Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи
УДК 512.815.2, 512.664.1, 512.723

Македонский Евгений Александрович

Некоторые классы циклических модулей над алгебрами Ли

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук Е. Б. Фейгин

Москва — 2016

Оглавление

Глава 1

Введение

1.1. Постановка задачи

О ручности и дикости задач теории представлений см., например, работы [Gel], [D], [D1], [Han], [Sam] и многие другие. В этих работах среди некоторых классов задач выделены ручные и дикие.

Рассмотрим алгебру Ли L. Будем рассматривать задачу классификации ее конечномерных линейных представлений с точностью до эквивалентности. В данной диссертации исследуется вопрос о том, для каких алгебр Ли L данная задача является дикой или ручной. Такие алгебры будем называть, соответственно, дикими и ручными. На данный вопрос дается следующий ответ (см. 2.4.3).

Теорема 1.1.1. *Ручными являются следующие алгебры Ли:*

1) полупростые;

2) одномерная алгебра;

3) прямые суммы полупростых с одномерной.

Все остальные – дикие.

Из Теоремы 2.4.3 следует, что конечномерные алгебры Ли разбиваются на два класса – ручных и диких.

Представления неполупростых алгебр Ли изучаются при помощи некоторого бесконечного колчана. Алгебра путей этого колчана не изоморфна обертывающей алгебре исходной агебры Ли. Однако категория конечномерных представлений этой алгебры эквивалентна категории конечномерных представлений исходной алгебры Ли.

Поскольку задача классификации представлений алгебр Ли почти всегда является дикой, имеет смысл изучать некоторые конкретные классы представлений, имеющих хорошие свойства. Хорошо ихвестно, что в теории представлений полупростых алгебр Ли ключевую роль играют циклические модули. В данной диссертации изучаются модули Вейля и некоторые их обобщения. Это модули над алгеброй токов. Точнее, пусть $\mathfrak{g}$ – простая конечномерная алгебра. Мы изучаем представления алгебры токов над ней, то есть алгебры

$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{K}[t]$. $\mathfrak{h}$ – подалгебра картана конечномерной алгебры, Δ – система корней $\mathfrak{g}$, Δ_+ – множество положительных корней, e_α, f_α – образующие Шевалле. Тогда обобщенный модуль Вейля определяется следующими образующими и соотношениями.

$$
\begin{gathered}
h \otimes t^k v = 0 \text{ for all } h \in \mathfrak{h}, k > 0; \\
(e_\alpha \otimes t)v = 0,\ \alpha \in \sigma(\Delta_+) \cap \Delta_+; \\
(f_\alpha \otimes 1)v = 0,\ \alpha \in \sigma(\Delta_+) \cap \Delta_-; \\
(e_{\sigma(\alpha)} \otimes t)^{-\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle + 1} v = 0,\ \alpha \in \Delta_-, \sigma(\alpha) \in \Delta_+; \\
(f_{\sigma(\alpha)} \otimes 1)^{-\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle + 1} v = 0,\ \alpha \in \Delta_-,\ \sigma(\alpha) \in \Delta_-.
\end{gathered}
$$

В случае тривиального элемента из группы Вейля получается определение классического модуля Вейля. Для произвольного элемента группы Вейля полученный модуль назовем обобщенным модулем Вейля. Эти модули хороши тем, что для них пишется удобная рекурсия. Точнее говоря, каждый такой модуль разбирается на подфакторы того же вида, но соответствующие меньшему весу. С помощью этой разборки получается рекуррентное соотношение на характеры. Аналогичное соотношение получается для специализаций многочленов Макдональда с помощью подхода Орра и Шимозоно. Отсюда получается совпадение характеров некоторых обобщенных модулей Вейля и некоторых специализаций несимметрических многочленов Макдональда.

Аналогичные результаты получаются для простейшей супералгебры $osp(1,2)$. Супералгебры $osp(1,2l)$ имеют много общих свойств с обычными полупростыми алгебрами Ли. В частности, в отличие от других простых супералгебр, у них есть группа Вейля и она позволяет определить обобщенные модули Вейля. Таким образом доказывается, что характеры модулей Вейля для супералгебры $osp(1,2)$ совпадают со специализациями многочленов Макдональда типа $A_2^{(2)}$.

Также в диссертации доказывается частный случай гипотезы Чередника-Орра, а именно, доказывается, что для весов, кратных одному фундаментальному и для линейных комбинаций первого и последнего фундаментального для алгебр Ли типов A_n специализация несимметрических многочленов Макдональда, соответствующих антидоминантному весу, в точке $t = \infty$, совпадает с характером этих модулей, подкрученных на ПБВ-фильтрацию.

Глава 2

Ручность и дикость

Все рассматриваемые алгебры определены над фиксированным алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики и конечномерны над $\mathbb{K}$. В дальнейшем поле часто указывать не будем, в частности вместо $sl_n(\mathbb{K})$ будем писать sl_n.

2.1. Примеры ручных и диких алгебр Ли

Определение 2.1.1. ([D]) Ассоциативная $\mathbb{K}$-алгебра A называется дикой, если существует такой $A - \mathbb{K}\langle x, y\rangle$-бимодуль M свободный конечного ранга как модуль над $A \otimes \mathbb{K}\langle x, y\rangle$, что функтор $M \otimes_{\mathbb{K}\langle x,y\rangle} (-)\colon mod(\mathbb{K}\langle x, y\rangle) \to mod(A)$ сохраняет неразложимость и переводит неизоморфные модули в неизоморфные.

Это определение дикости было исторически первым. Мы будем пользоваться несколько другим определением дикости, эквивалентным приведенному в работе [D2]. Оно имеет смысл для любой $\mathbb{K}$-алгебры, у которой определена категория конечномерных представлений. Мы будем применять его для алгебр Ли.

Определение 2.1.2. ([D2]) $\mathbb{K}$-алгебра A называется дикой, если существует точный функтор из категории представлений $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ – свободной алгебры от двух образующих, сохраняющий неразложимость и переводящий неизоморфные модули в неизоморфные.

Два рассматриваемых определения эквивалентны как минимум для конечномерных ассоциативных алгебр. Кроме того, из дикости в смысле Определения 2.1.1 следует дикость в смысле Определения 2.1.2.

Определение 2.1.3. Алгебра A называется ручной, если все неразложимые конечномерные представления A распадаются на дискретное множество однопараметрических семейств.

Это опребедение мы тоже будем применять для алгебр Ли.

Исследованию связи понятий дикости и ручности для конечномерных алгебр посвящена работа [D], в которой доказано, что любая такая алгебра является либо дикой, либо ручной.

В рамках второго определения дикости и определения ручности очевидно, что алгебры с эквивалентными категориями конечномерных представлений дикими или ручными могут быть только одновременно.

Следующее простое предложение будем использовать не ссылаясь на протяжении всей работы.

Предложение 2.1.4. *Рассмотрим алгебру A и идеал $I \lhd A$. Предположим, что алгебра A/I - дикая. Тогда и алгебра A – дикая.*

Доказательство. Допустим, существует $(A/I)-\mathbb{K}\langle x, y\rangle$-бимодуль M, удовлетворяющий всем свойствам из определения 2.1.1. Но тогда этот же модуль, рассматирваемый как A-модуль, (точнее, модуль ${}_A A/I_{A/I} \otimes_{A/I} M$) также удовлетворяет всем свойствам определения 2.1.1.

□

Кроме того, отметим следующий очевидный факт.

Следствие 2.1.5. *Пусть $L = I \oplus J$, I – дикая. Тогда и L – дикая.*

Приведем некоторые примеры ручных и диких алгебр Ли.

2.1.1. Двумерные алгебры – дикие

Пусть L – двумерная алгебра Ли. Тогда L либо абелева, либо имеет базис $L = \langle x, y\rangle$ такой, что $[x, y] = y$. Алгебра, порожденная двумя образующими x, y и одним соотношением $[x, y] = y$ является дикой (см, например, [Sam]). Представления двумерной абелевой алгебры Ли $L = \langle a, b\rangle$ – это представления алгебры полиномов от двух переменных. Дикость последней является хорошо известным фактом ([Gel]). Тем не менее, с целью иллюстрации приведем доказательство (см, например, [Sam]).

Рассмотрим $L - \mathbb{K}\langle x, y\rangle$-бимодуль M, свободный над $\langle x, y\rangle$ ранга 4. Образующие a и b алгебры L действуют на этом бимодуле следующими $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$-линейными преобразованиями:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нетрудно видеть, что эти преобразования коммутируют, поэтому это действительно $L-\mathbb{K}\langle x,y\rangle$-бимодуль. Рассмотрим конечномерный неразложимый $\mathbb{K}\langle x,y\rangle$-модуль V. Пусть x и y действуют на этом модуле с помощью матриц X и Y. Тогда $N = M\otimes_{\mathbb{K}\langle x,y\rangle} V$ является векторным пространством, изоморфном $V\oplus V\oplus V\oplus V$, на котором образующие рассматриваемой алгебры Ли действуют при помощи следующих операторов:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Допустим, этот модуль разложим. Пусть $N = W_1\oplus W_2$ - прямая сумма L-модулей. Положим $V_i = \{u_4|(u_1,u_2,u_3,u_4)^t\in W_i\}$ для некоторых u_1,u_2,u_3, $i=1,2$. Очевидно, что $V = V_1+V_2$. Пусть $(u_1,u_2,u_3,u_4)^t\in W_i$. Применив к этому элементу оператор a^2 мы получим элемент $(u_4,0,0,0)^t\in W_i$. Значит, $(V_i,0,0,0)\in W_i$. Поэтому $V_1\cap V_2=\{0\}$ и $V = V_1\oplus V_2$, $W_i\cap(V,0,0,0)^t = (V_i,0,0,0)^t$. Далее, применим к элементу $(u_1,u_2,u_3,u_4)^t\in W_i$ операторы ab и b^2. Получим элементы $(xu_4,0,0,0)^t\in W_i$ и $(yu_4,0,0,0)^t\in W_i$. Поэтому $xV_i\in V_1, yV_i\in V_i$, $i=1,2$. Мы получили разложение исходного представления алгебры $\mathbb{K}\langle x,y\rangle$. Значит, построенный функтор переводит неразложимые представления в неразложимые.

Пусть теперь для двух представлений V_1,V_2 алгебры $\mathbb{K}\langle x,y\rangle$ представления $N_1 = M\otimes_{\mathbb{K}\langle x,y\rangle} V_1$, $N_2 = M\otimes_{\mathbb{K}\langle x,y\rangle} V_2$ изоморфны. Тогда их размерности равны и существует обратимый сплетающий оператор, то есть такой оператор S, что $Sa_1 = a_2S$, $Sb_1 = b_2S$ (Номер соответствует номеру представления V_i). Записав S в виде $S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix}$.

Теперь, перемножив блочные матрицы и приравняв коэффициенты, мы получим, что $S_{21} = S_{31} = S_{41} = S_{32} = S_{42} = S_{43} = S_{23} = 0$, $S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44}$. Кроме того, $S_{22}Y_1 = Y_2S_{44}$, $S_{22}X_1 = X_2S_{44}$. Поэтому мы получили сплетающий оператор для представлений V_1, V_2. Он обратим, так как в силу равенства нулю всех нижних блоков блочной матрицы S и равенства всех ее диагональных блоков, $\det S = \det S_{22}^4$, то есть матрица S_{22} обратима. Значит, описываемый функтор переводит неизоморфные представления в неизоморфные. Этот факт завершает доказательство дикости двумерной абелевой алгебры Ли.

Следовательно, все двумерные алгебры Ли – дикие.

2.1.2. Разрешимые алгебры – дикие

Пусть теперь $L \triangleright I$, $\dim(L/I) = 2$. Тогда L – дикая, так как L/I – двумерная, следовательно, дикая.

В частности, если L – разрешимая алгебра Ли, то в силу Теоремы Ли в ней есть флаг из идеалов, в частности, идеал любой размерности, не превышающей размерность L. Следовательно, если размерность L не меньше двух, то в ней существует идеал коразмерности 2. Таким образом, верно следующее утверждение:

Предложение 2.1.6. *Все разрешимые алгебры Ли являются дикими.*

2.1.3. Полупростые алгебры – ручные

С другой стороны, из классической теории представлений полупростых алгебр Ли известно, что все неприводимые представления параметризуются целочисленными доминантными формами на корневой решетке, то есть дискретным множеством параметров и исчерпывают все неразложимые представления. Поэтому все полупростые алгебры ручные.

2.1.4. Одномерные расширения полупростых – ручные

Следующее утверждение должно быть известным, но автору не удалось найти подходящую ссылку, поэтому оно здесь приведено с полным доказательством. Это доказательство аналогично доказательству из книги ([GG], с. 225).

Предложение 2.1.7. *Пусть* $L = \widehat{L} \oplus L_1$ *– алгебра Ли, такая что* $\widehat{L}$ *- полупростая;* (M, f) *– неразложимое представление* L*. Тогда существуют такие неразложимые представления* (M_1, f_1) *алгебры* $\widehat{L}$ *и* (M_2, f_2) *– алгебры* L_1*, что* $M = M_1 \otimes M_2$*,* $f(X+Y) = f_1(X) \otimes id + id \otimes f_2(Y)$*, где* $X \in \widehat{L}$*,* $Y \in L_1$*,* id *– тождественный оператор.*

Доказательство. Поскольку $\widehat{L} \ni X \mapsto f(X)$ – вполне приводимое представление (в силу полупростоты алгебры $\widehat{L}$), мы можем считать, что $f(X) =$

$\begin{pmatrix} F_1(X) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2(X) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_k(X) \end{pmatrix}$, где F_i – неприводимое представление алгебры $\widehat{L}$ размерности h_1. Далее можно считать, что $F_1 = ...F_p$, а представления $F_q, q > p$ не эквивалентны F_1. Пусть S_{ij} – $h_i \times h_j$-матрицы и $S = \begin{pmatrix} S_{11} & \dots & S_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{k1} & \dots & S_{kk} \end{pmatrix} \in gl(n, \mathbb{K})$. Предположим, что $f(X)S = Sf(X)$ для любого $X \in \widehat{L}$. Тогда $f_i(X)S_{ij} = S_{ij}f_j(X)$ при $i, j = 1, \dots k$. По лемме Шура ([GG], с. 225) имеем, что $S_{ij} = s_{ij}1_{h_1}$, $s_{ij} \in \mathbb{K}$ при $i, j = 1, \dots p$ и $S_{ij} = 0$ при $i \le p < j$ и $j \le p < i$.

Теперь применим этот результат к $S = f(Y)$, $Y \in L_1$. Если бы $p \ne k$, то из соотношений $S_{ij} = 0$ при $i \le p < j$ и $j \le p < i$ следовало бы, что (M, f) – разложимо. Значит, $p = k$.

Введем обозначение $f_1(X) = F_1(X)$ для $X \in \widehat{L}$, $f_2(Y) = (s_{ij}) \in gl(p, \mathbb{K})$, $Y \in \langle \lambda e \rangle$. M очевидным образом распадается в тензорное произведение. Тогда имеем:

$$f(X) = f_1(X) \otimes 1_p, X \in \widehat{L};$$

$$f(Y) = 1_h \otimes f_2(Y), Y \in \langle \lambda e \rangle.$$

Очевидно, что если представление (f_2, M_2) распадается в прямую сумму других представлений, то и представление f также распадается в прямую сумму двух представлений. Следовательно, (f_2, M_2) – неразложимое представление. Обратно, если (f_2, M_2) – неразложимо, то и представление (f, M) также неразложимо. □

Замечание 2.1.8. Прямая сумма ручной и полупростой алгебр – ручная. Представления алгебры $\langle \lambda e \rangle$, очевидно, задаются образом элемента $e \mapsto f_2(e)$. Следовательно, все неразложимые представления алгебры $L = \widehat{L} \oplus \langle \lambda e \rangle$, $\widehat{L}$ – простая, задаются неприводимым представлением алгебры $\widehat{L}$ и жордановой клеткой. Поэтому все такие алгебры ручные.

Замечание 2.1.9. Если один из сомножителей приводим, то и тензорное произведение приводимо. Поэтому неприводимые предствления $L = \widehat{L} \oplus \langle \lambda e \rangle$, $\widehat{L}$ – простая, – это неприводимые представления алгебры $\widehat{L}$, на которых элемент e действует умножением на константу.

2.2. Колчан алгебры с абелевым радикалом

Сведем теперь исследование представлений алгебры Ли с абелевым радикалом к исследованию представлений некоторого колчана.

Лемма 2.2.1. *Пусть $\widehat{L} = L \leftthreetimes I$ – алгебра Ли такая, что L – полупростая, I – абелев идеал. Тогда категория представлений алгебры $\widehat{L}$ эквивалентна категории пар (M, ϕ), где M – L-модуль, $\phi : I \otimes M \to M$ – морфизм модулей такой, что*

$$\phi \circ (id \otimes \phi)\left((I \wedge I) \otimes M\right) = 0, \tag{2.2.1}$$

с морфизмами – коммутативными диаграммами:

$$\begin{tikzcd} I \otimes M \arrow[r, "\phi"'] \arrow[d, "id\otimes\theta"] & M \arrow[d, "\theta"'] \\ I \otimes N \arrow[r, "\psi"] & N \end{tikzcd}, \tag{2.2.2}$$

где θ – морфизм модулей. В дальнейшем под парами будем понимать пары (M, ϕ).

Доказательство. Пусть M – $\widehat{L}$-модуль, тогда M – и L-модуль. Зададим отображение $\phi : I \otimes M \to M$: $i \otimes m \mapsto im$. Тогда для любых $i, j \in I, m \in M$:

$$\phi \circ (id \otimes \phi)((i \otimes j - j \otimes i) \otimes (m)) = i(jm) - j(im) = [i, j]m = 0.$$

Поэтому условие 2.2.1 выполняется.

Кроме того:

$$l\phi(i \otimes m) = lim = [l, i]m + ilm = \phi(l(i \otimes m))$$

Поэтому ϕ – морфизм модулей.

Обратно, пусть ϕ – морфизм модулей $\phi : I \otimes M \to M$ с условием 2.2.1. Зададим действие для $i \in I, m \in M$: $im := \phi(i \otimes m)$. В силу условия 2.2.1 получим для $i, j \in I, m \in M$: $[i, j]m = ijm - jim = 0$, кроме того, для $l \in L, i \in I, m \in M$:

$$[l, i]m = \phi([l, i] \otimes m) = \phi(l(i \otimes m) - i \otimes lm) = l\phi(i \otimes m) - ilm =$$

$$= lim - ilm.$$

Поэтому с таким действием M является $\widehat{L}$-модулем.

Очевидно, что композиция двух описанных отображений является изоморфизмом. Тем самым задано соответствие на объектах категорий.

Пусть теперь A – морфизм $\widehat{L}$-модулей $A : M \to N$, тогда зададим морфизм L-модулей $\theta = A$. Тогда для $i \in I, m \in M$:

$$\theta(\phi(i \otimes m)) = \theta(im) = A(im) = iA(m) = i\theta(m) = \psi(i \otimes \theta(m)).$$

Поэтому это отображение задает коммутутивный квадрат (2.2.2). Далее, если два морфизма модулей делают коммутативным квадрат (2.2.2), то и их композиция – тоже в силу функториальности тензорного произведения. Из тех же вычислений следует, что каждый коммутативный квадрат (2.2.2) задает отображение $\widehat{L}$-модулей и построенные в обе стороны функторы фвляются взаимно сопряженными. Тем самым эквивалентность рассматриваемых категорий доказана. □

Замечание 2.2.2. Рассмотрим конечномерные представления (бесконечномерной) алгебры $L \leftthreetimes F(I)$, где $F(I)$ – свободная алгебра Ли, порожденная I, причем L действует на I естественным образом, а действие L на члены градуировки высших степеней определяется по правилу Лейбница. Тогда аналогично доказательству предудущей Леммы получаем, что категория конечномерных представлений $L \leftthreetimes F(I)$ эквивалентна категории пар (M, ϕ), где M – L-модуль, $\phi : I \otimes M \to M$, с морфизмами – коммутативными квадратами (2.2.2) (но без условия (2.2.1)).

Зафиксируем теперь до конца пункта полупростую алгебру Ли L и L-модуль I. Занумеруем как-нибудь все попарно неэквивалентные неприводимые представления полупростой алгебры L (это можно сделать, так как их счетное множество), представление с номером i будем обозначать M_i. Введем теперь для данной алгебры Ли с абелевым радикалом $L \leftthreetimes I$ счетный колчан K_I. Стрелок из точки k в точку l будет столько, какова кратность вхождения M_l в разложение $I \otimes M_k$. С этого момента и до конца пункта буквы α и β будут означать стрелки K_I, а π будет означать пути длины 2. Для стрелки или пути μ обозначим $s(\mu)$ и $t(\mu)$ начало и конец μ соответственно. Таким образом, мы имеем:

$$I \otimes M_k \simeq \bigoplus_{k:s(\alpha)=k} M_{t(\alpha)} \tag{2.2.3}$$

Следующяя лемма является почти очевидной.

Лемма 2.2.3. *В вышепринятых обозначениях мы имеем:*

$$I \otimes I \otimes M_k \simeq \bigoplus_{\pi : s(\pi)=k} M_{t(\pi)}. \tag{2.2.4}$$

Доказательство. Пользуясь форулой (2.2.3) два раза, вычисляем:

$$I \otimes I \otimes M_k \simeq \bigoplus_{s(\alpha)=k} I \otimes M_{t(\alpha)} \simeq \bigoplus_{s(\alpha)=k} \bigoplus_{s(\beta)=t(\alpha)} M_{t(\beta)} \simeq \bigoplus_{s(\pi)=k} M_{t(\pi)}. \tag{2.2.5}$$

□

Лемма 2.2.4. *(i)Категория конечномерных представлений колчана K_I эквивалентна категории $\mathcal{K}_I$ пар $(M, \phi : I \otimes M \to M)$, с морфизмами – коммутативными квадратами (2.2.2). (ii) Категория пар $(M, \phi : I \otimes M \to M)$ со свойством (2.2.1) эквивалентна категории конечномерных представлений колчана K_I с однородными соотношениями степени 2, причем размерность пространства соотношений на путях длины 2 из точки k в точку l равна кратности вхождения простого модуля M_l в разложение модуля $I \wedge I \otimes M_k$.*

Доказательство. (i)Рассмотрим пару $p_1 = (M, \phi : I \otimes M \to M)$. Разложим M в сумму неприводимых компонент:

$$M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} V_i \otimes M_i,$$

где V_i – конечномерное пространство и $\dim(V_i)$ – кратность вхождения M_i в M. При этом в силу конечномерности лишь конечное число пространств V_i ненулевые. Тогда в силу формулы (2.2.3) мы имеем:

$$I \otimes M \simeq \bigoplus_{i=1}^{\infty} V_i \otimes I \otimes M_i \simeq \bigoplus_{i=1}^{\infty} \bigoplus_{s(\alpha)=i} V_i \otimes M_{t(\alpha)} \tag{2.2.6}$$

Следовательно, отображение ϕ распадается в прямую сумму отображений из $V_i \otimes M_{t(\alpha)}$ для всех α таких, что $s(\alpha) = i$ в $V_j \otimes M_j$. В силу леммы Шура имеем, что для неизоморфных модулей $M_{t(\alpha)}$ и M_j (то есть в случае если $t(\alpha) \neq j$) существуют только нулевые морфизмы между $V_i \otimes M_{t(\alpha)}$ и $V_j \otimes M_j$, а для изоморфных морфизм имеет вид $A_{p_1,\alpha} \otimes id$. Заметим, что построенный набор пространств $\{V_i\}$ и отображений $\{A_{p_1,\alpha}\}$ является представлением колчана K_I.

Рассмотрим морфизм пар из $p_1 = (M, \phi)$ в $p_2 = (N, \psi)$, то есть коммутативную диаграмму (2.2.2). Запишем разложения $M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} V_i \otimes M_i$, $N = \bigoplus_{i=1}^{\infty} U_i \otimes M_i$. Морфизм θ распадается в прямую сумму морфизмов из $V_i \otimes M_i$ в $U_j \otimes M_j$ и для $i \neq j$ это отображение может быть только нулевым, а для $i = j$ оно имеет вид $T_i \otimes id$, где T_i – линейное отображение из V_i в U_i. Морфизм $id \otimes \theta$ из диаграмы (2.2.2) тогда является прямой суммой морфизмов вида $T_i \otimes id$ из $V_i \otimes M_{t(\alpha)}$ в $U_i \otimes M_{t(\alpha)}$ для $s(\alpha) = i$. Запишем теперь условие коммутативности диаграмы (2.2.2) на каждом подмодуле $V_{s(\alpha)} \otimes M_{t(\alpha)}$:

$$T_{t(\alpha)} \otimes id \circ A_{p_1,\alpha} \otimes id = A_{p_2,\alpha} \otimes id \circ T_{s(\alpha)} \otimes id,$$

то есть:

$$T_{t(\alpha)} \circ A_{p_1,\alpha} = A_{p_2,\alpha} \circ T_{s(\alpha)}.$$

Но это – условие на то, что набор отображений $\{T_i\}$ пространств в точках колчана является морфизмом представлений колчана из $\{V_i, A_{p_1,\alpha}\}$ в $\{U_i, A_{p_2,\alpha}\}$. Тем самым мы получили отображение на объектах и морфизмах. Функториальность этого отображения очевидна.

Наоборот, рассмотрим представление $\{V_i, A_\alpha\}$ колчана K_I. Построим L-модуль $M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} V_i \otimes M_i$. Зададим морфизм $\phi : I \otimes M \to M$ на подмодулях $V_{s(\alpha)} \otimes M_{t(\alpha)} \to V_{t(\alpha)} \otimes M_{t(\alpha)}$ набором отображений $A_\alpha \otimes id$. Тем самым мы задали отображение на объектах рассматриваемых категорий. Так же по морфизму $\{T_i\}$ представлений колчана построим морфизм пар, задав отображение на подпространствах $T_i \otimes id : V_i \otimes M_i \to U_i \otimes M_i$. Как было показано выше, утверждение о том, что этот морфизм модулей задает морфизм пар, эквивалентно тому, что $\{T_i\}$ – морфизм представлений K_I. Тем самым мы построили функтор и нетрудно видеть, что построенные здесь функторы являются взаимно сопряженными. Следовательно, рассматриваемые категории эквивалентны.

(ii) Рассмотрим полную подкатегорию пар $p = (M, \phi : I \otimes M \to M)$ со свойством (2.2.1). В силу формулы (2.2.6) мы имеем:

$$I \otimes I \otimes M \simeq I \otimes \bigoplus_{i=1}^{\infty} \bigoplus_{s(\alpha)=i} V_i \otimes M_{t(\alpha)} \simeq I \otimes \bigoplus_{\alpha} V_{s(\alpha)} \otimes M_{t(\alpha)} \qquad (2.2.7)$$

Применив результаты предыдущего пункта получаем, что образ одного прямого слагаемого $I \otimes V_{s(\alpha)} \otimes M_{t(\alpha)}$ под действием отображения $id \otimes \phi$ будет лежать в $I \otimes V_{t(\alpha)} \otimes M_{t(\alpha)}$ и отображение на этом слагаемом будет иметь вид $id \otimes A_{p,\alpha} \otimes id$.

$$I \otimes V \otimes M_{t(\alpha)} \simeq V \otimes \bigoplus_{s(\beta)=t(\alpha)} M_{t(\beta)}.$$

Поэтому $I \otimes V_{s(\alpha)} \otimes M_{t(\alpha)} \simeq \bigoplus_{t(\alpha)=s(\beta)} V_{s(\alpha)} \otimes M_{t(\beta)}$ и отображение $id \otimes \phi$ будет переводить прямое слагаемае $V_{s(\alpha)} \otimes M_{t(\beta)}$ в прямое слагаемое $V_{t(\alpha)} \otimes M_{t(\beta)}$ и иметь вид $A_{p,\alpha} \otimes id$. Поэтому отображение $\phi \circ (id \otimes \phi)$ на каждом прямом слагаемом $V_{s(\alpha)} \otimes M_{t(\beta)}$ (напомним, что $t(\alpha) = s(\beta)$) имеет вид $A_{p,\beta} A_{p,\alpha} \otimes id$.

Рассмотрим ограничение отображения $\phi \circ (id \otimes \phi)$ на $(I \wedge I) \otimes M$, то есть пару $p_1 = (M, \phi \circ (id \otimes \phi))$. На прямых слагаемых оно имеет вид $A_{p_1,\gamma} \otimes id$, где γ – стрелка в $K_{(I \wedge I)}$. Тогда условие (2.2.1) эквивалентно тому, что все $A_{p_1,\gamma} = 0$. Но по построению все $A_{p_1,\gamma}$ являются линейными комбинациями линейных отображений вида $A_{p,\beta} A_{p,\alpha}$. Следовательно, условие (2.2.1) эквивалентно некоторому набору линейных соотношений на $A_{p,\beta} A_{p,\alpha}$, причем для точек k и l количество соотношений для путей длины 2 равно кратности вхождения M_l в $(I \wedge I) \otimes M_k$. Поэтому эквивалентность категорий из пункта (i) задает эквивалентность полных подкатегорий пар с условием (2.2.1) и представлений колчана K_I с тербуемым в условии Леммы количеством соотношений длины 2 между каждой парой точек.

Тем самым доказательство Леммы завершено.

□

Теорема 2.2.5. *Категория конечномерных представлений $L \leftthreetimes F(I)$ эквивалентна категории представлений колчана K_I. Категория конечномерных представлений $L \leftthreetimes I$ эквивалентна категории представлений колчана K_I с набором соотношений второй степени, количество которых для путей из точки k в l равно кратности вхождения M_l в $(I \wedge I) \otimes M_k$.*

Доказательство. Утверждение Теоремы легко следует из Леммы 2.2.4, Замечания 2.2.2 и Леммы 2.2.1. □

2.3. Исследование представлений колчана K_I, дикость алгебр с абелевым радикалом

Из теоремы (2.2.5) следует, что если для колчана K_I алгебра $kK_I/rad(kK_I)^2$ дикая, то и алгебра $L \leftthreetimes I$ дикая, так как категория ее представлений эквивалентна категории представлений алгебры с факторалгеброй, изоморфной алгебре $kK_I/rad(kK_I)^2$. Очевидно, что $kK_I/rad(kK_I)^2$ дикая, если K_I дикий колчан без последовательных стрелок. В общем случае имеется следующий, принадлежащий Габриелю критерий того, что фактор по квадрату радикала алгебры путей колчана дикий. Ссылку на него найти не удалось, так что приведем набросок доказательства.

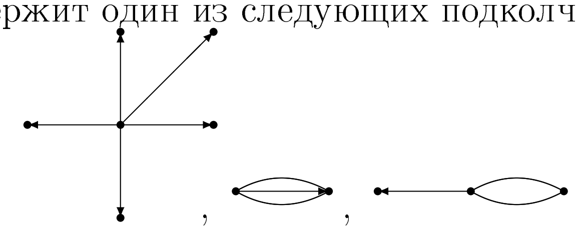
Предложение 2.3.1. *Пусть* Γ *– колчан. Тогда алгебра* $\mathbb{K}\Gamma/rad(\mathbb{K}\Gamma)^2$ *дикая тогда и только тогда, когда следующий колчан* Γ' *является диким. Точки* Γ' *– это точки* i', i'' *для каждой точки* i *из* Γ*. Стрелок из* i' *в* j'' *– столько, сколько из* i *в* j *в колчане* Γ*, и других стрелок нет.*

Для доказательства нужно взять представление Γ, в качестве пространства в каждой точке j'' взять сумму образов всех стрелок, входящих в j, а в качестве пространства в точках j' - фактор пространства в точке j по сумме этих образов. Таким образом получим все неразложимые представления Γ' кроме тривиальных в точках j''. Колчан Γ' называется дублем Габриэля колчана Γ.

Отсюда сразу же получаем следующее

Предложение 2.3.2. *Пусть* I *–* L*-модуль такой, что для него существует такой неприводимый* L*-модуль* M*, что* $I \otimes M$ *содержит 5 различных неприводимых компонент, или компоненту кратности не меньше 3, или компоненту кратности 2 и еще одну ненулевой кратности (и все эти компоненты отличны от* M*). Тогда алгебра* $L \leftthreetimes I$ *– дикая.*

Доказательство. В описанных выше случаях дубль Габриэля колчана K_I содержит один из следующих подколчанов:



Эти колчаны дикие [Naz].

□

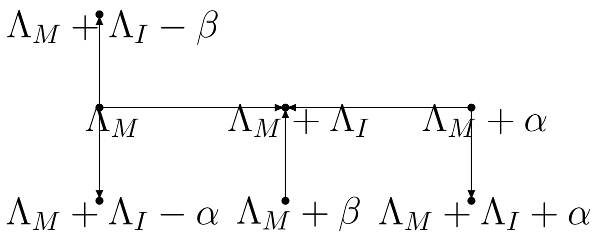
Предложение 2.3.3. *Пусть* L *– полупростая алгебра Ли,* I *– простой* L*-модуль такой, что (i) для некоторых двух простых корней* $\alpha^\vee$*,* $\beta^\vee$*:*

$\langle \Lambda_I, \alpha^\vee \rangle \ge 1$, $\langle \Lambda_I, \beta^\vee \rangle \ge 1$ или (ii) для его старшего веса Λ_I и для некоторого простого корня $\alpha^\vee$ из подалгебры Картана верно $\langle \Lambda_I, \alpha^\vee \rangle \ge 2$, (iii) вообще модуль I простой имеющий размерность больше 2. Тогда алгебра $L \leftthreetimes I$ – дикая.

Доказательство. Если для некоторых модулей N_1, N_2 со старшими весами Λ_{N_1}, Λ_{N_2}: $\langle \Lambda_{N_i}, \alpha^\vee \rangle \ge 1$, $i = 1, 2$, то тензорное произведение $N_1 \otimes N_2$ содержит в разложении простой модуль со старшим весом $\Lambda_{N_1} + \Lambda_{N_2} - \alpha$. Действительно, пусть n_1, n_2 – старшие вектора этих модулей. Рассмотрим вектор $\langle \Lambda_{N_2}, \alpha^\vee \rangle f_\alpha n_1 \otimes n_2 - \langle \Lambda_{N_1}, \alpha^\vee \rangle n_1 \otimes f_\alpha n_2$. Нетрудно видеть, что этот элемент имеет вес $\Lambda_{N_1} + \Lambda_{N_2} - \alpha$, ненулевой, так как $f_\alpha n_i = 0$ тогда и только тогда, когда $\langle \Lambda_{N_i}, \alpha^\vee \rangle = 0$, и обнуляется всеми положительными корнями. Следовательно, он является старшим весовым элементом некоторого простого подмодуля.

Если же $\langle \Lambda_{N_i}, \alpha^\vee \rangle \ge 2$, то все элементы $f_\alpha f_\alpha n_1 \otimes n_2$, $f_\alpha n_1 \otimes f_\alpha n_2$, $n_1 \otimes f_\alpha f_\alpha n_2$ ненулевые. Для простого корня $\beta \ne \alpha$ e_β обнуляет все эти элементы, так как коммутирует с f_α. Элемент e_α переводит пространство, порожденное этими элементами в двумерное. Поэтому существует линейная комбинация элементов $f_\alpha f_\alpha n_1 \otimes n_2$, $f_\alpha n_1 \otimes f_\alpha n_2$, $n_1 \otimes f_\alpha f_\alpha n_2$, обнуляемая этим элементом. Но тогда эта линейная комбинация обнуляется всеми положительными корнями, то есть является старшим весом некоторого простого подмодуля. Поэтому тензорное произведение $N_1 \otimes N_2$ содержит простое прямое слагаемое со старшим весом $\Lambda_{N_1} + \Lambda_{N_2} - 2\alpha$.

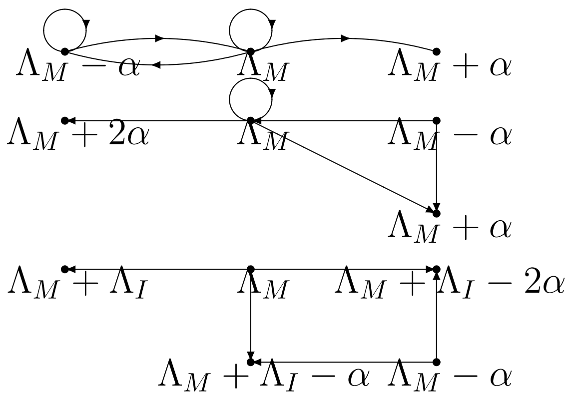
(i)Рассмотрим простой модуль M такой, что для его старшего веса Λ_M формы $\Lambda_M + \alpha$, $\Lambda_M + \beta$ также являются доманинтными и $\langle \Lambda_M, \alpha^\vee \rangle \ge 1$, $\langle \Lambda_M, \beta^\vee \rangle \ge 1$. По доказанному выше тензорное произведение $I \otimes M$ содержит в разложении подмодули со старшими весами $\Lambda_M + \Lambda_I - \alpha$, $\Lambda_M + \Lambda_I - \beta$. Также это произведение содержит простой подмодуль со старшим весом $\Lambda_M + \Lambda_I$. Далее, для модуля N со старшим весом $\Lambda_M + \alpha$ в разложении $I \otimes N$ есть подмодули со старшими весами $\Lambda_M + \Lambda_I$, $\Lambda_M + \Lambda_I + \alpha$, и для модуля со старшим весом $\Lambda_M + \beta$ один из простых подмодулей разлодения тензорного произведения этого модуля на I имеет старший вес $\Lambda_M + \Lambda_I$ (так как $\langle \Lambda_M + \alpha, \alpha^\vee \rangle \ge 1$, $\langle \Lambda_M + \beta, \beta^\vee \rangle \ge 1$). Все эти модули различны в силу свойств рассматриваемого модуля I, кроме случая $I = \alpha + \beta$. Поэтому колчан K_I содержит следующий подколчан:



В случае $I = \alpha + \beta$ дубль Габриеля колчана K_I будет содержать рассматриваемый колчан.

Этот колчан дикий и без последовательных стрелок, поэтому в силу Теоремы (2.2.5) алгебра $L \leftthreetimes I$ – дикая.

(ii) Пусть M – такой простой модуль, что для его старшего веса Λ_M форма $\Lambda_M - 2\alpha$ также является доминантной. Тогда $\langle \Lambda_M - \alpha, \alpha^\vee \rangle \geq 1$, следовательно, по доказанному выше $I \otimes M$ содержит в разложении простые модули весов $\Lambda_M + \Lambda_I$, $\Lambda_M + \Lambda_I - \alpha$, $\Lambda_M + \Lambda_I - 2\alpha$, а произведение модуля со старшим весом $\Lambda_M - \alpha$ на I содержит подмодули со старшими весами $\Lambda_M + \Lambda_I - \alpha$, $\Lambda_M + \Lambda_I - 2\alpha$. Поэтому в зависимости от того, равняется ли Λ_I α,2α или ни тому, ни другому, K_I содержит один из следующих подколчанов:



У всех этих колчанов дикий фактор по квадрату радикала (так как дикий дубль Габриэля). Поэтому алгебра $L \leftthreetimes I$ – дикая.

(iii) Из вышедоказанного следует, что алгебра Ли $L \otimes I$, где L – полупростая, I – L-модуль, дикая, если в разложении I присутствует нефундаментальное представление. Напомним, что представление называется фундаментальным, если его старший вес обнуляет все элементы h_α для простых весов α, кроме одного, на котором принимает значение 1.

Рассмотрим фундаментальное представление I. Пусть m – его старший весовой вектор. Пусть α – такой (единственный) вес, что $f_\alpha m \neq 0$. Если это представление не двумерно, то существует такой вес β, что $f_\beta f_\alpha m \neq 0$. Пусть теперь N – такой L-модуль, что для его старшего весового вектора n элементы

$f_\alpha f_\beta n$ и $f_\beta f_\alpha n$ линейно независимы и то же самое верно для модуля со старшим весом $\Lambda_N+\alpha$. Рассмотрим элементы тензорного произведения $I\otimes N$ веса $\Lambda_N+\Lambda_I-\alpha-\beta$: $f_\alpha f_\beta m\otimes n$, $f_\beta m\otimes f_\alpha n$, $m\otimes f_\alpha f_\beta n$, $m\otimes f_\beta f_\alpha n$. Они линейно независимы. Непосредственным вычислением получаем, что оператор умножения на e_α имеет на этом пространстве одномерный образ, а оператор умножения на e_β – двумерный. Поэтому ядра этих операторов имеют ненулевое пересечение, следовательно, существует ненулевой элемент веса $\Lambda_N+\Lambda_I-\alpha-\beta$, обнуляемый всеми положительными корнями. Поэтому в рассматриваемом тензорном произведении существует простой подмодуль с рассматриваемым старшим весом. Поэтому аналогично предыдущему пункту получаем в колчане K_I один из описанных в предыдущем пункте подколчанов. Следовательно, если модуль I простой и имеет размерность больше 2, то алгебра $L\leftthreetimes I$ – дикая. □

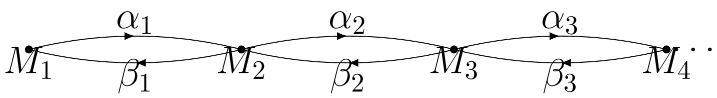
Если модуль I не является простым, $I=J\oplus J'$, то алгебра $L\leftthreetimes J$ является факторалгеброй $L\leftthreetimes I$. Поэтому из Предложения 2.3.3 следует, что алгебра $L\leftthreetimes I$ дикая, если одно из неприводимых прямых слагаемых модуля I имеет размерность больше двух.

