На правах рукописи

Махлин Игорь Юрьевич

Квазиклассические формулы для характеров представлений аффинных алгебр

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2016

Работа выполнена в *Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики»*.

Научный руководитель:	*доктор физико-математических наук, профессор факультета математики НИУ ВШЭ, ФЕЙГИН Борис Львович*
Официальные оппоненты:	*доктор физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики МФТИ (ГУ), КАРАСЕВ Роман Николаевич*
	кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей алгебры МГУ им. М. В. Ломоносова, ТИМАШЕВ Дмитрий Андреевич
Ведущая организация:	*Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук*

Защита состоится «____» ____________ 2016 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета *Д 002.077.03* при *Институте проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН*, расположенном по адресу: *Большой Каретный пер., д. 19, стр. 1, Москва, ГСП-4, 127994*.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *ИППИ РАН*.

Автореферат разослан «____» ____________ 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор
физико-математических
наук, *Соболевский А. Н.*

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Неприводимые характеры являются одним из центральных объектов изучения теории представлений алгебр Ли. Классической формулой для характера неприводимого представления полупростой алгебры Ли является формула Вейля. Есть множество различных способов вывода этой формулы, в том числе традиционные алгебраические способы. Мы, однако, обратимся сейчас к способу геометрическому.

Пусть g — комплексная полупростая алгебра Ли, $F = G/B$ — соответствующее ей многообразие флагов. Для целочисленного доминантного веса λ на F можно определить эквивариантное линейное расслоение $\mathcal{L}_\lambda$. При этом окажется, что пространство глобальных сечений расслоения $\mathcal{L}_\lambda$ есть в точности соответствующее неприводимое представление L_λ, а старшие когомологии у $\mathcal{L}_\lambda$ нулевые (теорема Бореля–Вейля–Ботта). Это позволяет получить формулу для характера $\operatorname{char} L_\lambda$, выписав эквивариантную голоморфную формулу Лефшеца. Полученная таким образом формула совпадет с формулой Вейля для характера и будет иметь вид суммы по неподвижным точкам в F. При этом вклад каждой точки будет определяться локальными свойствами расслоения в этой точке $\mathcal{L}_\lambda$.

Такой подход, состоящий в разложении некоторой глобальной сущности в сумму ее локальных аппроксимаций в неподвижных точках, иногда называют «квазиклассическим» — термин физического происхождения. Эта работа во многом посвящена тому наблюдению, что своего рода квазиклассический подход можно применить и к другому не менее важному для нас классу формул для характеров — комбинаторным формулам. Обсудим вкратце этот класс формул.

Комбинаторная формула представляет характер в виде суммы по некоторому комбинаторному множеству — дискретному набору объектов с заданными свойствами. Как правило, при этом в представлении указывается базис, элементы которого нумеруется тем же комбинаторным множеством, откуда сразу же вытекает формула для характера. Архетипичный пример здесь — это базис Гельфанда–Цетлина в представлении алгебры $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, построенный в классической работе [4]. Этот базис нумеруется таблицами Гельфанда–Цетлина или эквивалентными им полустандартными таблицами Юнга и дает комбинаторную формулу для характера неприводимого конечномерного $\mathfrak{gl}_n$-модуля (многочлена Шура). Также в этом контексте стоит упомянуть обобщения базисов Гельфанда–Цетлина на другие типы (см. [5]), струнные базисы ([6, 7]) и мономиальные базисы Фейгина–Фурье–Литтелманна–Винберга для типов A и C ([8, 9]).

Практически во всех этих примерах оказывается, что рассматриваемые комбинаторные объекты являются массивами целых чисел, удовлетворяющих набору линейных неравенств. Это позволяет представить комбинаторное множество в виде множества целых точек в некотором выпуклом многограннике, архетипичный пример, опять же — многогранники Гельфанда–Цетлина. При этом вклад каждой целой точки в формулу для характера оказывается определенной экспонентой этой точки. Здесь и появляется упомянутый нами квазиклассический подход — теорема Бриона из теории решеточных многогранников. Она представляет сумму экспонент целых точек многогранника в виде суммы по его вершинам. При этом вклад каждой вершины определяется касательным конусом к многограннику в этой вершине, то есть, опять же, локальной аппроксимацией многогранника.

