВ-фильтрации на модулях Вейля W_μ. Пусть $\mathrm{U}(\mathfrak{n}[t])_s$ – ПБВ-фильтрация на универсальной обертывающей алгебре. Так как $W_\mu = \mathrm{U}(\mathfrak{n}[t])w_\mu$, мы получаем индуцированную фильтрацию на модуле Демазюра. Пусть W_μ^{gr} – ассоциированный градуированный модуль. Тогда:

$$W_\mu^{gr} = \bigoplus_{s\geq 0} W_\mu^{gr}(s),\ W_\mu^{gr}(s) = \frac{\mathrm{U}(\mathfrak{n}[t])_s w_\mu}{\mathrm{U}(\mathfrak{n}[t])_{s-1} w_\mu}.$$

Отметим, что W_μ^{gr} – представление абелевой алгебры $\mathfrak{n}^a[t]$, где $\mathfrak{n}^a$ – абелева алгебра Ли с подлежащим векторным пространством $\mathfrak{n}$. Пусть D – оператор ПБВ-степени на W_μ^{gr}, то есть $D|_{W_\mu^{gr}(s)} = s \cdot \mathrm{Id}$. Пусть d – оператор степени по t в аффинной алгебре Ли. Положив $dw_\mu = 0$, мы получаем действие оператора d на W_μ. Пусть $W_\mu^{gr}(s,r)$ – множество векторов $v \in W_\mu^{gr}(s)$, таких что $dv = rv$. Отметим, что каждый $W_\mu(s,r)$ естественным образом является $\widehat{\mathfrak{h}}$-модулем. Мы обозначаем ПБВ-характер W_μ как

$$\mathrm{ch}_{q,p} W_\mu = \sum_{r,s\geq 0} q^r p^s \,\mathrm{ch}\, W_\mu^{gr}(s,r).$$

Гипотеза Чередника-Орра состоит в том, что специализации антидоминантных многочленов Макдональда $E_{w_0(\lambda)}(x, q^{-1}, \infty)$ совпадает со специализацией ПБВ-характера модуля W_λ при $p = q$. В данной диссертации эта гипотеза для типа A доказывается в следующих частных случаях: если вес является кратным фундаментальному и если вес является линейной комбинацией первого и последнего фундаментального.

В статье Каца и Вакимото сказано, что характеры интегрируемых представлений со старшим весом для аффинных алгебр Ли типа $A_{2n}^{(2)}$ совпадают с характерами интегрируемых представлений модулей над аффинными суперлалгебрами Ли типа $\widehat{osp(1,2n)}$. В данной диссертации исследуется вопрос связи аффинных суперлалгебр Ли типа $\widehat{osp(1,2)}$ и полиномов Макдональда типа $A_2^{(2)}$.

Цель работы. Цель работы состоит в доказательстве дикости задачи классификации представлений конечномерных алгебр Ли, не являющихся полупростыми или одномерными расширениями полупростых. Также целью является исследование модулей Вейля и изучение связи их характеров со специализациями несимметрических многочленов Макдональда. В диссертации определены обобщенные модули Вейля и доказано, что специализации многочленов Макдональда в $t = \infty$ совпадают с характерами некоторых обобщенных модулей Вейля. Также в работе доказывается несколько частных случаев гипотезы Чередника-Орра. Также в работе изучается связь многочленов Макдональда-Коорнвиндера с представлениями суперaлгебры $osp(1,2)$.

Методы исследования. В нашей диссертации использованы методы теории представлений колчанов для изучения представлений конечномерных алгебр Ли. Применена конструкция дубля Габриеля колчана и форма Титса для доказательства дикости задач представлений алгебр Ли с более чем одномерным радикалом.

Применяется подход Хаглунда-Хаимана-Лоера для вычисления многочленов Макдональда в типе A. Также для вычисления многочленов Макдональда применяется формула Орра и Шимозоно. Для оценки снизу размерностей модулей применяется конструкция фьюжен-произведения.