2.3.1. Случай двумерного модуля

Лемма 2.3.4. *Алгебры Ли с двумерным абелевым радикалом дикие.*

Доказательство. Если радикал приводим как модуль над полупростой частью, то есть распадается в прямую сумму двух одномерных, то колчан K_I представляет собой несвязное объединение точек с двумя петлями, так как тензорное произведение любого модуля N на одномерный изоморфно N. $I\wedge I$ одномерен, поэтому получаем задачу описания представлений пары матриц с одним однородным соотношением второый степени. Эта задача дикая при любом соотношении в силу работы [Sam]. Остается случай двумерного неприводимого модуля. Двумерный неприводиый модуль I бывает только над алгебрами Ли вида $L=sl_2\oplus\widehat{L}$, $\widehat{L}$ – полупростая, действующая на I тривиально. В этом случае $L\leftthreetimes I\backsimeq sl_2\leftthreetimes I\oplus\widehat{L}$. Вследствие Предложения 2.1.7, прямая сумма полупростой и ручной алгебр Ли – ручная. Поэтому достаточно иследовать алгебру $sl_2\leftthreetimes I$.

Рассмотрим случай двумерного модуля над sl_2. В силу формулы Клебша-Гордона колчан K_I для двумерного имеет вид:

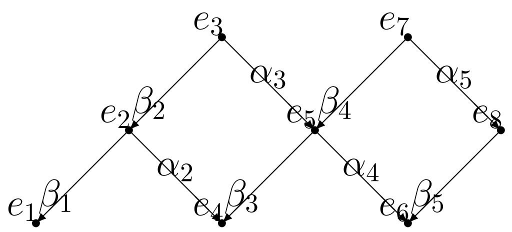


Модуль $I \wedge I$ изоморфен одномерному модулю. Поэтому соотношения будут только вида $k_i\alpha_i\beta_i + l_i\beta_{i+1}\alpha_{i+1} = 0$ при некоторых константах k_i и l_i. Эта задача дикая при любых константах, так как у подколчана на ее 6 последовательных точках имеется накрывающая, у которой форма Титса не является неотрицательно определенной.

Форма Титса для колчана с соотношениями – это следующая квадратичная форма на пространстве $\mathbb{K}^n$, где n – число точек колчана. Пусть $\{v_1, \dots v_n\}$ – базис пространства $\mathbb{K}^n$, $\{e_1, \dots e_n\}$ – множество точек колчана, l_{ij} – размерность пространства стрелок из e_i в e_j, r_{ij} – размерность пространства соотношений на пути из e_i в e_j. Тогда форма Титса – это следующая квадратичная форма:

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2}(l_{ij} + l_{ji})\alpha_i\alpha_j + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2}(r_{ij} + r_{ji})\alpha_i\alpha_j.$$

Искомая накрывающая алгебра – это алгебра следующего колчана Q с соотношениями:



,

с одним линейным соотношением на $\beta_2\alpha_2$, $\alpha_3\beta_3$ и одним соотношением на $\beta_4\alpha_4$, $\alpha_5\beta_5$, а именно $k_2\alpha_2\beta_2 + l_2\beta_3\alpha_3 = 0$ и $k_4\alpha_4\beta_4 + l_4\beta_5\alpha_5 = 0$.

Форма Титса этого колчана принимает отрицательное значение на векторе $v_1 + 2v_2 + 2v_3 + 2v_4 + 4v_5 + 2v_6 + 2v_7 + 2v_8$.

Опишем функтор из категории представлений рассмартивемого колчана в категорию представлений подколчана K_I, содержащего точки, соответствующие модулям размерности от 1 до 6, и все стрелки между этими точками. Пусть U – некоторое представление колчана Q, U_i – пространства в точках, U_α – отображения между ними. Положим $V_1 = U_1$, $V_2 = U_2$, $V_3 = U_3 \oplus U_4$, $V_4 = U_5$, $V_5 = U_6 \oplus U_7$, $V_6 = U_8$. Далее, положим $V_{\alpha_1} = 0$, $V_{\beta_1} = U_{\beta_1}$, $V_{\alpha_2} = (0, U_{\alpha_2})$, $V_{\beta_2} = (0, U_{\beta_2})^t$, $V_{\alpha_3} = (U_{\alpha_3}, 0)$, $V_{\beta_3} = (U_{\beta_3}, 0)^t$, $V_{\alpha_4} = (0, U_{\alpha_4})$, $V_{\beta_4} = (0, U_{\beta_4})^t$,

$V_{\alpha_5} = (U_{\alpha_5}, 0)$, $V_{\beta_5} = (U_{\beta_5}, 0)^t$, где запись (a, b) означает отображение a в первое прямое слагаемое и отображение b во второе, а запись $(a, b)^t$ означает сумму отображений из первого и второго прямых слагаемых.

Непосредственно проверяется, что построенное отображение действительно задает функтор из категории представлений одного колчана в категорию представлений другого и тот факт, что этот функтор переводин неразложимые представления в неразложимые и неизоморфные в неизоморфные.

Поэтому алгебра $sl_2 \leftthreetimes I$ дикая.

□

Следовательно, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2.3.5. *Пусть $L = \widehat{L} \leftthreetimes I$ – алгебра Ли с абелевым радикадом. Тогда L ручная тогда и только тогда, когда модуль I – одномерный. В противном случае L – дикая.*

Доказательство. Если размерность I больше одного, то L – дикая по Лемме (2.3.4) или Предложению (2.3.3). □

2.4. Случай неабелевого радикала

Рассмотрим теперь алгебры Ли с неабелевым радикалом. Алгебра $L/[R, R]$ имеет абелев радикал. Если она дикая, то и L – дикая. Теперь рассмотрим алгебры с ручным фактором по квадрату радикала. Все такие факторалгебры описываются Теоремой 2.3.5.

2.4.1. Алгебры с одномерным фактором радикала по квадрату радикала

Теперь рассмотрим случай, когда фактор радикала по его квадрату – одномерен. Будем считать алгебру L неразрешимой. Очевидно, чтобы доказать дикость таких алгебр, достаточно доказать дикость их факторов по второй производной радикала. Поэтому будем считать, что квадрат радикала – абелев.

Рассмотрим расширения при помощи модуля J алгебр вида $L_0 \oplus I$, где L_0 – полупроста, I – одномерна. Очевидно, что модуль J можно считать неприводимым (если нет – можно перейти к факторалгебре), то есть, в силу

Предложения 2.1.7, просто L_0-модулем, на котором некоторая образующая I действует тождественным либо нулевым образом. Во втором случае получаем алгебру с абелевым радикалом размерности больше, чем 1. Поэтому все такие алгебры – дикие в силу теоремы 2.3.5. Следовательно, достаточно рассмотреть случай, когда J является неприводимым L_0-модулем и некоторая образующая I действует на этом модуле тождественно. Кроме того, расширение можно считать полупрямым произведением, так как алгебра $L_0 \oplus I$ имеет тривиальные вторые когомологии (см, например, [Zus]). Теперь достаточно доказать следующее предложение.

Предложение 2.4.1. *Пусть $L = (L_0 \oplus I) \leftthreetimes J$ – алгебра Ли такая, что L_0 – полупроста, I – одномерна, J – неприводимый L_0-модуль, на котором образующая I действует тождественно. Тогда L – дикая.*

Доказательство. Рассмотрим следующий колчан Q с соотношениями:

$$\begin{tikzcd} V_0 \arrow[loop above, "\alpha_0"] \arrow[rr, dash, "\beta"] & & V_1 \arrow[loop above, "\alpha_1"] \end{tikzcd}$$

$\alpha_1\beta = \beta\alpha_0 + \beta.$

Этот колчан дикий (см., например, [Han]). Построим функтор из категории представлений этого колчана в категорию представлений алгебры $L = (L_0 \oplus I) \leftthreetimes J$. Пусть $(V_0, V_1, \alpha_0, \alpha_1, \beta)$ – представление рассматриваемого колчана, где V_0, V_1 – пространства в точках, $\alpha_i : V_i \to V_i$, $\beta : V_0 \to V_1$. Построим следующее представление алгебры L:

$M = V_0 \oplus V_1 \otimes J$ как L_0-модули. Выберем некоторую образующую I, $I = \langle e \rangle$ и положим для $v_k \in V_k$, и $j, j' \in J$: $e \cdot v_0 = \alpha_i(v_0)$, $e \cdot v_1 \otimes j = \alpha_1(v_1) \otimes j$, $j \cdot v_0 = \beta(v_0) \otimes j$, $j \cdot v_1 \otimes j' = 0$. Легко проверяется, что это представление и что естественно определенное отображение на морфизмах задает точный функтор F. Предположим, что построенное представление разложимою Пусть элемент $v_0 + v_1 \otimes j$ принадлежит одному прямому слагаемомуб $v_0 + v_1 \otimes j \in U'$. Тогда умножением на элементы из полупростой алгебры L_0 мы получим, что $v_1 \otimes J \subset U'$, в частрости, $v_1 \otimes j \in U'$, а значит и $v_0 \in U'$. Поэтому прямые слагаемые имеют вид $U'_0 \oplus U'_1 \otimes J$, $U''_0 \oplus U''_1 \otimes J$. Очевидным образом получаем, что пространства U'_0, U''_0 инвариантны под действием α_0, U'_1, U''_1 под действием α_1, и β переводит U'_0 в U'_1 и U''_0 в U''_1. Поэтому мы получили разложение представления колчана. Следовательно, построенный функтор переводит неразложимые представления в неразложимые.

Рассмотрим произвольный морфизм θ L-модулей рассматриваемого вида, назовем эти модули $U_0 \oplus U_1 \otimes J$ и $V_0 \oplus V_1 \otimes J$. Тогда, в силу Леммы Шура получаем, что $\theta(U_0) \subset V_0$, $\theta(U_1 \otimes J) \subset V_1 \otimes J$, при чем для некоторого линейного оператора верно, что $\theta(U_1 \otimes J) = \eta(U_1) \otimes J$. Непосредственно проверяется, что $\theta|_{U_0}, \eta$ задает представление рассматриваемого колчана с соотношениями, данное отображение функториально и является сопряженным функтором к рассматриваемому, если рассматривать его как функтор на полную подкатегорию модулей вида $U \oplus U \otimes J$. Поэтому построенный нами функтор является вложением категорий.

Из этого следует, что все алгебры вида $L = (L_0 \oplus I) \leftthreetimes J$ – дикие.

$\square$

Замечание 2.4.2. Из результатов этого параграфа и Теоремы 2.3.5 следует, что все алгебры Ли с неабелевым радикалом – дикие.

2.4.2. Основная теорема

Из всего доказанного выше следует следующая теорема:

Теорема 2.4.3. *Ручными являются следующие алгебры Ли:*

1) полупростые;

2) одномерная алгебра;

3) прямые суммы полупростых с одномерной.

Все остальные – дикие.

Доказательство. Все полупростые алгебры ручные в силу классической теории представлений алгебр Ли. Все разрешимые алгебры – дикие в силу Предложения 2.1.6.

Будем теперь считать, что данная алгебра не содержит разрешимых прямых слагаемых.

Рассмотрим разложение Леви данной алгебры Ли $\widehat{L}$: $\widehat{L} = L \leftthreetimes R$, L – полупростая, R – радикал. Если $R/[R,R]$ – одномерна, то, в силу предложений 2.4.1 и 2.1.7, L дикая тогда и только тогда, когда R – не одномерен, и ручная, когда R – одномерен.

Пусть теперь $\dim I = \dim R/[R,R] > 1$. Тогда $L/[R,R]$ – дикая в силу Теоремы 2.3.5. Поэтому L – тоже дикая.

$\square$

Глава 3

Гипотеза Чередника-Орра для некоторых модулей

3.1. Модули Демазюра и ПБВ-фильтрации

Пусть $\mathfrak{g}$ – простая конечномерная алгебра Ли. Фиксируем разложение Картана $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}$. Пусть $\triangle_+$ – множество положительных корней $\mathfrak{g}$, n – ранг $\mathfrak{g}$ и пусть $\alpha_i \in \triangle_+$, $i = 1, \ldots, n$ – множество простых корней. Через ω_i, $i = 1, \ldots, n$ обозначим фундаментальные веса. Пусть $P = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\omega_i$ – решетка весов и $P_+ = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_{\geq 0}\omega_i$ – подмножество положительных целых весов. Для $\lambda \in P_+$ обозначим через V_λ неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом λ. Для $\alpha \in \triangle_+$, пусть $f_\alpha \in \mathfrak{n}^-$ и $e_\alpha \in \mathfrak{n}$ – соответствующие образующие Шевалле.

Для алгебры $\mathfrak{a}$ обозначим через $\mathfrak{a}[t] = \mathfrak{a} \otimes \mathbb{C}[t]$ соответствующую алгебру токов. Положим $a[k] = a \otimes t^k \in \mathfrak{a}[t]$, $a \in \mathfrak{a}$, $k \geq 0$.

Пусть $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$ – аффинная алгебра Ли, в частности, K – центральный элемент и $[d, a \otimes t^k] = -ka \otimes t^k$. Алгебра токов $\mathfrak{g}[t]$ естественным образом является подалгеброй $\widehat{\mathfrak{g}}$. Мы имеем разложение Картана

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{n}^-} \oplus \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \widehat{\mathfrak{n}}.$$

Например, $\widehat{\mathfrak{n}} = \mathfrak{g} \otimes t\mathbb{C}[t] \oplus \mathfrak{n} \otimes 1$, $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes 1 \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$.

Пусть $L = L_{\lambda,k}$ – интегрируемый неприводимый $\widehat{\mathfrak{g}}$-модуль со старшим вектором $v_{\lambda,k}$. Элемент K действует на L как скаляр k и этот скаляр называется уровнем L. Старший вес $L_{\lambda,k}$ – это пара (λ, k), где λ является весом $\mathfrak{g}$ и k – уровень $L_{\lambda,k}$. Мы имеем условие $(\lambda, \theta) \leq k$, где θ – старший корень $\mathfrak{g}$. Собственное значение оператора d на векторе $v_{\lambda,k}$ не имеет значения и может быть сдвинуто на любой скаляр.

Пусть W – конечная группа Вейля $\mathfrak{g}$ с самым длинным элементом w_0 и пусть $\hat{W}$ – соответствующая аффинная группа Вейля ($\hat{W}$ является полупрямым произведением W и кокорневой решетки). Конечная группа Вейля естественным образом действует на пространстве весов $\mathfrak{g}$ и $\hat{W}$, весовое подпространство веса $w(\lambda, k)$ – одномерно. Мы фиксируем один вектор для каждого соответствующего пространства и обозначаем его $v_{w(\lambda,k)}$. Модуль Демазюра

$D_w(\lambda)$ опердляется как $D_w(\lambda) = U(\widehat{\mathfrak{n}})v_{w(\lambda,k)}$. Отметим, что $D_w(\lambda)$ не всегда является инвариантным относительно действия $\mathfrak{g} \otimes 1$.

В силу следующих причин мы рассматриваем только модули уровня 1. В этом случае для любого веса $\mu \in P$ существует единственный интегрируемый вес $(\lambda, 1)$ и $w \in \hat{W}$, такой что $w(\lambda, 1) = (\mu, 1)$. Если μ – антидоминантный (то есть $w_0\mu$ – целый доминантный $\mathfrak{g}$-вес), то модуль Демазюра $D_w(\lambda)$ допускает также действие всей алгебры $\mathfrak{g} \otimes 1$.

Мы обозначаем модули Демазюра с антидоминантным весом $w_0\mu$ как W_μ и его циклический вектор как w_μ. Отметим, что вес элемента w_μ – это $w_0\mu$. В частности, имеем $\mathrm{U}(\mathfrak{n} \otimes 1)w_\mu \simeq V_\mu$ с младшим вектором w_μ. Также имеем $W_\mu = \mathrm{U}(\mathfrak{n}[t])w_\mu$. Модули W_μ играют важную роль в теории представлений и в теории многочленов Макдональда (см., например, [CL], [FL1], [FL2], [Kn], [S], [I]). В частности, W_μ являются также модулями Вейля и фьюжен-модулями.

Пусть $\mathrm{U}(\mathfrak{n}[t])_s$ – ПБВ-фильтрация на универсальной обертывающей алгебре. Так как $W_\mu = \mathrm{U}(\mathfrak{n}[t])w_\mu$, мы получаем индуцированную фильтрацию на модуле Демазюра. Пусть W_μ^{gr} – ассоциированный градуированный модуль. Тогда:

$$W_\mu^{gr} = \bigoplus_{s \geq 0} W_\mu^{gr}(s), \;\; W_\mu^{gr}(s) = \frac{\mathrm{U}(\mathfrak{n}[t])_s w_\mu}{\mathrm{U}(\mathfrak{n}[t])_{s-1} w_\mu}.$$

Отметим, что W_μ^{gr} – представление абелевой алгебры $\mathfrak{n}^a[t]$, где $\mathfrak{n}^a$ – абелева алгебра Ли с подлежащим векторным пространством $\mathfrak{n}$. Пусть D – оператор ПБВ-степени на W_μ^{gr}, то есть $D|_{W_\mu^{gr}(s)} = s \cdot \mathrm{Id}$. Положив $dw_\mu = 0$, мы получаем действие оператора d на W_μ. Пусть $W_\mu^{gr}(s,r)$ – множество векторов $v \in W_\mu^{gr}(s)$, таких что $dv = rv$. Отметим, что каждый $W_\mu(s,r)$ естественным образом является $\mathfrak{h}$-модулем. Мы обозначаем ПБВ-характер W_μ как

$$\mathrm{ch}_{q,p} W_\mu = \sum_{r,s \geq 0} q^r p^s \,\mathrm{ch}\, W_\mu^{gr}(s,r).$$

3.1.1. ПБВ-базис

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$. Пусть $\alpha_{i,j} = \alpha_i + \cdots + \alpha_j$ $(1 \leq i \leq j \leq n)$ – множество положительных корней. Обозначим с помощью $f_{i,j} = f_{\alpha_{i,j}}$, $e_{i,j} = e_{\alpha_{i,j}}$ образующие Шевалле алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть $f_{i,j}[k] = f_{i,j} \otimes t^k$, $e_{i,j}[k] = e_{i,j} \otimes t^k$ Приведем некоторые свойства модулей Демазюра W_λ в следующей Лемме.

Лемма 3.1.1. *Пусть* $\lambda = \sum_{i=1}^n m_i\omega_i \in P_+$. *Тогда*

- W_λ *порожден циклическим вектором* $w_\lambda \in W_\lambda$ *с помощью действия операторов* $e_\alpha[k] = e_\alpha \otimes t^k$, α *– положительный корень и* $k \geq 0$.

- $e_{i,j} w_{\omega_r} = 0$, *если не выполнены условия* $i \leq n - r \leq j = 1$.

- $\dim W_\lambda = \prod_{i=1}^n (\dim V_{\omega_i})^{m_i}$.

- W_λ *–* $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]$*-модуль, он изоморфен модулю Вейля.*

- *Если* $\lambda = \sum_i m_i \omega_i$, *тогда* $e_\alpha[k] w_\lambda = 0$ *для* $k \geq \sum_i m_i$.

- $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) w_\lambda \simeq V_\lambda$, w_λ *– вектор младшего веса.*

Приведем обозначения из статьи [CL]. Пусть $l \geq 0$, и $\mathbf{s} = (\mathbf{s}(1) \leq \cdots \leq \mathbf{s}(l))$ – набор неотрицательных весов. Для положительного корня α мы используем обозначение

$$e_\alpha(l, \mathbf{s}) = \prod_{1 \leq k \leq l} e_\alpha[s(k)].$$

Если $\alpha = \alpha_{i,j}$, мы кратко обозначим $e_{\alpha_{i,j}}(l, \mathbf{s})$ с помощью $e_{i,j}(l, \mathbf{s})$. Сначала приведем несколько лемм из [CL].

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$.

Лемма 3.1.2. *Векторы* $e_{1,1}(l, \mathbf{s}) w_{m\omega_1}$, *удовлетворяющие условиям,* $\mathbf{s}(l) \leq m - l$ *образуют базис* $W_{m\omega_1}$. *Определяющие соотношения* $\mathfrak{sl}_2[t]$*-модуля* $W_{m\omega_1}$ *– это* $f[k] w_{m\omega_1}$ $(k \geq 0)$, $h[k] w_{m\omega_1}$ $(k > 0)$, $e[0]^N w_{m\omega_1}$ $(N > m)$.

Лемма 3.1.3. *Векторы* $\prod_{k=1}^n e_{1,k}(l_k, \mathbf{s}_k) w_{m\omega_n}$, *удовлетворяющие соотношениям*

$$\mathbf{s}_1(l_1) \leq m - l_1,\ \mathbf{s}_2(l_2) \leq m - l_1 - l_2, \ldots, \mathbf{s}_{n-1}(l_n) \leq m - l_1 - \cdots - l_n,$$

образуют базис $W_{m\omega_n}$.

Векторы $\prod_{k=1}^n e_{k,n}(l_k, \mathbf{s}_k) w_{m\omega_1}$, *удовлетворяющие соотношениям*

$$\mathbf{s}_n(l_n) \leq m - l_n,\ \mathbf{s}_{n-1}(l_{n-1}) \leq m - l_n - l_{n-1}, \ldots, \mathbf{s}_1(l_1) \leq m - l_n - \cdots - l_1,$$

образуют ПБВ-базис $W_{m\omega_1}$.

Доказательство. Доказано в [CL]. □

Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 3.1.4. *Пусть $\lambda = a\omega_1 + b\omega_n$. Тогда у модуля W_λ есть ПБВ-базис вида*

$$e_{1,n}(l_{1,n}, \mathbf{s}_{1,n}) \prod_{k=1}^{n-1} e_{1,k}(l_{1,k}, \mathbf{s}_{1,k}) \prod_{k=2}^{n} e_{k,n}(l_{k,n}, \mathbf{s}_{k,n}) w_{a\omega_1+b\omega_n}, \tag{3.1.1}$$

удовлетворяющий условиям

$$\mathbf{s}_{1,k}(l_{1,k}) \le b - l_{1,1} - \cdots - l_{1,k},\ \ k = 1, \ldots, n-1, \tag{3.1.2}$$

$$\mathbf{s}_{k,n}(l_{k,n}) \le a - l_{n,n} - \cdots - l_{k,n},\ \ k = n, \ldots, 2, \tag{3.1.3}$$

$$\mathbf{s}_{1,n}(l_{1,n}) \le a + b - l_{1,1} - \cdots - l_{1,n-1} - l_{1,n} - l_{2.n} - \cdots - l_{n,n}. \tag{3.1.4}$$

Лемма 3.1.5. *Множество элементов базиса из Теоремы 3.1.4 совпадает с размерностью модуля W_λ.*

Доказательство. Мы знаем, что $\dim W_{a\omega_1+b\omega_n} = (n+1)^{a+b}$. Поэтому нам достаточно только показать, что

$$\sum_{\substack{l_{1,1}+\cdots+l_{1,n-1}\le b \\ l_{n,n}+\cdots+l_{n-1,n}\le a}} 2^{a+b-l_{1,1}+\cdots+l_{1,n-1}-l_{n,n}+\cdots+l_{n-1,n}} \binom{b}{l_{1,1}, \ldots, l_{1,n-1}} \binom{a}{l_{n,n}, \ldots, l_{n-1,n}}$$

равняется $(n+1)^{a+b}$, что очевидно. □

Пусть F_s – ПБВ-фильтрация на W_λ. Для любого $\alpha \in \triangle_+$ и $k \ge 0$ имеем $f_\alpha[k]F_s \subset F_s$. Поэтому мы получаем индуцированные операторы на W_λ, которые мы обозначаем как $\partial_\alpha[k]$. Следующая Лемма является простой:

Лемма 3.1.6. *Операторы $\partial_\alpha[k]$ являются дифференциальными операторами на W_λ^a, представленном как фактор полиномиальной алгебры от переменных $e_\alpha[r]$, $\alpha \in \triangle_+, r \ge 0$. Имеем $\partial_\alpha[k]e_\beta[r] = 0$ кроме случая, когда $[f_\alpha, e_\beta] = c_{\alpha,\beta}^\gamma e_\gamma$ для некоторого $\gamma \in \triangle_+$. Если это равенство выполняется, то $\partial_\alpha[k]e_\beta[r] = c_{\alpha,\beta}^\gamma e_\gamma[k+r]$.*

Теперь пусть θ – старший корень $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{sl}_2^\theta$ – алгебра $\mathfrak{sl}_2$, порожденная f_θ и e_θ.

Лемма 3.1.7. *Имеется естественное действие $\mathfrak{sl}_2^\theta[t]$ на W_λ^a. ПБВ-степени операторов $e_\theta[k]$, $h_\theta[k]$ и $f_\theta[k]$ – один, нуль и минус 1.*

Доказательство. Алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2^\theta \otimes \mathbb{C}[t]$ действует на W_λ. Мы имеем очевидное индуцированное действие операторов $e_\theta[k]$ и $h_\theta[k]$ на градуированном пространстве W_λ^a: так как $e_\theta[k]F_s \subset F_{s+1}$ и $h_\theta[k]F_s \subset F_s$ мы получаем операторы степеней один и нуль. Теперь нетрудно увидеть, что $f_\theta[k]F_s \subset F_{s-1}$ (так как $[f_\theta, e_\alpha]$ является линейной комбинацией операторов f_β и подалгебры Картана). Поэтому мы получаем индуцированный оператор степени минус один. Индуцированные операторы $e_\theta[k]$, $h_\theta[k]$ и $f_\theta[k]$ на W_λ^a по-прежнему образуют алгебру $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t]$. □

Замечание 3.1.8. Отметим, что дифференциальные операторы ∂_θ являются нулевыми.

Мы докажем главную теорему. Для начала приведем набросок доказательства с случае $\mathfrak{sl}_3$, а после дадим доказательство для произвольного n.

Лемма 3.1.9. *Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$, $\lambda = a\omega_1 + b\omega_2$. Тогда векторы*

$$e_{1,1}(l_{1,1}, \mathbf{s}_{1,1})e_{2,2}(l_{2,2}, \mathbf{s}_{2,2})e_{1,2}(l_{1,2}, \mathbf{s}_{1,2})w_\lambda \tag{3.1.5}$$

удовлетворяющие условиям

$$s_{1,1}(l_{1,1}) \le b - l_{1,1},\ s_{2,2}(l_{2,2}) \le a - l_{2,2},\ s_{1,2}(l_{1,2}) \le a + b - l_{1,1} - l_{2,2} - l_{1,2} \tag{3.1.6}$$

образуют базис W_λ^a.

Доказательство. Рассмотрим произвольный вектор вида (3.1.5). Мы хотим показать, что он может быть переписан в виде линейной комбинации мономов, удовлетворяющих условиям (3.1.6). Ограничим модуль W_λ на подалгебры $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t]$, соответствующие простым корням, предположим, что

$$s_{1,1}(l_{1,1}) \le b - l_{1,1},\ s_{2,2}(l_{2,2}) \le a - l_{2,2}$$

(так как мы знаем, что эти ограничения дают базис в случае $\mathfrak{sl}_2$, см. Лемму 3.1.2). Отметим, что

$$e_{1,2}[0]^m e_{1,1}(l_{1,1}, \mathbf{s}_{1,1})e_{2,2}(l_{2,2}, \mathbf{s}_{2,2})w_\lambda = 0 \tag{3.1.7}$$

для $m + l_{1,1} + l_{2,2} > a + b$ (это может быть показано с помощью применения дифференциальных операторов, см. доказательство теоремы в общем случае ниже). Рассмотрим теперь действие $\mathfrak{sl}_2^\theta \otimes \mathbb{C}[t]$. Отметим, что действие этой алгебры коммутирует с $e_{1,1}[k]$ и $e_{2,2}[k]$. Следовательно, используя (3.1.7) и действие $\mathfrak{sl}_2^\theta \otimes \mathbb{C}[t]$ мы получаем нужное утверждение благодаря Лемме 3.1.2.

□

Перейдем к доказательству в общем случае.

Доказательство. В силу Леммы 3.1.5 достаточно доказать, что любой вектор из W_λ может быть записан в виде линейной комбинации векторов (3.1.1), удовлетворяющих условиям (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4). Для начала ограничим W_λ на подалгебру $\mathfrak{sl}_{n-1}[t]$, соответствующую простым корням $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$. Тогда мы имеем все соотношения из $W_{b\omega_n}$ и, значит, можем предположить, что все условия (3.1.2) выполняются. Аналогично, мы можем предположить, что условия (3.1.3) выполнены.

Имеем:

$$e_{1,n}[0]^m \prod_{j=1}^{n-1} e(l_{1,j}, \mathbf{s}_{1,j}) \prod_{i=2}^{n} e(l_{i,n}, \mathbf{s}_{i,n}) w_\lambda \tag{3.1.8}$$

в случае $m + \sum_{j=1}^{n-1} l_{1,j} + \sum_{i=2}^{n} l_{i,n} > a + b$. В действительности, мы знаем, что $e_{1,n}[0]^m w_\lambda = 0$, если $m > a + b$. Таким образом

$$\partial_{1,i-1}[k]^r e_{1,n}[0]^m = \text{const.}\ e_{i,n}[k]^r e_{1,n}[0]^{m-r},$$
$$\partial_{j+1,n}[k]^r e_{1,n}[0]^m = \text{const.}\ e_{1,j}[k]^r e_{1,n}[0]^{m-r},$$

что доказывает (3.1.8). Теперь применим действие алгебры $\mathfrak{sl}_2^\theta[t]$. □

3.2. Несимметрические многочлены Макдональда

3.2.1. Формула Хаглунда-Хаимана-Лоера

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – последовательность n целых чисел. Несимметрические полиномы Макдональда типа A $E_\lambda(x, q, t)$ являются полиномами от переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$ с коэффициентами в $\mathbb{Q}(q, t)$. Они являются совместными собственными функциями операторов Чередника. В дальнейшем нам потребуется следующее свойство Кнопа-Сахи многочленов Макдональда. Пусть $\pi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_n + 1, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ и

$$(\Psi f)(x_1, \dots, x_n) = x_1 f(x_2, \dots, x_n, q^{-1} x_1).$$

Тогда $E_{\pi(\lambda)}(x, q, t) = q^{\lambda_n} \Psi E_\lambda(x, q, t)$.

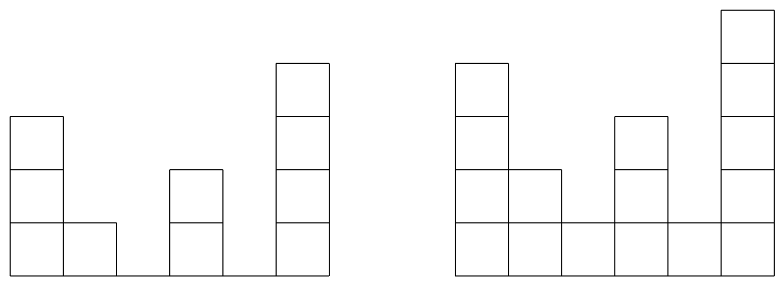
Мы используем явное комбинаторное описание несимметрических многочленов Макдональда из [HHL]. Для разбиения $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ диаграммой колонок $dg'(\lambda)$ является следующее множество:

$$dg'(\lambda) = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : \ 1 \le i \le n, 1 \le j \le \lambda_i\}$$

Пополненная диаграмма $\widehat{dg}(\lambda)$ оперделяется как

$$\widehat{dg}(\lambda) = dg'(\lambda) \cup \{(i,0) : 1 \le i \le n\},$$

Тто есть одна клетка добавляется внизу каждой колонки. Например, для разбиения $\lambda = (3,1,0,2,0,4)$ имеем следующие диагрумы для $dg'(\lambda)$ и $\widehat{dg}(\lambda)$:



В дальнейшем мы будем в первую очередь интересоваться антидоминантными диаграммами, то есть $\lambda_i \le \lambda_j$, если $i < j$.

Заполнение λ – это отображение $\sigma : dg'(\lambda) \to \{1, \ldots, n\}$. Соответствующее ему пополненное заполнение $\hat{\sigma} : \widehat{dg}(\lambda) \to \{1, \ldots, n\}$ совпадает с σ на $dg'(\lambda)$ и $\widehat{\sigma}((j,0)) = j$ для $j = 1, \ldots, n$.

Две клетки называются атакующими, если они находятся в одной и той же строке или они находятся в последовательных строках, и клетка в нижнем ряду находится правее клетки в верхнем ряду, то есть оин имеют вид $(i,j), (i_1, j-1)$ с $i < i_1$. Заполнение называется неатакующим, если в нем нет совпадающих элементов в атакующих друг друга клетках.

Для клетки u обозначим с помощью $d(u)$ клетку, лежащую ровно под u. Убывание заполнения σ – это множество клеток u, таких что $\hat{\sigma}(u) > \hat{\sigma}(d(u))$.

Для любой клетки $u = (i,j)$ обозначим с помощью $l(u)$ количество клеток над u, то есть $l(u) = \lambda_i - j$. Нам также требуется значение $a(u)$, считающее число элементов в руках u. Определим:

$$arm^{left}(u) = \{(i', j) \in dg'(\lambda) | i' < i, \lambda_{i'} \le \lambda_i\},$$

$$arm^{right}(u) = \{(i', j-1) \in dg'(\lambda) | i' > i, \lambda_{i'} < \lambda_i\},$$
$$arm(u) = arm^{left}(u) \cup arm^{right}(u)$$

Тогда $a(u) = \#\{arm(u)\}$.

Отметим, что для антидоминантных диаграмм мы имеем:

$$arm(u) = arm^{left}(u) = \{(i', j) \in dg'(\lambda) | i' < i\}.$$

Пусть $Des(\widehat{\sigma})$ –множество убываний $\widehat{\sigma}$ и

$$maj(\widehat{\sigma}) = \sum_{u \in Des(\widehat{\sigma})} (l(u) + 1).$$

Пара атакующих элементов $u = (i, j)$ и $u' = (i', j')$ заполнения $\hat{\sigma}$ является инверсией, если $\widehat{\sigma}(u) < \widehat{\sigma}(u')$ и $j = j', i < i'$ или $j + 1 = j', i > i'$. Пусть $Inv(\widehat{\sigma})$ – множество инверсий $\widehat{\sigma}$. Положим:

$$coinv(\widehat{\sigma}) = \sum_{u \in dg'(\lambda)} a(u) - |Inv(\widehat{\sigma})| + |\{(i < j : \lambda_i \leq \lambda_j)\}| + \sum_{u \in Des(\widehat{\sigma})} a(u). \quad (3.2.1)$$

Мы будем иметь дело с разбиениями μ вида $\mu = \pi^r(\lambda)$, где λ – антидоминантный.

Для антидоминантного веса λ мы имеем:

$$coinv(\widehat{\sigma}) = \sum_{u \in dg'(\lambda)} a(u) - |Inv(\widehat{\sigma})| + \frac{n(n-1)}{2} + \sum_{u \in Des(\widehat{\sigma})} a(u). \quad (3.2.2)$$

Отметим, что мы имеем $\frac{n(n-1)}{2}$ инверсий в нижнем ряду. Пусть $Inv'(\widehat{\sigma}) = Inv'(\widehat{\sigma}) - \frac{n(n-1)}{2}$. Мы имеем

$$coinv(\sigma) = \sum_{u \in dg'(\lambda)} a(u) - |Inv'(\widehat{\sigma})| + \sum_{u \in Des(\widehat{\sigma})} a(u). \quad (3.2.3)$$

Для разбиения вида $\pi^r(\lambda)$ с антидоминантным λ имеем $|\{(i < j : \lambda_i \leq \lambda_j)\}| = \frac{r(r-1)}{2} + \frac{(n-r)(n-r-1)}{2}$ и поэтому

$$coinv(\widehat{\sigma}) = \sum_{u \in dg'(\lambda)} a(u) - |Inv'(\widehat{\sigma})| - r(n-r) + \sum_{u \in Des(\widehat{\sigma})} a(u). \quad (3.2.4)$$

Теорема 3.2.1. *(Хаглунд, Хаиман и Лоер)*

$$E_\mu(x; q, t) = \sum_{\sigma} x^\sigma q^{maj(\hat{\sigma})} t^{coinv(\hat{\sigma})} \prod_{\substack{u \in dg'(\lambda) \\ \widehat{\sigma}(u) \neq \hat{\sigma}(d(u))}} \frac{1-t}{1 - q^{l(u)+1} t^{a(u)+1}}. \quad (3.2.5)$$

3.2.2. Предел $t \to \infty$

В этом разделе мы приведем комбинаторную формулу для предела $t \to \infty$ многочленов $E_\mu(x;q,t)$.

Отметим, что единицами в уравнении (3.2.5) можно пренебречь, поэтому мы имеем:

$$\lim_{t\to\infty} E_\mu(x;q,t) = \sum_{\sigma \ non-attacking} x^\sigma q^{maj(\hat\sigma)} t^{coinv(\hat\sigma)} \prod_{\substack{u\in dg' \\ \widehat\sigma(u)\neq\widehat\sigma(d(u))}} \frac{1}{q^{l(u)+1}t^{a(u)}}. \quad (3.2.6)$$

Другими словами:

$$\lim_{t\to\infty} E_\mu(x;q,t) = \sum_\sigma x^\sigma q^{maj(\hat\sigma)-\sum_{u\in dg',\hat\sigma(u)\neq\hat\sigma(d(u))}(l(u)+1)} t^{coinv(\hat\sigma)-\sum_{u\in dg',\hat\sigma(u)\neq\hat\sigma(d(u))} a(u)}.$$

Для любой клетки $u=(i,j)\in dg'(\lambda)$ обозначим клетку $\pi(u)\in dg'(\pi(\lambda))$ следующим образом:

$$\pi(u) = \begin{cases} (i+1,j), \text{ при } i\neq n, \\ (1,j+1), \text{ при } i=n. \end{cases}$$

Отметим, что $v\in arm(u)$ если и только если $\pi(v)\in arm(\pi(u))$ и $v\in leg(u)$ если и только если $\pi(v)\in leg(\pi(u))$; в частности, $a(u)=a(\pi(u))$ и $l(u)=l(\pi(u))$.

Лемма 3.2.2. *Функция* $\lim_{t\to\infty} E_\mu(x;q,t)$ *определена корректно, то есть предел конечен.*

Доказательство. Для простоты докажем эту Лемму только в интересующем нас случае $\mu=\pi^r(\lambda)$. Мы должны доказать, что для любого неатакующего заполнения σ степень

$$coinv(\widehat\sigma) - \sum_{\substack{u\in dg'(\mu) \\ \widehat\sigma(u)\neq\widehat\sigma(d(u))}} a(u) \quad (3.2.7)$$

не больше нуля. Используя (3.2.4), мы имеем:

$$coinv(\widehat{\sigma}) - \sum_{\substack{u\in dg'(\mu)\\ \widehat{\sigma}(u)\neq\widehat{\sigma}(d(u))}} a(u) =$$

$$\sum_{u\in dg'(\mu)} a(u) - |Inv'(\widehat{\sigma})| - r(n-r) + \sum_{u\in Des(\widehat{\sigma})} a(u) - \sum_{\substack{u\in dg'(\mu)\\ \widehat{\sigma}(u)\neq\widehat{\sigma}(d(u))}} a(u) =$$

$$\sum_{u\in dg'(\mu)} a(u) - |Inv'(\widehat{\sigma})| - r(n-r) - \sum_{\substack{u\in dg'(\lambda)\\ \widehat{\sigma}(u)<\widehat{\sigma}(d(u))}} a(u).$$

Рассмотрим три клетки $u = \pi^r(\tilde{u})$, $d(u)$, $v \in arm(u)$, то есть клетки (i,j), $(i,j-1)$, $(i',j), i' < i$. Предположим, что $\sigma(u) > \sigma(d(u))$. Тогда мы имеем $\sigma(v) < \sigma(u)$ или $\sigma(v) > \sigma(d(u))$. Поэтому, если $\sigma(u) > \sigma(d(u))$, то для любого элемента в $arm(u)$ мы имеем как минимум одну инверсию. Поэтому:

$$\sum_{u=\pi^r(\tilde{u})} a(u) - |Inv^{\pi}(\sigma)| - \sum_{\substack{u=\pi^r(\tilde{u})\\ \widehat{\sigma}(u)<\widehat{\sigma}(d(u))}} a(u) \leq$$

$$\sum_{u=\pi^r(\tilde{u})} a(u) - \sum_{\substack{u=\pi^r(\tilde{u})\\ \widehat{\sigma}(u)<\widehat{\sigma}(d(u))}} a(u) - \sum_{\substack{u=\pi^r(\tilde{u})\\ \widehat{\sigma}(u)>\widehat{\sigma}(d(u))}} a(u) = 0,$$

где Inv^{π} – множество инверсий вида $\pi^r(u), \pi^r(v)$.