Обсудим теперь, каким образом этот сюжет обобщается в двух направлениях. Сперва перейдем от неприводимых характеров к многочленам Холла–Литтлвуда, а затем от полупростых алгебр к аффинным.

Многочлены Холла–Литтлвуда P_λ также нумеруются целочисленными доминантными весами и являются однопараметрическими деформациями неприводимых характеров. Они определяются при помощи несложного видоизменения формулы Вейля для характера с введением дополнительной переменной t. Классические многочлены Холла–Литтлвуда соответствуют типу A и изначально появились в теории абелевых p-групп. Они обладают целым списком свойств, относящихся к разным областям математики, многие из которых обсуждаются в книге [10].

Для произвольного финитного типа эти многочлены можно получить в том же геометрическом квазиклассическом контексте, что и неприводимые характеры. Для этого нужно рассмотреть на многообразии флагов F подкрученный пучок дифференциальных форм $\Omega^* \otimes \mathcal{L}_\lambda$. Этот пучок в общем случае уже не будет ациклическим и поэтому применение эквивариантной голоморфной формулы Лефшеца даст так называемую эквивариантную эйлерову характеристику:

$$\sum_{i,j\geq 0}(-1)^i t^j \operatorname{char}(H^i(F,\Omega^j\otimes\mathcal{L}_\lambda)).$$

Эта эйлерова характеристика и будет многочленом Холла–Литтлвуда. (Строго говоря, в случае особого веса λ данная эйлерова характеристика будет равна многочлену Холла–Литтлвуда с точностью до множителя — многочлена от t. Для избавления от этого множителя можно вместо F рассмотреть соответствующее параболическое многообразие флагов.)

В типе A для многочленов Холла–Литтлвуда известна комбинаторная формула, восходящая к [10]. Как и формула Гельфанда–Цетлина, она следует из правила ветвления для этих многочленов и описывается следующим образом. Параметризующее множество опять же состоит из таблиц Гельфанда–Цетлина, а соответствующее таблице слагаемое есть произведение экспоненты из формулы Гельфанда–Цетлина и некоторого многочлена от переменной t, так называемого t-веса. Таким образом, многочлен Холла–Литтлвуда типа A также может быть представлен в виде суммы экспонент целых точек в многограннике, но на этот раз взвешенной.

Перейдем к обсуждению аффинных алгебр Ли. Как и для любой симметризуемой алгебры Каца–Муди, характер интегрируемого неприводимого представления такой алгебры можно записать при помощи формулы Каца–Вейля, обобщающей формулу Вейля для финитного случая.

Остановим свое внимание на типе $\tilde{A}$ и алгебрах $\widehat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C})$. В этом случае можно определить соответствующее (бесконечномерное) многообразие флагов F и заданное целочисленным доминантным весом λ линейное расслоение $\mathcal{L}_\lambda$. Будет иметь место аналог теоремы Бореля–Вейля–Ботта: это расслоение вновь будет ациклическим и нулевые когомологии будут представлять из себя интегрируемое неприводимое представление L_λ. Далее, выписав соответствующую версию эквивариантной голоморфной формулы Лефшеца, мы получим формулу для неприводимого характера в виде суммы по неподвижным точкам, которая совпадет с формулой Каца–Вейля. Этот сценарий обсуждается в [11].

Более того, для интегрируемого неприводимого характера алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C})$ была также получена комбинаторная формула. Это сделано в цикле работ различных авторов, к которому можно отнести статьи [11–15]. Эта формула тоже задается комбинаторным базисом, элементы которого параметризуются целыми точками в некотором многограннике, правда, уже бесконечномерном. Вклад точки при этом тоже равен определенной ее экспоненте.

Наконец, для целочисленного доминантного веса λ симметризуемой алгебры Каца–Муди можно определить функцию Холла–Литтлвуда, аналогичным образом продеформировав формулу Каца–Вейля. (Слово «функция» используется вместо слова «многочлен» по причине бесконечности этих выражений.) Обратимся опять же к типу $\tilde{A}$. В этом случае функции Холла–Литтлвуда играют роль в теории представлений двойной аффинной алгебры Гекке ([16]), а также в геометрии упомянутых аффинных многообразий флагов. В последнем контексте они появляются вполне аналогично финитному случаю: как эквивариантные эйлеровы характеристики подкрученных пучков дифференциальных форм на аффинных многообразиях флагов. Это обсуждается, в частности, в работе [17].