Основные результаты диссертации. Диссертация содержит следующие новые определения, результаты и методы:

- Доказано, что задачи классификаций представлений конечномерных алгебр Ли разбиваются на ручные и дикие и определено. когда эта задача является ручной, а когда – дикой.
- Определены обобщенные модули Вейля.
- Доказано, что характеры обобщенных модулей Вейля совпадают со специализациями антидоминантных несимметрических многочленов Макдональда в $t = \infty$.
- Получено новое доказательство теоремы Чари-Иона о том, что характеры (классических) модулей Вейля совпадают со специализациями антидоминантных многочленов Макдональда в $t = 0$.
- Доказана гипотеза Чередника-Орра в типе A для весов, кратных фундаментальным, и для линейных комбинаций первого и последнего фундаментальных весов.

Научная новизна. Определение 2 является новым. Теоремы 1,2,3,4,5,6 являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация имеет теоретических характер. Результаты диссертации могут быть полезны математикам, занимающимся представлениями конечномерных алгебр Ли, специалистам по симметрических функциям, специалистам по модулям Вейля.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах: – Гомотопический семинар ВШЭ;

– семинар лаборатории математической физики и теории представлений ВШЭ.

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: – PBW filtrations of modules for Lie algebras and their appearance/applications in Representation Theory, Глазго, май 2014;

– Алгебраические группы, алгебры Ли и теория инвариантов, Самара, июль 2015;

– Integrability in algebra, geometry and physics: new trends, Аскона, июль 2015;

– PBW Structures in Representation Theory, Обервольфах, март 2016.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 2 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, трех разделов и списка литературы. Полный объем диссертации – 107 страниц, список литературы состоит из 63 наименований.

Краткое содержание работы

0.1. **Ручность и дикость.** О ручности и дикости задач теории представлений см., например, работы [Gel], [D], [D1], [Han], [Sam] и многие другие. В этих работах среди некоторых классов задач выделены ручные и дикие.

Рассмотрим алгебру Ли L. Будем рассматривать задачу классификации ее конечномерных линейных представлений с точностью до эквивалентности. В данной диссертации исследуется вопрос о том, для каких алгебр Ли L данная задача является дикой или ручной. Такие алгебры будем называть, соответственно, дикими и ручными. На данный вопрос дается следующий ответ.

Теорема 1. *Ручными являются следующие алгебры Ли:*

1) полупростые;

2) одномерная алгебра;

3) прямые суммы полупростых с одномерной.

Все остальные – дикие.

Из этой Теоремы следует, что конечномерные алгебры Ли разбиваются на два класса – ручных и диких.

Представления неполупростых алгебр Ли изучаются при помощи некоторого бесконечного колчана. Алгебра путей этого колчана не изоморфна обертывающей алгебре исходной алгебры Ли. Однако категория конечномерных представлений этой алгебры эквивалентна категории конечномерных представлений исходной алгебры Ли.

0.2. **Модули Вейля и ПБВ-фильтрации.** Поскольку задача классификации представлений алгебр Ли почти всегда является дикой, имеет смысл изучать некоторые конкретные классы представлений, имеющих хорошие свойства. В данной диссертации изучаются модули Вейля и некоторые их обобщения. Они определяются следующим образом. Пусть $\mathfrak{g}$ – простая конечномерная алгебра. Мы изучаем представления алгебры токов над ней, то есть алгебры $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{K}[t]$. $\mathfrak{h}$ – подалгебра картана конечномерной алгебры, Δ – система корней $\mathfrak{g}$, Δ_+ – множество положительных корней, e_α, f_α – образующие Шевалле. Тогда обобщенный модуль Вейля определяется следующими образующими и соотношениями.

Определение 2.

(1) $h \otimes t^k v = 0$ *для любого* $h \in \mathfrak{h}, k > 0$;

$$(e_\alpha \otimes t)v = 0,\ \alpha \in \sigma(\Delta_+) \cap \Delta_+;$$
$$(f_\alpha \otimes 1)v = 0,\ \alpha \in \sigma(\Delta_+) \cap \Delta_-;$$
$$(e_{\sigma(\alpha)} \otimes t)^{-\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle + 1} v = 0,\ \alpha \in \Delta_-, \sigma(\alpha) \in \Delta_+;$$
$$(f_{\sigma(\alpha)} \otimes 1)^{-\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle + 1} v = 0,\ \alpha \in \Delta_-,\ \sigma(\alpha) \in \Delta_-.$$