Элементы из $dg'(\mu)$, не являющиеся элементами вида $\pi^r(u)$ – это $(1,1),\dots,(r,1)$. Если заполнение неатакующее, то $\sigma(i,1) = i, i = 1,\dots,r$. Поэтому эти элементы дают $\frac{r(r-1)}{2}$. Длины их рук – это $n-1,\dots,n-r$. Однако:

$$n-1+\dots+(n-r) = \frac{r(r-1)}{2} + r(n-r).$$

Тем самым Лемма доказана. □

Лемма 3.2.2 говорит нам, что степень t меньше или равна нулю. В пределе $t\to\infty$ интересными для нас заполнениями $\widehat{\sigma}$ являются такие, что (3.2.7) обнуляется. Любые рассмотренные выше три элемента дают одно отрицательное слагаемое в степень t. Поэтому, если $\sigma(u) > \sigma(d(u))$, то для любого элемента v в руке u только для одного значения $\sigma(v) < \sigma(u)$ и $\sigma(v) > \sigma(d(u))$ выполняется, что $\sigma(v)$ не лежит между $\sigma(u)$ и $\sigma(d(u))$. И если $\sigma(u) < \sigma(d(u))$, то для любого v в руке u никакое из этих условий не выполняется, то есть

$\sigma(v)$ лежит между $\sigma(u)$ и $\sigma(d(u))$. Поэтому мы получаем следующее описание заполнений, таких что t (3.2.7) обнуляется.

Предложение 3.2.3. *Предположим, что мы имеем диаграмму и некоторое неатакующее заполнение диаграмы, такое что степень t (3.2.7) равна 0. Пусть $\sigma(d(u)) = k$ и пусть*

$$S = \{a_1, \ldots, a_{l(a)+1}\} = \{\sigma(v)|v \in arm(u)\} \cup \{\sigma(u)\}.$$

Тогда

$$\sigma(u) = \begin{cases} \min_{r \in S, r \geq k} r, & \text{если } \exists r \in S, r \geq k, \\ \min_{r \in S} r, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Используя предыдущее Предложение, мы можем дать следующее описание заполнений, дающих нуль в степень по t.

Лемма 3.2.4. *Предположим, что мы имеем заполнение i-той строки $\pi^r(\lambda)$. Имея множество $S = \{a_1, \ldots, a_p\}$ элементов $(i+1)$-й строки $\pi^r(\lambda)$, существует единственный способ записать их в клетки $(i+1)$-й строки таким образом, что полученное заполнение дает нуль в степень по t. Правило заполнения следующее: заполняем $(i+1)$-ю строку диаграмы $\pi^r(\lambda)$ от $\pi^r(n,i)$ до $\pi^r(1,i)$. Пусть S' – множество элементов из S, неиспользованных на предыдущих шагах. Тогда в клетку v мы ставим:*

(i) $\min\{a \in S', a \geq \sigma(d(v))\}$, *если* $\{a \in S', a \geq \sigma(d(v))\} \neq \emptyset$;

(ii) $\min\{a \in S'\}$, *если* $\{a \in S', a \geq \sigma(d(v))\} = \emptyset$.

Доказательство. Немедленное следствие Предложения 3.2.3. □

В дальнейшем мы называем заполнение $\sigma(\lambda)$, такое, что t-степень (3.2.7) обнуляется, *подходящим.*

Предложение 3.2.5. *Пусть $\lambda = (\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n)$ – антидоминантный вес. Пусть σ – заполнение соответствующей диаграмы $\widehat{dg}(\lambda)$, такое что элементами нижней строки являются $\sigma(i,0) = i$. Тогда существует только одно подходящее заполнение с выбранными множествами элементов в каждой строке. Для такого заполнения $dg'(\lambda)$ соответствующая степень по q равна $\sum_{\sigma(u)<\sigma(d(u))}(l(u)+1)$.*

В частности, мы получаем следующее хорошо известное следствие:

Следствие 3.2.6. *Пусть* $m_i = \lambda_{n+1-i} - \lambda_{n-i}$. *Тогда*

$$E_\lambda(x; 1, \infty) = \mathrm{ch} \bigotimes_{i=1}^{n-1} V_{\omega_i}^{m_{i+1}-m_i},$$

где V_{ω_i} *– фундаментальные представления.*

Доказательство. Допустимое заполнение σ содержит множество различных элементов от 1 до n в каждой строке диаграммы $dg'(\lambda)$. Благодаря Предложению 3.2.5 имеем биекцию между строками нашего заполнения и элементами стандартного базиса V_{ω_k}. Веса соответствующих элементов базиса равны $\prod_{i=k+1}^{n} x^{\sigma(i,j)}$. $\square$

3.2.3. Рекуррентная формула

Пусть λ – антидоминантное разбиение, такое что $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-s} = 0 \neq \lambda_{n-s+1}$ (то есть имеется s клеток в нижнем ряду диаграммы). Пусть $\mathbf{a} = (a_{n-s}, \ldots, a_n)$ – элементы нижнего ряда подходящего заполнения σ, то есть правило из Предложения 3.2.3 выполнено (мы предполагаем, что a_j находятся в j-м столбце). Обозначим нижний ряд σ с помощью $\mathrm{low}(\sigma)$ и определим

$$k(\sigma) = (k_1, \ldots, k_n),\ \ k_i = \#|\{u|\sigma(u) = i\}|.$$

Мы используем краткую запись $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$. Пусть $s(\sigma) = \sum_{\sigma(u)<\sigma(d(u))}(l(u)+1)$, тогда

$$E_\lambda(x, q^{-1}, \infty) = \sum_{\sigma:} q^{s(\sigma)} x^{k(\sigma)}.$$

Введем обозначение, которым будем все время пользоваться в дальнейшем:

$$c_{\mathbf{a}}^{\lambda}(\mathbf{k}) = \sum_{\sigma:\ \mathrm{low}(\sigma)=(a_1,\ldots,a_s),\ k(\sigma)=(k_1,\ldots,k_n)} q^{s(\sigma)}. \tag{3.2.8}$$

Используя Предложение 3.2.3, имеем:

$$E_\lambda(x; q^{-1}, \infty) = \sum_{k_1,\ldots,k_n \geq 0} c_{(n-s+1,\ldots,n)}^{(0,\ldots,0,\lambda_{n-s+1}+1,\ldots,\lambda_n+1)}(k_1, \ldots, k_{n-s}, k_{n-s}+1, \ldots, k_n+1) x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}.$$

Пусть m – количество элементов во второй снизу строке. Для набора $\mathbf{a} = (a_{n-s+1}, \dots, a_n)$ и множества B, $\#B = m \le s$ пусть $\mathbf{a}(B) = (b_{n-m+1}, \dots, b_n)$ – упорядочивание B с помощью правила из Леммы 3.2.3.

Предложение 3.2.7. *Пусть $\delta_1, \dots, \delta_n$ – числа, определенные как $\delta_i = 1$, если $i \in \{a_1, \dots, a_s\}$ и 0 иначе. Тогда*

$$c_{\mathbf{a}}^{(0,\dots,0,\lambda_{n-s+1}+1,\dots,\lambda_n+1)}(k_1+\delta_1, \dots, k_n+\delta_n) = \sum_{B\colon\ \#B=m} c_{\mathbf{a}(B)}^{\lambda}(k_1, \dots, k_n) q^{\sum_{i\colon\ b_i<a_i} \lambda_{n-s+i}}$$

Доказательство. Это немедленное следствие Предложения 3.2.5. □

Пример 3.2.8. Рассмотрим случай $n = 3$ и разбиения вида $\lambda = (0, m_2, m_1+m_2)$ (это – общий случай для sl_3). Мы получаем следующие уравнения:

$$c_{21}^{(0,m_2+1,m_1+m_2+1)}(k_1+1, k_2+1, k_3) = c_{21}^{(0,m_2,m_1+m_2)}(k_1, k_2, k_3) + c_{31}^{(0,m_2,m_1+m_2)}(k_1, k_2, k_3) + c_{32}^{(0,m_2,m_1+m_2)}(k_1, k_2, k_3);$$

$$c_{31}^{(0,m_2+1,m_1+m_2+1)}(k_1+1, k_2, k_3+1) = c_{21}^{(0,m_2,m_1+m_2)}(k_1, k_2, k_3) q^{m_2} + c_{31}^{(0,m_2,m_1+m_2)}(k_1, k_2, k_3) + c_{32}^{(0,m_2,m_1+m_2)}(k_1, k_2, k_3).$$

С помощью этих уравнений получаем:

$$c_{31}^{(0,m_2+1,m_1+m_2+1)}(k_1+1, k_2, k_3+1) = c_{21}^{(0,m_2+1,m_1+m_2+1)}(k_1+1, k_2+1, k_3) - (1-q^{m_2}) c_{21}^{(0,m_2,m_1+m_2)}(k_1, k_2, k_3). \tag{3.2.9}$$

Предложение 3.2.9. *Пусть δ_i – как в Предложении 3.2.7 и предположим, что $\lambda_{n-s+i} = \lambda_{n-s+i+1}$. Тогда:*

$$c_{(a_{n-s+1},\dots,a_{n-s+i},a_{n-s+i+1},\dots,a_n)}^{0,\dots,0,\lambda_{n-s+1}+1,\dots,\lambda_n+1}(k_1+\delta_1, \dots, k_n+\delta_n) = c_{(a_{n-s+1},\dots,a_{n-s+i+1},a_{n-s+i},\dots,a_n)}^{0,\dots,0,\lambda_{n-s+1}+1,\dots,\lambda_n+1}(k_1+\delta_1, \dots, k_n+\delta_n).$$

Доказательство. Отметим, что

$$(a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_s)(\{b_1, \dots, b_s\}) = (a_1, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, a_s)(\{b_1, \dots, b_s\})$$

если существует j, такое что $a_i \leq b_j \leq a_{i+1}$ остающиеся после заполнения всех $s-i$ предыдущих клеток. Также отметим, что

$$(a_1,\dots,a_i,a_{i+1},\dots,a_s)(\{b_1,\dots,b_s\}) = s_i(a_1,\dots,a_{i+1},a_i,\dots,a_s)(\{b_1,\dots,b_s\})$$

где s_i – перестановка i-го и $(i+1)$-го элементов и порядок в обеих частях имеется ввиду циклическим по модулю n. Тогда с помощью индукции получаем, что Предложение 3.2.7 дает то же самое для двух рассматриваемых элементов. $\square$

Предложение 3.2.10.

$$\operatorname{ch} W_\lambda(x_1,\dots,x_n,q) = \sum c^\lambda_{s,s-1,\dots,1}(k_1+1,\dots,k_s+1,k_{s+1},\dots,k_n)x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}.$$

Доказательство. Известно (см. [S]), что $\operatorname{ch} W_\lambda(x_1,\dots,x_n,q) = E_\lambda(x;q,0)$. Вычислим $E_\lambda(x;q,0)$, используя комбинаторную формулу из [HHL]. Имеем:

$$E_\lambda(x;q,0) = \sum_\sigma x^\sigma q^{maj(\sigma)} 0^{coinv(\sigma)}.$$

Отметим, что $coinv(\sigma) \geq 0$. Действительно:

$$coinv(\sigma) = \sum_{u\in dg'} a(u) - |Inv_{\text{без нижнего ряда}}(\sigma)| + \sum_{u\in Des(\hat\sigma)} a(u).$$

Для любых двух клеток $u, u' \in l(u)$ мы имеем, что если $\sigma(u) > \sigma(u')$ и $\sigma(u') > \sigma(d(u))$, то $\sigma(u) > \sigma(d(u))$, поэтому аналогично доказательству Предложения 3.2.3 получаем $coinv(\sigma) \geq 0$ и $coinv(\sigma) = 0$, если и только если σ получается при помощи следующего обратного правила заполнения.

Предположим, что мы заполнили i-ю строку. Пусть S – множество элементов $(i+1)$-й строки. Мы заполняем $(i+1)$-ю строку диаграмы справа налево. Если S' – множество элементов S, не использованных ранее, то в клетку v мы ставим:

(i) $\max\{a\in S', a \leq \sigma(d(v))\}$, если $\{a\in S', a\leq \sigma(d(v))\} \neq \emptyset$;

(ii) $\max\{a\in S'\}$, если $\{a\in S', a\geq \sigma(d(v))\} = \emptyset$.

Тогда легко видеть, что:

$$E_\lambda(x;q,0) = \sum c^\lambda_{s,s-1,\dots,1}(k_1+1,\dots,k_s+1,k_{s+1},\dots,k_n)x_1^{k_n}\dots x_n^{k_1}.$$

Следовательно,

$$\sum c^\lambda_{s,s-1,\dots,1}(k_1+1,\dots,k_s+1,k_{s+1},\dots,k_n)x_1^{k_n}\dots x_n^{k_1} = \operatorname{ch} W_\lambda(x_1,\dots,x_n,q).$$

Но $\operatorname{ch} W_\lambda(x_1,\dots,x_n,q)$ – симметрическая функция. Поэтому мы получаем:

$$\sum c^\lambda_{s,s-1,\dots,1}(k_1+1,\dots,k_s+1,k_{s+1},\dots,k_n)x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n} = \operatorname{ch} W_\lambda(x_1,\dots,x_n,q).$$

□

3.2.4. Прокрученный случай

Рассмотрим отображения

$$\pi(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = (\lambda_n+1,\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1});$$

$$\Psi f(x_1,\dots,x_n) = x_1 f(x_2,\dots,x_n,q^{-1}x_1).$$

Тогда рекурсия Кнопа-Сахи говорит, что

$$E_{\pi(\mu)}(x;q,t) = q^{\mu_n}\Psi E_\mu(x;q,t). \tag{3.2.10}$$

Предложение 3.2.11. *Рассмотрим разбиение* $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $\lambda_1 \le \dots \le \lambda_n$, $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-s} = 0 \ne \lambda_{n-s+1}$. *Тогда*

$$E_{\pi^r\lambda}(x;q^{-1},\infty) = \sum_{k_1,\dots,k_n\ge 0} x_1^{k_1+1}\dots x_r^{k_r+1}x_{r+1}^{k_{r+1}}\dots x_n^{k_n}\times$$
$$c^{(0,\dots,0,\lambda_{n-s+1}+1,\dots,\lambda_n+1)}_{(n-s+r+1,\dots,n,1,\dots,r)}(k_1+1,\dots,k_r+1,k_{r+1},\dots,k_{n-s+r},k_{n-s+r+1}+1,\dots,k_n+1).$$

Доказательство. Это немедленное следствие Предложения 3.2.3 для разбиения $\pi^r(\lambda)$. □

Лемма 3.2.12.

$$q^{\lambda_{n-r+1}+\dots+\lambda_n-k_{n-r+1}-\dots-k_n}\times$$
$$c^{0,\dots,0,\lambda_{n-s+1}+1,\dots,\lambda_n+1}_{(n-s+r+1,\dots,n,1,\dots,r)}(k_{n-r+1}+1,\dots,k_n+1,k_1+1,\dots,k_r+1,k_{r+1},\dots,k_{n-s+r}+1) =$$
$$c^{0,\dots,0,\lambda_{n-s+1}+1,\dots,\lambda_n+1}_{(n-s+1,\dots,n)}(k_1+1,\dots,k_r+1,k_{r+1},\dots,k_{n-s+r},k_{n-s+r+1}+1,\dots,k_n+1)$$

Доказательство. Немедленное следствие уравнения (3.2.10) и Предложения 3.2.11. □

Пример 3.2.13. Рассмотрим случай $n=3$ и разбиение $\lambda = (0,m_2,m_1+m_2)$. Тогда в силу Предложения 3.2.11 имеем:

$$E_{(m_1+m_2+1,0,m_2)}(x_1,x_2,x_3;q^{-1},\infty) = x_1\sum c^\lambda_{31}(k_1,k_2,k_3)x_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3}.$$

Применяя уравнение (3.2.10), получаем

$$c^\lambda_{23}(k_1,k_2+1,k_3+1) = q^{m_1+m_2-k_3}c^\lambda_{31}(k_3+1,k_1,k_2+1).$$

3.3. Гипотеза Чередника-Орра

3.3.1. Прямоугольные диаграммы

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, $1 \le r \le n-1$. Начнем с перечисления некоторых базовых свойств $W_{m\lambda_r}$.

Предложение 3.3.1. *Предположим, что $\lambda = m\lambda_r$. Тогда:*

(1) если $i, j < n-r$ или $i, j > n-r$, то $e_{i,j} \otimes t^s w_\lambda = 0$;

(2) W_λ порождается полиномиальной алгеброй $\mathbb{C}[e_{i,j} \otimes t^s]$, $1 \le i \le n-r \le j \le n-1$, $s \ge 0$.

(3) если $i_l \le n-r \le j_l$, $1 \le l \le m$, то ПБВ-степень $e_{i_1,j_1} \otimes t^{s_1} \dots e_{i_m,j_m} \otimes t^{s_m} w_\lambda$ равна m.

Замечание 3.3.2. Часть 3 данной Леммы может быть переписана следующим образом. Пусть W_λ – модуль Вейля, $\lambda = m\omega_r$. Тогда модуль W_λ (не только W_λ^{gr}) является градуированым модулем над полиномиальной алгеброй с естественной градуировкой. Пусть $\mathrm{ch}_{W_\lambda}(x_1, \dots, x_n, q)$ – характер этого модуля. Тогда характер W_λ^{gr} равен $\mathrm{ch}_{W_\lambda}(px_1, \dots, px_k, x_{k+1}, \dots, x_n, q)$

Предположим, что диаграмма $dg'(\lambda)$ –прямоугольная длины r и высоты m. В силу Предложения 3.2.3 мы знаем, что допустимое заполнение полностью определяется m подмножествами из r элементов из $1, \dots, n$. Мы знаем, что порядок элементов в i-й строке определяет порядок элементов в $(i+1)$-й строке. В силу Предложения 3.2.9 порядок элементов $a_{n-r+1}, \dots, a_n$ в

$$c^{0,\dots,0,m+1,\dots,m+1}_{(a_{n-r+1},\dots,a_n)}(k_1 + \delta_1, \dots, k_n + \delta_n) \tag{3.3.1}$$

не имеет значения (значение имеет только множество $\{a_{n-r+1}, \dots, a_n\}$). Пользуясь Предложением 3.2.7, запишем рекуррентную формулу для (3.3.1). Например, для $r = 2$ получаем

$$\begin{aligned} c^\lambda_{ij}(k_1, \dots, k_{i-1}, k_i + 1, k_{i+1}, \dots k_{j-1}, k_j + 1, k_{j+1}, \dots, k_n) = \\ \sum_{p,q<i} c^\lambda_{pq}(k_1, \dots, k_n) q^{2m} + \sum_{p<i, q\ge i} c^\lambda_{pq}(k_1, \dots, k_n, s-m) + \\ \sum_{p\ge i, q<j} c^\lambda_{pq}(k_1, \dots, k_n, s-m) + \sum_{p\ge i, q\ge j} c^\lambda_{pq}(k_1, \dots, k_n, s) \end{aligned}$$

Отметим, что для нас интересен случай $c_{n-k+1,\dots,n}$.

В силу Предложения 3.2.11 имеем:

$$E_{\pi^r(\lambda')} = x_1 \dots x_r \sum c^{\lambda}_{\{1\dots k\}}(k_1+1, \dots, k_r+1, k_{r+1}, \dots, k_n) x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}. \quad (3.3.2)$$

Отметим, что $\pi^r(\lambda) = (m, \dots, m, 0, \dots, 0)$.

Теорема 3.3.3. *Пусть* $\lambda = m\lambda_{n-s}$. *Тогда мы имеем:*

$$E_\lambda(x; q^{-1}, \infty) = \mathrm{ch}_{W^{gr}_\lambda}(x; q, q).$$

Доказательство. В силу Предложения 3.2.10 имеем:

$$\mathrm{ch}\, W_\lambda(x_1, \dots, x_n, q) = \sum c_{\{1,2,\dots,s\}}(k_1+1, \dots, k_s+1, k_{s+1}, \dots, k_n) x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}.$$

Теперь в силу Леммы 3.2.12 и симметричности характера получаем:

$$q^{sm-k_{n-s+1}-\dots-k_n} c_{\{1,2,\dots,s\}}(k_1+1, \dots, k_s+1, k_{s+1}, \dots, k_n) =$$
$$c_{\{n-s+1,\dots,n\}}(k_1, \dots, k_{n-s}, k_{n-s+1}+1, \dots, k_n+1).$$

Поэтому мы имеем:

$$\sum c_{\{n-s+1,\dots,n\}}(k_1, \dots, k_{n-s}, k_{n-s+1}+1, \dots, k_n+1) x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} =$$
$$= \sum q^{sm-k_{n-s+1}-\dots-k_n} c_{\{1,2,\dots,s\}}(k_1+1, \dots, k_s+1, k_{s+1}, \dots, k_n) x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} =$$
$$\sum c_{\{1,2,\dots,s\}}(k_1+1, \dots, k_s+1, k_{s+1}, \dots, k_n)(qx_1)^{k_1} \dots (qx_s)^{k_s} x_{s+1}^{k_{s+1}} \dots x_n^{k_n} =$$
$$\mathrm{ch}\, W_\lambda(qx_1, \dots, qx_s, x_{s+1}, \dots, x_n, q).$$

Теперь с помощью Предложения 3.3.1 завершим доказательство Теоремы. □

3.3.2. Случай веса $m_1\omega_1 + m_2\omega_{n-1}$

Пусть $\lambda = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_{n-1}$. Отметим, что для $n = 3$ это общий случай. Пусть $A = (a_1, \dots, a_{n-1})$ – строка из $n-1$ различных элементов из $1, \dots, n$, $\{1, \dots, n\} \backslash \{a_1, \dots, a_{n-1}\} = \{\tilde a\}$. Пусть s_i – перестановка i-го и $(i+1)$-го элементов. Тогда Предложение 3.2.9 говорит, что

$$c^\lambda_A(k_1+1, \dots, k_{\tilde a-1}+1, k_{\tilde a}, k_{\tilde a+1}+1, \dots, k_n+1) =$$
$$c^\lambda_{s_iA}(k_1+1, \dots, k_{\tilde a-1}+1, k_{\tilde a}, k_{\tilde a+1}+1, \dots, k_n+1),$$

для $1 \le i \le n-3$. Поэтому единственными существенными параметрами являются $\tilde a$ и a_{n-1}. Обозначим соответствующую функцию через $c^\lambda_{\tilde a|a_{n-1}}(k_1, \dots, k_n)$.

Предложение 3.3.4. *Предположим, что* $\lambda = m_1\omega_1 + m_2\omega_{n-1}$. *Тогда:*

$$\operatorname{ch} W_\lambda(x,q) =$$

$$= \sum_{k_i \geq 0} \sum_{\substack{p_i + \sum_{\alpha \neq i} l_\alpha = k_i, \\ l_1 + \cdots + l_n = m_2, \\ p_1 + \cdots + p_n = m_1}} q^{l_1 p_1} \binom{m_2}{l_1, \ldots, l_n}_q \binom{m_1}{p_1, \ldots, p_n}_q x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}.$$

$$\operatorname{ch} W_\lambda^{gr}(x,q,q) =$$

$$= \sum_{k_i \geq 0} \sum_{\substack{p_i + \sum_{\alpha \neq i} l_\alpha = k_i, \\ l_1 + \cdots + l_n = m_2, \\ p_1 + \cdots + p_n = m_1}} q^{l_1 p_1 + l_2 + \cdots + l_n + p_1 + \cdots + p_{n-1}} \binom{m_2}{l_1, \ldots, l_n}_q \binom{m_1}{p_1, \ldots, p_n}_q x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}.$$

Доказательство. Мы построим биекцию η между элементами ПБВ-базиса для W_λ и парами строк, одна из которых длины m_1, вторая длины m_2, заполненные элементами множества $\{1, \ldots, n\}$. Запишем эти пары строк в виде $\tau = \alpha_1, \ldots, \alpha_{m_2} | \beta_1, \ldots, \beta_{m_1}$. Положим

$$\eta(\tau) = \prod_{\alpha_i = n} e_{n-1,1} \otimes t^{|\{j<i|\alpha_j = 1\}|} \prod_{i|\alpha_i \neq 1,n} e_{\alpha_i - 1,1} \otimes t^{|\{j<i|\alpha_j<\alpha_i \quad \alpha_j = n\}|}$$

$$\prod_{\beta_i = 1} e_{n-1,1} \otimes t^{|\{j<i|\alpha_j = n\}| + |\{\alpha_j = 1\}|} \prod_{i|\beta_i \neq 1,n} e_{n-1,\beta_i - 1} \otimes t^{|\{j<i|\beta_j<\beta_i \quad \beta_j = n\}|}.$$

Отметим, что для любого τ $\eta(\tau)$ удовлетворяет уравнениям (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4) и, сравнивая количества, мы получаем, что η является необходимой биекцией. Пусть $d(\tau) = \big|\{(i<j)|\alpha_i < \alpha_j < n \ \ \alpha_i = n, \alpha_j < n\}\big| + \big|\{(i<j)|\beta_i < \beta_j < n \ \ \beta_i = n, \beta_j < n\}\big| + \big|\{\alpha_i = 1, \beta_i = 1\}\big|$. Тогда по определению η мы имеем:

$$\deg_t(\eta(\tau)) = d(\tau).$$

Отметим, что $\deg_{PBW}(\eta(\tau)) = \big|\{i|\alpha_i \neq 1\}\big| + \big|\{i|\beta_i \neq n\}\big|$ и его вес – это $(k_1, \ldots, k_n)|p_i + \sum_{\alpha \neq i} l_\alpha = k_i$, где $p_i = \big|\{\beta_j = i\}\big|$, $l_i = \big|\{\alpha_j = i\}\big|$.

Зафиксируем l_i и p_i. Тогда сумма $q^{d(\tau)}$ для данных элементов равняется $q^{l_1 p_1} \binom{m_2}{l_1, \ldots, l_n}_q \binom{m_1}{p_1, \ldots, p_n}_q$. Действительно, последнее слагаемое в определении $d(\tau)$ – это $l_1 p_1$ и по определению q-биномиального коэффициента:

$$\binom{m_2}{l_1, \ldots, l_n}_q = \sum q^{\left|\{i<j|\alpha_i<\alpha_j<n \quad \alpha_i = n, \alpha_j < n\ \}\right|}.$$

$$\binom{m_1}{p_1,\ldots,p_n}_q = \sum q^{\left|\{i<j|\beta_i<\beta_j<n \quad \beta_i=n,\beta_j<n \ \}\right|}.$$

Аналогично получаем второе уравнение Леммы. Этим доказательство Леммы завершено. □

Теорема 3.3.5. *Гипотеза Чередника-Орра верна для* $\lambda = m_1\omega_1 + m_2\omega_{n-1}$

Доказательство. В силу Предложения 3.2.10 имеем:

$$c_{n|1}^{(0,m_2+1,\ldots,m_2+1,m_2+m_1+1)}(k_1+1,\ldots,k_{n-1}+1,k_n) =$$

$$= \sum_{p_i+\sum_{\alpha\neq i} l_\alpha=k_i, l_1+\cdots+l_n=m_2, p_1+\cdots+p_n=m_1} q^{l_1p_1}\binom{m_2}{l_1,\ldots,l_n}_q \binom{m_1}{p_1,\ldots,p_n}_q.$$

В силу Предложения 3.2.7 имеем:

$$c_{j|1}^{(0,m_2+1,\ldots,m_2+1,m_2+m_1+1)}(k_1+1,\ldots,k_{j-1}+1,k_j,k_{j+1}+1,\ldots,k_n+1) =$$

$$\sum_{i=2}^{j} c_{i|1}^{\lambda}(k_1,\ldots k_n) + \sum_{i=j+1}^{n} c_{i|1}^{\lambda}(k_1,\ldots k_n)t^{m_2} + c_{1|2}^{\lambda}(k_1,\ldots k_n); j\geq 2$$

Подставляя два этих уравнения в два последовательных j, получаем:

$$c_{j|1}^{(0,m_2+1,\ldots,m_2+1,m_2+m_1+1)}(k_1+1,\ldots,k_{j-1}+1,k_j,k_{j+1}+1,\ldots,k_n+1) =$$

$$= c_{j+1|1}^{(0,m_2+1,\ldots,m_2+1,m_2+m_1+1)}(k_1+1,\ldots,k_j+1,k_{j+1},k_{j+2}+1,\ldots,k_n+1)-$$

$$-(1-t^{m_2})c_{j+1|1}^{\lambda}(k_1,\ldots,k_n).$$

Утверждается, что

$$c_{j|1}^{(0,m_2+1,\ldots,m_2+1,m_2+m_1+1)}(k_1+1,\ldots,k_{j-1}+1,k_j,k_{j+1}+1,\ldots,k_n+1) =$$

$$= \sum_{\substack{p_i+l_{i+1}+\cdots+l_n+l_1+\cdots+l_{i-1}=k_i,\\ l_1+\cdots+l_n=m_2,\\ p_1+\cdots+p_n=m_1}} q^{l_1p_1+l_{j+1}+\cdots+l_n}\binom{m_2}{l_1,\ldots,l_n}_q \binom{m_1}{p_1,\ldots,p_n}_q.$$

Действительно, мы знаем, что это правда для $j=n$ и

$$\sum_{\substack{p_i+\sum_{\alpha\neq i} l_\alpha=k_i,\\ l_1+\cdots+l_n=m_2\\ p_1+\cdots+p_n=m_1}} q^{l_1p_1+l_{j+1}+\cdots+l_n}\binom{m_2}{l_1,\ldots,l_n}_q \binom{m_1}{p_1,\ldots,p_n}_q -$$

$$-(1-q^{m_2})\sum_{\substack{p_i+\sum_{\alpha\neq i} l_\alpha=k_i-1, i\neq j,\\ p_j+\sum_{\alpha\neq j} l_\alpha=k_j\\ ,l_1+\dots+l_n=m_2-1,\\ p_1+\dots+p_n=m_1}} q^{l_1p_1+l_{j+1}+\dots+l_n}\binom{m_2}{l_1,\dots,l_n}_q\binom{m_1}{p_1,\dots,p_n}_q=$$

$$=\sum_{\substack{p_i+\sum_{\alpha\neq i} l_\alpha=k_i,\\ l_1+\dots+l_n=m_2,\\ p_1+\dots+p_n=m_1}}\Bigg(q^{l_1p_1+l_{j+1}+\dots+l_n}\binom{m_2}{l_1,\dots,l_n}_q\binom{m_1}{p_1,\dots,p_n}_q-$$

$$-(1-q^{m_2})q^{l_1p_1+l_{j+1}+\dots+l_n}\binom{m_2-1}{l_1,\dots,l_{j-1},l_j-1,l_{j+1},\dots,l_n}_q\binom{m_1}{p_1,\dots,p_n}_q\Bigg)=$$

$$=\sum_{\substack{p_i+\sum_{\alpha\neq i} l_\alpha=k_i,\\ l_1+\dots+l_n=m_2,\\ p_1+\dots+p_n=m_1}} q^{l_1p_1+l_{j+1}+\dots+l_n+l_j}\binom{m_2}{l_1,\dots,l_n}_q\binom{m_1}{p_1,\dots,p_n}_q$$

В частности, получаем:

$$c_{2|1}^{(0,m_2+1,\dots,m_2+1,m_2+m_1+1)}=$$

$$=\sum_{\substack{p_i+\sum_{\alpha\neq i} l_\alpha=k_i,\\ l_1+\dots+l_n=m_2,\\ p_1+\dots+p_n=m_1}} q^{l_1p_1+l_3+\dots+l_n}\binom{m_2}{l_1,\dots,l_n}_q\binom{m_1}{p_1,\dots,p_n}_q.$$

Но в силу Леммы 3.2.12 имеем:

$$c_{1|n}^{(0,m_2+1,\dots,m_2+1,m_2+m_1+1)}(k_1,k_2+1,\dots,k_n+1)=$$

$$=q^{m_2+m_1-k_n}\cdot$$

$$\cdot c_{2|1}^{(0,m_2+1,\dots,m_2+1,m_2+m_1+1)}(k_n+1,k_1,k_2+1,\dots,k_{n-1}+1)=$$

$$=\sum_{\substack{p_i+\sum_{\alpha\neq i} l_\alpha=k_{i-1 (mod n)},\\ l_1+\dots+l_n=m_2,\\ p_1+\dots+p_n=m_1}} q^{l_1p_1+l_3+\dots+l_n+p_2+\dots+p_n+l_1}\binom{m_2}{l_1,\dots,l_n}_q\binom{m_1}{p_1,\dots,p_n}_q.$$

Сейчас видим, что мы получаем в точности коэффициент при $x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}$ в формуле для ПБВ-характера из Леммы 3.3.4. $\square$

Глава 4

Связь супералгебр $\mathfrak{osp}(1,2)$ и многочленов Макдональда-Коорнвиндера

Перейдем теперь к супералгебрам. В общем случае непонятно, что нужно называть модулями Демазюра для супералгебр. Однако модули Вейля могут быть определены (см., например, [CLS]). Поэтому можно поставить три естественных вопроса. Первый – это вычислить характеры модулей Вейля для аффинных супералгебр и найти связь с некоторыми супераналогами несимметрических многочленов Макдональда. Второй – определить, существует ли в некотором смысле предел модулей Вейля при растущих весах. Мы рассматриваем модули над самой простой супералгеброй $\mathfrak{osp}(1,2) \otimes \mathbb{C}[t]$. Модули Вейля в этом случае параметризуются целыми числами $n \in \mathbb{N}$; мы обозначаем соответствующий $\mathfrak{osp}(1,2) \otimes \mathbb{C}[t]$ модуль как W_{-n}. Мы доказываем следующую Теорему.

Теорема 4.0.1. *W_{-n} как $\mathfrak{osp}(1,2)$-модуль изоморфен тензорному произведению n копий 3-мерного неприводимого $\mathfrak{osp}(1,2)$-модуля. Более того, структура $\mathfrak{osp}(1,2) \otimes \mathbb{C}[t]$-модуля получается с помощью конструкции градуированного тензорного произведения (фъэжен-произведения).*

Мы показываем, что W_{-n} может быть профильтрован модулями Вейля $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t]$. Это позволяет нам построить базисы и вычислить характеры W_{-n}. Нашей следующей целью является описание связи между модулями Вейля и некоторыми несимметрическими полиномами Макдональда ([Ch1, Ch2]). С помощью формулы Рама-Йип для несимметрических многочленов Макдональда (см. [RY, OS]), мы доказываем следующую Теорему.

Теорема 4.0.2. *Пусть $E_{-n}^{A_2^{(2)\dagger}}(x,q,t)$ – несимметрический многочлен Макдональда типа $A_2^{(2)\dagger}$. Тогда характер W_{-n} задается как $E_{-n}^{A_2^{(2)\dagger}}(x,q,0)$ и специализация $E_{-n}^{A_2^{(2)\dagger}}(x,q,\infty)$ совпадает с ПБВ-подкрученным характером W_{-n}.*

Далее, алгебра токов для $\mathfrak{osp}(1,2)$ имеет скрученный аналог $\mathfrak{osp}(1,2)[t]^\sigma$. Мы также исследуем все вышеназванные вопросы в этом скрученном случае. В частности, мы определим связь с несимметрическими полиномами Макдональда типа $A_2^{(2)}$. Отметим, что обе алгебры $\mathfrak{osp}(1,2)[t]$ и $\mathfrak{osp}(1,2)[t]^\sigma$ являются параболическими подалгебрами аффинной алгебры $\widehat{\mathfrak{osp}(1,2)}$.

Кроме того, и в скрученном, и в нескрученном случае мы определим версию модулей Вейля W_n для положительного n. И в этом случае мы определим связь с полиномами Макдональда.

Далее, мы покажем, что существует вложение $\mathfrak{osp}(1,2)\otimes\mathbb{C}[t]$-модулей $W_{-n}\subset W_{-n-1}$ и вычислим характер предела этих модулей по данным вложениям. Отметим, что мы не знаем, есть ли структура представления большей алгебры на данном пределе.

В вопросах, связанных с полиномами Макдональда мы применяем методы, близкие к методам статьи [OS]. В параграфе 4.4 мы опишем наиболее важные для нас аспекты подхода Орра и Шимозоно.

4.1. Модули Вейля

4.1.1. Классический случай

Пусть D_{-n}, $n\geq 0$ – модуль Вейля над алгеброй токов $\mathfrak{sl}_2[t]=\mathfrak{sl}_2\otimes\mathbb{C}[t]$. Он определяется как циклический модуль с циклическим вектором d_{-n}, удовлетворяющий соотношениям

$$hd_{-n}=-nd_{-n},\ f\otimes\mathbb{C}[t].d_{-n}=0,\ h\otimes t\mathbb{C}[t].d_{-n}=0, e^{n+1}.d_{-n}=0.$$

где e,h,f образуют стандартный базис $\mathfrak{sl}_2$. Об этих модулях известно, что они 2^n-мерны с мономиальным базисом

$$e_{a_1}\dots e_{a_k}d_{-n},\ 0\leq a_1\leq\dots\leq a_k\leq n-k, e_a=e\otimes t^a.$$

Для градуированного векторного пространства $M=\bigoplus_{s\geq 0}M_s$ с действием оператора h определим характер $\mathrm{ch}M(x,q)$ как $\sum_{s\geq 0}q^s\mathrm{tr}(x^h|_{M_s})$. Характер D_{-n} равен $\sum_{k=0}^n x^{-n+2k}\binom{n}{k}_q$, где q-биномиальные коэффициенты определяются формулой

$$\binom{n}{m}_q=\frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}{(1-q)\dots(1-q^m)(1-q)\dots(1-q^{n-m})}.$$

О модулях D_{-n} известно, что они изоморфны градуированному тензорному произведению (фьюжен-произведению [FeLo1]) n копий стандартного

2-мерного $\mathfrak{sl}_2$-модуля. Более того, D_{-n} изоморфен модулю Демазюра в представлении уровня 1 аффинной алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$. В частности, существуют вложения $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t]$-модулей

$$D_0 \subset D_{-2} \subset D_{-4} \subset \dots, \qquad D_{-1} \subset D_{-3} \subset D_{-5} \subset \dots$$

и индуктивный предел изоморфен интегрируемому $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$-модулю уровня 1. Мы имеем точные формулы для характеров этих модулей:

$$\mathrm{ch} \lim_{n\to\infty} D_{-2n} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x^{2k} \frac{q^{k^2}}{(q)_\infty}, \ \mathrm{ch} \lim_{n\to\infty} D_{-2n-1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x^{2k+1} \frac{q^{k(k+1)}}{(q)_\infty}.$$

4.1.2. Модули Вейля над супералгебрами

Первоисточник приведенных ниже определений – в статьях [P, Mus1, Mus2]. Супералгебра Ли $\mathfrak{osp}(1,2)$ изоморфна прямой сумме $\mathfrak{sl}_2 \oplus \pi_1$, где $\mathfrak{sl}_2$ – четная часть и двумерный $\mathfrak{sl}_2$-модуль π_1 в нечетной части. Пусть e, h, f – стандартный базис $\mathfrak{sl}_2$ и пусть g^+, g^- – базис π_1. Имеем следующие нетривиальные коммутационные соотношения:

$$[e,f] = h, \ [h,e] = 2e, \ [h,f] = -2f,$$
$$[h,g^+] = g^+, \ [h,g^-] = -g^-, \ [g^+,g^-]_+ = h,$$
$$[g^+,g^+]_+ = 2e, \ [g^-,g^-]_+ = -2f, \ [f,g^+] = g^-, \ [e,g^-] = -g^+.$$

Имеем разложение Картана

$$\mathfrak{osp}(1,2) = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+, \ \mathfrak{n}^- = \mathrm{span}(f,g^-), \ \mathfrak{n}^+ = \mathrm{span}(e,g^+), \ \mathfrak{h} = span(h).$$

Рассмотрим алгебру токов $\mathfrak{osp}(1,2)[t] = \mathfrak{osp}(1,2) \otimes \mathbb{C}[t]$, ее модуль Вейля W_{-n} определен как циклический модуль с образующей w_{-n} и соотношениями

$$(\mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h}) \otimes t\mathbb{C}[t].w_{-n} = 0, \quad (\mathfrak{n}^- \otimes 1).w_{-n} = 0,$$
$$h_0.w_{-n} = -nw_{-n}, \quad (e\otimes 1)^{n+1}.w_{-n} = 0.$$

Для $x \in \mathfrak{osp}(1,2)$ обозначим через $x_i \in \mathfrak{osp}(1,2)[t]$ элемент $x \otimes t^i$.

Лемма 4.1.1. *Имеем $\mathfrak{osp}(1,2) \otimes t^n\mathbb{C}[t].w_{-n} = 0$ и W_{-n} порожден мономами вида*

$$e_{a_1} \dots e_{a_s} g^+_{b_1} \dots g^+_{b_k} w_{-n}, \tag{4.1.1}$$
$$0 \le b_1 < \dots < b_k \le n-1, \ 0 \le a_1 \le \dots \le a_s \le n-k-s.$$

Доказательство. Условия $\mathfrak{sl}_2 \otimes t^n\mathbb{C}[t]w_{-n} = 0$ следуют из результатов о модулях Вейля над $\mathfrak{sl}_2$ (см., например [CL]). Теперь, если $e_i w_{-n} = 0$, то $g_0^- e_i w_{-n} = g_i^+ w_{-n} = 0$ и аналогично для $g_i^- w_{-n}$.

Отметим, что в силу $[g_i^+, g_j^+]_+ = 2e_{i+j}$, мы имеем

$$W_{-n} = \sum_{0\le b_1<\dots<b_k\le n-1} U(\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t]) g_{b_1}^+ \dots g_{b_k}^+ w_{-n}.$$

Определим частичный порядок на мономах $g_{b_1}^+ \dots g_{b_k}^+$, $0 \le b_1 < \dots < b_k \le n-1$, говоря, что для двух различных мономов $g_{b_1}^+ \dots g_{b_k}^+ < g_{c_1}^+ \dots g_{c_l}^+$ если $k < l$ или ($k = l$ и $b_i \ge c_i$, $i = 1, \dots, k$). Определим полный порядок на мономах $g_{b_1}^+ \dots g_{b_k}^+$, $0 \le b_1 < \dots < b_k \le n-1$ как $m_1, m_2, \dots, m_N$ таким образом, что если $i < j$, то $m_i < m_j$ (в смысле вышеописанного частичного порядка).

Определим теперь возрастающую фильтрацию F_i на W_{-n} как

$$F_i = \sum_{j=1}^{i} U(\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t]) m_i w_{-n}.$$

Мы утверждаем, что мономы (4.1.1) порождают ассоциированное градуированное пространство $\mathrm{gr}F_\bullet$. Действительно, пусть $\overline{m_i w_{-n}}$ – образ $m_i w_{-n}$ в ассоциированном градуированном пространстве. Тогда для $m_i = g_{b_1}^+ \dots g_{b_k}^+$ мы имеем

$$(\mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h}) \otimes t\mathbb{C}[t].\overline{m_i w_{-n}} = 0,\ (\mathfrak{n}^- \otimes 1).\overline{m_i w_{-n}} = 0,\ (h \otimes 1).\overline{m_i w_{-n}} = -(n+k) w_{-n}.$$

Поэтому условия на модуль Вейля над $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t]$ с младшим весом $-n+k$ влекут за собой утверждение Леммы. □

Лемма 4.1.2. *Количество элементов множества* (4.1.1) *равняется* 3^n *и их характер равняется*

$$\sum_{k=0}^{n} q^{k(k-1)/2} \binom{n}{k}_q \sum_{s=0}^{n-k} x^{-n+k+2s} \binom{n-k}{s}_q.$$

Доказательство. Прямое вычисление. □

Теперь приведем скрученный аналог предыдущей Леммы. Мы заменяем алгебру $\mathfrak{osp}(1,2)[t]$ ее скрученным аналогом

$$\mathfrak{osp}(1,2)[t]^\sigma = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathfrak{sl}_2 \otimes t^{2i} \oplus \bigoplus_{i=0}^{\infty} \pi_1 \otimes t^{2i+1}.$$

Это – тоже супералгебра Ли. Мы определяем ее модуль Вейля W^σ_{-n} как циклический интегрируемый относительно $\mathfrak{sl}_2$ модуль с циклическим вектором w^σ_{-n}, удовлетворяющим соотношениям

$$f_{2i}.w^\sigma_{-n} = 0,\ g^-_{2i+1}.w^\sigma_{-n} = 0,\ h_{2i+2}.w^\sigma_{-n} = 0,\ \text{для } i \geq 0$$

и $h_0.w^\sigma_{-n} = -nw^\sigma_{-n}$, $e_0^{n+1}.w_{-n} = 0$.

Лемма 4.1.3. *Имеем $\mathfrak{sl}_2 \otimes t^{2n}\mathbb{C}[t^2].w_{-n} = 0$ и $\pi_1 \otimes t^{2n+1}\mathbb{C}[t^2].w_{-n} = 0$. W^σ_{-n} порождена мономами вида*

$$e_{a_1} \dots e_{a_s} g^+_{b_1} \dots g^+_{b_k} w_{-n}, \tag{4.1.2}$$
$$1 \leq b_1 < \dots < b_k \leq 2n-1,\ 0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_s \leq 2(n-k-s),$$

где a_i – четные и b_j – нечетные.

Лемма 4.1.4. *Количество элементов множества (4.1.2) равняется 3^n и их характер равен*

$$\sum_{k=0}^{n} q^{k^2} \binom{n}{k}_{q^2} \sum_{s=0}^{n-k} x^{-n+k+2s} \binom{n-k}{s}_{q^2}.$$

4.1.3. Градуированное тензорное произведение для супералгебр

Начнем с нескрученного случая.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar 0} \oplus \mathfrak{g}_{\bar 1}$ – супералгебра Ли с $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ – четной частью $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ – нечетной частью. Для $\mathfrak{g}$-модуля X обозначим как $X_{\bar 0}$ его четную часть и как $X_{\bar 1}$ его нечетную часть. Пусть V и W – циклические $\mathfrak{g}$-модули с циклическими векторами v и w; в дальнейшем мы всегда считаем циклические векторы четными. Тензорное произведение V и W определяется формулой

$$g(x \otimes y) = gx \otimes y + (-1)^{ab} x \otimes gy,\ g \in \mathfrak{g}_{\bar a}, x \in V_{\bar b}.$$

Пусть $z_1, \dots, z_n$ – набор попарно различных комплексных чисел и $V^1, \dots, V^n$ – циклические представления $\mathfrak{g}$ с циклическими векторами $v^1, \dots, v^n$. Пусть $V^i(z_i)$ – представления $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]$, где $x \otimes t^k$ действует как $z_i^k x$.

Лемма 4.1.5. *Тензорное произведение $\bigotimes_{i=1}^n V^i(z_i)$ – циклический $\mathfrak{g}[t]$-модуль с циклическим вектором $\otimes_{i=1}^n v^i$.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{g}_{\bar 0}$. Тогда оператор $x \otimes t^k$ действует на тензорном произведении $\bigotimes V^i(z_i)$ как на обычном тензорном произведении модулей над алгебрами Ли. Поэтому все операторы

$$x(i) = \underbrace{\mathrm{Id} \otimes \ldots \mathrm{Id}}_{i-1} \otimes x \otimes \mathrm{Id} \otimes \ldots \mathrm{Id}$$

на $\bigotimes_{i=1}^n V^i(z_i)$ могут быть записаны как линейные комбинации операторов $x \otimes t^k$ (определитель Вандермонда).

Теперь предположим, что $x \in \mathfrak{g}_{\bar 1}$. Тогда имеем

$$\begin{gathered}(x \otimes t^k)(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) = \\ (z_1^k x(1) + z_2^k (-1)^{\deg u_1} x(2) + \cdots + z_n^k (-1)^{\deg u_1 + \cdots + \deg u_{n-1}} z_n^k x(n))(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n).\end{gathered}$$

Поэтому для любого $i = 1, \ldots, n$ оператор $(-1)^{\deg u_1 + \cdots + \deg u_{i-1}} x(i)$ может быть представлен как линейная комбинация операторов $x \otimes t^j$, $0 \leq j \leq n-1$ (случай $i = 1$ соответствует именно $x(1)$). Следовательно, операторы $x \otimes t^j$, $0 \leq j \leq n-1$ порождают все тензорное произведение $\bigotimes_{i=1}^n V^i(z_i)$, действуя на тензорном произведении циклических векторов. $\square$

Универсальная обертывающая алгебры $U(\mathfrak{g}[t])$ имеет естественную градуировку, определенную степенью по t, $U(\mathfrak{g}[t]) = \bigoplus_{s \geq 0} U(\mathfrak{g}[t])_s$ (например, $U(\mathfrak{g}[t])_0 = U(\mathfrak{g})$). Определим возрастающую фильтрацию F_s на тензорном произведении $\bigotimes_{i=1}^n V^i(z_i)$ следующим образом:

$$F_s = U(\mathfrak{g}[t])_s (v^1 \otimes \cdots \otimes v^n).$$

Ассоциированное градуированное пространство является циклическим $U(\mathfrak{g}[t])$-модулем. Важное свойство – этот модуль допускает еще одну, дополнительную градуировку. Мы обозначим этот градуированный модуль как $V^1(z_1) * \cdots * V^n(z_n)$.

Пусть V – интегрируемое трехмерное представление $\mathfrak{osp}(1,2)$.

Теорема 4.1.6. *Для любых попарно различных $z_1, \ldots, z_n$ градуированное тензорное произведение $V(z_1) * \cdots * V(z_n)$ изоморфно модулю Вейля W_{-n} как $\mathfrak{osp}(1,2)[t]$-модуль.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что все соотношения, определяющие модуль Вейля, выполняются на градуированном тензорном произведении. Поэтому мы имеем сюръекцию $W_{-n} \to V(z_1) * \cdots * V(z_n)$. Поскольку размерность правой части равняется 3^n и она совпадает с оценкой сверху для левой части (см. Лемму 4.1.2), эта сюръекция является на самом деле изморфизмом. $\square$

Следствие 4.1.7. *Градуированное тензорное произведение $V(z_1)*\dots*V(z_n)$ не зависит (как $\mathfrak{osp}(1,2)[t]$-модуль) от (попарно различных) параметров z_i.*

Следствие 4.1.8. *Векторы (4.1.1) образуют базис модуля Вейля W_{-n}.*

Рассмотрим теперь скрученную алгебру $\mathfrak{osp}(1,2)[t]^\sigma$. Для комплексного числа z определим трехмерный $\mathfrak{osp}(1,2)[t]^\sigma$-модуль $V^\sigma(z)$ той же формулой, что и раньше. Мы имеем следующую Теорему.

Теорема 4.1.9. *Предположим, что числа $z_1,\dots,z_n$ удовлетворяют условиям $z_i^2\neq z_j^2$ для $i\neq j$. Тогда градуированное тензорное произведение $V^\sigma(z_1)*\dots*V\sigma(z_n)$ корректно определено и изоморфно модулю Вейля W_{-n}^σ как $\mathfrak{osp}(1,2)[t]$-модуль.*

Доказательство. Единственное отличие от нескрученного случая – это условие $z_i^2\neq z_j^2$, которое гарантирует цикличность действия на тензорном произведении в скрученном случае. $\square$

Следствие 4.1.10. *Градуированное тензорное произведение $V^\sigma(z_1)*\dots*V^\sigma(z_n)$ не зависит (как $\mathfrak{osp}(1,2)[t]^\sigma$-модуль) от параметров z_i, удовлетворяющих условиям $z_i^2\neq z_j^2$ для всех $i\neq j$. Векторы (4.1.2) образуют базис модуля Вейля W_{-n}^σ.*

4.1.4. Случай положительного n

В этом подразделе мы определяем модули W_n для $n>0$. Для начала рассмотрим нескрученный случай.

Определим векторы $w_n=e_0^n w_{-n}\subset W_{-n}$. Отметим, что существует симметрия (действие группы Вейля для A_1) на W_{-n}, переставляющая e и f с g^+ и g^-. Эта симметрия отправляет w_{-n} в w_n. Поэтому, модуль W_{-n} допускает базис вида

$$f_{a_1}\dots f_{a_s}g^-_{b_1}\dots g^-_{b_k}w_n,\ 0\le b_1<\dots<b_k\le n-1,\ 0\le a_1\le\dots\le a_s\le n-k-s. \tag{4.1.3}$$

Пусть $W_n=U(\mathfrak{n}^-\otimes t\mathbb{C}[t]).w_n\subset W_{-n}$, тогда W_n – модуль над сдвинутой борелевской подалгеброй, порожденной g_1^- и g_0^+. Другими словами, модуль W_n порождается из вектора w_n действием операторов f_i и g_i^-, $i>0$.

Предложение 4.1.11. $\dim W_n = 3^{n-1}$. *Векторы*

$$f_{a_1}\dots f_{a_s}g^-_{b_1}\dots g^-_{b_k}w_{-n}, \tag{4.1.4}$$
$$1\le b_1<\dots<b_k\le n-1,\ 1\le a_1\le\dots\le a_s\le n-s-k$$

образуют базис W_n.

Доказательство. Векторы (4.1.4) принадлежат базису модуля W_{-n} и поэтому они линейно независимы. Мы знаем, что для 2^{n-k}-мерного модуля Вейля над $\mathfrak{sl}_2$ часть, порожденная $f_1, f_2, \dots$, имеет вид $f_{a_1}\dots f_{a_s}$, где $1\le a_1\le\dots\le a_s\le n-s-k$. Теперь, используя фильтрацию из доказательства Леммы 4.1.1, получаем, что (4.1.4) является в точности базисом. □

Следствие 4.1.12. *Характер модуля* W_n *равен*

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^{k(k+1)/2}\binom{n-1}{k}_q \sum_{s=0}^{n-k-1} x^{n-k-2s}q^s\binom{n-k-1}{s}_q.$$

Теперь рассмотрим скрученный случай. Определим вектор $w_n^\sigma = e_0^n w^\sigma_{-n}\subset W^\sigma_{-n}$. Пусть

$$W_n^\sigma = U((\mathfrak{osp}(1,2)\otimes t\mathbb{C}[t])^\sigma).w_n^\sigma\subset W_{-n},$$

т. е. W_n^σ – циклический модуль над сдвинутой борелевской подалгеброй, порожденный g_1^- и e_0. Модуль W_n^σ порождается из вектора w_n действием операторов f_i, $i=2,4,\dots,2n-2$ и g_i^-, $i=1,3,\dots,2n-1$.

Предложение 4.1.13. $\dim W_n = 2\cdot 3^{n-1}$. *Векторы*

$$f_{a_1}\dots f_{a_s}g^-_{b_1}\dots g^-_{b_k}w_n^\sigma, \tag{4.1.5}$$
$$1\le b_1<\dots<b_k\le 2n-3,\ 2\le a_1\le\dots\le a_s\le 2(n-s-k)$$

и

$$f_{a_1}\dots f_{a_s}g^-_{b_1}\dots g^-_{b_{k-1}}g^-_{2n-1}w_n^\sigma, \tag{4.1.6}$$
$$1\le b_1<\dots<b_{k-1}\le 2n-3,\ 0\le a_1\le\dots\le a_s\le 2(n-s-k).$$

образуют базис W_n^σ.

Доказательство. Для начала докажем, что элементы (4.1.6) принадлежат W_n^σ (это очевидно для (4.1.5), но не для (4.1.6)). Единственная проблема – с оператором f_0, определенным уравнением (4.1.6). Однако он всегда приходит умноженным на g_{2n-1}^-. Следовательно, нам нужно только проверить, что $f_0^m g_{2n-1}^- w_n \in W_n^\sigma$ для всех $m > 0$. Для начала, отметим, что из весовых соображений $f_0^n g_{2n-1}^- w_n = 0$. Далее, достаточно доказать утверждение только для $m = n-1$, так как W_n^σ – e_0-инвариантен. Векторы $f_0^{n-1} g_{2n-1}^- w_n$ пропорциональны векторам $f_2^{n-1} g_1^- w_n$. Действительно, так как векторные пространства, содержащие оба вектора, одномерны, нам требуется только доказать, что $f_2^{n-1} g_1^- w_n \neq 0$. Предположим, что эти векторы обнуляются. Тогда $e_0^{n-1} f_2^{n-1} g_1^- w_n = 0$. Однако, с точностью до ненулевой константы, этот вектор равен вектору $g_{2n-1}^- w_n$, который не зануляется.

Так что мы знаем, что все векторы (4.1.5) и (4.1.6) принадлежат W_n^σ. Мы также знаем, что они – линейно независимы, потому что они принадлежат базису (4.1.2) всего пространства W_{-n}^σ. Поскольку множества (4.1.5) и (4.1.6) содержат $2 \cdot 3^{n-1}$ элементов, нам остается показать, что размерность $W_{-n}^\sigma / W_n^\sigma \geq 3^{n-1}$. Мы знаем, что соотношения в W_{-n}^σ порождаются соотношением $e_0^{n+1} w_{-n}$. Так как вектор $e_0^n w_{-n}$ тривиален в факторе, мы получаем, что

$$\dim W_{-n}^\sigma / W_n^\sigma \geq \dim W_{-n+1}^\sigma = 3^{n-1}.$$

□

Следствие 4.1.14. *Характер W_n^σ равен*

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^{k^2} \binom{n-1}{k}_{q^2} \sum_{s=0}^{n-k-1} x^{n-k-2s} q^{2s} \binom{n-k-1}{s}_{q^2} + \\ x^{-1} q^{2n-1} \sum_{k=0}^{n-1} q^{k^2} \binom{n-1}{k}_{q^2} \sum_{s=0}^{n-k-1} x^{n-k-2s} \binom{n-k-1}{s}_{q^2}.$$

4.1.5. Переход к пределу

В этом подразделе мы рассмотрим пределы $n \to \infty$ модулей W_{-n} и W_{-n}^σ.

Лемма 4.1.15. *Для $n > 0$ существуют вложения $\mathfrak{osp}(1,2)[t]$-модулей $W_{-n} \to W_{-n-1}$, определенные следующим образом: $w_{-n} \mapsto g_n^+ w_{-n-1}$.*

Доказательство. Для начала покажем, что вектор $g_n^+ w_{-n-1}$ удовлетворяет условиям обнуления для циклического вектора из W_{-n}. Действительно, $h_0 g_n^+ w_{-n-1} = -n g_n^+ w_{-n-1}$. Теперь, для $x \in \mathfrak{n}^-$ и $k \geq 0$ имеем $x_k g_n^+ w_{-n-1} = 0$, потому что $x_k w_{-n-1} = 0$, и $[x_k, g_n^+] w_{-n-1} = 0$, потому что

$$[x_k, g_n^+] \subset (\mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h}) \otimes t\mathbb{C}[t] \oplus \mathbb{C}g^+ \otimes t^n \mathbb{C}[t].$$

Далее, для $k > 0$ $h_k g_n^+ w_{-n-1} = 0$, потому что $[h_k, g_n^+] = g_{n+k}^+$. Мы утверждаем, что существует сюръективный гомоморфизм $\mathfrak{osp}(1,2)[t]$-модулей $W_{-n} \to U(\mathfrak{osp}(1,2)[t]) g_n^+ w_{-n-1}$.

Далее, мы утверждаем, что $\dim U(\mathfrak{osp}(1,2)[t]) g_n^+ w_{-n-1} \geq 3^n$. Действительно, векторы

$$e_{a_1} \dots e_{a_s} g_{b_1}^+ \dots g_{b_k}^+ g_n^+ w_{-n-1}$$

с $0 \leq b_1 < \dots < b_k \leq n-1$ и $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_s \leq n-k-s$ – линейно независимы, так как принадлежат множеству базисных векторов (4.1.1) (с $n+1$ вместо n). Количество этих элементов равняется 3^n. □

Пусть $L = \lim_{n\to\infty} W_{-n}$ – $\mathfrak{osp}(1,2)[t]$-модуль, полученный вложениями из Леммы 4.1.15. Мы определяем характер L следующим образом:

$$\operatorname{ch} L(x,q) = \lim_{n\to\infty} q^{n(n-1)/2} \operatorname{ch} W_{-n}(x, q^{-1}).$$

Наша ближайшая цель – вычислить характер L. Следующая лемма хорошо известна (см., например [A]).

Лемма 4.1.16. $\sum_{k\geq 0} \frac{q^{k(k-1)/2}}{(q)_k} x^k = \prod_{i=0}^{\infty} (1 + q^i x)$.

Теорема 4.1.17. $\operatorname{ch} L(x,q) = \prod_{i=0}^{\infty} (1 + q^i x) \prod_{i=0}^{\infty} (1 + q^i x^{-1})$.

Доказательство. Напомним, что (4.1.1) образуют базис пространства W_{-n}. Пусть $l_0(n) \in W_{-n}$ – вектор $g_0^+ g_1^+ \dots g_{n-1}^+ w_{-n}$. Отметим, что вложение $W_{-n} \to W_{-n-1}$ отправляет $l_0(n)$ в $l_0(n+1)$. Поэтому в пределе мы получаем вектор $l_0 = \lim_{n\to\infty} l_0(n) \in L$. Отметим, что слагаемое в характере L, соответствующее l_0 – это $1 (= x^0 q^0)$. Параметризуем элементы множества $g_{b_1}^+ \dots g_{b_k}^+ w_{-n}$, $0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_k \leq n-1$ в предельном пространстве L множеством

$$g_{-c_1}^- \dots g_{-c_k}^- l_0, \ 0 \leq c_1 < \dots < c_k$$

(несмотря на то, что у нас нет операторов с отрицательной степенью по t). Тогда мы получаем базим L в виде

$$e_{a_1}\dots e_{a_s}g^-_{-c_1}\dots g^-_{-c_k}l_0,\ 0\le c_1<\dots<c_k,\ 0\le a_1\le\dots\le a_s\le k-s. \quad (4.1.7)$$

Характер базисных векторов (4.1.7) с фиксированными k и s равен

$$x^{-k+2s}\frac{q^{k(k-1)/2}}{(q)_k}\binom{k}{s}_{q^{-1}}=\frac{x^{-k+2s}q^{k(k-1)/2-k(s-k)}}{(q)_s(q)_{k-s}}=$$
$$\frac{q^{s(s-1)/2}x^s}{(q)_s}\times\frac{q^{(k-s)(k-s-1)/2}x^{s-k}}{(q)_{k-s}}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{ch}L(x,q)=\sum_{s\le k}\frac{q^{s(s-1)/2}x^s}{(q)_s}\times\frac{q^{(k-s)(k-s-1)/2}x^{s-k}}{(q)_{k-s}}=\prod_{i=0}^{\infty}(1+q^ix)\prod_{i=0}^{\infty}(1+q^ix^{-1})$$

(последнее равенство получаем из Леммы 4.1.16). □

Замечание 4.1.18. Отметим, что характер $\operatorname{ch}L(x,q)$ равен (нормализированной) тета-функции, деленной на η-функцию $\prod_{i\ge1}(1-q^i)$.

Теперь перейдем к скрученному случаю. Тут мы приведем скрученные аналоги наших утверждений из предыдущего случая.

Лемма 4.1.19. *Для $n>0$ существует вложение $\mathfrak{osp}(1,2)[t]^\sigma$-модулей $W^\sigma_{-n}\to W^\sigma_{-n-1}$, определенное как $w_{-n}\mapsto g^+_{2n-1}w_{-n-1}$.*

Пусть $L^\sigma=\lim_{n\to\infty}W^\sigma_{-n}$ – $\mathfrak{osp}(1,2)[t]^\sigma$-модуль. Определим характер L следующим образом:

$$\operatorname{ch}L(x,q)=\lim_{n\to\infty}q^{n^2}\operatorname{ch}W^\sigma_{-n}(x,q^{-1}).$$

Пусть $l_0(n)=g^+_1\dots g^+_{2n-1}w^\sigma_{-n}\in W^\sigma_{-n}$ и пусть $l_0=\lim_{n\to\infty}l_0(n)$.

Теорема 4.1.20. $\operatorname{ch}L^\sigma(x,q)=\prod_{i=0}^\infty(1+q^{2i+1}x)\prod_{i=0}^\infty(1+q^{2i+1}x^{-1})$.

4.2. Несимметрические полиномы Макдональда типов $A_2^{(2)}$ и $A_2^{(2)\dagger}$

Несимметрические полиномы Коорнвиндера типов $A_{2n}^{(2)}$ и $A_{2n}^{(2)\dagger}$ (см., например, [OS, H, RY]) – это рациональные функции, зависящие от параметров

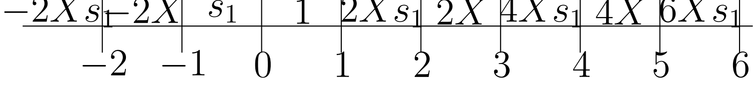
q и пяти независимых праметров алгебры Гекке v_s, v_l, v_2, v_0, v_z. Невырожденные несимметрические полиномы Макдональда типов A_2^{2n} ($A_2^{2n\dagger}$ соответственно) определяются как специализации многочленов Коорнвиндера в $v_2 \mapsto 1$ ($v_z \mapsto 1$ соответственно) и равным параметрам алгебр Гекке v_i (мы их обозначаем как v). Полученные таким образом функции являются рациональными функциями от переменных $x, q, t = v^2$, Более точно, они принадлежат $\mathbb{Z}(q,t)[x]$. Мы изучаем пределы $v \to 0$ и $v \to \infty$ для $n = 1$.

4.2.1. Формула Рама-Йип для типов $A_2^{(2)}(A_2^{(2)\dagger})$

Мы вычислим специализации несимметрических многочленов Макдональда, используя методы статей [RY, OS]. Мы используем так называемые альковные прогулки, которые являются некоторыми путями на множестве альковов. Мы не хотим здесь приводить общего определения альковных прогулок, это определение может быть найдено в статьях [RY, OS]. Однако мы приведем точную конструкцию в нашем случае.

Рессмотрим действительную прямую $\mathbb{R}$ и множество альковов $(i, i+1), i \in \mathbb{Z}$ и обозначим стенки альковов с помощью простых отражений, так что через i обозначена s_1, если i – четно и s_0, если i – нечетно.

Группа Вейля $W = \langle s_1 \rangle \star \langle s_0 \rangle$ (свободное произведение двух циклических подгрупп порядка 2) действует на множестве альковов просто транзитивно. Мы отождествляем W с множеством альковов: s_1 действует как отражение в стенке 0, и s_0 действует как отражение в стенке 1. Поэтому $2X = s_1 s_0$ действует как сдвиг на 2. Мы используем аддитивные обозначения для группы, порожденной $2X$ (то есть мы записываем элементы этой группы в виде $2nX, n \in \mathbb{Z}$). Любой элемен из W может быть записан в виде $2nXs_1^b, b \in \{0,1\}$. Следующий рисунок иллюстрирует описанную процедуру:

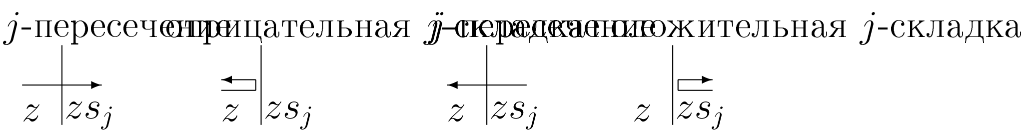


Для любого алькова a обозначим четную стенку a как $2\mathrm{wt}(a)$; если эта стенка – левая, положим $\mathrm{d}(a) = 0$, если эта стенка – правая, то $\mathrm{d}(a) = 1$. В терминах W, для $w = 2nXs_1^b$ имеем $\mathrm{wt}(a) = n$, $\mathrm{d}(a) = b$.

Альковная прогулка – это последовательность простых отражений с некоторой дополнительной информацией. Эта последовательность называется типом прогулки. Возьмем целое число n и рассмотрим элемент $2nX \in W$.

Для $n \geq 0$ формула Рама-Йип говорит, что $E_{-n}^{A_2^{(2)}}(x;q,t)$ $(E_{-n}^{A_2^{(2)\dagger}}(x;q,t))$ может быть построен из альковных прогулок типа $(s_1, s_0, \ldots, s_1, s_0)$, $2n$ элементов. Аналогично, $E_n^{A_2^{(2)}}(x;q,t)$ $(E_n^{A_2^{(2)\dagger}}(x;q,t))$ может быть построен из альковных прогулок типа $(s_0, \ldots, s_1, s_0)$, $2n-1$ элементов. Дадим определение альковных прогулок в нашем случае.

Пусть w – элемент аффинной группы Вейля. Рассмотрим последовательность $(s_{k_1}, \ldots, s_{k_l})$ простых отражений, такую что $w = s_{k_1} \ldots s_{k_l}$ – приведенное разложение, и бинарное слово $b_1, \ldots, b_l$, $b_i \in \{0, 1\}$. Альковная прогулка типа w – это путь на множестве альковов, начинающийся в алькове $[0,1]$ (соответствующем $1 \in W$) и состоящий из следующих шагов:



Мы имеем складку на i-ом шагу, если $b_i = 0$ и пересечение, если $b_i = 1$. Мы называем складку положительной, если это – складка "слева направо"и отрицательной, если она – "справа налево". Положим $J = \{i | b_i = 0\}$. Обозначим черех p_J конечный альков с данным множеством складок. Конечно, p_J также зависит от w, но мы опускаем w для упрощения обозначений.

Обозначим через $\mathcal{B}(w)$ множество альковных путей типа w, то есть пар $p = (w, b)$. Пусть $J_0 = \{i \in J | w_i = s_0\}$ и пусть J_+ (J_-) – подмножество положительных (соответственно, отрицательных) складок $J \backslash J_0$.

Положим $\beta_i = s_{k_l} \ldots s_{k_{i+1}} \alpha_{k_i}$, $1 \leq i \leq l$, где α_{k_i} – простой корень. Для прогулок типа $(s_1, s_0, \ldots s_1, s_0)$ и $(s_1, s_0, \ldots s_1, s_0)$ имеем:

$$\beta_{l-2i} = (s_0 s_1)^i \alpha_0 = -\alpha_1 + (2i+1)\delta,$$
$$\beta_{l-2i-1} = (s_0 s_1)^i s_0 \alpha_1 = -\alpha_1 + (2i+2)\delta.$$

Любой корень β из аффинной корневой решетки типа $A_2^{(2)}$ (соответственно, $A_1^{(1)}$) может быть записан в следующем виде:

$$\beta = \beta' + \deg(\beta)\delta,$$

где β' – корень из конечномерной системы. Поэтому в нашем случае мы можем записать, что $\deg(\beta_{l-i}) = i + 1$.

4.2.2. Точная формула в типе $A_2^{(2)}$

Теорема 4.2.1. *(Рам, Йип, $A_2^{(2)}$-случай) Положим $v = t^{1/2}$. Пусть $w = (s_1, s_0, \ldots, s_1, s_0)$ (с $-2n$ элементами для $n < 0$) и $w = (s_0, \ldots, s_1, s_0)$ (с $2n - 1$ элементами для $n \geq 0$). Тогда:*

$$E_n^{A_2^{(2)}}(x, q, t) =$$
$$\sum_{p \in \mathcal{B}(w)} v^{(sign(n)-1)/2 + d(p_J) - |J|} \left(1 - v^2\right)^{|J|} \prod_{j \in J_0} \frac{\xi_j}{1 - \xi_j^2} \prod_{j \in J_+} \frac{1}{1 - \xi_j} \prod_{j \in J_-} \frac{\xi_j}{1 - \xi_j} x^{wt(p_J)}, \tag{4.2.1}$$

где $\xi_j = q^{\deg(\beta_j)} v^{-\langle \alpha_1^\vee, \beta_j \rangle} = q^{\deg(\beta_j)} v^2$.

Определение 4.2.2. Определим элементы $c_r(k_{22}, k_{12}, k_{11}) \in \mathbb{Z}[q]$, $r = 1, 2$ следующей рекуррентной формулой:

$$c_1(k_{22}, k_{12}, k_{11}) = q^{2n} c_2(k_{22} - 1, k_{12}, k_{11}) + q^{2n-1} c_2(k_{22}, k_{12} - 1, k_{11}) + c_1(k_{22}, k_{12}, k_{11} - 1), \tag{4.2.2}$$

$$c_2(k_{22}, k_{12}, k_{11}) = c_2(k_{22} - 1, k_{12}, k_{11}) + q^{2n-1} c_2(k_{22}, k_{12} - 1, k_{11}) + c_1(k_{22}, k_{12}, k_{11} - 1), \tag{4.2.3}$$

где $n = k_{11} + k_{12} + k_{22}$ в обеих формулах. Стартовые значения зафиксированы равенствами $c_r(k_{22}, k_{12}, k_{11}) = 0$, если некоторое из чисел k_{ij} отрицательно и $c_r(0, 0, 0) = 1$.

Предложение 4.2.3. *Специализации несимметрических полиномов Макдональда в типе $A_2^{(2)}$ могут быть записаны в следующем виде ($n \geq 0$):*

$$E_{-n}^{A_2^{(2)}}(x, q, 0) = \sum_{k_{22} + k_{12} + k_{11} = n} c_2(k_{22}, k_{12}, k_{11}) x^{k_{22} - k_{11}}. \tag{4.2.4}$$

$$E_{n+1}^{A_2^{(2)}}(x, q, 0) = \sum_{k_{22} + k_{12} + k_{11} = n+1} \left(q^{2n+1} c_2(k_{22} - 1, k_{12}, k_{11}) + c_1(k_{22}, k_{12} - 1, k_{11})\right) x^{k_{11} - k_{22} + 1}. \tag{4.2.5}$$

$$E_{-n}^{A_2^{(2)}}(x, q^{-1}, \infty) = \sum_{k_{22} + k_{12} + k_{11} = n} c_1(k_{22}, k_{12}, k_{11}) x^{k_{11} - k_{22}}. \tag{4.2.6}$$

$$E_{n+1}^{A_2^{(2)}}(x, q^{-1}, \infty) = \sum_{k_{22} + k_{12} + k_{11} = n} c_2(k_{22}, k_{12}, k_{11}) x^{k_{11} - k_{22} + 1}. \tag{4.2.7}$$

В частности, $E_{n+1}^{A_2^{(2)}}(x, q^{-1}, \infty) = x E_{-n}^{A_2^{(2)}}(x, q, 0)$.

Доказательство. Для начала докажем (4.2.4), (4.2.5) используя Теорему 4.2.1. Пусть l – длина элемента w. Мы знаем, что $\beta_{l+1-j} = -\alpha_1 + j\delta$. Следовательно, $\xi_{l+1-j} = q^j v^2 = q^j t$. Значит, если мы изучаем специализацию в $t = 0$, мы можем считать все знаменатели равными 1:

$$E_n^{A_2^{(2)}}(x,q,0) = \lim_{v\to 0} \sum_{p\in\mathcal{B}(w)} v^{(sign(n)-1)/2+d(p_J)-|J|} \prod_{j\in J_0} \xi_j \prod_{j\in J_-} \xi_j x^{wt(p_J)} =$$

$$= \lim_{v\to 0} \sum_{p\in\mathcal{B}(w)} v^{(sign(n)-1)/2+d(p_J)-|J|+2|J_0\cup J_-|} q^{\sum_{i\in J_0\cup J_-} i} x^{wt(p_J)}.$$

Мы утверждаем, что показатель $(sign(n)-1)/2 + d(p_J) - |J| + 2|J_0 \cup J_-|$ обнуляется тогда и только тогда, когда нет положительных 0-складок и он положителен, когда такие складки имеются. Действительно, пусть J_{0+} и J_{0-} – множество положительных и отрицательных нулевых складок. Тогда:

$$\begin{gathered}(sign(n)-1)/2 + d(p_J) - |J| + 2|J_0 \cup J_-| - 2|J_{0+}| = \\ (sign(n)-1)/2 + d(p_J) - |J_+| - |J_{0+}| + |J_{0-} \cup J_-| = 0.\end{gathered} \tag{4.2.8}$$

Следовательно, $(sign(n)-1)/2 + d(p_J) - |J| + 2|J_0 \cup J_-| = 2|J_{0+}|$. Обозначим множество путей с $|J_{0+}| = 0$ как $\mathcal{QB}$. Тогда мы имеем:

$$E_n^{A_2^{(2)}}(x,q,0) = \sum_{p\in\mathcal{QB}(w)} q^{\sum_{i\in J_0\cup J_-} i} x^{wt(p_J)}.$$

Теперь запишем альковные пути в следующем виде. Мы их закодируем последовательностями $\mathbf{h} = (h_0,\dots,h_l)$ (см. [HHL]) чисел 1 и 2. Положим $h_0 = 1$, если $n > 0$ и $h_0 = 2$ если $n < 0$. Если i-й шаг пути заканчивается стрелкой вправо (то есть это пересечение слева направо или положительная складка), то $h_i = 1$. Если i-й шаг заканчивается левой стрелкой, то $h_i = 2$. Тогда подпоследовательности 12 соответствуют отрицательным складкам и подпоследовательности 21 соответствуют положительным складкам. Рассматриваем последовательность $(h_0,\dots,h_l)$ как последовательность из пар 11, 12, 21, 22 и, возможно, первого ээлемента без пары. Тогда множество последовательностей пар без пары 21 соответствует $\mathcal{QB}(w)$. Обозначим множество таких последовательностей как $\mathcal{QS}(n)$.

Для любой последовательности $\mathbf{h}$ длины $l+1$ обозначим $\mathrm{leg}(\mathbf{h}) = \sum_{h_{l-j}=1, h_{l-j+1}=2} j$. Тогда:

$$E_n^{A_2^{(2)}}(x,q,0) = \sum_{\mathbf{h}\in\mathcal{QS}(n)} q^{\mathrm{leg}(\mathbf{h})} x^{[(|\{i>0|h_i=1\}|-|\{i>0|h_i=2\}|+1)/2]},$$

где $[y]$ – целая часть y.

Рассмотрим многочлены $E_{-n}^{A_2^{(2)}}(x,q,0)$. Обозначим через $\mathcal{QS}(i,k_{22},k_{12},k_{11}) \subset \mathcal{QS}(-n)$ множество последовательностей пар и элемента h_0, такого что $h_0 = i$ и там присутствуют k_{ij} пар ij. Положим

$$c_i(k_{22},k_{12},k_{11}) = \sum_{\mathbf{h}\in\mathcal{QS}(i,k_{22},k_{21},k_{11})} q^{\mathrm{leg}(\mathbf{h})}.$$

Разделим множества $\mathcal{QS}(i,k_{22},k_{12},k_{11})$ на три подмножества последовательностей в соответствии со значением первой пары h_1, h_2 ($(2,2)$, $(1,2)$ или $(1,1)$). Рассмотрим случай $i=2$. Если $(h_1,h_2)=(2,2)$, тогда leg нога последовательности не изменится, если мы отрежем (h_0,h_1). Легко видеть, что все элементы $\mathcal{QS}(2,k_{22}-1,k_{12},k_{11})$ могут быть получены такой процедурой. Если $(h_1,h_2)=(1,2)$, то если мы отрежем первые два элемента, то leg уменьшится на $2l-1$. Если $(h_1,h_2)=(1,1)$, то если мы отрежем первые два элемента, то leg не изменится и мы получим $i=1$ вместо $i=2$. То есть мы получаем рекуррентное соотношение (4.2.3). Рекуррентное соотношение (4.2.2) может быть получено тем же способом. Более того, мы по определению получаем, что они удовлетворяют (4.2.4).

Аналогично мы получаем соотношение (4.2.5).