В случае тривиального элемента из группы Вейля получается определение классического модуля Вейля. Для произвольного элемента группы Вейля полученный модуль назовем обобщенным модулем Вейля. Эти модули хороши тем, что для них пишется удобная рекурсия. Точнее говоря, каждый такой модуль разбирается на подфакторы того же вида, но соответствующие меньшему весу. С помощью этой разборки получается рекуррентное соотношение на характеры. Аналогичное соотношение получается для специализаций многочленов Макдональда с помощью подхода Орра и Шимозоно. Отсюда получается совпадение характеров некоторых обобщенных модулей Вейля и некоторых специализаций несимметрических многочленов Макдональда. Точнее, верна следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* λ *– доминантный вес,* $\sigma \in W$*. Тогда*

(i) $\dim W_{\sigma(\lambda)} = \dim W_\lambda$.
(ii) $\mathrm{ch} W_{w_0\lambda} = E_{w_0\lambda}(x, q^{-1}, \infty)$.
(iii) $\mathrm{ch} W_\lambda = E_{w_0\lambda}(x, q, 0)$.
(iv) *Для любого* $i = 1, \ldots, \mathrm{rk}(\mathfrak{g})$*-модули* $W_{\sigma(\lambda)}$ *раскладываются на подфакторы вида* $W_{\kappa(\lambda - \omega_i)}$*,* $\kappa \in W$*. Подфакторы соответствуют некоторым альковным путям и количество подфакторов равно размерности* W_{ω_i}*.*

Аналогичные результаты получаются для простейшей супер態алгебры $\mathfrak{osp}(1,2)$. Супералгебры $\mathfrak{osp}(1,2l)$ имеют много общих свойств с обычными полупростыми алгебрами Ли. В частности, в отличие от других простых супералгебр у них есть группа Вейля и она позволяет определить обобщенные модули Вейля. Таким образом доказывается, что характеры модулей Вейля для супералгебры $\mathfrak{osp}(1,2)$ совпадают со специализациями многочленов Макдональда типа $A_2^{(2)}$.

Для доказательства данного утверждения явно находится базис модуля Вейля над исследуемой супералгеброй. Первоисточник приведенных ниже определений – в статьях [P, Mus1, Mus2]. Супералгебра Ли $\mathfrak{osp}(1,2)$ изоморфна прямой сумме $\mathfrak{sl}_2 \oplus \pi_1$, где $\mathfrak{sl}_2$ – четная часть и двумерный $\mathfrak{sl}_2$-модуль π_1 в нечетной части. Пусть e, h, f – стандартный базис $\mathfrak{sl}_2$ и пусть g^+, g^- – базис π_1. Имеем следующие нетривиальные коммутационные соотношения:

$$[e,f]=h,\ [h,e]=2e,\ [h,f]=-2f,$$
$$[h,g^+]=g^+,\ [h,g^-]=-g^-,\ [g^+,g^-]_+=h,$$
$$[g^+,g^+]_+=2e,\ [g^-,g^-]_+=-2f,\ [f,g^+]=g^-,\ [e,g^-]=-g^+.$$

Имеем разложение Картана

$\mathfrak{osp}(1,2)=\mathfrak{n}^-\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}^+,\ \mathfrak{n}^-=\mathrm{span}(f,g^-),\ \mathfrak{n}^+=\mathrm{span}(e,g^+),\ \mathfrak{h}=span(h).$

Рассмотрим алгебру токов $\mathfrak{osp}(1,2)[t]=\mathfrak{osp}(1,2)\otimes\mathbb{K}[t]$, ее модуль Вейля W_{-n} определен как циклический модуль с образующей w_{-n} и соотношениями

$$(\mathfrak{n}^-\oplus\mathfrak{h})\otimes t\mathbb{C}[t].w_{-n}=0,\quad (\mathfrak{n}^-\otimes 1).w_{-n}=0,$$
$$h_0.w_{-n}=-nw_{-n},\quad (e\otimes 1)^{n+1}.w_{-n}=0.$$

Для $x\in\mathfrak{osp}(1,2)$ определим как $x_i\in\mathfrak{osp}(1,2)[t]$ элемент $x\otimes t^i$.