Теперь рассмотрим многочлены $E_n^{A_2^{(2)}}(x,q^{-1},\infty)$. При $t\to\infty$: $\frac{\xi_i}{1-\xi_i^2} \sim \frac{1}{1-\xi_i} \sim -\xi_i^{-1}$. После замены $q\to q^{-1}$ мы имеем:

$$E_{-n}^{A_2^{(2)}}(x,q^{-1},\infty) = \lim_{t\to\infty}\sum_{p\in\mathcal{B}(w)} v^{(sign(-n)-1)/2+d(p_J)+|J|}\prod_{j\in J_0\cup J_+}(-q^j v^{-2})x^{\mathrm{wt}(p_J)} =$$

$$= \sum_{p\in\mathcal{B}(w)} v^{(-sign(n)-1)/2+d(p_J)+|J|-2|J_0|-2|J_+|} q^{\sum_{j\in J_0\cup J_+} j} x^{\mathrm{wt}(p_J)}.$$

Аналогично (4.2.8) мы имеем, что $(sign(n)-1)/2+d(p_J)+|J|-2|J_0|-2|J_+|=0$, если $J_{0-}=\emptyset$. Поэтому мы получаем:

$$E_{-n}^{A_2^{(2)}}(x,q^{-1},\infty) = \sum_{p\in\mathcal{B}(w),|J_{0-}|=0} q^{\sum_{j\in J_0\cup J_+} j} x^{[(|\{i>0|s_1=1\}|-|\{i>0|s_1=2\}|+1)/2]}.$$

В терминах последовательностей мы получаем, что любая прогулка, дающая нетривиальное слагаемое, получается из последовательности пар 22, 21, 11 с $h_0=2$. Обозначим множество таких последовательностей как $\mathcal{QS}'(n)$ и положим $\mathrm{leg}'(\mathbf{h}) = \sum_{h_{l-j}=1, h_{l-j-1}=2} j$. Тогда:

$$E_{-n}^{A_2^{(2)}}(x, q^{-1}, \infty) = \sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{QS}'(n)} q^{\mathrm{leg}'(\mathbf{h})} x^{[(|\{i>0|h_i=1\}|-|\{i>0|h_i=2\}|+1)/2]}.$$

Теперь мы получаем (4.2.6), меняя местами 1 и 2 по всех определениях предыдущего абзаца.

В итоге:

$$E_n^{A_2^{(2)}}(x, q^{-1}, \infty) = \lim_{t \to \infty} \sum_{p \in \mathcal{B}(w)} v^{(d(p_J)+|J|} \prod_{j \in J_0 \cup J_+} (-q^j v^{-2}) x^{\mathrm{wt}(p_J)} =$$

$$= \sum_{p \in \mathcal{B}(w)} v^{d(p_J)+|J|-2|J_0|-2|J_+|} q^{\sum_{j \in J_0 \cup J_+} j} x^{\mathrm{wt}(p_J)},$$

и мы получаем (4.2.7). □

Лемма 4.2.4. *Единственное решение уравнений $c_r(k_{22}, k_{12}, k_{11})$ из определения 4.2.2 дается формулами:*

$$c_1(k_{22}, k_{12}, k_{11}) = q^{k_{12}^2+2k_{22}} \binom{k_{22}+k_{12}+k_{11}}{k_{22}, k_{12}, k_{11}}_{q^2}, \tag{4.2.9}$$

$$c_2(k_{22}, k_{12}, k_{11}) = q^{k_{12}^2} \binom{k_{22}+k_{12}+k_{11}}{k_{22}, k_{12}, k_{11}}_{q^2} \tag{4.2.10}$$

Доказательство. Прямое вычисление. □

4.2.3. Двойственные полиномы Макдональда

В этом разделе мы будем работать с полиномами Макдональда типа $A_2^{(2)\dagger}$. Мы сохраняем обозначения из разделов 4.2.1 и 4.2.2.

Теорема 4.2.5. *(Рам, Йип, $A_2^{(2)\dagger}$-случай) Положим $v = t^{1/2}$. Тогда:*

$$E_n^{A_2^{(2)\dagger}}(x, q, t) = \sum_{p \in \mathcal{B}(w)} v^{(sign(n)-1)/2+d(p_J)-|J|} \left(1-v^2\right)^{|J|} \times$$

$$\prod_{j \in J_{0+}} \frac{1}{1-\xi_j^2} \prod_{j \in J_{0-}} \frac{\xi_j^2}{1-\xi_j^2} \prod_{j \in J_+} \frac{1}{1-\xi_j} \prod_{j \in J_-} \frac{\xi_j}{1-\xi_j} x^{wt(p_J)}.$$

Определение 4.2.6. Определим элементы $c_r^\dagger(k_{22}, k_{21}, k_{11}) \in \mathbb{Z}[q], r = 1, 2$ следующими рекуррентными соотношениями:

$$c_1^\dagger(k_{22}, k_{21}, k_{11}) = q^{2n} c_2^\dagger(k_{22} - 1, k_{21}, k_{11}) + q^{2n} c_1^\dagger(k_{22}, k_{21} - 1, k_{11}) + c_1^\dagger(k_{22}, k_{21}, k_{11} - 1), \tag{4.2.11}$$

$$c_2^\dagger(k_{22}, k_{21}, k_{11}) = c_2^\dagger(k_{22} - 1, k_{21}, k_{11}) + c_1^\dagger(k_{22}, k_{21} - 1, k_{11}) + c_1^\dagger(k_{22}, k_{21}, k_{11} - 1), \tag{4.2.12}$$

где $n = k_{11} + k_{21} + k_{22}$. Стартовые условия – $c_r^\dagger(k_{22}, k_{21}, k_{11}) = 0$, если любое $k_{ij} < 0$, и $c_r^\dagger(0, 0, 0) = 1$.

Предложение 4.2.7. *Мы имеем следующие уравнения* ($n \geq 0$)*:*

$$E_{-n}^{A_2^{(2)\dagger}}(x, q, 0) = \sum_{k_{22}+k_{21}+k_{11}=n} c_2^\dagger(k_{22}, k_{21}, k_{11}) x^{k_{11}-k_{22}}. \tag{4.2.13}$$

$$E_{n+1}^{A_2^{(2)\dagger}}(x, q, 0) = \sum_{k_{22}+k_{21}+k_{11}=n} c_1^\dagger(k_{22}, k_{21}, k_{11}) x^{k_{11}-k_{22}+1}. \tag{4.2.14}$$

$$E_{-n}^{A_2^{(2)\dagger}}(x, q^{-1}, \infty) = \sum_{k_{22}+k_{21}+k_{11}=n} c_1^\dagger(k_{22}, k_{21}, k_{11}) x^{k_{11}-k_{22}}. \tag{4.2.15}$$

$$E_{n+1}^{A_2^{(2)\dagger}}(x, q^{-1}, \infty) = \sum_{k_{22}+k_{21}+k_{11}=n} \left(c_2^\dagger(k_{22}, k_{21}, k_{11}) + c_1^\dagger(k_{22}, k_{21}, k_{11}) \right) x^{k_{11}-k_{22}+1}. \tag{4.2.16}$$

В частности, $E_{n+1}^{A_2^{(2)\dagger}}(x, q, 0) = x E_{-n}^{A_2^{(2)\dagger}}(x, q^{-1}, \infty)$.

Доказательство. Доказательство полностью аналогично доказательству Предложения 4.2.3. Мы имеем те же самые элементы $\xi_j = q^j v^2 = q^j t$. Поэтому, если мы изучаем специализации в $t = 0$, мы можем положить все знаменатели равными 1:

$$E_n^{A_2^{(2)\dagger}}(x, q, 0) = \lim_{v \to 0} \sum_{p \in \mathcal{B}(w)} x^{wt(p_J)} v^{(sign(n)-1)/2 + d(p_J) - |J|} \prod_{j \in J_0} \xi_j \prod_{j \in J_-} \xi_j =$$

$$= \lim_{v \to 0} \sum_{p \in \mathcal{B}(w)} x^{wt(p_J)} v^{(sign(n)-1)/2 + d(p_J) - |J| + 2|J_+| + 4|J_{0+}|} q^{\sum_{i \in J_0 \cup J_-} i}.$$

Показатель $(sign(n) - 1)/2 + d(p_J) - |J| + 2|J_+| + 4|J_{0+}|$ обнуляется если и только если нет отрицательных 0-складок. Закодируем альковную прогулка двоичным словом тем же образом, что и в доказательстве Предложения 4.2.3. Теода ненулевые слагаемые соответствуют словам без 12. Это – единственное отличие от предыдущего доказательства. □

Лемма 4.2.8. *Единственное возможное значение для* $c_r^\dagger(k_{22}, k_{12}, k_{11})$ *из Определения 4.2.6 задается формулами:*

$$c_1^\dagger(k_{22}, k_{21}, k_{11}) = q^{k_{21}(k_{21}-1)+2k_{22}+2k_{21}} \begin{pmatrix} k_{22}+k_{21}+k_{11} \\ k_{22}, k_{21}, k_{11} \end{pmatrix}_{q^2}, \tag{4.2.17}$$

$$c_2^\dagger(k_{22}, k_{21}, k_{11}) = q^{k_{21}(k_{21}-1)} \begin{pmatrix} k_{22}+k_{21}+k_{11} \\ k_{22}, k_{21}, k_{11} \end{pmatrix}_{q^2} \tag{4.2.18}$$

Доказательство. Прямая проверка. □

4.3. Сравнение

В этом разделе мы обсудим связь между характерами модулей Вейля и специализированными многочленами Макдональда.

Теорема 4.3.1. *Для любого* $n \in \mathbb{Z}$ *имеем*

$$\mathrm{ch}W_n(x, q^2) = E_n^{A_2^{(2)\dagger}}(x, q, 0), \ \mathrm{ch}W_n^\sigma(x, q) = E_n^{A_2^{(2)}}(x, q, 0).$$

Доказательство. Лемма 4.1.2 и Лемма 4.1.4 дают для $n \geq 0$

$$\mathrm{ch}W_{-n}(x, q^2) = \sum_{k+s\leq n} q^{k(k-1)} x^{-n+k+2s} \begin{pmatrix} n \\ k, s, n-k-s \end{pmatrix}_{q^2}, \tag{4.3.1}$$

$$\mathrm{ch}W_{-n}^\sigma(x, q) = \sum_{k+s\leq n} q^{k^2} x^{-n+k+2s} \begin{pmatrix} n \\ k, s, n-k-s \end{pmatrix}_{q^2}. \tag{4.3.2}$$

Формула (4.3.1) согласуется с формулами (4.2.13), (4.2.18). Формула (4.3.2) согласуется с формулами (4.2.4), (4.2.10).

Применяя Следствие 4.1.12 и Следствие 4.1.14, мы получаем следующие формулы ($n \geq 0$)

$$\mathrm{ch}W_{n+1}(x, q^2) = \sum_{k+s\leq n} q^{k(k+1)+2s} x^{n+1-k-2s} \begin{pmatrix} n \\ k, s, n-k-s \end{pmatrix}_{q^2}, \tag{4.3.3}$$

$$\mathrm{ch}W_{n+1}^\sigma(x, q) = \sum_{k+s\leq n} x^{n+1-k-2s} \left(q^{k^2+2s} + x^{-1} q^{k^2+2n+1}\right) \begin{pmatrix} n \\ k, s, n-k-s \end{pmatrix}_{q^2}. \tag{4.3.4}$$

Формула (4.3.3) согласуется с формулой (4.2.14), (4.2.17).

Нетривиальную часть формулы (4.3.4) мы хотим сравнить с формулами (4.2.5), (4.2.9) и (4.2.10). Мы имеем условия (4.1.5) и (4.1.6) на элементы базиса W_{n+1}. Элементы, удовлетворяющие условию (4.1.5), параметризованы данными, очень близкими к данным (4.1.2). Более точно, мы получаем (4.1.5), если мы увеличиваем степень по t элементов e_a в (4.1.2) на 2. Поэтому после сопоставления $s = k_{11}$, $k = k_{12}$, $k_{22} + k_{12} + k_{11} = n + 1$ характер элементов (4.1.5) равен

$$\sum_{k_{22}+k_{12}+k_{11}=n+1} c_2(k_{22}-1, k_{12}, k_{11}) q^{2k_{22}} x^{k_{11}-k_{22}+1} = \sum_{k_{22}+k_{12}+k_{11}=n+1} c_1(k_{22}-1, k_{12}, k_{11}) x^{k_{11}-k_{22}+1}.$$

Аналогично, элементы, удовлетворяющие условиям (4.1.6) – это элементы, удовлетворяющие условиям (4.1.2), умноженные на g^-_{2n+1}. Поэтому их характер равен

$$\sum_{k_{22}+k_{12}+k_{11}=n+1} c_2(k_{22}, k_{12}-1, k_{11}) q^{2n+1} x^{k_{11}-k_{22}}.$$

□

Введем ПБВ-фильтрацию на модулях Вейля W_{-n}. А именно, определим $F_0 = \mathbb{C}w_{-n}$, $F_{s+1} = F_s + \mathfrak{n}^-[t].F_s$. Ассоциированное градуированное пространство является циклическим модулем над алгеброй $\mathbb{C}[e_0, e_1, \dots] \otimes \bigwedge(g_0^+, g_1^+, \dots)$. Присвоим степень 1 элементам e_i и g_i^+. Мы тогда получаем дополнительную градуировку на $\mathrm{gr}W_{-n}$. Обозначим этот характер как $\mathrm{ch}(\mathrm{gr}W_{-n})(x, q, t)$.

Для скрученных алгебр применим схожую процедуру. Для начала перейдем к градуированному $\mathbb{C}[e_0, e_1, \dots] \otimes \bigwedge(g_0^+, g_1^+, \dots)$-модулю $\mathrm{gr}W^\sigma_{-n}$. Тогда присвоим степерь 1 переменным e_i и степень 0 переменным g_i^+. Используя новую градуировку, мы получим новый характер, зависящий от x, q, t. Обозначим его как $\mathrm{ch}(\mathrm{gr}W^\sigma_{-n})(x, q, t)$.

Теорема 4.3.2. *Пусть $n \geq 0$. Тогда*

$$\mathrm{chgr}W_{-n}(x, q^2, q^2) = E_{-n}^{A_2^{(2)\dagger}}(x, q^{-1}, \infty), \ \mathrm{ch}(\mathrm{gr}W^\sigma_{-n})(x, q, q) = E_{-n}^{A_2^{(2)}}(x, q^{-1}, \infty).$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что множество векторов (4.1.1) образует базис модуля $\mathrm{gr}W_{-n}$, и множество векторов (4.1.2) образует базис модуля $\mathrm{gr}W^{\sigma}_{-n}$. Поэтому мы получаем следующие формулы для градуированых характеров:

$$\mathrm{ch}(\mathrm{gr}W_{-n})(x,q^2,q^2) = \sum_{k+s\le n} q^{k(k-1)+2k+2s}x^{-n+k+2s}\begin{pmatrix} n \\ k,s,n-k-s\end{pmatrix}_{q^2}, \tag{4.3.5}$$

$$\mathrm{ch}(\mathrm{gr}W^{\sigma}_{-n})(x,q,q) = \sum_{k+s\le n} q^{k^2+s}x^{-n+k+2s}\begin{pmatrix} n \\ k,s,n-k-s\end{pmatrix}_{q^2}. \tag{4.3.6}$$

Теперь формула (4.3.5) совпадает с формулой (4.2.15), (4.2.17). Формула (4.3.6) совпадает с формулой (4.2.6), (4.2.9). □

4.4. Квантовый граф Брюа для A_2^2

Здесь мы вкратце опишем методы статьи [OS]. Несмотря на то, что мы не пользуемся их техникой, идеи из [OS] очень близки описанным выше идеям.

Рассмотрим группу Вейля $W = \langle s_0\rangle \star \langle s_1\rangle$ корневой системы $A_2^{(2)}$.

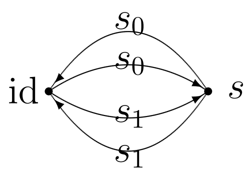
Определение 4.4.1. Пусть $W(Y)$ – группа Кокстера корневой системы Y, s_α – отражение в корне α, l – функция длины на $W(Y)$. Тогда квантовый граф Брюа – это следующий ориентированный граф:

· множество вершин – $W(Y)$;

· мы имеем стрелку Брюа из g в gs_α, если $l(gs_\alpha) = l(g)+1$;

· мы имеем квантовую стрелку из g в gs_α, если $l(gs_\alpha) = l(g) - \langle 2\rho,\alpha\rangle + 1$.

Рассмотрим квантовый граф Брюа типа $\widehat{A_1}$. Положим $s_{\alpha_1} = s_1$ и $s_{\alpha_0} = s_0$. Тогда мы имеем следующий отмеченный ориентированный граф на двух вершинах:



где стрелки из id в s – стрелки Брюа и стрелки из s в id – квантовые.

Положим $\beta_i = s_{k_n}\dots s_{k_{i+1}}\alpha_{k_i}$, где α_{k_i} – простой корень. Запишем β в следующем виде: $\beta = \beta' + deg(\beta)\delta$, где $\beta' \in \mathbb{Z}\alpha$.

Для любой альковной прогулки (w, b) пусть $J = \{i | b_i = 0\}$, то есть множество складок прогулки. Тогда мы рассмотрим следующий путь на квантовом графе Брюа, начинающийся в элементе id:

$$\xrightarrow{dir(\beta_{i_1})} \cdots \xrightarrow{dir(\beta_{i_r})}$$

Нетрудно видеть, что любая нечетная стрелка этого графа – квантовая, а любая четная – стрелка Брюа. Стрелки Брюа соответствуют отрицательным складкам, а квантовые стрелки – положительным. Определим квантовые пути Брюа как пути без стрелок Брюа (квантовых стрелок для $A_2^{(2)\dagger}$), отмеченных элементом s_0. В [OS] доказано, что $E_n^{A_2^{(2)}}(x, q, 0)$ получается как сумма некоторых слагаемых, находящихся во взаимно-однозначном соответствии с квантовыми путями Брюа.

Глава 5

Обобщенные модули Вейля и их связь с многочленами Макдональда

Пусть $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли и пусть $E_\lambda(x,q,t)$ – несимметрические многочлены Макдональда, соответствующие $\mathfrak{g}$ [Ch1, O, M2]. Они являются многочленами от (мульти)переменной x с коэффициентами в поле рациональных функций от q и t; параметр λ– вес из весовой решетки простой алгебры Ли. Симметрический многочлен Макдональда $P_\lambda(x,q,t)$ может быть получен из $E_\lambda(x,q,t)$ с помощью некоторой симметризации [HHL]. Многочлены E_λ могут быть определены двумя различными способами: или как собственные функции некоторых коммутирующих операторов или как ортогональные функции относительно скалярного произведения Чередника. Они образуют базис полиномиального модуля двойная аффинной алгебры Гекке.

Несимметрические многочлены Макдональда играют важную роль в теории представлений: их специализации $E_\lambda(x,q,0)$ совпадают с характерами модулей Демазюра уровня 1 соответствующей аффинной алгебры Каца-Муди (см. [S, I]). Недавно было показано ([CO2, CF, OS]), что для антидоминантного веса λ специализация в точке $t=\infty$ также очень важна для теории представлений. В частности, функции $E_\lambda(x,q^{-1},\infty)$ являются полиномами от переменных x,q с целыми неотрицательными коэффициентами [OS]; было предположено, [CO2] что эти многочлены совпадают с подкрученными на ПБВ-фильтрацию характерами модулей Демазюра. Одна из наших мотиваций – дать теоретико-представленческую реализацию многочленов $E_\lambda(x,q^{-1},\infty)$. Мы опишем намного более богатую структуру: а именно, для антидоминантного веса λ мы строим набор модулей $W_{\sigma(\lambda)}$, σ – элемент группы Вейля W алгебры $\mathfrak{g}$, таких, что характеры $W_{\sigma(\lambda)}$ являются в некотором смысле промежуточными между $E_\lambda(x,q,0)$ и $E_\lambda(x,q^{-1},\infty)$. Две важнейших конструкции, которые нам нужны – это модель альковных путей и локальные модули Вейля. Отметим также, что существуют глобальные модули Вейля, но здесь мы будем иметь дело только с локальными. Поэтому в дальнейшем, говоря о модулях Вейля, мы имеем ввиду только локальные.

Модули Вейля $W(\lambda)$ – это $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{K}[t]$-модули, соответитвующие доминантным весам λ. Это циклические модули, определенные образующими и соотношениям. Мы вводим обобщенные модули Вейля W_μ, зависящие от произвольного веса μ. Обобщенные модули Вейля – это циклические представления алгебры $\mathfrak{n}^{af} = \mathfrak{g} \otimes t\mathbb{K}[t] \oplus \mathfrak{n}_- \otimes 1$, определенные множеством соотношений. А именно, пусть $\mu = \sigma(\lambda)$ для доминантного λ и $\sigma \in W$. Тогда соотношения в $W_{\sigma(\lambda)}$ следующие (v – циклический вектор):

$$h \otimes t^k v = 0 \text{для любого} h \in \mathfrak{h}, k > 0;$$
$$(e_\alpha \otimes t)v = 0,\ \alpha \in \sigma(\Delta_+) \cap \Delta_+;$$
$$(f_\alpha \otimes 1)v = 0,\ \alpha \in \sigma(\Delta_+) \cap \Delta_-;$$
$$(e_{\sigma(\alpha)} \otimes t)^{-\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle + 1} v = 0,\ \alpha \in \Delta_-, \sigma(\alpha) \in \Delta_+;$$
$$(f_{\sigma(\alpha)} \otimes 1)^{-\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle + 1} v = 0,\ \alpha \in \Delta_-,\ \sigma(\alpha) \in \Delta_-.$$

Мы используем стандартные обозначения из теории Ли. Отметим, что для доминантного λ мы имеем изоморфизм $\mathfrak{n}^{af}$-модулей $W(\lambda) \simeq W_\lambda$. Мы доказываем следующую теорему (здесь w_0 – самый длинный элемент группы Вейля).

Теорема А. Пусть λ – доминантный вес, $\sigma \in W$. Тогда

(i) $\dim W_{\sigma(\lambda)} = \dim W_\lambda$.

(ii) $\mathrm{ch} W_{w_0\lambda} = E_{w_0\lambda}(x, q^{-1}, \infty)$.

(iii) $\mathrm{ch} W_\lambda = E_{w_0\lambda}(x, q, 0)$.

(iv) Для любого $i = 1, \dots, \mathrm{rk}(\mathfrak{g})$ модули $W_{\sigma(\lambda)}$ раскладываются на подфакторы вида $W_{\kappa(\lambda - \omega_i)}$, $\kappa \in W$. Подфакторы соответствуют некоторым альковным путям и количество подфакторов равно размерности W_{ω_i}.

Последняя часть Теоремы А говорит нам о важности модели на альковных путях (см. [GL, L]). А именно, специализации в $t = 0$ и $t = \infty$ несимметрических многочленов Макдональда допускают комбинаторное описание в терминах квантовых альковных путей для группы W^a [RY, OS]. Более точно, пусть КГБ – квантовый граф Брюа для группы Вейля $\mathfrak{g}$ [BFP, LSh, LNSSS1]. Множество вершин КГБ находится во взаимно-однозначном соответствии с W и стрелки могут быть двух типов: классические стрелки из обычного графа Брюа и квантовые стрелки, идущие в другую сторону. Квантовый альковный путь – это путь на множестве альковов p, проектирующийся на путь в

КГБ. Путь зависит от стартовой точки $u \in W^a$ и направлений, получаемых из приведенного разложения элемента w из расширенной аффинной группы Вейля. Мы обозначаем множество квантовых альковных путей с данными u, w как $\mathcal{QB}(u, w)$. Главным комбинаторным объектом для нас является

$$C_u^w = \sum_{p \in \mathcal{QB}(u,w)} x^{wt(end(p))} q^{\deg(\mathrm{qwt}(p))}$$

(см. следующий раздел). Пусть t_λ – элемент расширенной аффинной группы Вейля, соответствующий весу λ. Орр и Шимозоно доказали, что если λ – антидоминантный, то $C_{\mathrm{id}}^{t_\lambda}$ равен $E_\lambda(x, q, 0)$; аналогичная формула дается и для $t = \infty$ и нужной специализации. Мы доказываем следующую теорему:

Теорема B. Пусть λ – доминантный вес, $\sigma \in W$. Тогда $\mathrm{ch} W_{\sigma(\lambda)} = C_\sigma^{t_{w_0 \lambda}}$.

Главным нашим инструментом являются рекуррентные соотношения на C_u^w, которые мы отождествляем с процедурой разложения для обобщенных модулей Вейля.

Как следствие мы получаем обобщение теоремы Иона [I] для доминантных весов, впервые доказаное Чари и Ионом в 2014 году. Теорема Иона утверждает, что для двойственных к нескрученным алгебр Каца-Муди специализированные многочлены Макдональда $E_\lambda(x, q, 0)$ совпадают с характерами модулей Демазюра уровня 1. Мы доказываем, что данная Теорема может быть распространена и на алгебры с непростыми связями, если заменить в ее утверждении модули Демазюра на модули Вейля:

Теорема C. Для доминантного веса λ и любой простой $\mathfrak{g}$ имеем $E_{w_0 \lambda}(x, q, 0) = \mathrm{ch} W(\lambda)$.

5.1. Формула Орра и Шимозоно

В этом разделе мы приведем формулу Орра-Шимозоно для специализаций несимметрических многочленов Макдональда.

5.1.1. Квантовый граф Брюа

Пусть $\Delta = \Delta_+ \sqcup \Delta_-$ – корневая система, и X – корневая решетка конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $W = W(X)$ – ее группа Вейля. Мы обозначаем через λ_i и ω_i, $i = 1, \ldots, \mathrm{rk}(\widehat{\mathfrak{g}})$ простые корни и фундаментальные веса $\mathfrak{g}$. Пусть

$s_1, \ldots, s_n$ – множество простых отражений W. Для корня α обозначим через s_α отражение в этом корне. Для $w \in W$ пусть $l(w)$ – длина элемента w в порядке Брюа. Квантовый граф Брюа (КГБ для простоты) – это отмеченный ориентированный граф, множество вершин которого отождествляется с W, с ребрами $w \xrightarrow{\alpha} ws_\alpha$, такими что

- $l(ws_\alpha) = l(w) + 1$, это – ребро обычного графа Брюа;
- $l(ws_\alpha) = l(w) - \langle 2\rho^\vee, \alpha\rangle + 1$, которое называется *квантовым ребром.*

Здесь $2\rho^\vee = \sum_{\alpha^\vee \in \Delta_+^\vee} \alpha^\vee$, сумма всех положительных кокорней.

Следующая Лемма хорошо известна (см., например, [LNSSS1]).

Лемма 5.1.1. *Самый длинный элемент $w_0 \in W$ обращает стрелки в квантовом графе Брюа, то есть КГБ содержит стрелку $w \xrightarrow{\alpha} ws_\alpha$, если и только если он содержит стрелку $w_0ws_\alpha \xrightarrow{\alpha} w_0w$.*

Например, для типов A и C квантовый граф Брюа может быть точно описан следующим образом (см. [L]). В типе A нам нужен циклический порядок $\prec_i$ на $1, \ldots, n$, начинающийся в i, именно $i \prec_i i+1 \prec_i \cdots \prec_i n \prec_i 1 \prec_i \cdots \prec_i i-1$. Об этом порядке можно думать как о порядке на числах $1, \ldots, n$, расположенных по кругу. Будем считать, что когда мы пишем $a \prec b \prec c \prec \ldots$, мы имеем в виду циклический порядок $\prec_a$.

Обозначим корни в типе A_n через $\alpha_{ij} = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1}$, $1 \le i < j \le n+1$. Напомним, что группа Вейля алгебры Ли типа A_n изоморфна симметрической группе S_{n+1}.

Предложение 5.1.2. *([L], Предложение 3.6) Пусть $w \in S_{n+1}$ – элемент группы Вейля. Тогда существует ребро $w \xrightarrow{\alpha_{ij}} ws_{\alpha_{ij}}$ в квантовом графе Брюа тогда и только тогда, когда не существует числа k, такого что $i < k < j$ и $w(i) \prec w(k) \prec w(j)$. Это ребро квантовое, если и только если $w(i) > w(j)$.*

В типе C мы используем стандартный упорядоченный алфавит 1,2,$\ldots$,n,$\bar{n}$, $\ldots$, $\bar{2}$, $\bar{1}$. Мы записываем знаковую перестановку из симплектической группы Вейля как перестановку σ множества 1,2,$\ldots$,n,$\bar{n}$, $\ldots$, $\bar{2}$, $\bar{1}$, такую что $\sigma(\bar{i}) = \overline{\sigma(i)}$. Мы используем стандартную параметризацию корней в типе C: $\alpha_{ij} = \epsilon_i - \epsilon_j$, $\alpha_{i\bar{j}} = \epsilon_i + \epsilon_j$.

Предложение 5.1.3. *([L], Предложение 5.7) Пусть w – элемент группы Вейля типа C_n. Тогда есть ребра трех следующих типов:*

1)$w \xrightarrow{\alpha_{\epsilon_i-\epsilon_j}} ws_{\alpha_{ij}}$ если и только если не существуте k, такого что $i < k < j$ и $w(i) \prec w(k) \prec w(j)$;

2)$w \xrightarrow{\alpha_{\epsilon_i+\epsilon_j}} ws_{\alpha_{i\bar{j}}}$ если $w(i) > w(\bar{j})$ и не существует k, такого что $i < k < j$ и $w(i) < w(k) < w(j)$;

3)$w \xrightarrow{\alpha_{2\epsilon_i}} ws_{\alpha_{i\bar{i}}}$ если и только если не существует k, такого что $i < k < \bar{i}$ и $w(i) \prec w(k) \prec w(\bar{i})$.

Ребро является квантовым, если и только если $w(i) > w(j)$. В частности, не существует квантовых ребер типа 2).

5.1.2. Альковные пути

Пусть $\widehat{\mathfrak{g}}$ – нескрученная аффинная алгебра Каца-Муди, соответствующая $\mathfrak{g}$. Пусть $W^a = \langle s_0, s_1, \ldots, s_n\rangle$ – аффинная группа Вейля $\mathfrak{g}$. Конечная группа Вейля W порождается отражениями $s_1, \ldots, s_n$ (s_i – простые отражения). Пусть X – корневая решетка $\mathfrak{g}$ и пусть Y – весовая решетка; в частности, $W^a \simeq W \ltimes X^\vee$. Рассмотрим фактор $\Pi = Y/X$. Например, для $\mathfrak{g} = A_n$ Π изоморфна $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$. Расширенная аффинная группа Вейля W^e определяется как полупрямое произведение $W \ltimes Y^\vee$. Для элемента $\lambda \in Y^\vee$ обозначим t_λ соответствующий элемент из W^e. Имеем $W^e \simeq \Pi \ltimes W^a$.

Рассмотрим n-мерное веществленнное векторное пространство $\mathbb{R} \otimes_\mathbb{Z} X$ и множество гиперплоскостей (стенок) $H_{\alpha^\vee+N\delta} = \{x \in \mathbb{R}\otimes_\mathbb{Z} X | \langle\alpha^\vee, x\rangle = N\}$. Альковы - это компоненты связности $\mathbb{R}\otimes_\mathbb{Z} X \setminus \cup_{\alpha\in\Delta_+, N\in\mathbb{Z}} H_{\alpha^\vee+N\delta}$. Существует естественное действие аффинной группы Вейля W^a на множестве альковов [OS]. Отождествляя альков $\{a | \langle a, \alpha_i^\vee\rangle > 0, i = 0, \ldots, n\}$ с единичным элементоv W^a, мы получаем биекцию W^a и множества альковов.

Любой элемент W^e может быть записан в виде $\pi s_{i_1} \ldots s_{i_l}$, $\pi \in \Pi$, $0 \leq i_l \leq \mathrm{rk}(\mathfrak{g})$. В частности, мы имеем такое разложения для элемента из $Y^\vee$. Отметим также, что любой элемент из W^a имеет единственное разложение $w = t_{wt(w)} dir(w)$, где $wt(w) \in X$, $dir(w) \in W$.

Рассмотрим $|\Pi|$ копий $\mathbb{R}\otimes_\mathbb{Z} X$ (листов), обозначенных элементами Π, с одинаковым действием W^a на каждом листе. Расширенная аффинная группа Вейля W^e действует на множестве альковов на всех листах следующим образом. Для любого $\pi \in \Pi$ отождествим альков $\{a | \langle a, \alpha_i^\vee\rangle > 0, i = 0, \ldots, n\}$

на π-ом листе с образом под действием π алькова на начальном листе, соотвестсвующем тождественному элементу W^a. Этим правилом мы определили действие W^e на множестве альковов всех листов (см., например, конец [RY]).

Для приведенного разложения $w = \pi s_{i_1} \dots s_{i_l}$ элемента $w \in W^e$ определим последовательность действительных аффинных корней:

$$\beta_k(w) = s_{i_l} \dots s_{i_{k+1}} \alpha_{i_k},\ k = 1, \dots, l. \tag{5.1.1}$$

Это последовательность отметок на стенках, пересекаемых некоторым кратчайшим путем из тождественного алькова соответствующего листа в $w_0 w$ (см. пример на странице 6 в [RY]).

Пусть $\bar{b} = (b_1, \dots, b_l) \in \langle 0, 1\rangle^l$ – бинарное слово и пусть $J = \{i | b_i = 0\}$, $J = \{j_1 < \dots < j_r\}$. Назовем J *множеством складок*. Для элемента $u \in W^a$ положим

$$z_0 = uw,\ z_{k+1} = z_k s_{\beta_{j_{k+1}}},\ k = 0, \dots, r-1.$$

Мы назовем этот набор данных альковным путем p_J, то есть p_J может быть записан, как

$$z_0 \xrightarrow{\beta_{j_1}} z_1 \xrightarrow{\beta_{j_2}} \cdots \xrightarrow{\beta_{j_r}} z_r =: end(p_J).$$

Любой альковный путь может быть спроектирован в путь в конечной группе Вейля W с помощью функции dir:

$$\mathrm{dir}(z_0) \xrightarrow{\mathrm{Re}\beta_{j_1}} \mathrm{dir}(z_1) \xrightarrow{\mathrm{Re}\beta_{j_2}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{Re}\beta_{j_r}} \mathrm{dir}(z_r), \tag{5.1.2}$$

где для аффинного корня β обозначим через $\mathrm{Re}\beta$ его проекцию на классическую корневую решетку.

Замечание 5.1.4. Все корни $\mathrm{Re}\beta_{j_1}, \dots, \mathrm{Re}\beta_{j_r}$ – отрицательны, см. [OS], Замечание 3.17. В дальнейшем мы используем оба обозначения $w_1 \xrightarrow{\alpha} w_2$ и $w_1 \xrightarrow{-\alpha} w_2$ для обозначения соответствующего ребра в графе Брюа.

Замечание 5.1.5. В дальнейшем мы говорим, что такой альковный путь p_J имеет тип $\beta_1, \dots, \beta_l$. Отметим, что в общем случае корни $\beta_1, \dots, \beta_l$ могут *не* быть получены из разложения w.

Пусть $J^- \subset J$ – множество $j_m \in J$, таких что корень $\mathrm{Re}(z_m \beta_{j_m})$ отрицательный. Мы говорим, что путь $p_J \in \mathcal{QB}(u, w)$ (p_J – квантовый альковный путь), если проекция (5.1.2) является путем в квантовом графе Брюа W. Через $\widetilde{\mathcal{QB}}(u, w)$ обозначим множество путей, проектирующихся на квантовый граф Брюа W с обращенными стрелками. Отметим, что $j \in J^{-}$, если и только если соответствующее ребро в квантовом графе Брюа квантовое.

Пусть δ – базисный мнимый корень. Для любого элемента аффинной корневой решетки $\mu + N\delta$, где μ – элемент корневой решеткии конечномерной алгебры Ли, мы обозначим $\deg(\mu + N\delta) = N$. Для альковного пути p_J определим $\mathrm{qwt}(p_J) = \sum_{j \in J^{-}} \beta_j$.

5.1.3. Производящие функции

Определим наш основной комбинаторный объект.

Определение 5.1.6. Для любого $u, w \in W^e$ определим:

$$C_u^w(x,q) = \sum_{p_J \in \mathcal{QB}(u,w)} x^{wt(end(p_J))} q^{\deg(\mathrm{qwt}(p_J))}.$$

Замечание 5.1.7. Нетрудно видеть, что для любого $\pi \in \Pi$ имеем $C_u^{\pi w} = C_u^w$.

В оставшейся части данного раздела мы опишем свойства функций C_u^w. Для ковеса $\mu \in X^\vee$ напомним обозначение соответствующего элемента аффинной группы Вейля $t_\mu \in W^a$. Следующая Лемма очевидна.

Лемма 5.1.8. *Для любого $\mu \in X^\vee$:*

$$C_{t_\mu u}^w = x^\mu C_u^w.$$

Доказательство. Существует биекция между $\mathcal{QB}(u,w)$ и $\mathcal{QB}(t_\mu u, w)$, отправляющая z_i в $t_\mu z_i$. Следовательно, для любого $p_J \in \mathcal{QB}(u,w)$ сдвиг $t_\mu p_J \in \mathcal{QB}(t_\mu u, w)$ означает только умножение соответствующего элемента из Определения 5.1.6 на x^μ. □

Теорема 5.1.9. *[OS] Пусть $\lambda \in Y$ – антидоминантный вес. Тогда*

(i) $E_\lambda(x; q, 0) = C_{\mathrm{id}}^{t_\lambda}$.

(ii) $E_\lambda(x; q^{-1}, \infty) = \sum_{p_J \in \widetilde{\mathcal{QB}}(\lambda)} x^{wt(end(p_J))} q^{deg(\mathrm{qwt}(p_J))}$,

(iii) $E_\lambda(x; q^{-1}, \infty) = w_0 C_{w_0}^{s_{i_1} \dots s_{i_l}}$.

Лемма 5.1.10.

$$t_{\omega_k} s_{\alpha_l + N\delta} t_{-\omega_k} = \begin{cases} s_{\alpha_l + N\delta}, if\ l \neq k \\ s_{\alpha_l + (N+1)\delta}, if\ l = k \end{cases},$$

$$t_\lambda(\gamma) = \gamma - \langle \gamma^\vee, \lambda \rangle \delta.$$

Доказательство. Первое раванство очевидно, доказательство второго дано в [OS], формула (2.9). □

Пусть $\lambda = -(m_1\omega_1 + \cdots + m_n\omega_n)$ – антидоминантный вес. Пусть $t_{-\omega_i} = \pi s_{t_1}\dots s_{t_r}$ – приведенное разложение и пусть $\beta^i_j = \beta^i_j(t_{-\omega_i})$. Тогда $t_{\lambda-\omega_i} = \pi s_{t_1}\dots s_{t_r} t_\lambda$. Пусть $\beta_1(t_\lambda),\dots,\beta_a(t_\lambda)$ – аффинные корни, построенные по процедуре (5.1.1) для элемента $t_\lambda \in W^a$.

Лемма 5.1.11. *Последовательность корней $\beta_j(t_{\lambda-\omega_i})$ равна*

$$\beta^i_1 + \langle {\beta^i_1}^\vee, \lambda\rangle\delta, \dots, \beta^i_{r_i} + \langle {\beta^i_{r_i}}^\vee, \lambda\rangle\delta,\ \beta_1,\dots,\beta_a.$$

Пример 5.1.12. Рассмотрим фундаментальный вес ω_i для алгебры Ли типа A_n. Пусть $\pi \in \Pi$ – элемент, такой что $\pi s_i \pi^{-1} = s_{i+1}$ (все индексы по модулю $n+1$). Тогда мы имеем:

$$t_{-\omega_i} = \pi^{n+1-i}(s_{2i}s_{2i-1}\dots s_{i+1})(s_{2i-1}\dots s_i)\dots(s_{i-1}\dots s_1 s_0).$$

Нам нужно некоторое обобщение этого примера в типе A на другие типы. Напомним, что для аффинного корня γ мы пишем $\gamma = \mathrm{Re}(\gamma) + \deg(\gamma)\delta$.

Предложение 5.1.13. *a). Для любого приведенного разложения $t_{-\omega_i}$ корни $\beta_j(t_{-\omega_i})$ удовлетворяют следующим свойствам:*

- $\{\mathrm{Re}\beta^i_j\} = \{\gamma \in \Delta_- | \langle\gamma^\vee, \omega_i\rangle < 0\}$,
- $|\{j | \mathrm{Re}\beta^i_j = \gamma\}| = -\langle\gamma^\vee, \omega_i\rangle$,
- *Для любого γ множество $\{\beta_j | \mathrm{Re}\beta^i_j = \gamma\}$ совпадает с $\{\gamma + \delta, \dots, \gamma - \langle\gamma^\vee, \omega_i\rangle\delta\}$.*

b). Существует приведенное разложение $t_{-\omega_i}$, дающее следующий порядок на β^i_j'. Положим $i_1 = i$, и пусть i_k, $k = 2,\dots,n$, – некоторое упорядочивание множества $\{1,\dots,n\}\backslash\{i\}$. Запишем $(\beta^i_j)^\vee = -a_{i_1}\alpha^\vee_{i_1} - \cdots - a_{i_n}\alpha^\vee_{i_n} + Dd$. Порядок на β^i_j дается лексикографическим порядком на векторах $(\frac{a_{i_1}}{D}, \frac{a_{i_2}}{a_{i_1}}, \dots, \frac{a_{i_n}}{a_{i_1}})$.

Доказательство. Для алгебр Ли типа A наше Предложение может быть получено из Примера 5.1.12 непосредственным вычислением. В общем, для $\gamma \in \Delta_-$ число $-\langle\gamma^\vee, \omega_i\rangle$ равняется количеству стенок с отметками $-\gamma + \mathbb{Z}\delta$

между альковом id и альковом $\pi^{-1}t_{\omega_i}$, где $\pi \in \Pi$ зафиксировано условием того, что $\pi^{-1}t_{\omega_i}$ принадлежит нулевому листу. Другими словами, идя из единичного алькова в альков, соответствующий элементу $\pi^{-1}t_{\omega_i}$, необходимо пересечь $-\langle\gamma^\vee, \omega_i\rangle$ стенок с отметками $-\gamma+\mathbb{Z}\delta$. Нетрудно видеть, что эти стенки – $\gamma+\delta, \dots, \gamma+\langle\gamma^\vee, \omega_i\rangle\delta$. Это доказывает утверждение о множестве $\{\beta^i_j\}$.

Теперь наша цель – доказать существование приведенного разложения $t_{-\omega_i}$, такое что свойства из части b) нашего Предложения выполняются.Это эквивалентно поиску альковного пути из единичного алькова в альков, соответствующий $\pi^{-1}t_{\omega_i}$, минимальной возможной длины.

Упорядочим элементы множества $\{1, \dots, n\}$ следующим образом. Положим $i_1 = i$, и пусть i_k, $k = 2, \dots, n$ – некоторый порядок на множестве $\{1, \dots, n\}\backslash\{i\}$. Возьмем некоторое множество положительных вещественных чисел ϵ_k, $k = 2, \dots, n$, таких что $\epsilon_2 << 1$, $\epsilon_{k+1} << \epsilon_k$. Рассмотрим отрезок из точки $\sum_{k=2}^n \epsilon_k\omega_{i_k}$ в точку $\omega_i + \sum_{k=2}^n \epsilon_k\omega_{i_k}$. Мы запишем множество стенок, пересекаемых этим отрезком (см. Рисунок (5.1) с примером в типе C_2). Рассмотрим точку $p = s\omega_i + \sum_{k=2}^n \epsilon_i\omega_{i_k}$, $0 \le s \le 1$ этого отрезка и произвольный кокорень $\gamma^\vee = -(a_1\alpha_i^\vee + a_2\alpha_{i_2}^\vee + \dots + a_n\alpha_{i_n}^\vee)$. Условие $p \in H_{\gamma+D\delta}$, $D \in \mathbb{Z}$ (то есть p принадлежит некоторой стенке) означает:

$$\langle p, a_1\alpha_i^\vee + a_2\alpha_{i_2}^\vee + \dots + a_n\alpha_{i_n}^\vee\rangle = sa_1 + \sum_{k=2}^n \epsilon_k a_k = D.$$

Поэтому для достаточно маленького ϵ_k кокорни β^i_j с меньшим a_1/D появляются раньше и $D/a_1 \le 1$. Предположим теперь, что отношение a_1/D зафиксировано. Тогда $s = D/a_1 - \xi$, где

$$\xi = \sum_{k=2}^n \epsilon_k \frac{a_k}{a_1}.$$

Поэтому, когда ξ меньше, s – больше, и поэтому корень с меньшим a_2/a_1 появляется раньше (напомним, что $\epsilon_2 >> \epsilon_3 >> \dots$). Продолжая с a_3/a_1 и так делее, мы получаем требуемое утверждение. □

Следствие 5.1.14. *i*) $\beta^i_1 = -\alpha_i + \delta$,
ii) *если* $\gamma = \tau + \eta$, $\tau, \eta \in \Delta_+^\vee$, $(\mathrm{Re}\beta^i_j)^\vee = -\gamma$, *тогда*

$$|\{k|(\mathrm{Re}\beta^i_k)^\vee = -\gamma, k \le j\}| = \\ |\{k|(\mathrm{Re}\beta^i_k)^\vee = -\tau, k \le j\}| + |\{k|(\mathrm{Re}\beta^i_k)^\vee = -\eta, k \le j\}|.$$

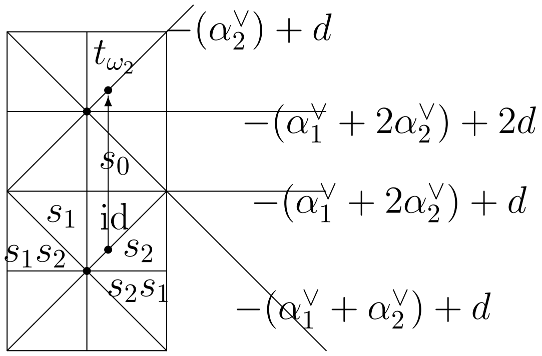


Рис. 5.1. Альковные пути в типе C_2

iii) Пусть $\tau,\eta\in\Delta_+^\vee$ *– корни, такие что* $\tau^\vee+2\eta^\vee\in\Delta_+^\vee$. *Рассмотрим подпоследовательность* $\beta^i_{j_k}, k=1,\dots,p$, *состоящую из всех корней со свойством* $-(\mathrm{Re}\beta^i_{j_k})^\vee\in\{\tau,\eta,\tau+\eta,\tau+2\eta\}$ $(j_k<j_{k+1})$. *Тогда подпоследовательность* $-(\mathrm{Re}\beta^i_{j_k})^\vee, k=1,\dots,p$ *является объединением копий двух следующий последовательностей:*

$$\tau,\tau+2\eta,\tau+\eta,\tau+2\eta\quad \eta,\tau+\eta,\tau+2\eta. \tag{5.1.3}$$

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго положим $\tau=a_1\alpha_i^\vee+a_2\alpha_{i_2}^\vee+\dots+a_n\alpha_{i_n}^\vee$, $\eta=b_1\alpha_i^\vee+b_2\alpha_{i_2}^\vee+\dots+b_n\alpha_{i_n}^\vee$. Предположим, что $\beta_j^{i\vee}=-\eta-\tau+(a_1+b_1-r)d$. Тогда мы имеем

$$|\{\beta^i_j:\ j\le m, -\mathrm{Re}\beta^i_j=\tau^\vee+\eta^\vee\}|=r+1$$

(см. Предложение 5.1.13). Мы считаем количество β^i_m, $m<j$, таких что $\mathrm{Re}\beta^i_m=-\eta$ или $\mathrm{Re}\beta^i_m=-\tau$. Отметим, что если для числа o_1 имеется равенство

$$\frac{a_1}{a_1-o_1}<\frac{a_1+b_1}{a_1+b_1-r}, \tag{5.1.4}$$

тогда $\tau^\vee+(a_1-o_1)\delta=\beta^i_m$ для некоторого $m<j$; если

$$\frac{b_1}{b_1-o_2}<\frac{a_1+b_1}{a_1+b_1-r}, \tag{5.1.5}$$

то $\eta^\vee+(b_1-o_2)\delta=\beta^i_m$ для некоторого $m<j$. Отметим также, что любое из обратных неравенств влечет отсутствие β^i_m с действительной частью, равной $\tau^\vee$ или $\eta^\vee$. Перепишем неравенства (5.1.4) и (5.1.5) в виде $o_1<\frac{a_1r}{a_1+b_1}$, $o_2<\frac{b_1r}{a_1+b_1}$. Отметим, что если $\frac{a_1r}{a_1+b_1}$ не принадлежит $\mathbb{Z}$, тогда количество решений этих неравенств равно $r+1$ и утверждение ii) доказано. Если число

$\frac{a_1 r}{a_1+b_1}$ – целое, то количество решений равно r. В этом случае рассмотрим $o_1 = \frac{a_1 r}{a_1+b_1}$, $o_2 = r - o_1$. Тогда мы имеем $\frac{a_1}{a_1-o_1} = \frac{b_1}{b_1-o_2} = \frac{a_1+b_1}{a_1+b_1-r}$ и, используя лексикографический порядок, получаем, что $-\tau^\vee + (a_1 - o_1)\delta = \beta^i_{m_1}$, $-\eta^\vee + (b_1 - o_2)\delta = \beta^i_{m_2}$ и ровно одно из чисел m_1, m_2 меньше или равно j. Этим завершено доказательство пункта ii).

Докажем теперь iii). Сохраним обозначения предыдущего доказательства. Утверждение является простым следствием ii) и лексикографического порядка в случае $a_1 = 0$ или $b_1 = 0$ (в этом случае имеем только один тип подпоследовательностей (5.1.3)).

Отметим, что случай iii) невозможен для алгебр с простыми связями $\mathfrak{g}$. Для $\mathfrak{g} \simeq B_n, C_n$ имеем $a_1 + 2b_1 \leq 2$, поэтому этот случай доказан. Случай $\mathfrak{g} \simeq G_2$ будет рассмотрен в (5.3.6),(5.3.7). Если $\mathfrak{g} \simeq F_4$, то прямое рассмотрение множества корней говорит, что единственная возможность для таких η, τ с $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$ – это $i = 2$, $\tau = 2\alpha_1^\vee + 2\alpha_2^\vee + 2\alpha_3^\vee + \alpha_4^\vee$, $\eta = \alpha_2^\vee$. В этом случае утверждение может быть доказано простым прямым вычислеинем.

$\square$

Пример 5.1.15. Пусть $\mathfrak{g}$ имеет тип A_n. Тогда множество $\beta_j(t_{-\omega_i})$ совпадает с $\{\beta^i_k\} = \{-\alpha_u - \dots - \alpha_v + \delta\}$, $u \leq i \leq v$ в некотором лексикографическом порядке. Отметим, что в этом случае для некоторого положительного корня γ, если $\mathrm{Re}\beta^i_k = \mathrm{Re}\beta^i_s - \gamma$, то $r > s$.

Пусть $w = t_{-\omega_i}$ и пусть r – длина $t_{-\omega_i}$. Обозначим через $\mathcal{QB}(u, \lambda, \bar\beta)$ все альковные пути типа $\bar\beta^{i,\lambda} = (\beta^i_1 + \langle \beta^{i\vee}_1, \lambda\rangle\delta, \dots \beta^i_r + \langle \beta^{i\vee}_r, \lambda\rangle\delta)$, начинающиеся в $ut_{\lambda-\omega_i}$ (см. Замечание 5.1.5).

Теорема 5.1.16. *Пусть $\lambda \in -Y_+$. Тогда для $u \in W^a$ верно следующее:*

$$C_u^{t_{\lambda-\omega_i}} = \sum_{p \in \mathcal{QB}(u,\lambda,\bar\beta^{i,\lambda})} q^{\deg(\mathrm{qwt}(p))} C^{t_\lambda}_{end(p)t_{-\lambda}}.$$

Далее, если $u \in W$, то

$$C_u^{t_{\lambda-\omega_i}} = \sum_{p \in \mathcal{QB}(u,\lambda,\bar\beta^{i,\lambda})} q^{\deg(\mathrm{qwt}(p))} C^{t_\lambda}_{dir(end(p))} x^{wt(end(p))-\lambda}.$$

Доказательство. Напомним определение C_u^w:

$$C_u^w = \sum_{p_J \in \mathcal{QB}(u,w)} x^{wt(end(p_J))} q^{\deg(\mathrm{qwt}(p_J))}.$$

Альковный путь $p_J \in \mathcal{QB}(u,w)$ определен последовательностью аффинных корней $\beta_1,\dots,\beta_r,\beta_{r+1},\dots,\beta_{a+r}$ (для некоторого неотрицательного целого a) и бинарным словом $\{b_1,\dots,b_{a+r}\}$. Теперь для данного альковного пути $p_J \in \mathcal{QB}(u,w)$ разделим его на две части: первая его часть p определяется данными

$$\beta_1,\dots,\beta_r \text{ и } \{b_1,\dots,b_r\},$$

вторая часть p' определяется оставшейся частью данных для p_J. Тогда p принадлежит $\mathcal{QB}(u,\lambda,\bar\beta^{i,\lambda})$ (см. Лемму 5.1.11) и p' принадлежит $\mathcal{QB}(end(p)t_{-\lambda},t_\lambda)$. Далее, вносок p равен в точности $q^{\deg(\mathrm{qwt}(p))}$, и часть, соответствующая p' суммируется в $C^{t_\lambda}_{end(p)t_{-\lambda}}$. Вторая часть Теоремы следует из Леммы 5.1.8. □

5.2. Обобщенные модули Вейля

5.2.1. Определения и основные свойства

Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_-\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$ – картановское разложение $\mathfrak{g}$. Для положительного корня α пусть $e_\alpha\in\mathfrak{n}_+$ и $f_{-\alpha}\in\mathfrak{n}_-$ – образующие Шевалле. Весовая решетка Y содержит положительную часть Y_+; в частности, фундаментальные веса $\omega_1,\dots,\omega_n$ принадлежат Y_+. Для $\lambda\in Y_+$ обозначим через V_λ неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом λ.

Пусть $\widehat{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{K}[t,t^{-1}]\oplus\mathbb{K}c\oplus\mathbb{K}d$ – соответствующая аффинная алгебра Каца-Муди, где c – центральный элемент и d – элемент степени. Напомним обозначение базисного мнимого корня $\delta\in(\mathfrak{h}^{af})^*$. Алгебра Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ имеет картановское разложение $\widehat{\mathfrak{g}}=\mathfrak{n}^{af}_+\oplus\mathfrak{h}^{af}\oplus\mathfrak{n}^{af}_-$. Здесь $\mathfrak{h}^{af}=\mathfrak{h}\otimes 1\oplus\mathbb{K}c\oplus\mathbb{K}d$ и

$$\mathfrak{n}^{af}=\mathfrak{n}_-\otimes 1\oplus\mathfrak{g}\otimes t\mathbb{K}[t].$$

Для $x\in\mathfrak{n}_-$ мы иногда обозначаем элемент $x\otimes 1\in\mathfrak{n}^{af}$ просто как x.

Замечание 5.2.1. Определение $\mathfrak{n}^{af}$ отличается от стандартного определения положительной части аффинной алгебры Каца-Муди. А именно, положительная часть обычно определяется как линейная оболочка векторов $\widehat{\mathfrak{g}}$, соответствующих положительным аффинным корням. Однако наше определение $\mathfrak{n}^{af}$ содержит все векторы вида $f_\alpha\otimes 1$ (но не $e_\alpha\otimes 1$). Мы меняем обозначения, потому что мы хотим определить циклическое представление W_μ алгебры $\mathfrak{n}^{af}$ (обозначанное весом μ алгебры $\mathfrak{g}$), обобщающее классические модули Вейля.

В частности, для доминантного веса μ W_μ изоморфен классическому модулю Вейля $W(\mu)$. Однако, циклический вектор $W(\mu)$ убивается $\mathfrak{n}_+$, но не $\mathfrak{n}_-$. Это изменение стандартных обозначений не является слишком болезненным, так как элементы e_α и f_α переставляются инволюцией Шевалле.

Определение 5.2.2. Для $\mu \in Y$ положим $\mu = \sigma(\lambda)$, $\sigma \in W$, $\lambda \in Y_+$. Тогда (обобщенный) модуль Вейля W_μ – это циклический $\mathfrak{n}^{af}$-модуль с образующим v и следующими соотношениями:

$$h \otimes t^k v = 0 \text{ для всех } h \in \mathfrak{h}, k > 0; \tag{5.2.1}$$

$$(e_\alpha \otimes t)v = 0,\ \alpha \in \sigma(\Delta_+) \cap \Delta_+; \tag{5.2.2}$$

$$(f_\alpha \otimes 1)v = 0,\ \alpha \in \sigma(\Delta_+) \cap \Delta_-; \tag{5.2.3}$$

$$(e_{\sigma(\alpha)} \otimes t)^{-\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle+1} v = 0,\ \alpha \in \Delta_-, \sigma(\alpha) \in \Delta_+; \tag{5.2.4}$$

$$(f_{\sigma(\alpha)} \otimes 1)^{-\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle+1} v = 0,\ \alpha \in \Delta_-,\ \sigma(\alpha) \in \Delta_-. \tag{5.2.5}$$

В дальнейшем мы будем применять следующее обозначение. Для элемента $\sigma \in W$ и $\alpha \in \Delta_+$ положим

$$\widehat{\sigma}(e_\alpha \otimes t) = \begin{cases} e_{\sigma(\alpha)} \otimes t, & \sigma(\alpha) \in \Delta_+ \\ f_{\sigma(\alpha)} \otimes 1, & \sigma(\alpha) \in \Delta_- \end{cases},$$

$$\widehat{\sigma}(f_{-\alpha} \otimes 1) = \begin{cases} e_{\sigma(-\alpha)} \otimes t, & \sigma(-\alpha) \in \Delta_+ \\ f_{\sigma(-\alpha)} \otimes 1, & \sigma(-\alpha) \in \Delta_- \end{cases}.$$

Определим действие $\widehat{\sigma}$ следующим образом:

$$\widehat{\sigma}(\alpha + \delta) = \begin{cases} \sigma(\alpha + \delta), & \sigma(\alpha) \in \Delta_+ \\ \sigma(\alpha), & \sigma(\alpha) \in \Delta_- \end{cases},$$

$$\widehat{\sigma}(-\alpha) = \begin{cases} \sigma(-\alpha), & \sigma(-\alpha) \in \Delta_- \\ \sigma(-\alpha) + \delta, & \sigma(-\alpha) \in \Delta_+ \end{cases}.$$

В следующей Лемме мы докажем, что обобщенные модули Вейля определены корректно, то есть W_μ не зависит от выбора σ и λ (таких что $\sigma(\lambda) = \mu$).

Лемма 5.2.3. *Модули W_μ определены корректно.*

Доказательство. Для начала отметим, что так как $\lambda_1, \lambda_2 \in Y_+$, равенство $\sigma_1(\lambda_1) = \sigma_2(\lambda_2)$ влечет за собой $\lambda_1 = \lambda_2$. Поэтому зафиксируем $\lambda \in Y_+$, $\sigma \in W$

и $\kappa \in \mathrm{stab}(\lambda) \subset W$. Наша цель – показать, что множество соотношений (5.2.2), (5.2.3), (5.2.4), (5.2.5) совпадает для пар σ,λ и $\sigma\kappa$,λ. Отметим, что для любого $\eta \in \Delta$: $\langle(\kappa^{-1}\eta)^\vee, \lambda\rangle = \langle\eta^\vee, \kappa\lambda\rangle = \langle\eta^\vee, \alpha\rangle$. Предположим, что для некоторого $\gamma \in \Delta_+$ $\kappa(\gamma) \in \Delta_-$. Тогда мы имеем:

$$0 \leq \langle\gamma^\vee, \lambda\rangle = \langle(\kappa\gamma)^\vee, \lambda\rangle \leq 0.$$

Поэтому $\langle\gamma^\vee, \lambda\rangle = 0$ и $\hat{\sigma}(e_\gamma)v = \hat{\sigma}(e_{\kappa\gamma}) = 0$ для обоих модулей.

Теперь предположим, что $\gamma \in \Delta_-$, $\kappa(\gamma) \in \Delta_-$. Тогда мы имеем соотношения в $W_{\sigma\kappa}$:

$$\widehat{\sigma\kappa} e_{\kappa^{-1}\gamma}^{-\langle(\kappa^{-1}\eta)^\vee,\lambda\rangle+1} v = 0.$$

Тогда, применяя соотношение $\widehat{\sigma\kappa} e_{\kappa^{-1}\gamma} = \widehat{\sigma} e_\gamma$, мы получаем все требуемые соотношения. $\square$

Замечание 5.2.4. Алгебра $\mathfrak{n}^{af}$ не содержит конечную подалгебру Картана $\mathfrak{h}$. Однако иногда оказывается удобным иметь дополнительные операторы $\mathfrak{h}$, действующие на W_μ (см. определение ниже). Причина, по которой мы не хотим расширить $\mathfrak{n}^{af}$ до всей аффинной борелевской подалгебры, заключается в том, что структура и свойства модулей W_μ не зависит от веса, определяющего действие $\mathfrak{h}$ на циклическом векторе.

Определение 5.2.5. Для $\nu \in Y$ определим W_μ^ν как $\mathfrak{n}^{af} \oplus \mathfrak{h}$-модуль, определенный соотношениями (5.2.1)– (5.2.5) и дополнительными соотношениями $hv = \nu(h)v$ для всех $h \in \mathfrak{h}$. Если $\nu = \mu$, мы опускаем верхний индекс и пишем W_μ для W_μ^μ.

Отметим, что все модули W_μ^ν с фиксированным μ изоморфны после ограничения на $\mathfrak{n}^{af}$. Модули W_μ^ν естественным образом градуированы подалгеброй Картана $\mathfrak{h}$. Они также допускают дополнительную градуировку степенью, определенную двумя следующими условиями: $\deg(v) = 0$ и операторы $x_\gamma \otimes t^k$ увеличивают степень на k. Определим характер формулой:

$$\mathrm{ch} W_\mu^\nu = \sum \dim W_\mu^\nu[\gamma, k] x^\gamma q^k,$$

где $W_\mu^\nu[\gamma, k]$ состоит из вектров степени k и $\mathfrak{g}$-веса γ. В частности, мы пишем $\mathrm{ch} W_\mu$ для характера W_μ^μ.

Замечание 5.2.6. Характер $\mathrm{ch} W_\mu^\nu$ – полином Лорана от x^{ω_i} и q. Подставляя $x_{\omega_i} = 1, q = 1$, получаем $\mathrm{ch} W_\mu^\nu(1, 1) = \dim W_\mu^\nu$.

Замечание 5.2.7. Обобщенные модули Вейля в общем случае не изоморфны модулям Демазюра (Отметим,что оба этих представления определены над алгеброй $\mathfrak{n}^{af}$). Именно, определяющие соотношения модулей Демазюра [J, FL2, N] имеют вид $(f_\alpha \otimes t^s)^m v = 0$, $s \geq 0$ и $(e_\alpha \otimes t^s)^m v = 0$, $s > 0$ для m достаточно большого. Отметим, что условия даны для любых возможных s. Однако для обобщенных модулей Вейля множество соотношений намного меньше: требуем только для $f_\alpha \otimes 1$ и $e_\alpha \otimes t$ обнуления в достаточно большой степени. Например, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ и $\mu \in -Y_+$, то W_μ не изоморфен модулю Демазюра.

Классическое определение модулей Вейля $W(\lambda)$, $\lambda \in Y_+$ слегка отличается от определения W_μ. А именно, $W(\lambda)$ – циклический $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}[t]$-модуль с образующим w, удовлетворяющим следующим соотношениям:

$$h \otimes t^k w = 0, k \geq 1;\ h \otimes 1w = \lambda(h)w \text{ для всех } h \in \mathfrak{h}; \tag{5.2.6}$$

$$e_\alpha \otimes t^k w = 0, k \geq 0;\ (f_{-\alpha} \otimes 1)^{\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle+1} w = 0, \text{ для любого } \alpha \in \Delta_+. \tag{5.2.7}$$

Лемма 5.2.8. *Для любого доминантного веса λ ограничение $W(\lambda)$ на $\mathfrak{n}^{af}$ изоморфно W_λ.*

Доказательство. Рассмотрим модуль W_λ^λ (т. е. определим действие $\mathfrak{h}$ на W_λ соотношением $h \otimes 1v = \lambda(h)v$). Отметим, что неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль V_λ, рассмотренный как $\mathfrak{n}_-$-модуль, определяется соотношениями $(f_\alpha \otimes 1)^{-\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle+1} w = 0$ (это следует из БГГ-резольвенты для V_λ). Следовательно, подпространство $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_-)v \subset W_\lambda^\lambda$ изоморфно V_λ и можно расширить структуру $\mathfrak{n}^{af} \oplus \mathfrak{h}$-модуля на W_λ^λ до структуры $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}[t]$-модуля, положив $e_\alpha \otimes t^k v = 0$. Отметим, что расширенный модуль определяется соотношениями (5.2.6),(5.2.7), и поэтому изоморфен $W(\lambda)$. □

Нам нужно еще одно определение модуля, зависящего от произвольного элемента весовой решетки. Пусть V – $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}[t]$-модуль. Тогда для произвольной константы $z \in \mathbb{K}$ он имеет следующую естественную структуру $\mathfrak{n}^{af}$-модуля: для $x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$

$$(x \otimes t^i)v = x \otimes (t - z)^i v.$$

Обозначим этот модуль V^z.

Пусть $\mu = \sigma(\lambda)$, где $\sigma \in W$, $\lambda \in Y_+$ и пусть $\lambda = \sum_{j=1}^M \omega_{k_j}$, $1 \leq k_j \leq n$ – произвольные (возможно, совпадающие) числа. Рассмотрим вектор $\bar{z} =$

$(z_1, \dots, z_M) \in \mathbb{K}^M$, где $z_a \neq z_b$, если $a \neq b$. Пусть $W(\omega_{k_j})$, $j = 1, \dots, M$ – модули Вейля ($\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}[t]$-модули), соответствующие фундаментальным весам, с циклическим вектором старшего веса $w_j \in W(\omega_{k_j})$. Существует структура циклического $\mathfrak{n}^{af}$-модуля на тензорном произведении $\bigotimes_{i=1}^M W^{z_j}(\omega_{k_j})$ с циклическим вектором $\sigma(w_1 \otimes \dots \otimes w_M)$, получаемая конструкцией фьюжен-произведения (см. [FeLo1],[FL2]). Именно, пусть $\mathrm{U}(\mathfrak{n}^{af})_s$ – градуировка универсальной обертывающей алгебры, такая что $x \otimes t^s \in \mathrm{U}(\mathfrak{n}^{af})_s$, $x \in \mathfrak{g}$. Тогда мы можем индуцировать фильтрацию F_s на $\bigotimes_{j=1}^M W^{z_j}(\omega_{k_j})$ с помощью формулы

$$F_s = \mathrm{U}(\mathfrak{n}^{af})_s \sigma(w_1 \otimes \dots \otimes w_M).$$

Определение 5.2.9. $\mathfrak{n}^{af}$-модуль $W(\omega_{k_1})_\sigma * \dots * W(\omega_{k_M})_\sigma$ – это ассоциированный градуированный модуль $\bigoplus_{s \geq 0} F_s / F_{s-1}$.

Пример 5.2.10. Предыдущее определение работает для произвольного $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}[t]$-модуля, не обязательно для фундаментальных модулей Вейля. Например, возьмем неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом V_λ с вектором старшего веса v_λ и сделаем из V_λ $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}[t]$-модуль, говоря, что $x \otimes t^k$ действует тривиально, кроме случая $k = 0$. Очевидно, операторы e_α и $f_{-\alpha}$ порождают все пространство V_λ из вектора $\sigma(v_\lambda)$. Теперь присвоим степень 1 всем операторам e_α и степень нуль всем операторам $f_{-\alpha}$. Тогда мы получим возрастающую фильтрацию F_s на V_λ, где s – степень монома, примененного к $\sigma(v_\lambda)$. Ассоциированное градуированное пространство – это модуль над $\mathfrak{n}^{af}$, построенный с помощью процедуры из Определения 5.2.9 для $M = 1$.

Лемма 5.2.11. *Пусть* $\lambda = \sum_{j=1}^M \omega_{k_j}$. *Тогда существует сюръективный гомоморфизм* $\mathfrak{n}^{af}$*-модулей*

$$W_{\sigma(\lambda)} \twoheadrightarrow W(\omega_{k_1})_\sigma * \dots * W(\omega_{k_M})_\sigma.$$

В частности, $\dim W_{\sigma(\lambda)} \geq \prod_{j=1}^M \dim W(\omega_{k_j})$.

Доказательство. Легко проверить, что соотншения из определения 5.2.2 выполняются в $W(\omega_{i_1})_\sigma * \dots * W(\omega_{i_M})_\sigma$. □

С статье [FL2] доказано, что отображние из Леммы 5.2.11 – изоморфизм для $\sigma = \mathrm{id}$ для алгебр Ли типов A, D, E. В частности, $\dim W_{\sigma(\lambda)} = \prod_{j=1}^M \dim W(\omega_{k_j})$.

5.2.2. КГБ и модули Вейля

В следующей Лемме мы приведем критерий существования ребер в квантовом графе Брюа. В части *ii)* под коротким корнем мы понимаем корень, для которого есть корень данной системы с большей длиной. В частности, у алгебр с простыми связями коротких корней нет.

Лемма 5.2.12. *Для $\sigma \in W$, $\gamma \in \Delta_+$ два следующих утверждения эквивалентны:*

i) существует ребро в квантовом графе Брюа $\sigma \xrightarrow{\gamma} \sigma s_\gamma$;

ii) не существует элементов $\alpha, \beta \in \Delta_+$, таких что $\alpha, \beta \neq \gamma$, $\alpha + \beta = 2\frac{\langle\alpha,\gamma\rangle}{\langle\gamma,\gamma\rangle}\gamma$, $\widehat{\sigma}(\alpha) + \widehat{\sigma}(\beta) = 2\frac{\langle\alpha,\gamma\rangle}{\langle\gamma,\gamma\rangle}\widehat{\sigma}(\gamma)$; если $\sigma\gamma \in \Delta_-$, то дополнительно γ не является коротким непростым корнем, лежащем в подалгебре ранга 2, образоавнной корнями Δ_+.

Доказательство. Предположим, что $\sigma(\gamma) \in \Delta_+$, тогда $\sigma s_\gamma(\gamma) \in \Delta_-$. Отметим, что $\sigma s_\gamma > \sigma$ в порядке Брюа и $l(\sigma)$ равен $|\{\eta \in \Delta_+ | \sigma(\eta) \in \Delta_-\}|$. Рассмотрим множество $\Delta_+ \cap s_\gamma \Delta_+$. Очевидным образом количества элементов этого множества, отправляемых в Δ_- с помощью σ и σs_γ, равны. Рассмотрим теперь множество $\Delta_+ \cap s_\gamma \Delta_-$. Если $\alpha \in \Delta_+, s_\gamma(\alpha) \in \Delta_-$, то $\langle\alpha,\gamma\rangle > 0$. Если $\sigma(\alpha) \in \Delta_-$ то $\sigma s_\gamma(\alpha) = \sigma(\alpha) - 2\frac{\langle\alpha,\gamma\rangle}{\langle\gamma,\gamma\rangle}\sigma(\gamma) \in \Delta_-$. Поэтому $l(\sigma s_\gamma) \geq l(\sigma) + 1$. Предположим, что $l(\sigma s_\gamma) \geq l(\sigma) + 1$. Тогда существует такое $\sigma(\alpha) \in \Delta_+$, $s_\gamma(\alpha) \in \Delta_-$, $\sigma s_\gamma(\alpha) \in \Delta_-$. Значит, существует $\alpha, \beta \in \Delta_+$ такое что $\alpha + \beta = 2\frac{\langle\alpha,\gamma\rangle}{\langle\gamma,\gamma\rangle}\gamma$, $\widehat{\sigma}(\alpha) + \widehat{\sigma}(\beta) = 2\frac{\langle\alpha,\gamma\rangle}{\langle\gamma,\gamma\rangle}\widehat{\sigma}(\gamma)$. Обратное утверждение может быть доказано тем же способом.

Предположим, что $\sigma(\gamma) \in \Delta_-$. Тогда $\sigma s_\gamma < \sigma$ в порядке Брюа. Рассмотрим множество $\Delta + \cap s_\gamma \Delta_+$. Аналогично предыдущему случаю, количества элементов этого множества, посылаемых в Δ_- с помощью σ и σs_γ, равны. Заметим, что $|\Delta_- \cap s_\gamma \Delta_+| \leq \langle 2\rho^\vee, \gamma\rangle - 1$. Если неравенство не строгое, то не существует квантовых ребер с отметкой γ. Строгое неравенство имеем в том и только том случае, когда γ – короткий непростой корень подалгебры ранга 2. Т. е. строгое неравенство выполняется в частности для *длинных* кокорней, которые не являются линейными комбинациями *простых длинных* кокорней. Поэтому ребро существует тогда и только тогда, когда $\sigma\left(\Delta_+ \cap s_\gamma \Delta_-\right) \subset \Delta_-$, $\sigma s_\gamma \left(\Delta_+ \cap s_\gamma \Delta_-\right) \subset \Delta_+$. Нетрудно видеть, что два этих условия эквивалентны. Предположим, что не существует элемента $\alpha \in \Delta_+ \cap s_\gamma \Delta_-$, такого что $\sigma(\alpha) \in \Delta_+$. Тогда условия *ii)* выполняются для α и $\beta = -s_\gamma(\alpha)$. □

Определение 5.2.13. Пусть $\bar\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r)$ – последовательность аффинных корней. Рассмотрим вес $\sigma(\lambda)$, где $\sigma \in W$, $\lambda \in Y_+$. Тогда обобщенный модуль Вейля с характеристиками $W_{\sigma(\lambda)}(\bar\beta, m)$, $m = 0, \dots, r$ – это циклический $\mathfrak{n}^{af}$-модуль с образующим v и следующими соотношениями: $\mathfrak{h} \otimes t^k v = 0$, $k > 0$ и

$$(e_\alpha \otimes t)v = 0, \alpha \in \sigma(\Delta_+);\ (f_{-\alpha} \otimes 1)v = 0,\ -\alpha \in \sigma(\Delta_+);$$
$$\widehat{\sigma}(f_{-\alpha})^{l_{\alpha,m}+1} v = 0,$$

где $l_{\alpha,m} = \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle - |\{\beta_i | \mathrm{Re}\beta_i = -\alpha, i \le m\}|$.

Замечание 5.2.14. Если $m = 0$, то $W_{\sigma(\lambda)}(\bar\beta, 0) \simeq W_{\sigma(\lambda)}$. Теперь предположим, что $m = r$ и последовательность корней $\bar\beta$ получается из приведенного разложения $t_{-\omega_i}$. Тогда в соответствии с Предложением 5.1.13, часть a), мы имеем изоморфизм

$$W_{\sigma(\lambda)}(\bar\beta, r) \simeq W_{\sigma(\lambda-\omega_i)}.$$

Пример 5.2.15. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ и пусть $\beta_1 = -\alpha_1 + \delta$, $\beta_2 = -\alpha_1 - \alpha_2 + \delta$ (т. е. $\bar\beta$ получается из приведенного разложения $t_{-\omega_1}$, $\beta_1 = \beta_1(t_{-\omega_1})$, $\beta_2 = \beta_2(t_{-\omega_1})$). Предположим, что $\lambda = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ и $m_1 > 0$. Тогда у нас есть модули $W_{\sigma(\lambda)}(\bar\beta, 0)$, $W_{\sigma(\lambda)}(\bar\beta, 1)$ и $W_{\sigma(\lambda)}(\bar\beta, 2)$. Модуль $W_{\sigma(\lambda)}(\bar\beta, 0)$ изоморфен обобщенному модуль Вейля $W_{\sigma(\lambda)}$. Определяющие соотношения для модуля $W_{\sigma(\lambda)}(\bar\beta, 1)$ отличаются от определяющих соотношений для модуля $W_{\sigma(\lambda)}$ только на

$$\widehat{\sigma}(f_{-\alpha_1})^{\langle \alpha_1^\vee, \lambda \rangle} v = 0$$

(без плюс единицы в показателе). Определяющие соотношения модуля $W_{\sigma(\lambda)}(\bar\beta, 2)$ отличаются от определяющих соотношений модуля $W_{\sigma(\lambda)}$ двумя соотношениями:

$$\widehat{\sigma}(f_{-\alpha_1})^{\langle \alpha_1^\vee, \lambda \rangle} v = 0,$$
$$\widehat{\sigma}(f_{-\alpha_1-\alpha_2})^{\langle (\alpha_1+\alpha_2)^\vee, \lambda \rangle} v = 0.$$

Следовательно, $W_{\sigma(\lambda)}(\bar\beta, 2)$ изоморфен $W_{\sigma(\lambda-\omega_1)}$.

Для (полу)простой алгебры Ли L обозначим через $\mathfrak{n}^{af}(L)$ алгебру Ли $\mathfrak{n}^{af}$, соответствующую L, $\mathfrak{n}^{af}(L) \subset \widehat{L}$ (в случае отсутствия возможности путаницы, мы опускаем L и пишем просто $\mathfrak{n}^{af}$).

Замечание 5.2.16. Все определения выше даны для простой $\mathfrak{g}$. Однако все работает и в полупростом случае. Нам это обобщение нужно только в Лемме 5.2.17 для L типа $A_1 \oplus A_1$.

Лемма 5.2.17. *Пусть $\tau_1, \tau_2 \in \Delta_+$ – два корня из корневой системы $\mathfrak{g}$. Пусть L_2 – полупростая алгебра Ли с корневой системой, порожденной корнями τ_1, τ_2. Для $\mathfrak{n}^{af}(\mathfrak{g})$-модуля $W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}, m)$ определим $\mathfrak{n}^{af}(L_2)$-подмодуль $M_2 = \mathrm{U}(\mathfrak{n}^{af}(L_2))v \subset W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}, m)$, где v – циклический вектор и m удовлетворяет $\sigma(\mathrm{Re}\beta_{m+1}) \in \mathbb{Z}\langle\tau_1, \tau_2\rangle$. Тогда M_2 – фактор некоторого L_2-модуля вида $W_{\widetilde{\sigma}(\widetilde{\lambda})}(\widetilde{\beta}, \widetilde{m})$, где $\widetilde{\sigma}$, $\widetilde{\lambda}$, $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{m}$ – параметры для L_2. В дополнение, $\sigma\mathrm{Re}\beta_{m+1} = \widetilde{\sigma}\mathrm{Re}\widetilde{\beta}_{\widetilde{m}+1}$.*

Доказательство. Без потери общности предположим, что τ_1, τ_2 – базис $\mathbb{Z}\langle\tau_1, \tau_2\rangle \cap \Delta$. Если $L_2 \simeq A_1 \oplus A_1$, то утверждение очевидно. Если $L_2 \simeq G_2$, то $L_2 = \mathfrak{g}$ и тогда доказывать нечего.

Рассмотрим корневую систему $\sigma^{-1}\mathbb{Z}\langle\tau_1, \tau_2\rangle \cap \Delta$. Пусть η_1, η_2 – базис этой системы, такой что $\eta_1, \eta_2 \in \Delta_+$ и η_1, η_2 – простые корни системы $\sigma^{-1}\mathbb{Z}\langle\tau_1, \tau_2\rangle \cap \Delta$. Пусть $\widetilde{\sigma}$ – единственный элемент группы Вейля корневой системы $\mathbb{Z}\langle\tau_1, \tau_2\rangle \cap \Delta$, такой что $\widetilde{\sigma}^{-1}\sigma\eta_i \in \Delta_+$, $i = 1, 2$. Пусть $\widetilde{\lambda}$ – доминантный вес алгебры Ли L_2, такой что $\langle\eta_i^\vee, \lambda\rangle = \langle\tau_i^\vee, \widetilde{\lambda}\rangle$. Если $m = 0$, то имеем следующие соотношения в $W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}, m)$:

$$(\widehat{\sigma}e_{a_1\eta_1 + a_2\eta_2})^{\langle(a_1\eta_1 + a_2\eta_2)^\vee, \lambda\rangle + 1}v = 0.$$

Перепишем эти соотношения в терминах M_2:

$$(\widehat{\widetilde{\sigma}}e_{a_1\tau_1 + a_2\tau_2})^{\langle(a_1\tau_1 + a_2\tau_2)^\vee, \tilde{\lambda}\rangle + 1}v = 0.$$

Таким образом M_2 – фактор $W_{\widetilde{\sigma}(\widetilde{\lambda})}$.

Рассмотрим теперь случай общего m. Существуют три возможных случая: или $-\mathrm{Re}^\vee\beta_{m+1}$ равен одному из простых кокорней алгебры Ли ранга 2 (т. е. $\eta_i^\vee$), или сумме $\eta_1^\vee + \eta_2^\vee$, или $-\mathrm{Re}\beta_{m+1}^\vee = \eta_1^\vee + 2\eta_2^\vee$.

Пусть $\mathrm{Re}\beta_{m+1}^\vee = -\eta_i^\vee$. Тогда применяя следствие 5.1.14, *ii*), *iii*) мы получаем для корня ι:

$$\text{если } \iota^\vee = \eta_1^\vee + \eta_2^\vee, \text{ то } l_{\iota,m} = l_{\eta_1,m} + l_{\eta_2,m},$$
$$\text{если } \iota^\vee = \eta_1^\vee + 2\eta_2^\vee \text{ то } l_{\iota,m} = l_{\eta_1,m} + 2l_{\eta_2,m}.$$

Поэтому M_2 – фактор $W_{\widetilde{\sigma}(l_{\eta_1,m}\omega_1+l_{\eta_2,m}\omega_2)}$.

Теперь предположим, что $-\mathrm{Re}\beta^\vee_{m+1} = \eta^\vee_1 + \eta^\vee_2$. Тогда в силу Следствия 5.1.14, *ii*), получаем, что

$$l_{-\mathrm{Re}\beta_{m+1}} = l_{\eta_1,m} + l_{\eta_2,m} + 1.$$

Тогда мы получаем для $L_2 \simeq A_2$ сюръекцию

$$W_{\widetilde{\sigma}((l_{\eta_1,m}+1)\omega_1+l_{\eta_2,m}\omega_2)}(\bar{\beta}^1, 1) \twoheadrightarrow M_2.$$

Это завершает доказательство для $L_2 \simeq A_2$.