Теорема 4. *Имеем $\mathfrak{osp}(1,2)\otimes t^n\mathbb{K}[t].w_{-n}=0$ и W_{-n} порожден мономами вида*

$$e_{a_1}\dots e_{a_s}g^+_{b_1}\dots g^+_{b_k}w_{-n}, \tag{2}$$
$$0\le b_1<\dots<b_k\le n-1,\ 0\le a_1\le\dots\le a_s\le n-k-s.$$

Этот базис дает формулу для характера. Для этого определим элементы:

$$c_1(k_{22},k_{12},k_{11})=q^{k_{12}^2+2k_{22}}\begin{pmatrix}k_{22}+k_{12}+k_{11}\\ k_{22},k_{12},k_{11}\end{pmatrix}_{q^2}, \tag{3}$$

Теперь получаем, что характер равен:

$$chW_{-m}=\sum_{k_{11},k_{12},k_{22}}x^{k_{11}-k_{22}}c_1(k_{22},k_{12},k_{11}).$$

Дальше, вычисляя многочлены Макдональда с помощью формулы Рама-Йип, получаем следующую Теорему:

Теорема 5. *Характеры модулей Вейля над $\mathfrak{osp}(1,2)$ являются специализациями несимметрических многочленов Макдональда типа $A_2^{(2)}$ в точке $t=0$.*

Также в диссертации доказывается частный случай гипотезы Чередника-Орра, а именно, доказывается, что для весов, кратных одному фундаментальному и для линейных комбинаций первого и последнего фундаментального для алгебр Ли типов A_n специализация несимметрических многочленов Макдональда, соответствующих антидоминантному весу, в точке $t = \infty$, совпадает с характером этих модулей, подкрученных на ПБВ-фильтрацию. Для этой цели также находится ПБВ-базис для исследуемых представлений. На основе этого базиса выписывается ПБВ-характер. Также с помощью комбинаторной формулы Хаглунда-Хаимана-Лоера вычисляется специализация многочленов Макдональда и доказывается, что они совпадают. Точнее говоря, верна следующая Теорема.

Теорема 6. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *– простая алгебра Ли типа* A_n *и предположим, что* $\lambda = -m\omega_i$ *или* $\lambda = -m_1\omega_1 - m_n\omega_n$*. Тогда*

$$E_\lambda(x, q^{-1}, \infty) = \mathrm{ch}_{PBW}\, W_\lambda|_{p=q}.$$

Список литературы

[1] E.Feigin, I.Makedonskyi, *Nonsymmetric Macdonald polynomials, Demazure modules and PBW filtration*, Journal of Combinatorial Theory, Series A (2015), pp. 60–84.

[2] Е. А. Македонский, *О диких и ручных конечномерных алгебрах Ли*, Функциональный анализ и его приложения, том 47, выпуск 4 (2013), с. 30-44.

Список литературы

[A] G.Andrews, The Theory of Partitions, Cambridge University Press, 1998

[BFP] F. Brenti, S. Fomin, A. Postnikov, *Mixed Bruhat operators and Yang-Baxter equations for Weyl groups*, Internat. Math. Res. Notices 1999, no. 8, 419–441.

[C] V.Chari, *On the fermionic formula and the Kirillov-Reshetikhin conjecture*, Internat. Math. Res. Notices 2001, no. 12, 629–654.

[Ch] I. Cherednik, DAHA-Jones polynomials of torus knots, arxiv.org/abs/1406.3959

[Ch1] I. Cherednik, *Nonsymmetric Macdonald polynomials*, IMRN 10 (1995), 483–515.

[Ch2] I. Cherednik, *Double affine Hecke algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 319, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[CF] I. Cherednik, E. Feigin, *Extremal part of the PBW-filtration and E-polynomials*, arXiv:1306.3146.

[CLS] L.Calixto, J.Lemay, A.Savage, *Weyl modules for Lie superalgebras*, http://arxiv.org/abs/1505.06949

[CO1] I. Cherednik, D. Orr, *Nonsymmetric difference Whittaker functions*, Preprint arXiv:1302.4094v3 [math.QA] (2013).

[CO2] ———, ———, *One-dimensional nil-DAHA and Whittaker functions*, Transformation Groups 18:1 (2013), 23–59; arXiv:1104.3918.

[CL] V. Chari, S. Loktev, *Weyl, Demazure and fusion modules for the current algebra of* $\mathfrak{sl}_{r+1}$, Adv. Math. 207 (2006), 928–960.

[CFS] V. Chari, G.Fourier, P.Senesi, *Weyl modules for the twisted loop algebras*, J. Algebra, 319(12), pp. 5016–5038, 2008.