Нам остается только случай $L_2 \simeq C_2$, который получается непосредственно из Следствия 5.1.14, *iii*). □

5.2.3. Процедура разборки

Зафиксируем $i = 1, \ldots, n$, такое что $\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle > 0$ (т. е. ω_i является слагаемым λ). В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда последовательность корней $\bar{\beta}^i = (\beta^i_1, \ldots, \beta^i_r)$ появляется из разложения $t_{-\omega_i}$, т. е. $\beta^i_j = \beta_j(t_{-\omega_i})$. Мы будем придерживаться следующей стратегии. Для начала рассмотрим следующую последовательность сюръекций обобщенных модулей Вейля с характеристиками:

$$W_{\sigma(\lambda)} = W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, 0) \to W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, 1) \to \cdots \to W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, r) = W_{\sigma(\lambda-\omega_i)}.$$

Для того, чтобы проконтролировать структуру $W_{\sigma(\lambda)}$, нам нужно описать ядро

$$\ker(W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m) \to W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m+1)). \tag{5.2.8}$$

Ядро может быть тривиальным или нетривиальным. Оно тривиально тогда и только тогда, когда нет стрелки $\sigma \to \sigma s_{\mathrm{Re}\beta_{m+1}}$ в квантовом графе Брюа. Поэтому для начала возьмем корень $\beta^i_{m_1+1}$, такой что есть ребро $\sigma \to \sigma s_{\mathrm{Re}\beta^i_{m_1+1}}$ в КГБ, и перейдем к ядру (5.2.8). Отметим, что мы можем не выбрать ничего на первом шагу (это соответствует случаю $m_1 = 0$). Следующим шагом опишем ядро $W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m_1) \to W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m_1+1)$. Мы отождествим это ядро с обобщенным модулем Вейля с характеристиками вида $W_{\sigma_1(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m_1+1)$ для $\sigma_1 = \sigma s_{\mathrm{Re}\beta^i_{m_1+1}} \in W$. Имеем последовательность сюръекций

$$W_{\sigma_1(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m_1+1) \to W_{\sigma_1(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m_1+2) \to \cdots \to W_{\sigma_1(\lambda)}(\bar{\beta}^i, r) = W_{\sigma_1(\lambda-\omega_i)}.$$

Далее, ядро $\ker(W_{\sigma_1(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m_2) \to W_{\sigma_1(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m_2+1))$ нетривиально, если нет стрелки $\sigma_1 \to \sigma_1 s_{\mathrm{Re}\beta^i_{m_2+1}}$ в КГБ. На следующем шагу выберем корень β_{m_2+1}, $m_2 > m_1$ так, что существует путь

$$\sigma \to \sigma s_{\mathrm{Re}\beta^i_{m_1+1}} \to \sigma s_{\mathrm{Re}\beta^i_{m_1+1}} s_{\mathrm{Re}\beta^i_{m_2+1}}$$

в КГБ. Каждый такой путь задает обобщенный модуль Вейля с характеристиками. Мы продолжаем, сделав всего r шагов (отметим, что на каждом шагу мы можем пропустить выбор корня β^i_j). После r-го шага мы получаем процедуру разборки, представляющую изначальный модуль $W_{\sigma(\lambda)}$ в виде множества подфакторов. Мы имеем следующие важные свойства:

- Все подфакторы имеют вид $W_{\kappa(\lambda-\omega_i)}$ для некоторого $\kappa \in W$.
- Подфакторы соответствуют путям в КГБ длины не более r вида

  $$\sigma \to \sigma s_{\mathrm{Re}\beta^i_{m_1+1}} \to \sigma s_{\mathrm{Re}\beta^i_{m_1+1}} s_{\mathrm{Re}\beta^i_{m_2+1}} \to \cdots \to \sigma s_{\mathrm{Re}\beta^i_{m_1+1}} \ldots s_{\mathrm{Re}\beta^i_{m_p+1}}$$

  для некоторого $0 \le m_1 < \cdots < m_p < r$, $p < r$.

Мы покажем, что общая картина дает нам теоретико-представленческий аналог Теоремы 5.1.16.

В следующей Теореме мы опишем свойства модулей $W_{\kappa(\lambda)}(\beta, s)$ в терминах квантового графа Брюа. Напомним:

$$l_{\alpha,m} = \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle - |\{\beta_i| - \mathrm{Re}\beta_i = \alpha, i \le m\}|.$$

Теорема 5.2.18. *Пусть $\bar{\beta}^i = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$ – последоваетльность для некоторого приведенного разложения элемента $t_{-\omega_i}$. Тогда мы имеем:*

i) Предположим, что нет ребра $\sigma \xrightarrow{\mathrm{Re}\beta_{m+1}} \sigma s_{\mathrm{Re}\beta_{m+1}}$, тогда

$$W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m) \simeq W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m+1).$$

ii) Предположим, что есть ребро $\sigma \xrightarrow{\mathrm{Re}\beta_{m+1}} \sigma s_{\mathrm{Re}\beta_{m+1}}$. Тогда мы имеем следующую точную последовательность

$$0 \to \mathrm{U}(\mathfrak{n}^{af})\widehat{\sigma}(f_{\mathrm{Re}\beta_{m+1}})^{l_{\alpha,m}} v \to W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m) \to W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m+1) \to 0.$$

iii) Предположим, что есть ребро $\sigma \xrightarrow{\mathrm{Re}\beta_{m+1}} \sigma s_{\mathrm{Re}\beta_{m+1}}$. Тогда имеется сюръекция

$$W_{\sigma s_{\mathrm{Re}\beta_{m+1}}(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m+1) \twoheadrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{n}^{af})\widehat{\sigma}(f_{\mathrm{Re}\beta_{m+1}})^{l_{\mathrm{Re}\beta_{m+1},m}} v.$$

iv) Существует точная последовательность

$$0 \to \sum_{\sigma \xrightarrow{\mathrm{Re}\beta_{m+k}} \sigma s_{\mathrm{Re}\beta_{m+k}}} \mathrm{U}(\mathfrak{n}^{af})\widehat{\sigma}(f_{\mathrm{Re}\beta_{m+k}})^{l_{\mathrm{Re}\beta_{m+k},m+k}} v \to W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m) \to W_{\sigma(\lambda-\omega_i)} \to 0 \tag{5.2.9}$$

(сумма берется по всем $k \geq 1$, таким что ребро $\sigma \xrightarrow{\mathrm{Re}\beta_{m+k}} \sigma s_{\mathrm{Re}\beta_{m+k}}$ существует в квантовом графе Брюа).

Доказательство. Докажем i). Предположим, что нет ребра $\sigma \xrightarrow{\mathrm{Re}\beta_{m+1}} \sigma s_{\mathrm{Re}\beta_{m+1}}$. В соответствии с Леммой 5.2.12 мы имеем алгебру ранга 2 L_2, такую что $\sigma(\mathrm{Re}\beta_{m+1})$ – корень для L_2. Тогда мы или имеем $\tau, \eta \in \Delta_+$, $\tau, \eta \neq \gamma$, удовлетворяющие

$$\tau + \eta = \frac{\langle \tau, \mathrm{Re}\beta_{m+1} \rangle}{\langle \mathrm{Re}\beta_{m+1}, \mathrm{Re}\beta_{m+1} \rangle} \mathrm{Re}\beta_{m+1},$$
$$\widehat{\sigma}(\tau) + \widehat{\sigma}(\eta) = \frac{\langle \tau, \mathrm{Re}\beta_{m+1} \rangle}{\langle \mathrm{Re}\beta_{m+1}, \mathrm{Re}\beta_{m+1} \rangle} \widehat{\sigma}(\mathrm{Re}\beta_{m+1}),$$

или $\mathrm{Re}\beta_{m+1}$ – непростой короткий корень некоторой подалгебры ранга 2 и $\sigma(\mathrm{Re}\beta_{m+1}) \in \Delta_-$. Теперь утверждение следует из Леммы 5.2.17 и вычислений в ранге 2 из раздела 5.3.

Теперь предположим, что есть ребро $\sigma \xrightarrow{\mathrm{Re}\beta_{m+1}} \sigma s_{\mathrm{Re}\beta_{m+1}}$. Часть ii) следует прямо из Определения 5.2.13. Докажеме iii). Мы должны показать, что выполняются следующие соотношения:

$$\widehat{\sigma s_{\mathrm{Re}\beta_{m+1}}}(f_{-\alpha})^{l_{\alpha,m+1}} \widehat{\sigma}(f_{\mathrm{Re}\beta_{m+1}})^{l_{\mathrm{Re}\beta_{m+1},m+1}} v = 0, \alpha \in \Delta_+. \tag{5.2.10}$$

Рассмотрим алгебру Ли с корневой системой, натянутой на корни α и $\mathrm{Re}\beta_{m+1}$. Наше утверждение следует теперь из Леммы 5.2.17 и прямых вычислений из раздела 5.3.

Часть iv) является немедленным следствием Определения 5.2.13 и Леммы 5.1.13, a). □

Следствие 5.2.19.

$$\mathrm{ch} W_{\sigma(\lambda+\omega_i)} \leq \sum_{p \in \mathcal{QB}(\sigma, \lambda, \bar{\beta}^i, \lambda)} q^{\deg(\mathrm{qwt}(p))} \mathrm{ch} W^{wt(\mathrm{end}(p))}_{dir(\mathrm{end}(p))(\lambda)},$$

$$\mathrm{ch} W_{\sigma(\lambda)} \leq C_\sigma^{t_\lambda},$$

где неравенство означает покоэффициентные неравенства.

Доказательство. Применяя Теорему 5.2.18, мы получаем, что $W_{\sigma(\lambda+\omega_i)}$ может быть разобран на подфакторы, изоморфные факторам $W_{dir(\mathrm{end}(p))(\lambda)}$, $p \in \mathcal{QB}(\sigma, \lambda, \bar{\beta}^{i,\lambda})$. Поэтому нам нужно только доказать, что циклические векторы этих модулей имеют требуемый вес. Отметим, что для циклического вектора $v \in W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m)$, $v_1 = (\widehat{\sigma} f_{\beta_{m+1}})^{l_{\mathrm{Re}\beta_{m+1},m}} v$ мы имеем:

$$x^{wt(v_1)} q^{\mathrm{deg} v_1} = \begin{cases} x^{wt(v)+l_{\mathrm{Re}\beta_{m+1},m}\sigma(\mathrm{Re}\beta_{m+1})} q^{\mathrm{deg} v}, \ if \ \sigma\mathrm{Re}\beta_{m+1} \in \Delta_-; \\ x^{wt(v)+l_{\mathrm{Re}\beta_{m+1},m}\sigma(\mathrm{Re}\beta_{m+1})} q^{\mathrm{deg} v + l_{\mathrm{Re}\beta_{m+1},m}}, \ if \ \sigma\mathrm{Re}\beta_{m+1} \in \Delta_+. \end{cases}$$

Теперь покажем, что $l_{\mathrm{Re}\beta_{m+1},m} = \deg \beta_{m+1}$. Первым делом предположим, что $m = 0$. Тогда $l_{\mathrm{Re}\beta_j,0} = -\langle \mathrm{Re}\beta_j, \lambda \rangle$. Теперь если β_j– первый корень в $\bar{\beta}^i$ с фиксированной действительной частью, то Предложение 5.1.13, a) и Лемма 5.1.11 дают нам нужные равенства. Предположим теперь, что $m > 0$. Пусть β_{j_a} – последовательность $\bar{\beta}^i$, таких что $\mathrm{Re}\beta_{j_a} = \mathrm{Re}\beta$. Тогда $\deg \beta_{j_{a+1}} = \deg \beta_{j_a} - 1$, $l_{\beta_{j_{a+1}}, j_{a+1}-1} = l_{\beta_{j_a}, j_a - 1} - 1$. Тогда q-компонента веса циклического элемента подмодуля равна $\deg(\mathrm{qwt}(p))$.

Теперь нужно сравнить конечные части весов, приходящих из комбинаторики и теории представлений. Пусть $\sigma = \mathrm{dir}(\mathrm{end}(p))$. Предположим, что действительная часть веса v равна $\sigma(\lambda)$. Тогда для $\sigma\mathrm{Re}\beta_{m+1} \in \Delta_-$ действительная часть веса v_1 равна $\sigma(\lambda) + \deg(\beta_{m+1})\sigma(\mathrm{Re}\beta_{m+1})$. Однако:

$$\sigma(\lambda) + \deg(\beta_{m+1})\sigma(\mathrm{Re}\beta_{m+1}) = wt(end(p) s_{\beta_{m+1}}).$$

Действительно, $end(p) = t_{\sigma(\lambda)}\sigma$ и

$$t_{\sigma(\lambda)}\sigma s_{\beta_{m+1}} = t_{\sigma(\lambda)}\sigma t_{\deg(\beta_{m+1})\mathrm{Re}\beta_{m+1}} s_{\mathrm{Re}\beta_{m+1}} = \\ t_{\sigma(\lambda)} t_{\deg(\beta_{m+1})\sigma(\mathrm{Re}\beta_{m+1})} \sigma s_{\mathrm{Re}\beta_{m+1}}.$$

Аналогичным образом мы получаем утверждение для $\sigma\mathrm{Re}\beta_{m+1} \in \Delta_+$. Этим мы завершаем доказательство Следствия. □

Обозначим $E_\lambda(1,1,0)$ специализацию несимметрического многочлена Макдональда в $t = 0$, $q = 1$ и всех $x_i = x^{\omega_i} = 1$.

Теорема 5.2.20. *Пусть w_0 – самый длинный элемент группы Вейля W. Предположим, что $\dim W(\omega_i) = E_{w_0\omega_i}(1,1,0)$ для всех фундаментальных весов ω_i. Тогда неравенства из следствия 5.2.19 являются в действительности равенствами.*

Доказательство. Предположим сначала, что для доминантных весов ν, μ мы имеем (см. [I],[N]):

$$\dim W(\nu+\mu) = \dim W(\nu) \cdot \dim W(\mu). \tag{5.2.11}$$

Более того, для специализаций в $q = 1$ *симметрических* полиномов Макдональда $P_\lambda(x,1,t)$ мы имеем $P_{\nu+\mu}(x,1,t) = P_\nu(x,1,t) \cdot P_\mu(x,1,t)$ и для любого доминантного λ мы имеем равенство $P_\lambda(x,q,0) = E_{w_0(\lambda)}(x,q,0)$ (см. [Ch], стр. 15 и (1.38)). Поэтому для любого доминантного λ:

$$\dim W(\lambda) = E_{w_0\lambda}(1,1,0).$$

Мы знает, что для любого $\sigma \in W$ выполнено:

$$\dim W_{\sigma\lambda} \geq \dim W(\lambda) = E_{w_0\lambda}(1,1,0)$$

(Лемма 5.2.11 плюс (5.2.11)). Отметим, что $E_{w_0\lambda}(1,1,0)$ – количество путей вида $t_{\omega_0(\lambda)}$ в квантовом графе Брюа, начинающихся в единичном элементе W. Мы также знаем, что $\dim W_{\sigma(\omega_i)}$ меньше или равен количеству путей в квантовом графе Брюа типа $\bar\beta^i$, начинающихся в точке σ (для любого $\sigma \in W$). Предположим, что для некоторого $\sigma \in W$ и фундаментального веса ω_i выполняется строгое наравенство $\dim W_{\sigma(\omega_i)} > E_{w_0\omega_i}(1,1,0)$. Для разложения $\sigma = s_{j_1} \dots s_{j_u}$ мы определяем $\lambda = \omega_{j_1} + \dots + \omega_{j_u} + \omega_i$. Тогда применяя Теорему 5.1.16 $(u+1)$ раз мы получаем:

$$E_{w_0\lambda}(1,1,0) = \sum_{p_1 \in \mathcal{QB}(\mathrm{id},\lambda-\omega_{j_1},\bar\beta^{j_1,\lambda})} \sum_{p_2 \in \mathcal{QB}(endp_1,\lambda-\omega_{j_1}-\omega_{j_2},\bar\beta^{j_2,-\omega_{j_1}})} \dots \sum_{p_u \in \mathcal{QB}(endp_{u-1},\omega_i,\bar\beta^{j_u,\omega_{j_u}+\omega_i})} \sum_{p_{u+1} \in \mathcal{QB}(endp_u,0,\bar\beta^{i,\omega_i})} 1. \tag{5.2.12}$$

Каждый раз в k-й сумме мы суммируем как минимум $E_{w_0\omega_{j_k}}(1,1,0)$ слагаемых. Действительно, количество слагаемых не меньше, чем $\dim W_{\kappa(\lambda)}$ для некоторого $\kappa \in W$. Но мы также имеем

$$\dim W_{\kappa(\lambda)} \geq \dim W(\lambda) = E_{w_0\omega_{j_k}}(1,1,0).$$

Поэтому если мы хотя бы раз просуммировали строго больше, чем $E_{w_0\omega_{j_k}}(1,1,0)$ слагаемых, тогда $\dim W(\lambda) > \prod_{k=1}^m \dim W(\omega_{j_m}) \cdot dimW(\omega_i)$, что потиворечит (5.2.11). Применяя Следствие 5.1.14, $i)$ мы имеем, что

$\mathrm{Re}\beta_1^j = -\alpha_j$. Для любого $\kappa \in W$ и любого простого корня α_j существует стрелка $\kappa \xrightarrow{\alpha_j} \kappa s_j$ в КГБ. Поэтому в последней сумме мы хотя бы раз имеем $\sum_{p_{u+1}\in\mathcal{QB}(\sigma,0,\bar\beta^{i,\omega_i})} 1$, т. е. $\mathrm{dir}(end(p_u)) = \sigma$. Поэтому для любого $\sigma \in W$ имеется точно $\dim W(\omega_i)$ путей типа $\bar\beta^i$. Поэтому для любого доминантного $\mu = \sum_{k=1}^N \omega_{j_k}$ имеем

$$\mathrm{dim} W_{\sigma(\lambda)} \leq C_\sigma^{t_{w_0\mu}}(1,1) = \prod_{k=1}^N \dim W(\omega_{j_k}).$$

Теперь, применяя Лемму 5.2.11, мы получаем $\dim W_{\sigma(\lambda)} = \prod_{k=1}^N \dim W(\omega_{j_k})$. □

Следствие 5.2.21. *Пусть λ – доминантный вес, $\sigma \in W$. Тогда* $\mathrm{ch} W_{\sigma(\lambda)} = C_\sigma^{t_{w_0\lambda}}$.

Мы получили следующее утверждение (см. [I] для $\mathfrak{g}$ типов A, D, E).

Следствие 5.2.22. *Пусть λ – доминантный вес. Тогда для произвольной простой $\mathfrak{g}$*

$$E_{w_0(\lambda)}(x,q,0) = \mathrm{ch}\, W(\lambda).$$

Мы также получаем теоретико-представленческую интерпретацию специализаций несимметрических многочленов Макдональда в $t = \infty$.

Следствие 5.2.23. *Пусть λ – антидоминмнтный вес. Тогда:*

$$E_\lambda(x,q^{-1},\infty) = chW_\lambda.$$

5.3. Случаи малых рангов

5.3.1. Тип A_1

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. Тогда мы имеем два типа обобщенных модулей Вейля, соответствующих $\sigma = \mathrm{id}$ и $\sigma = s$. Здесь есть только один фундаментальный вес ω_1, и, так как $\bar\beta^1$ состоит из одного элемента, $\beta_1^1 = -\alpha + \delta$. Модули вида W_λ, $\lambda = n\omega$, $n \geq 0$ изоморфны модулям Демазюра уровня 1. Модуль $W_{n\omega}$, $n \geq 0$ определяется соотношениями

$$(f\otimes 1)^{n+1}v_n = 0,\ (e\otimes t)v_n = 0,\ h\otimes t^k v_n = 0, k > 0.$$

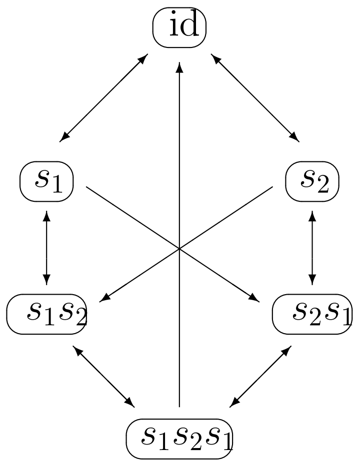


Рис. 5.2. для типа A_2

Теперь $W_{-n\omega}$, $n > 0$ определяются соотношениями

$$f \otimes 1 v_{-n} = 0,\ (e \otimes t)^{n+1} v_{-n} = 0,\ h \otimes t^k v_{-n} = 0, k > 0.$$

Имеем $\dim W_{n\omega} = \dim W_{-n\omega} = 2^n$.

В силу того, что $\bar\beta^1$ состоит из одного корня, модули Вейля с характеристиками совпадают с классическими модулями Вейля.

$$W_{\sigma\lambda}(\bar\beta^1, 0) \simeq W_{\sigma\lambda},\ W_{\sigma\lambda}(\bar\beta^1, 1) \simeq W_{\sigma(\lambda-\omega)}.$$

Мы имеем следующие свойства обобщенных модулуй Вейля:

$$W_{n\omega} \supset \mathrm{U}(\mathfrak{n}^{af})(f \otimes 1)^n v_n \simeq W_{-(n-1)\omega},$$
$$W_{n\omega}/\mathrm{U}(\mathfrak{n}^{af})(f \otimes 1)^n v_n \simeq W_{(n-1)\omega}.$$

Аналогично:

$$W_{-n\omega} \supset \mathrm{U}(\mathfrak{n}^{af})(e \otimes t)^n v_{-n} \simeq W_{(n-1)\omega},$$
$$W_{-n\omega}/\mathrm{U}(\mathfrak{n}^{af})(e \otimes t)^n v_{-n} \simeq W_{-(n-1)\omega}.$$

5.3.2. Тип A_2

Цель этого раздела – описать точно структуру обобщенных модулей Вейля для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$. Более точно, мы докажем Теорему 5.2.18 в типе A_2. Квантовый граф Брюа в типе A_2 выглядит как на Нисунке 5.3.2

Рассмотрим модуль $W_{\sigma(\lambda)}$, где $\lambda = n_1\omega_1 + n_2\omega_2$ и σ – элемент группы перестановок S_3. Предположим, что n_1 – положительное и зафиксируем $\beta_1 = -\alpha_1+\delta$, $\beta_2 = -\alpha_1-\alpha_2+\delta$, тогда $\beta_1 = \beta_1(t_{-\omega_1})$, $\beta_2 = \beta_2(t_{-\omega_2})$ (процедура разборки в случае ω_2 является абсолютно аналогичной). Так как последовательность $\bar\beta$ зафиксирована, мы опускаем $\bar\beta$, когда говорим об обобщенных модулях Вейля и пишем просто $W_{\sigma(\lambda)}(m)$ вместо $W_{\sigma(\lambda)}(\bar\beta, m)$. Мы имеем следующую последовательность сюръекций $\mathrm{U}(\mathfrak{n}^{af})$-модулей:

$$W_{\sigma(\lambda)} \simeq W_{\sigma(\lambda)}(0) \twoheadrightarrow W_{\sigma(\lambda)}(1) \twoheadrightarrow W_{\sigma(\lambda)}(2) \twoheadrightarrow W_{\sigma(\lambda)}(2) \simeq W_{\sigma(\lambda-\omega_1)}. \qquad (5.3.1)$$

Применим обозначения:

$$e_1 = e_{\alpha_1},\ e_2 = e_{\alpha_2},\ e_{12} = e_{\alpha_1+\alpha_2}$$

и аналогично для f_α. Также обозначим отражения в S_3 с помощью s_1, s_2 и s_{12}.

Случай 1. Пусть $\sigma = \mathrm{id}$. Тогда соотношения в $W_{\sigma(\lambda)}$ имеют вид $h\otimes t^k v = 0$, $k > 0$ и

$$f_1^{n_1+1}v = f_2^{n_2+1}v = f_{12}^{n_1+n_2+1}v = 0,\ e_\alpha \otimes tv = 0.$$

Рассмотрим последовательность (5.3.1).

Для начала, пусть нет ребра $\mathrm{id} \xrightarrow{\alpha_{12}} s_{12}$ в квантовом графе Брюа. Мы должны показать (Теорема 5.2.18, i)) что отображение $W_\lambda(1) \twoheadrightarrow W_\lambda(2)$ – изоморфизм. Действительно, единственное отличие между определяющими соотношениями – это $f_{12}^{n_1+n_2+1}v = 0$ в $W_\lambda(1)$ вместо $f_{12}^{n_1+n_2}v = 0$ в $W_\lambda(2)$. Однако у нас есть соотношения $f_1^{n_1}v = 0$ и $f_2^{n_2+1}v = 0$ в $W_\lambda(1)$, которые влекут $f_{12}^{n_1+n_2}v = 0$ в $W_\lambda(1)$.

Далее, рассмотрим отображение $W_\lambda(0) \twoheadrightarrow W_\lambda(1)$. Очевидно, ядро этого отображения задается $\mathrm{U}(\mathfrak{n}^{af})f_1^{n_1}v$ (Теорема 5.2.18, ii)). Мы хотим доказать (Теорема 5.2.18, iii)) что существует сюръективный гомоморфизм

$$W_{s_1(\lambda)}(1) \to (\mathrm{U}(\mathfrak{n}^{af})f_1^{n_1}v.$$

Другими словами, нам нужно доказать следующие равенства в W_λ:

$$f_1 f_1^{n_1}v = 0,\ (e_2\otimes t)f_1^{n_1}v = 0,\ (e_{12}\otimes t)f_1^{n_1}v = 0,\ (\mathfrak{h}\otimes t\mathbb{K}[t])f_1^{n_1}v = 0,$$
$$(e_1\otimes t)^{n_1}f_1^{n_1}v = 0,\ f_{12}^{n_2+1}f_1^{n_1}v = 0,\ f_2^{n_1+n_2+1}f_1^{n_1}v = 0.$$

Равенства первой строки очевидны. Рассмотрим теперь равенства второй строки. Первое равенство следует из картины для A_1, второе и третье равенства очевидно выполняются в $\mathfrak{sl}_3$-модуле V_λ и, поэтому, и в W_λ.

Поэтому ядро отображения $W_\lambda(0) \twoheadrightarrow W_\lambda(1) \simeq W_{\lambda-\omega_1}$ накрывается модулем $W_{s_1(\lambda)}(1)$ (в действительности, это накрытие является изоморфизмом, что мы и докажем ниже). Для окончания доказательства рассмотрим сюръекцию

$$W_{s_1(\lambda)}(1) \to W_{s_1(\lambda)}(2).$$

Ядро этой сюръекции равно $\mathrm{U}(\mathfrak{n}^{af})f_2^{n_1+n_2}v$. Мы хотим показать, что существует сюръективное отображение

$$W_{s_1 s_{12}(\lambda)}(2) \to (\mathrm{U}(\mathfrak{n}^{af})f_2^{n_1+n_2}v.$$

То есть мы хотим показать, что следующие равенства выполняются в $W_{s_1(\lambda)}(1)$:

$$f_2 f_2^{n_1+n_2}v = 0,\ f_{12}f_2^{n_1+n_2}v = 0,\ (e_1 \otimes t)f_2^{n_1+n_2}v = 0,\ \mathfrak{h} \otimes t\mathbb{K}[t]v = 0, \quad (5.3.2)$$
$$f_1^{n_2+1}f_2^{n_1+n_2}v = 0,\ (e_2 \otimes t)^{n_1+n_2}f_2^{n_1+n_2}v = 0,\ (e_{12} \otimes t)^{n_1}f_2^{n_1+n_2}v = 0. \quad (5.3.3)$$

Напомним определяющие равенства $W_{s_1(\lambda)}(1)$:

$$f_1 v = 0,\ (e_2 \otimes t)v = 0,\ (e_{12} \otimes t)v = 0,\ \mathfrak{h} \otimes t\mathbb{K}[t] = 0,$$
$$(e_1 \otimes t)^{n_1}v = 0,\ f_{12}^{n_2+1}v = 0,\ f_2^{n_1+n_2+1}v = 0.$$

Соотношения (5.3.2) могут быть легко получены (например, $(e_1 \otimes t)f_2^{n_1+n_2}v$ пропорционален $(e_{12} \otimes t)f_2^{n_1+n_2+1}v$). Теперь выведем соотношения (5.3.2). Соотношение $f_1^{n_2+1}f_2^{n_1+n_2}v = 0$ может быть получено коммутированием $f_1^{n_2+1}$ сквозь $f_2^{n_1+n_2}$ и применением соотношения $f_1 v = 0$ и $f_{12}^{n_2+1}v = 0$. Соотношение $(e_2 \otimes t)^{n_1+n_2}f_2^{n_1+n_2}v = 0$ следует из случая A_1. Соотношение $(e_{12} \otimes t)^{n_1}f_2^{n_1+n_2}v = 0$ может быть получено коммутированием $(e_{12} \otimes t)^{n_1}$ сквозь $f_2^{n_1+n_2}$ и применением соотношений $(e_{12} \otimes t)v = 0$, $(e_1 \otimes t)^{n_1}v = 0$.

Мы получили, что модуль $W_{\sigma(\lambda)}$ может быть разложен на три подфактора. Каждый подфактор является фактором $W_{\kappa(\lambda-\omega_1)}$ для некоторого $\kappa \in S_3$. По индукции по $n_1 + n_2$, размерность каждого подфактора не превышает $3^{n_1+n_2-1}$. Следовательно, $\dim W_\lambda \leq 3^{n_1+n_2}$. Поскольку обратное неравенство выполняется всегда, мы получаем, что $\dim W_\lambda = 3^{n_1+n_2}$ и все подфакторы имеют вид $W_{\kappa(\lambda-\omega_1)}$.

Теперь легко проверить, что случаи $\sigma = s_1 s_2$ и $\sigma = s_2 s_1$ эквивалентны случаю $\sigma = \mathrm{id}$, потому что трехмерная нильпотентная подалгебра, образованая корневыми операторами f_α и $e_\alpha \otimes t$, действующими нетривиально на v, изоморфна алгебре Гейзенберга.

Случай 2. Рассмотрим противоположный случай, т. е. когда $\sigma = s_{\alpha_1+\alpha_2} = s_{12}$ – самый длинный элемент. Тогда соотношения в $W_{\sigma(\lambda)}$ имеют следующий вид

$$(e_1 \otimes t)^{n_2+1} v = 0,\ (e_2 \otimes t)^{n_2+1} v = 0,\ (e_{12} \otimes t)^{n_1+n_2+1} v = 0,\ f_\alpha v = 0.$$

Мы имеем две стрелки $\mathrm{s}_{12} \xrightarrow{\alpha_{12}} \mathrm{id}$ и $\mathrm{s}_{12} \xrightarrow{\alpha_1} \mathrm{s}_{12}\mathrm{s}_1$ в квантовом графе Брюа. Поэтому нам нужно описать ядра отображений $W_{s_{12}(\lambda)}(0) \twoheadrightarrow W_{s_{12}(\lambda)}(1)$ и $W_{s_{12}(\lambda)}(1) \twoheadrightarrow W_{s_{12}(\lambda)}(2)$.

Во-первых, рассмотрим отображение $W_{s_{12}(\lambda)}(0) \twoheadrightarrow W_{s_{12}(\lambda)}(1)$. Очевидно, ядро этого отображения равно $\mathrm{U}(\mathfrak{n}^{af})(e_2 \otimes t)^{n_1} v$ (Теорема 5.2.18, *ii*)). Мы хотим доказать (Теорема 5.2.18, *iii*)) что существует сюръективный гомоморфизм

$$W_{s_{12}s_1(\lambda)}(1) \to \mathrm{U}(\mathfrak{n}^{af})(e_2 \otimes t)^{n_1} v.$$

Другими словами, мы хотим доказать следующие соотношения в $W_{s_{12}(\lambda)}$:

$$f_1 (e_2 \otimes t)^{n_1} v = 0,\ f_{12} (e_2 \otimes t)^{n_1} v = 0,$$
$$(e_2 \otimes t)(e_2 \otimes t)^{n_1} v = 0,\ (\mathfrak{h} \otimes t\mathbb{K}[t])(e_2 \otimes t)^{n_1} v = 0$$

(это – очевидно) и

$$f_2^{n_1} (e_2 \otimes t)^{n_1} v = 0,\ (e_{12} \otimes t)^{n_2+1} (e_2 \otimes t)^{n_1} v = 0,\ (e_1 \otimes t)^{n_1+n_2+1} (e_2 \otimes t)^{n_1} v = 0.$$

Первое равенство следует из случая A_1. Второе соотношение приходит из равенства $f_1^{n_1} (e_{12} \otimes t)^{n_1+n_2+1} v = 0$. Для доказательства третьего равенства мы перенесем $(e_2 \otimes t)^{n_1}$ налево в выражении $(e_1 \otimes t)^{n_1+n_2+1} (e_2 \otimes t)^{n_1}$. Все слагаемые в сумме содержат сомножитель $(e_1 \otimes t)^i$, $i > n_2$, находящийся справа, и поэтому обнуляют v в $W_{s_{12}(\lambda)}$.

Во-вторых, рассмотрим отображение $W_{s_{12}(\lambda)}(1) \twoheadrightarrow W_{s_{12}(\lambda)}(2)$. Очевидно, ядро этого отображения задается как $\mathrm{U}(\mathfrak{n}^{af})(e_{12} \otimes t)^{n_1+n_2} v$ (Теорема 5.2.18, *ii*)). Мы хотим доказать существование сюръективного гомоморфизма

$$W_\lambda(2) \to \mathrm{U}(\mathfrak{n}^{af})(e_{12} \otimes t)^{n_1+n_2} v.$$

Другими словами, мы хотим доказать следующие равенства в $W_{s_{12}(\lambda)}(1)$:

$$(e_1 \otimes t)(e_{12} \otimes t)^{n_1+n_2} v = 0, \ (e_2 \otimes t)(e_{12} \otimes t)^{n_1+n_2} v = 0,$$
$$(e_{12} \otimes t)(e_{12} \otimes t)^{n_1+n_2} v = 0, \ (\mathfrak{h} \otimes t\mathbb{K}[t])(e_2 \otimes t)^{n_1} v = 0$$

(это – очевидно) и

$$f_1^{n_1}(e_{12} \otimes t)^{n_1+n_2} v = 0, \ f_2^{n_2+1}(e_{12} \otimes t)^{n_1+n_2} v = 0, \ f_{12}^{n_1+n_2}(e_{12} \otimes t)^{n_1+n_2} v = 0.$$

Третье равенство следует из случая A_1. Первое соотношение может быть получено коммутированием $f_1^{n_1}$ направо сквозь $(e_{12} \otimes t)^{n_1+n_2}$, так как $(e_2 \otimes t)^{n_1} v = 0$ в $W_{s_{12}(\lambda)}(1)$. Второе соотношение может быть получено тем же способом.

Наш следующий шаг – рассмотреть модуль $W_{s_{12}s_1(\lambda)}(1)$. Нас интересует сюръекция $W_{s_1s_2(\lambda)}(1) \to W_{s_1s_2(\lambda)}(2)$ ($s_{12}s_1 = s_1s_2$). Так как нет стрелки вида $s_1s_2 \xrightarrow{\alpha_{12}} s_2$ в КГБ, мы должны доказать, что нижеследующая сюръекция – изоморфизм. Другими словами, мы должны доказать, что соотношения $(e_1 \otimes t)^{n_1+n_2} v = 0$ выполняются в $W_{s_1s_2(\lambda)}(1)$. Мы имеем следующие соотношения в $W_{s_1s_2(\lambda)}(1)$: $f_2^{n_1} v = 0$ и $(e_{12} \otimes t)^{n_2+1} v = 0$. В силу $[e_{12} \otimes t, f_2] = e_1 \otimes t$, мы получаем $(e_1 \otimes t)^{(n_1-1)+n_2+1} v = 0$.

Так же, как и в случае 1, мы можем разложить модуль $W_{s_{12}(\lambda)}$ на три подфактора вида $W_{\kappa(\lambda-\omega_1)}$ (точнее говоря, фактора этих модулей).

Легко видеть, что случаи $\sigma = s_1$ и $\sigma = s_2$ эквивалентны случаю $\sigma = s_{12}$.

5.3.3. Тип C_2

Цель этого подраздела – доказать Теорему 5.2.18 для $\mathfrak{g}$ типа C_2. Самый длинный элемент w_0 равен -1, поэтому $t_{w_0\omega_i} = t_{-\omega_i}$. Обозначим через α_1 короткий простой корень, через α_2 длинный простой корень, $\Delta_+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_1, \alpha_2 + 2\alpha_1\}$ и множество соответствующих кокорней – это $\{\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee, 2\alpha_2^\vee + \alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee + \alpha_1^\vee\}$. Квантовый граф Брюа в этом случае выглядит следующим образом:

Предложение 5.3.1. *Пусть $\bar\beta^i$ – последовательность β для некоторого приведенного разложения элемента $t_{-\omega_i}$, $i = 1, 2$. Если нет ребра $\sigma \xrightarrow{\mathrm{Re}\beta_{m+1}} \sigma s_{\mathrm{Re}\beta_{m+1}}$, то*

$$W_{\sigma(\lambda)}(\bar\beta^i, m) \simeq W_{\sigma(\lambda)}(\bar\beta^i, m+1).$$

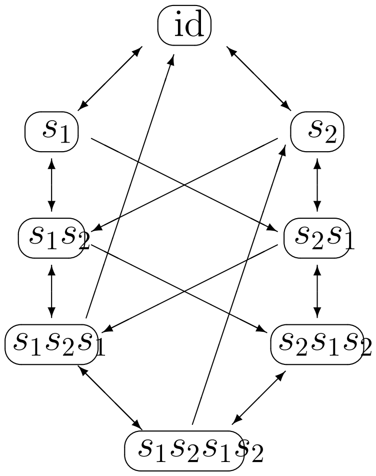


Рис. 5.3. для типа C_2

Доказательство. Лемма 5.2.12 говорит нам, что нужно рассмотреть два случая. Предположим, что существуют элементы $\tau, \eta \in \Delta_+$, такие что:

$$\tau, \eta \neq -\mathrm{Re}\beta_{m+1},$$

$$\tau + \eta = 2\frac{\langle \tau, \mathrm{Re}\beta_{m+1}\rangle}{\langle \mathrm{Re}\beta_{m+1}, \mathrm{Re}\beta_{m+1}\rangle}\mathrm{Re}\beta_{m+1},$$

$$\widehat{\sigma}(\tau) + \widehat{\sigma}(\eta) = 2\frac{\langle \tau, \mathrm{Re}\beta_{m+1}\rangle}{\langle \mathrm{Re}\beta_{m+1}, \mathrm{Re}\beta_{m+1}\rangle}\widehat{\sigma}\mathrm{Re}\beta_{m+1}.$$

Тогда $-\mathrm{Re}\beta_{m+1}$ равен $\alpha_2 + \alpha_1$ или $\alpha_2 + 2\alpha_1$. Предположим, что $-\mathrm{Re}\beta_{m+1} = \alpha_2 + \alpha_1$. Тогда $\tau = \alpha_1$, $\eta = \alpha_2$, $e_{\widehat{\sigma}(-\mathrm{Re}\beta_{m+1})}$ – элемент алгебры Ли с простыми корневыми векторами $e_{\widehat{\sigma}(\alpha_1)}$, $e_{\widehat{\sigma}(\alpha_2)}$. Применяя Следствие 5.1.14, *iii*) мы имеем, что $l_{\mathrm{Re}\beta_{m+1},m} > l_{\alpha_2,m} + 2l_{\alpha_1,m}$. Но в силу БГГ резольвенты мы получаем, что $\widehat{\sigma}(e_{\mathrm{Re}\beta_{m+1}})^{l_{\alpha_2,m}+2l_{\alpha_1,m}+1}v = 0$.