[CP] V. Chari, A. Pressley, *Weyl modules for classical and quantum affine algebras*, Represent. Theory, 5, pp. 191–223 (electronic), 2001.

[D] Дрозд Ю. А. Ручные и дикие матричные задачи. Акад. наук Украины, инст. мат., Киев, 1977, 104-114.

[D1] Дрозд Ю. А. Представления коммутативных алгебр. Функц. Анализ и его приложения 6, вып 4 (1973), 41-43.

[D2] On Cohen–Macaulay Modules on Surfase Singularities Yuriy A. Drozd, Gert-Martin Greuel, and Irina Kashuba Moscow Mathematical Journal, Vol. 3, No 2, (2003), 397–418.

[F] E. Feigin, $\mathbb{G}_a^M$ *degeneration of flag varieties*, Selecta Mathematica, 18:3 (2012), 513–537.

[FoLi1] G.Fourier, P.Littelmann, *Tensor product structure of affine Demazure modules and limit constructions*, Nagoya Math. Journal 182 (2006), 171–198.

[FoLi2] ______, and ______, *Weyl modules, Demazure modules, KR-modules, crystals, fusion products and limit constructions*, Advances in Mathematics 211 (2007), no. 2, 566–593.

[FeLo1] B.Feigin, S. Loktev, *On generalized Kostka polynomials and the quantum Verlinde rule*, Differential topology, infinite-dimensional Lie algebras, and applications, 61–79, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 194, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[FeLo2] B.Feigin, S. Loktev, *Multi-dimensional Weyl modules and symmetric functions*, Comm. Math. Phys., 251(3), pp. 427–445, 2004.

[FFL1] E. Feigin, and G. Fourier, and P. Littelmann, *PBW-filtration and bases for irreducible modules in type A_n*, Transformation Groups 16:1 (2011), 71–89.

[FFL2] ______, ______, ______, *PBW filtration and bases for symplectic Lie algebras*, IMRN 24 (2011), 5760–5784.

[FFL3] ______, and ______, and ______, *PBW-filtration over $\mathbb{Z}$ and compatible bases for $V_{\mathbb{Z}}(\lambda)$ in type A_n and C_n*, Symmetries, Integrable Systems and Representations, 40, Springer, 2013, 35–63.

[FL1] G.Fourier, P.Littelmann, *Tensor product structure of affine Demazure modules and limit constructions*, Nagoya Math. Journal 182 (2006), 171–198.

[FL2] ______, and ______, *Weyl modules, Demazure modules, KR-modules, crystals, fusion products and limit constructions*, Advances in Mathematics 211 (2007), no. 2, 566–593.

[Fu] W.Fulton, *Young Tableaux, with Applications to Representation Theory and Geometry.* Cambridge University Press, 1997.

[Gel] Гельфанд И. М, Пономарев В. А. Замечания о классификации пары коммутирующих линейных преобразований в конечномерном пространстве. Функц. Анализ и его приложения 3, вып 4 (1969), 81-82.

[GG] Гото, Гроссханс. Полупростые алгебры Ли. Мир, 1981.

[Gab] Gabriel P, Roiter A. V. Representations of finite dimensionak algebras. - Encuclopaedia of Math. Sci. (Algebra 8). - 73. - Springer-Verlag, Berlin, 1992, 177 p.

[GL] S. Gaussent and P. Littelmann, *LS galleries, the path model, and MV cycles*, Duke Math.J. 127 (2005), no. 1, 35–88.

[H] M.Haiman, *Cherednik algebras, Macdonald polynomials and combinatorics*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid 2006, Vol. III, 843–872.

[Han] Yang Han, Wild Two-Point Algebras, Journal of Algebra 247, p. 57-77 (2002)

[HHL] M. Haiman, and J. Haglund, and N. Loehr, *A combinatorial formula for non-symmetric Macdonald polynomials*, Amer. J. Math. 130:2 (2008), 359–383.

[HKOTY] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, Y. Yamada, *Remarks on fermionic formula*, Recent developments in quantum affine algebras and related topics (Raleigh, NC, 1998), 243–291, Contemp. Math., 248, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999. http://arxiv.org/pdf/math/9812022v3.pdf

[I] B. Ion, *Nonsymmetric Macdonald polynomials and Demazure characters*, Duke Mathematical Journal 116:2 (2003), 299–318.

[J] A. Joseph, *On the Demazure character formula*, Annales Scientifique de l'.E.N.S., 1985, 389–419.

[Kn] F.Knop, *Integrality of two variable Kostka functions*, Journal fuer die reine und angewandte Mathematik 482 (1997) 177–189.

[Kum] S.Kumar, *Kac-Moody groups, their flag varieties and representation theory*, Progress in Mathematics, 204. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.

[KS] F.Knop, S.Sahi, *A recursion and a combinatorial formula for Jack polynomials*, Invent. Math. 128 (1997), no. 1, 9–22.

[LL] C. Lenart, A. Lubovsky, A uniform realization of the combinatorial R-matrix, http://arxiv.org/abs/1503.01765.

[L] C. Lenart, From Macdonald polynomials to a charge statistic beyond type A, Journal of Combinatorial Theory, Series A, vol. 119 (3),2012, pp. 683–712.

[LSh] C. Lenart and A. Schilling, Crystal energy functions via the charge in types A and C, Math.Z.273 (2013), no. 1-2, 401–426.

[LNSSS1] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for KirillovReshetikhin crystals I: Lifting the parabolic quantum Bruhat graph, Int. Math. Res. Not. 2015 (2015), 1848–1901.

[LNSSS2] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for KirillovReshetikhin crystals II: Alcove model, path model, and P = X, preprint 2014, arXiv:1402.2203.

[LNSSS3] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, Quantum Lakshmibai-Seshadri paths and root operators, preprint 2013, arXiv:1308.3529. [LP1] C. Lenart and A. Postnikov, Affine Weyl groups in K-theory and representation theory, Int. Math. Res. Not. 2007 (2007), 165.

[LNSSS4] C.Lenart, S.Naito, D.Sagaki, A.Schilling, M.Shimozono, A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals III: Nonsymmetric Macdonald polynomials at t = 0 and Demazure characters, arXiv:1511.00465

[M1] I.G.Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, second ed., Oxford University Press, 1995.

[M2] I.G.Macdonald, *Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95. Astérisque No. 237 (1996), Exp. No. 797, 4, 189–207.

[Mor] Morita K (1958). Duality of modules and its applications to the theory of rings with minimal condition. Science reports of the Tokyo Kyoiku Diagaku. Section A 6(150):83-142.

[Mus1] I.M.Musson, *Lie superalgebras and enveloping algebras,* vol. 131, Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

[Mus2] I.M.Musson, *The enveloping algebra of the Lie superalgebra* $osp(1, 2r)$, Represent. Theory 1 (1997), 405–423.

[N] K.Naoi, Weyl modules, Demazure modules and finite crystals for non-simply laced type, Adv. Math. 229 (2012), no. 2, 875–934.

[Naz] Назарова Л. А. Представления колчанов бесконечного типа. Известия академии наук СССР. 37 (1973), 752-791.

[O] E.Opdam *Harmonic analysis for certain representations of graded Hecke algebras*, Acta Math. 175 (1995), no. 1, 75–121.

[OS] D.Orr, M.Shimozono, *Specializations of nonsymmetric Macdonald-Koornwinder polynomials*, arXiv:1310.0279.

[P] G.Pinczon, *The enveloping algebra of the Lie superalgebra* $osp(1, 2)$, J. Algebra 132 (1990), no. 1, 219–242.

[RY] A.Ram, M.Yip, *A combinatorial formula for Macdonald polynomials*, Adv. Math. 226 (2011), no. 1, 309–331.

[S] Y. Sanderson, *On the Connection Between Macdonald Polynomials and Demazure Characters*, J. of Algebraic Combinatorics, 11 (2000), 269–275.

[Sage] SageMath, Nonsymmetric Macdonald polynomials package by A. Schilling and N. M. Thiery (2013), http://doc.sagemath.org/html/en/reference/combinat/sage/combinat/root system/non symmetric macdonald polynomials

[Sam] Самойленко Ю. С., Островский В. Л. О паре операторов, связанных квадратичным соотношением. Функц. Анализ и его приложения.

[SVV] P. Shan, M. Varagnolo, E. Vasserot, *On the center of quiver-Hecke algebras*, arXiv:1411.4392.

[Zus] Zusmanovich P. A converce to the second Whitehead Lemma. J. Lie Theory, 2008, vol. 18, pp. 295-299.