Теперь предположим, что $-\mathrm{Re}\beta_{m+1} = \alpha_2 + 2\alpha_1$. Тогда $\tau = \alpha_1, \eta = \alpha_2+\alpha_1$. Если подпространство, порожденное $\widehat{\sigma}f_{-\alpha_1}, \widehat{\sigma}f_{-\alpha_2-2\alpha_1}, \widehat{\sigma}f_{-\alpha_2-\alpha_1}, \widehat{\sigma}f_{-\alpha_2}$, замкнуто относительно скобки Ли, то мы можем аналогично предыдущему случаю применить БГГ резольвенту. Обратно, если подпространство, порожденное

$$\widehat{\sigma}f_{-\alpha_1}, \widehat{\sigma}f_{-\alpha_2-2\alpha_1}, \widehat{\sigma}f_{-\alpha_2-\alpha_1}, \widehat{\sigma}e_{\alpha_2} \otimes t$$

замкнуто относительно скобки Ли, то требуемое равенство эквивалентно

$$(\widehat{\sigma}e_{\alpha_2} \otimes t)^{l_{\alpha_2,m}+l\alpha_1,m+1}(\widehat{\sigma}f_{-\alpha_2-\alpha_1})^{l_{\alpha_2+\alpha_1,m}+1}v = 0.$$

Теперь предположим, что $\widehat{\sigma}(\mathrm{Re}\beta_{m+1}) \in \Delta_-$, $-\mathrm{Re}\beta_{m+1} = \alpha_1 + \alpha_2$. Тогда единственный случай, не покрываемый предыдущими рассуждениями – это $\sigma = w_0$ (самый длинный элемент группы Вейля). Применяя Следствие 5.1.14, *iii)* мы имеем $l_{\alpha_1+\alpha_2} = l_{2\alpha_1+\alpha_2} + l_{\alpha_2} + 1$. Но применяя прямые вычисления в алгебре, порожденной $e_{2\alpha_1+\alpha_2} \otimes t$, $e_{\alpha_1+\alpha_2} \otimes t$, $e_{\alpha_1} \otimes t$, f_{α_2}, мы получаем:

$$(e_{\alpha_1+\alpha_2} \otimes t)^{l_{2\alpha_1+\alpha_2}+l_{\alpha_2}+1} v = 0.$$

Этим доказательство Леммы завершается. □

Предложение 5.3.2. *Пусть $\bar{\beta}^i$ – последовательность β' для некоторого приведенного разложения элемента $t_{-\omega_i}$, $i = 1,2$. Если существует ребро $\sigma \xrightarrow{\mathrm{Re}\beta_{m+1}} \sigma s_{\mathrm{Re}\beta_{m+1}}$, то существует сюръекция*

$$W_{\sigma s_{\mathrm{Re}\beta_{m+1}}(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m+1) \twoheadrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{n}^{af})\widehat{\sigma}(f_{\mathrm{Re}\beta_{m+1}})^{l_{\mathrm{Re}\beta_{m+1},m}} v.$$

Доказательство. Нам нужно доказать следующие равенства:

$$\widehat{\sigma s_{\mathrm{Re}\beta_{m+1}}}(f_\tau)^{l_{\tau,m+1}} \widehat{\sigma}(f_{\mathrm{Re}\beta_{m+1}})^{l_{\mathrm{Re}\beta_{m+1},m}} v = 0. \tag{5.3.4}$$

Отметим, что если оба $\mathrm{Re}\beta_{m+1}$ и τ – длинные корни, то $\mathbb{Z}\langle \mathrm{Re}\beta_{m+1}, \tau\rangle \simeq A_1 \oplus A_1$. Поэтому мы можем применить Предложение 5.2.17.

Для натуральных чисел a, b, c, таких что $a + b + c \geq m_1 + 2m_2 + 1$, докажем следующее равенство:

$$(\widehat{\sigma}(f_{\alpha_2}))^a (\widehat{\sigma}(f_{\alpha_2+\alpha_1}))^b (\widehat{\sigma}(f_{\alpha_2+2\alpha_1}))^c v = 0. \tag{5.3.5}$$

Если $\sigma = \mathrm{id}$ или $s_{\alpha_1+\alpha_2}$, то $\widehat{\sigma}(\mathfrak{n}_-)$ изоморфен $\mathfrak{n}_-$, и поэтому равенство является следствием БГГ-резольвенты. Предположим, что $\sigma = s_{\alpha_1}$ или w_0. Применим убывающую индукцию по c. Очевидно, что равенство выполняется для $c \geq m_1 + m_2 + 1$ и для $b = 0$. Предположим, что равенство выполняется для $c > c_0$. Тогда, применяя $\widehat{\sigma}(e_{\alpha_1+\delta}) = f_{\alpha_1}$, запишем:

$$\begin{aligned}
0 = f_{\alpha_1}\widehat{\sigma}(f_{\alpha_2}))^a (\widehat{\sigma}(f_{\alpha_2+\alpha_1}))^{b-1} (\widehat{\sigma}(f_{\alpha_2+2\alpha_1}))^{c_0+1} v = \\
\widehat{\sigma}(f_{\alpha_2}))^{a+1} (\widehat{\sigma}(f_{\alpha_2+\alpha_1}))^{b-2} (\widehat{\sigma}(f_{\alpha_2+2\alpha_1}))^{c_0+1} v + \\
\widehat{\sigma}(f_{\alpha_2}))^{a} (\widehat{\sigma}(f_{\alpha_2+\alpha_1}))^{b} (\widehat{\sigma}(f_{\alpha_2+2\alpha_1}))^{c_0} v.
\end{aligned}$$

Поэтому требуемое равенство выполняется для a, b, c_0.

Теперь предположим, что $\sigma = s_{\alpha_2}$ или $\sigma = s_2 s_1$. Тогда, умножая равенство $f_{-\alpha_1}^{m_1+2m_2+1} v = 0$ на $(f_{-\alpha_1}\widehat{\sigma}(f_{-\alpha_1-\alpha_2})^c$, мы получаем требуемое уравнение для $a = 0$. Тогда требуемое соотношение эквивалентно следующему соотношению:

$$(\widehat{\sigma}(e_{\alpha_1 \otimes t}))^a (\widehat{\sigma}(f_{\alpha_2+\alpha_1}))^{a+b} (\widehat{\sigma}(f_{\alpha_2+2\alpha_1}))^c v = 0.$$

Предположим, наконец, что $\sigma = s_{\alpha_1+\alpha_2}$ или $\sigma = s_1 s_2$. Мы докажем требуемое равенство индукцией по b. Оно очевидно для $b = 0$. Предположем, что оно выполняется для $b = b_0$. Тогда требуемое равенство эквивалентно

$$\widehat{\sigma}(e_{\alpha_1} \otimes t)(\widehat{\sigma}(f_{\alpha_2}))^a (\widehat{\sigma}(f_{\alpha_2+\alpha_1}))^{b_0-1} (\widehat{\sigma}(f_{\alpha_2+2\alpha_1}))^{c+1} v = 0.$$

Равенство $(\widehat{\sigma}(f_{\alpha_1}))^a (\widehat{\sigma}(f_{\alpha_2+2\alpha_1}))^b v = 0$ для $a + b \geq m_1 + m_2 + 1$ может быть получено сходным образом. Наконец, все неравенства (5.3.4) или эквивалентны частным случаям (5.3.5) и последнего равенства, или могут быть легко из них получены. □

5.3.4. Тип G_2

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли типа G_2. Тогда КГБ типа G_2 может быть найден в [LL], стр.19, рисунок 2. Применяя Предложение 5.1.13, мы получаем следующие последовательности $\bar{\beta}^1, \bar{\beta}^2$:

$$\begin{gathered}
\beta_1^{1\vee} = \alpha_1^\vee + \delta, \beta_2^{1\vee} = \alpha_2^\vee + 3\alpha_1^\vee + 3\delta, \beta_3^{1\vee} = \alpha_2^\vee + 2\alpha_1^\vee + 2\delta, \beta_4^{1\vee} = 2\alpha_2^\vee + 3\alpha_1^\vee + 3\delta, \\
\beta_5^{1\vee} = \alpha_2^\vee + 3\alpha_1^\vee + 2\delta, \beta_6^{1\vee} = \alpha_2^\vee + \alpha_1^\vee + \delta, \beta_7^{1\vee} = 2\alpha_2^\vee + 3\alpha_1^\vee + 2\delta, \\
\beta_8^{1\vee} = \alpha_2^\vee + 2\alpha_1^\vee + \delta, \beta_9^{1\vee} = \alpha_2^\vee + 3\alpha_1^\vee + \delta, \beta_{10}^{1\vee} = 2\alpha_2^\vee + 3\alpha_1^\vee + \delta. \quad (5.3.6)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\beta_1^{2\vee} = \alpha_2^\vee + \delta, \beta_2^{2\vee} = \alpha_2^\vee + \alpha_1^\vee + \delta, \beta_3^{2\vee} = 2\alpha_2^\vee + 3\alpha_1^\vee + 2\delta, \\
\beta_4^{2\vee} = \alpha_2^\vee + 2\alpha_1^\vee + \delta, \beta_5^{2\vee} = \alpha_2^\vee + 3\alpha_1^\vee + \delta, \beta_6^{2\vee} = 2\alpha_2^\vee + 3\alpha_1^\vee + \delta. \quad (5.3.7)
\end{gathered}$$

Квантовый граф Брюа – это следующий граф. Есть все стрелки из элементов длины p в элементы длины $p+1$, $0 \leq p \leq 5$. Есть квантовая стрелка из элемента с приведенным разложением вида $(\prod s_{i_k})s_j$ в элемент $(\prod s_{i_k})$, $j, i_k \in \{1, 2\}$, из любого элемента с приведенныи разложением $(\prod s_{i_k})s_2 s_1 s_2$ в элемент $(\prod s_{i_k})$ и из любого элемента с приведенным разложением $(\prod s_{i_k})s_1 s_2 s_1 s_2 s_1$ в элемент $(\prod s_{i_k})$.

Применяя эти данные, мы получаем, что $E_{-\omega_1}(1,1,0) = 15$, $E_{-\omega_2}(1,1,0) = 7$. С другой стороны, размерности фундаментальных представлений известны, см. Предложение 5.4.1: $\dim W(\omega_1) = 15$, $\dim W(\omega_2) = 7$.

Предложение 5.3.3. *Предположим, что нет стрелки* $w \xrightarrow{\alpha} ws_{\mathrm{Re}\beta^i_{m+1}}$. *Тогда:*

$$W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m) \simeq W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m+1).$$

Доказательство. Лемма 5.2.12 говорит нам, что мы должны рассмотреть два случая. Предположим, что существуют элементы $\tau, \eta \in \Delta_+$, такие что:

$$\tau, \eta \neq (-\mathrm{Re}\beta^i_{m+1}),$$

$$\tau + \eta = 2\frac{\langle \tau, \mathrm{Re}\beta^i_{m+1}\rangle}{\langle \mathrm{Re}\beta^i_{m+1}, \mathrm{Re}\beta^i_{m+1}\rangle}\mathrm{Re}\beta^i_{m+1},$$

$$\widehat{\sigma}(\tau) + \widehat{\sigma}(\eta) = 2\frac{\langle \tau, \mathrm{Re}\beta^i_{m+1}\rangle}{\langle \mathrm{Re}\beta^i_{m+1}, \mathrm{Re}\beta^i_{m+1}\rangle}\widehat{\sigma}\mathrm{Re}\beta^i_{m+1}.$$

Тогда мы имеем:

$$\tau + \eta = \mathrm{Re}\beta^i_{m+1},$$

$$\widehat{\sigma}(\tau) + \widehat{\sigma}(\eta) = \widehat{\sigma}\mathrm{Re}\beta^i_{m+1}.$$

Предположим, что $-\mathrm{Re}\beta^i_{m+1} = \alpha_1 + \alpha_2$. Тогда $m > 0$ и $l_{\beta^i_{m+1},m} > 3l_{\alpha_1,m} + l_{\alpha_2,m}$. Применяя БГГ резольвенту мы получаем:

$$(\widehat{\sigma}(f_{\mathrm{Re}\beta^i_{m+1}}))^{3l_{\alpha_1,m}+l_{\alpha_2,m}+1}v = 0.$$

Теперь предположим, что $-\mathrm{Re}\beta^i_{m+1} = \alpha_1 + 2\alpha_2$. Тогда $l_{\beta^i_{m+1},m} > l_{\alpha_1+\alpha_2,m} + l_{\alpha_2,m}$. Если $[\widehat{\sigma}(f_{\alpha_2}), \widehat{\sigma}(f_{\alpha_1})] = \widehat{\sigma}(f_{\alpha_1+\alpha_2})$, тогда, применяя БГГ резольвенту, мы получаем

$$(\widehat{\sigma}(f_{\mathrm{Re}\beta^i_{m+1}}))^{l_{\alpha_1+\alpha_2,m}+l_{\alpha_2,m}}v = 0.$$

Обратно, $[\widehat{\sigma}(e_{\alpha_1} \otimes t), \widehat{\sigma}(f_{\alpha_1+\alpha_2})] = \widehat{\sigma}(f_{\alpha_2})$ и, применяя этот факт, мы получаем:

$$\widehat{\sigma}(f_{\mathrm{Re}\beta^i_{m+1}}))^{l_{\alpha_1+\alpha_2,m}+l_{\alpha_2,m}+1}v = 0.$$

Аналогичным образом доказывается утверждение для $-\mathrm{Re}\beta^i_{m+1} = \alpha_1 + 3\alpha_2$ или $-\mathrm{Re}\beta^i_{m+1} = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$.

Теперь предположим, что не существует таких τ и η что $-\mathrm{Re}\beta^i_{m+1}$ – непростой короткий и $\widehat{\sigma}\beta^i_{m+1} \in \Delta_+$. Тогда единственные возможные случаи – это $\sigma = w_0$ или $\sigma = s_{2\alpha_1+3\alpha_2}$. Тогда прямыми вычислениями мы получаем, что $(\widehat{\sigma} f_{\beta^i_{m+1}})^{l_{\beta^i_{m+1},m}}$ лежит в левом идеале, порожденном $(\widehat{\sigma} f_\alpha)^{l_{\alpha,m}}$, $\alpha \neq \beta^i_{m+1}$. $\square$

Предложение 5.3.4. *Рассмотрим модуль $W_{\sigma(\Lambda)}(\bar{\beta}^i, m)$. Если есть ребро*

$$\sigma \xrightarrow{\mathrm{Re}\beta^i_{m+1}} \sigma s_{\mathrm{Re}\beta^i_{m+1}}$$

в квантовом графе Брюа, то $U(\mathfrak{n}^{af})\hat{\sigma}(f_{\mathrm{Re}\beta^i_{m+1}})^{l_{\mathrm{Re}\beta^i_{m+1},m}}v$ – фактормодуль $W_{\sigma s_{\mathrm{Re}\beta^i_{m+1}}}(\lambda)$.

Доказательство. Положим $v_1 = \hat{\sigma}(f_{\mathrm{Re}\beta^i_{m+1}})^{l_{\mathrm{Re}\beta^i_{m+1},m}}v$. Если $\langle \mathrm{Re}\beta^i_{m+1}, \eta\rangle = 0$, тогда легко видеть, что $[f_{\mathrm{Re}\beta^i_{m+1}}, f_\eta] = 0$ и поэтому $\mathbb{Z}\langle \mathrm{Re}\beta^i_{m+1}, \eta\rangle \cap \Delta$ – корневая система типа $A_1 \oplus A_1$. Поэтому требуемое утверждение является постым следствием Леммы 5.2.17.

Если $\mathrm{Re}\beta^i_{m+1}$ – длинный, то для любого длинного $\eta \neq \mathrm{Re}\beta^i_{m+1}$ мы имеем, что $\mathbb{Z}\langle \mathrm{Re}\beta^i_{m+1}, \eta\rangle \cap \Delta$ – корневая система типа A_2. Действительно, алгебра Ли, натянутая на все длинные корни G_2, изоморфна A_2. Поэтому утверждение является следствием Леммы 5.2.17.

Отметим, что если $s_{\mathrm{Re}\beta^i_{m+1}}\eta \in \Delta_-$, то требуемые равенства могут быть получены прямым вычислением.

Теперь предположим, что $\mathrm{Re}\beta^i_{m+1} = \alpha_1$. Тогда $m = 0$. Отметим, что случаи длинного η или η, ортогонального α_1 уже разобраны. Докажем утверждение для $\eta = \alpha_2$ и $\eta = \alpha_1 + 3\alpha_2$. Если $\hat{\sigma}(\alpha_1), \hat{\sigma}(\alpha_2), \hat{\sigma}(\alpha_1 + \alpha_2)$ – линейно зависимы, то утверждение является следствием БГГ резольвенты. Предположим, что $\hat{\sigma}(\alpha_2) \in \Delta_+$. Тогда $0 = (\hat{\sigma} e_{\alpha_2} \otimes t)^{3m_1+2m_2+2}(\hat{\sigma} f_{-\alpha_1-3\alpha_2})^{m_1+m_2+1}v = \hat{\sigma} f^{m_2+1}_{-\alpha_1-\alpha_2}\hat{\sigma} f^{m_1}_{-\alpha_1}v$. В оставшемся случае мы имеем:

$$0 = (\hat{\sigma} e_{2\alpha_1+3\alpha_2} \otimes t)^{m_1}(\hat{\sigma} f_{-\alpha_1-\alpha_2})^{3m_1+m_2+1}v = \hat{\sigma} f^{m_2+1}_{-\alpha_1-\alpha_2}\hat{\sigma} f^{m_1}_{-\alpha_1}v.$$

Аналогичным образом доказываем, что $(\hat{\sigma} f_{-\alpha_2})^{3m_1+m_2+1}(\hat{\sigma} f_{-\alpha_1})^{m_1}v = 0$.

Теперь рассмотрим случай $\mathrm{Re}\beta^i_{m+1} = -2\alpha_1 - 3\alpha_2$. Единственные оставшиеся случаи (т. е. случай неортогонального к $\mathrm{Re}\beta^i_{m+1}$ и короткого η) – это $\eta = -\alpha_1 - \alpha_2$ и $\eta = -\alpha_1 - 2\alpha_2$. Мы имеем $l_{\alpha_1+\alpha_2} + l_{\alpha_1+2\alpha_2} = l_{2\alpha_1+3\alpha_2} - 1$. Доказательство в данном случае прямое. Например, для $\eta = \alpha_1 + \alpha_2$:

$$\widehat{\sigma}(e_{\alpha_1+\alpha_2} \otimes t)^{3m_1+m_2}\widehat{\sigma}(f_{-2\alpha_1-3\alpha_2})^{2m_1+m_2}v = 0$$

применяя $(\widehat{\sigma}(f_{\alpha_1+\alpha_2}\otimes t^k)^{l_{\alpha_1+\alpha_2}+1}=0$ и $(\widehat{\sigma}(f_{\alpha_1}\otimes t^k)^{l_{\alpha_1}+1}=0$, $k\geq 0$. Аналогичное прямое доказательство работает для $\mathrm{Re}\beta^i_{m+1}=-\alpha_1-3\alpha_2$.

Теперь нам нужно рассмотреть случай короткого $\mathrm{Re}\beta^i_{m+1}$. Если $\mathrm{Re}\beta^i_{m+1}=-\alpha_1-2\alpha_2$, тогда требуемые соотношения могут быть получены прямым вычислением. Предположим, что $\mathrm{Re}\beta^i_{m+1}=-\alpha_2$. В этом случае $m=0$. Тогда соотнршение $(\hat{\sigma}e_{\alpha_1+3\alpha_2})^{m_1+1}(\hat{\sigma}e_{\alpha_2})^{m_2}v=0$ может быть получено применением одного из двух следующих аргументов. Если корни $(\hat{\sigma}e_{\alpha_1+3\alpha_2}),(\hat{\sigma}e_{\alpha_1}),(\hat{\sigma}e_{\alpha_2})$ линейно зависимы, то мы можем применить БГГ резольвенту. Если они линейно независимы, то требуемое равенство следует из соотношений

$$(\hat{\sigma}f_{\alpha_1+2\alpha_2})^{m_1+1}(\hat{\sigma}e_{\alpha_1+3\alpha_2})^{m_1+m_2+1}v=0.$$

Независимо от σ применяя БГГ резольвенту мы получаем:

$$(\hat{\sigma}e_{\alpha_1})^{m_1+m_2+1}(\hat{\sigma}e_{\alpha_2})^{m_2}v=0.$$

Два оставшихся случая могут быть получены сходным образом.

Для $-\mathrm{Re}\beta^i_{m+1}=\alpha_1+\alpha_2$ все тербуемые соотношения могут быть получены подобным образом. $\square$

5.4. Фундаментальные веса

Цель этого раздела – доказать, что $\dim W(\omega_i)=E_{w_0\omega_i}(1,1,0)$ для любого i. Мы для начала сформулируем результат о структуре фундаменталиных модулей Вейля $W(\omega_i)$ из [I, C, HKOTY]. Если $\mathfrak{g}$ без кратных связей, то $W(\omega_i)$ изоморфен соответствующему модулю Демазюра уровня 1, и поэтому в силу теоремы Иона, $\mathrm{ch}W(\omega_i)=E_{w_0\omega_i}(x,q,0)$. Для других типов имеет место следующее утверждение:

Предложение 5.4.1. *Модули Вейля $W(\omega_i)$ имеют следующее разложение в сумму неприводимых $\mathfrak{g}$-модулей:*

- *Если $\mathfrak{g}$ типа B, то $W(\omega_i)\simeq V_{\omega_i}\oplus qV_{\omega_{i-2}}\oplus q^2V_{\omega_{i-4}}\oplus\dots$.*
- *Если $\mathfrak{g}$ типа C, то $W(\omega_i)\simeq V_{\omega_i}$.*
- *Если $\mathfrak{g}$ типа F_4, то*

$$W(\omega_1)=V_{\omega_1}\oplus qV_0,\ W(\omega_2)=V_{\omega_2}\oplus q(V_{\omega_1}\oplus V_{2\omega_4})\oplus q^2V_{\omega_1}\oplus q^3V_0,$$
$$W(\omega_3)=V_{\omega_3}\oplus qV_{\omega_1},\ W(\omega_4)=V_{\omega_4}.$$

- *Если $\mathfrak{g}$ типа G_2, то $W(\omega_1) = V_{\omega_1} \oplus qV_0$ и $W(\omega_2) = V_{\omega_2}$.*

Нам нужно следующее Предложение.

Предложение 5.4.2. *Для доминантного веса λ мы имеем:*

$$E_{w_0(\lambda)}(x,0,0) = \mathrm{ch}(V_\lambda).$$

Доказательство. Несимметрические многочлены Макдональда образуют ортогональный базис относительно скалярного произведения Чередника. Если мы специализируем это произведение в $t = 0, q = 0$, мы получим скалярное произведение Вейля:

$$(f,g) = \left(f\bar{g} \prod_{\alpha\in\Delta_+} (1 - x^\alpha) \right)_0 ,$$

где F_0 – свободный член F и $\bar{g}$ получается из g обращением всех переменных x^{ω_i} . Функции $\mathrm{ch}(V_\lambda)$ образуют ортонормальный базис в соответствии с этим произведением. Наконец, $E_{w_0(\lambda)}(x,0,0)$ – W-инвариантен и имеет старшим весом x^λ. ☐

Лемма 5.4.3. *Для всех $i = 1,\ldots,\mathrm{rk}(\mathfrak{g})$ имеем*

$$\dim W(\omega_i) = E_{w_0\omega_i}(1,1,0).$$

Доказательство. Для типов A, D, E наша Лемма является частным случем [I]. Для G_2 утверждение может быть легко получено прямым вычислением. В тиах B, C, F мы должны сопоставить Предложение 5.4.1 с $E_{w_0\omega_i}(x,1,0)$.

Пусть $\mathfrak{g}$ – типа C_n. Тогда $W(\omega_i) \simeq V(\omega_i)$, где $V(\omega_i)$ – неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль, рассматриваемый как $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}[t]$-модуль, $\mathfrak{g} \otimes t\mathbb{K}[t]V(\omega_i) = 0$. Мы докажем, что в этом случае $E_{-\omega_i}(x,q,0) = E_{-\omega_i}(x,0,0)$, т. е. у нас нет членов с ненулевой степенью по q в $E_{-\omega_i}(x,q,0)$. Применим модель Орра-Шимозоно на путях. Применяя 5.1.13, мы получаем следующую последовательность $\bar{\beta}^i$ (здесь простые корни α_i задаются как $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$, $i = 1,\ldots,n-1$, $\alpha_n = 2\epsilon_n$):

$$\begin{gathered}\epsilon_i - \epsilon_{i+1} + \delta, \epsilon_{i-1} - \epsilon_{i+1} + \delta, \ldots, \epsilon_1 - \epsilon_{i+1} + \delta,\\ \epsilon_i - \epsilon_{i+2} + \delta, \ldots, \epsilon_1 - \epsilon_{i+2} + \delta, \ldots, \epsilon_1 - \epsilon_n + \delta,\\ 2\epsilon_i + \delta, \epsilon_{i-1} + \epsilon_i + 2\delta, \ldots, \epsilon_1 + \epsilon_i + 2\delta, 2\epsilon_{i-1} + \delta, \ldots, \epsilon_1 + \epsilon_{i-1} + 2\delta, \ldots, 2\epsilon_1 + \delta,\\ \epsilon_i + \epsilon_n + \delta, \ldots \epsilon_1 + \epsilon_n + \delta, \epsilon_{i-1} + \epsilon_n + \delta, \ldots, \epsilon_i + \epsilon_{i+1} + \delta, \ldots \epsilon_1 + \epsilon_{i+1} + \delta,\\ \epsilon_{i-1} + \epsilon_i + \delta, \ldots, \epsilon_1 + \epsilon_i + \delta, \ldots \epsilon_1 + \epsilon_2 + \delta.\end{gathered}$$

Мы должны доказать, что нет квантовых ребер в путях типа $\bar{\beta}^i$ в КГБ. Отметим, что квантовых ребер с отметками $\epsilon_a + \epsilon_b$, $a \neq b$ не бывает. Применяя Предложение 5.1.3, мы получаем, что нет квантовых ребер в любом пути типа $\bar{\beta}^i$ с отметкой $\epsilon_a - \epsilon_b$, начинающемся в единичном элементе. Наконец, предположим, что наш путь приходит в σ и следующее ребро в пути отмечено $2\epsilon_a$ для некоторого a. Тогда $\sigma(a) = j$ для некоторого j (без черты над j). Поэтому нет квантовых ребер, отмеченых $2\epsilon_a$ в рассмартиваемом пути. Поэтому специализации фундаментальных антидоминантных несимметрических многочленов Макдональда $E_{-\omega_i}(x, q, 0)$ в типе C не зависят от q. Этим доказательство для типа C завершается.

Рассмотрим теперь тип B_n. Простые корни α_i записываются в виде $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$, $\alpha_n = \epsilon_n$. Группы Вейля для типов B_n и C_n изоморфны и содержат подгруппу S_n. Для начала рсссмоотрим несимметрические многочлены Макдональда, соответствующие *доминантным* весам $E_{\omega_i}(x, q, 0)$. Предположим, что $i \neq n$. Для четного i мы имеем:

$$\omega_i = ([(1, i-1)(2, i)]s_0[(1, i-1)(2, i)]) \dots ([(1, 3)(2, 4)]s_0[(1, 3)(2, 4)])(s_0)(0),$$

где $[(1, k-1)(2, k)]$ означает приведенное разложение произведения транспозиций $(1, i-1)$ и $(2, i)$. Например, $[(1, 3)(2, 4)] = s_2s_3s_1s_2$. Рассмотрим соответствующее произведение сплетающих операторов специализированных в $t = 0$. Обозначим это произведение сплетающих операторов как Ψ_{ω_i}. Пусть Ψ_a – сплетающий оператор, соответствующий простому отражению s_a. В частности, $\Psi_0(1) = q + (\epsilon_1 + \epsilon_2)$. В общем случае, $\Psi_{\omega_i}(1) \in \mathrm{span}(x^{\sum a_j\epsilon_j}q^b,\ j \leq i)$, $a_j \in \{0, 1\}$, $b \in \mathbb{N}$. Докажем, что единственные доминантные веса в $\Psi_{\omega_i}(1)$ – это $\omega_i, q\omega_{i-2}, \dots q^{i/2}$. Отметим, что если μ – вес V_λ, $\mu \neq \lambda$, то $\Psi_a x^\mu$, $i > 0$ не содержит x^λ. Предположим теперь, что утверждение верно для $i = i_0$. Тогда, применяя $\Psi_{[(1,i_0+1)(2,i_0+2)]}$, мы получаем, в частности, моном $x^{\epsilon_3+\dots+\epsilon_{i_0+2}}$. Применяя Ψ_0 к этому моному, мы получаем $x^{\epsilon_3+\dots+\epsilon_{i_0+2}}q + x^{\epsilon_1+\dots+\epsilon_{i_0+2}}$ и это единственная возможность получить моном $x^{\epsilon_1+\dots+\epsilon_{i_0+2}}$. Все мономы вида $x^{\omega_{i_0}-2j}q^j$ умножены на q и этим завершается шаг индукции.

Теперь пусть $w_0 \in W$ – самый длинный элемент группы Вейля. Тогда для $j_k < j_{k+1}$ мы имеем $\Psi_{w_0}(x^{\sum_{k=1}^{l}\epsilon_{j_k}}) = 0$, если $j_l \neq n$ и вес $\sum_{k=1}^{l}\epsilon_{j_k}$ не доминантный. Действительно, для любого $j' > 0$ рассмотрим приведенное разложение w_0 вида $w_0's_{j'}$. Теперь пусть $j' = j_k$ для некоторого k, такого что $j_{k_1} < j_k - 1$. Тогда $\Psi_{j'-1}x^{\sum_{k=1}^{l}\epsilon_{j_k}} = 0$. Поэтому $E_{w_0(\lambda)} = \Psi_{w_0}(x_i^\omega + qx_{i-2}^\omega + \dots + q^{i/2})$.

Но для любого доминантного веса λ из весовой решетки для конечномерной алгебры Ли

$$\Psi_{w_0} x^\lambda = \mathrm{ch}\, V_\lambda.$$

В итоге для четного i:

$$E_{-\omega_i}(x, q, 0) = \sum_{j=0}^{i/2} q^j \mathrm{ch} V_{\omega_{i-2j}},$$

т. е. этот многочлен равен характеру соответствующего модуля Вейля. Случай нечетного i может быть рассмотрен аналогичным образом.

Если $i = n$, то этот вес – минискульный. Поэтому $E_{w_0(\omega_i)}$ не зависит от q и равняется характеру соответствующего конечномерного модуля (см. [H]). Этим доказательство теоремы для типа B завершено.

Теперь, пусть $\mathfrak{g}$ – типа F_4. Применим ту же самую стратегию, что и в типе B: для начала вычислим E_{ω_i} и далее перейдем к $E_{-\omega_i}$ применяя сплетающий оператор, соответствующий самомо длинному элементу из конечной группы Вейля. Вычисления, являются длинными, но прямыми. Также можно применить SAGE [Sage] для проверки результата. □

Публикации по теме диссертации

[1] E.Feigin, I.Makedonskyi, *Nonsymmetric Macdonald polynomials, Demazure modules and PBW filtration*, Journal of Combinatorial Theory, Series A (2015), pp. 60–84.

[2] Е. А. Македонский, *О диких и ручных конечномерных алгебрах Ли*, Функциональный анализ и его приложения, том 47, выпуск 4 (2013), с. 30-44.

Список литературы

[A] G.Andrews, The Theory of Partitions, Cambridge University Press, 1998

[BFP] F. Brenti, S. Fomin, A. Postnikov, *Mixed Bruhat operators and Yang-Baxter equations for Weyl groups*, Internat. Math. Res. Notices 1999, no. 8, 419–441.

[C] V.Chari, *On the fermionic formula and the Kirillov-Reshetikhin conjecture*, Internat. Math. Res. Notices 2001, no. 12, 629–654.

[Ch] I. Cherednik, DAHA-Jones polynomials of torus knots, arxiv.org/abs/1406.3959

[Ch1] I. Cherednik, *Nonsymmetric Macdonald polynomials*, IMRN 10 (1995), 483–515.

[Ch2] I. Cherednik, *Double affine Hecke algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 319, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[CF] I. Cherednik, E. Feigin, *Extremal part of the PBW-filtration and E-polynomials*, arXiv:1306.3146.

[CLS] L.Calixto, J.Lemay, A.Savage, *Weyl modules for Lie superalgebras*, http://arxiv.org/abs/1505.06949

[CO1] I. Cherednik, D. Orr, Nonsymmetric difference Whittaker functions, Preprint arXiv:1302.4094v3 [math.QA] (2013).

[CO2] ———, One-dimensional nil-DAHA and Whittaker functions, Transformation Groups 18:1 (2013), 23–59; arXiv:1104.3918..

[CL] V. Chari, S. Loktev, *Weyl, Demazure and fusion modules for the current algebra of* $\mathfrak{sl}_{r+1}$, Adv. Math. 207 (2006), 928–960.

[CFS] V. Chari, G.Fourier, P.Senesi, *Weyl modules for the twisted loop algebras*, J. Algebra, 319(12), pp. 5016–5038, 2008.

[CP] V. Chari, A. Pressley, *Weyl modules for classical and quantum affine algebras*, Represent. Theory, 5, pp. 191–223 (electronic), 2001.

[D] Дрозд Ю. А. Ручные и дикие матричные задачи. Акад. наук Украины, инст. мат., Киев, 1977, 104-114.

[D1] Дрозд Ю. А. Представления коммутативных алгебр. Функц. Анализ и его приложения 6, вып 4 (1973), 41-43.

[D2] On Cohen–Macaulay Modules on Surfase Singularities Yuriy A. Drozd, Gert-Martin Greuel, and Irina Kashuba Moscow Mathematical Journal, Vol. 3, No 2, (2003), 397–418.

[F] E. Feigin, $\mathbb{G}_a^M$ *degeneration of flag varieties*, Selecta Mathematica, 18:3 (2012), 513–537.

[FoLi1] G.Fourier, P.Littelmann, *Tensor product structure of affine Demazure modules and limit constructions*, Nagoya Math. Journal 182 (2006), 171–198.

[FoLi2] ———, *Weyl modules, Demazure modules, KR-modules, crystals, fusion products and limit constructions*, Advances in Mathematics 211 (2007), no. 2, 566–593..

[FeLo1] B.Feigin, S. Loktev, *On generalized Kostka polynomials and the quantum Verlinde rule*, Differential topology, infinite-dimensional Lie algebras, and applications, 61–79, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 194, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[FeLo2] B.Feigin, S. Loktev, *Multi-dimensional Weyl modules and symmetric functions*, Comm. Math. Phys., 251(3), pp. 427–445, 2004.

[FFL1] E. Feigin, and G. Fourier, and P. Littelmann, *PBW-filtration and bases for irreducible modules in type* A_n, Transformation Groups 16:1 (2011), 71–89.

[FFL2] ———, PBW filtration and bases for symplectic Lie algebras, IMRN 24 (2011), 5760–5784..

[FFL3] ———, PBW-filtration over $\mathbb{Z}$ and compatible bases for $V_{\mathbb{Z}}(\lambda)$ in type A_n and C_n, Symmetries, Integrable Systems and Representations, 40, Springer, 2013, 35–63..

[FL1] G.Fourier, P.Littelmann, *Tensor product structure of affine Demazure modules and limit constructions*, Nagoya Math. Journal 182 (2006), 171–198.

[FL2] ———, *Weyl modules, Demazure modules, KR-modules, crystals, fusion products and limit constructions*, Advances in Mathematics 211 (2007), no. 2, 566–593..

[Fu] W.Fulton, *Young Tableaux, with Applications to Representation Theory and Geometry.* Cambridge University Press, 1997.

[Gel] Гельфанд И. М, Пономарев В. А. Замечания о классификации пары коммутирующих линейных преобразований в конечномерном пространстве. Функц. Анализ и его приложения 3, вып 4 (1969), 81-82.

[GG] Гото, Гроссханс. Полупростые алгебры Ли. Мир, 1981.

[Gab] Gabriel P, Roiter A. V. Representations of finite dimensionak algebras. - Encuclopaedia of Math. Sci. (Algebra 8). - 73. - Springer-Verlag, Berlin, 1992, 177 p.

[GL] S. Gaussent and P. Littelmann, *LS galleries, the path model, and MV cycles*, Duke Math.J. 127 (2005), no. 1, 35–88.

[H] M.Haiman, *Cherednik algebras, Macdonald polynomials and combinatorics*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid 2006, Vol. III, 843–872.

[Han] Yang Han, Wild Two-Point Algebras, Journal of Algebra 247, p. 57-77 (2002)

[HHL] M. Haiman, and J. Haglund, and N. Loehr, A combinatorial formula for non-symmetric Macdonald polynomials, Amer. J. Math. 130:2 (2008), 359–383.

[HKOTY] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, Y. Yamada, *Remarks on fermionic formula*, Recent developments in quantum affine algebras and related topics (Raleigh, NC, 1998), 243–291, Contemp. Math., 248, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999. http://arxiv.org/pdf/math/9812022v3.pdf

[I] B. Ion, Nonsymmetric Macdonald polynomials and Demazure characters, Duke Mathematical Journal 116:2 (2003), 299–318.

[J] A. Joseph, *On the Demazure character formula*, Annales Scientifique de l'.E.N.S., 1985, 389–419.

[Kn] F.Knop, *Integrality of two variable Kostka functions*, Journal fuer die reine und angewandte Mathematik 482 (1997) 177–189.

[Kum] S.Kumar, *Kac-Moody groups, their flag varieties and representation theory*, Progress in Mathematics, 204. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.

[KS] F.Knop, S.Sahi, *A recursion and a combinatorial formula for Jack polynomials*, Invent. Math. 128 (1997), no. 1, 9–22.

[LL] C. Lenart, A. Lubovsky, A uniform realization of the combinatorial R-matrix, http://arxiv.org/abs/1503.01765.

[L] C. Lenart, From Macdonald polynomials to a charge statistic beyond type A, Journal of Combinatorial Theory, Series A, vol. 119 (3),2012, pp. 683–712.

[LSh] C. Lenart and A. Schilling, Crystal energy functions via the charge in types A and C, Math.Z.273 (2013), no. 1-2, 401–426.

[LNSSS1] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for KirillovReshetikhin crystals I: Lifting the parabolic quantum Bruhat graph, Int. Math. Res. Not. 2015 (2015), 1848–1901.

[LNSSS2] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for KirillovReshetikhin crystals II: Alcove model, path model, and P = X, preprint 2014, arXiv:1402.2203.

[LNSSS3] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, Quantum Lakshmibai-Seshadri paths and root operators, preprint 2013, arXiv:1308.3529. [LP1] C. Lenart and A. Postnikov, Affine Weyl groups in K-theory and representation theory, Int. Math. Res. Not. 2007 (2007), 165.

[LNSSS4] C.Lenart, S.Naito, D.Sagaki, A.Schilling, M.Shimozono, A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals III: Nonsymmetric Macdonald polynomials at t = 0 and Demazure characters, arXiv:1511.00465

[M1] I.G.Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, second ed., Oxford University Press, 1995.

[M2] I.G.Macdonald, *Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95. Astérisque No. 237 (1996), Exp. No. 797, 4, 189–207.

[Mor] Morita K (1958). Duality of modules and its applications to the theory of rings with minimal condition. Science reports of the Tokyo Kyoiku Diagaku. Section A 6(150):83-142.

[Mus1] I.M.Musson, *Lie superalgebras and enveloping algebras,* vol. 131, Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

[Mus2] I.M.Musson, *The enveloping algebra of the Lie superalgebra* $\mathfrak{osp}(1, 2r)$, Represent. Theory 1 (1997), 405–423.

[N] K.Naoi, Weyl modules, Demazure modules and finite crystals for non-simply laced type, Adv. Math. 229 (2012), no. 2, 875–934.

[Naz] Назарова Л. А. Представления колчанов бесконечного типа. Известия академии наук СССР. 37 (1973), 752-791.

[O] E.Opdam *Harmonic analysis for certain representations of graded Hecke algebras*, Acta Math. 175 (1995), no. 1, 75–121.

[OS] D.Orr, M.Shimozono, *Specializations of nonsymmetric Macdonald-Koornwinder polynomials*, arXiv:1310.0279.

[P] G.Pinczon, *The enveloping algebra of the Lie superalgebra* $\mathfrak{osp}(1, 2)$, J. Algebra 132 (1990), no. 1, 219–242.

[RY] A.Ram, M.Yip, *A combinatorial formula for Macdonald polynomials*, Adv. Math. 226 (2011), no. 1, 309–331.

[S] Y. Sanderson, On the Connection Between Macdonald Polynomials and Demazure Characters, J. of Algebraic Combinatorics, 11 (2000), 269–275.

[Sage] SageMath, Nonsymmetric Macdonald polynomials package by A. Schilling and N. M. Thiery (2013), http://doc.sagemath.org/html/en/reference/combinat/sage/combinat/root system/non symmetric macdonald polynomials

[Sam] Самойленко Ю. С., Островский В. Л. О паре операторов, связанных квадратичным соотношением. Функц. Анализ и его приложения.

[SVV] P. Shan, M. Varagnolo, E. Vasserot, *On the center of quiver-Hecke algebras*, arXiv:1411.4392.

[Zus] Zusmanovich P. A converce to the second Whitehead Lemma. J. Lie Theory, 2008, vol. 18, pp. 295-299.