Цели и задачи диссертационной работы: Метод получения формул для характеров при помощи теоремы Бриона в литературе освещен слабо. Из известных автору работ к нему можно отнести разве что статью [18], где рассматриваются некоторые финитизации упомянутых бесконечномерных многогранников, появляющихся в комбинаторной формуле для аффинного неприводимого характера. Там проверяется некоторая версия теоремы Бриона для этих многогранников и упоминаются близкие к самой теореме Бриона идеи Пухликова и Хованского.

Одна из основных целей этой работы — это восполнить этот пробел. Первый шаг должен заключаться в том, чтобы применить теорему Бриона к многогранникам Гельфанда–Цетлина и установить, какая формула для характера получается таким образом. В отношении финитного случая стоит также цель найти обобщение (взвешенную версию) теоремы Бриона, которую можно было бы применить к комбинаторной формуле для классических многочленов Холла–Литтлвуда, и исследовать результат этого применения.

Кроме того, планируется сформулировать аналог теоремы Бриона для бесконечномерного многогранника, параметризующего базис в неприводимом $\widehat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C})$-модуле, и, опять же, получить таким образом формулу для характера.

Вторая основная цель и центральное нововведение этой работы: получение комбинаторной формулы для аффинных функций Холла–Литтлвуда типа $\tilde{A}$. При этом желательно, чтобы новая формула тоже имела вид суммы по целым точкам того или иного многогранника и доказывалась при помощи формулы типа Бриона для этого многогранника.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми, основные результаты заключаются в следующем.

- Установлено, что при применении теоремы Бриона к многограннику Гельфанда–Цетлина и надлежащей специализации вклады большей части вершин зануляются, а вклады оставшихся вершин дают слагаемые в формуле Вейля для характера.

- Найдено обобщение теоремы Бриона, в котором экспоненты точек суммируются с весами, зависящими от минимальной грани, содержащей точку.

- Обобщение теоремы Бриона применено к комбинаторной формуле для многочленов Холла–Литтлвуда и показано, что снова вклады большей части вершин зануляются, а вклады оставшихся дают слагаемые в стандартной формуле для многочлена Холла–Литтлвуда.

- Доказана формула типа Бриона для многогранника из комбинаторной формулы для неприводимого аффинного характера. При этом показывается, что вклады части вершин нулевые, а вклад остальных — слагаемые в формуле Каца–Вейля для характера.

- Целым точкам в том же многограннике приписываются веса (многочлены от t) и формулируется комбинаторная формула для функций Холла–Литтлвуда типа $\tilde{A}$ в виде суммы экспонент точек с приписанными им весами.

- Для все того же многогранника и построенной системы весов доказывается версия найденного обобщения теоремы Бриона и при помощи нее доказывается найденная комбинаторная формула.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы для дальнейшего изучения теории представлений алгебр Ли, геометрии многообразий флагов, а также комбинаторики выпуклых многогранников и алгебраической комбинаторики.

Методология и методы исследования. В работе использованы различные методы теории представлений полупростых и аффинных алгебр, а также методы теории решеточных многогранников.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- «Пятая летняя школа-конференция по алгебрам Ли, алгебраическим группам и теории инвариантов», июнь 2015, Самара.

- “25-th British Combinatorial Conference”, июль 2015, Уорикский университет.

- На семинаре «Выпуклая и алгебраическая геометрия» в НИУ ВШЭ (неоднократно).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 3 печатных работах, из них 2 статьи в рецензируемых журналах [1, 2] и 1 препринт [3].

Личный вклад автора. Работа [2] подготовлена в соавторстве с Б. Л. Фейгиным. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав с 17 разделами, библиографии и 1 приложения. Общий объем диссертации 102 страницы. Библиография включает 27 наименований.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана теоретическая значимость полученных результатов.

В первой главе приводятся предварительные сведения, использованные в диссертации. Она составлена из пяти разделов, в которых последовательно введены:

- формула Каца–Вейля для неприводимого характера и определение функций Холла–Литтлвуда,

- определение многогранников Гельфанда–Цетлина и комбинаторная формула для многочленов Шура,

- комбинаторная формула для классических многочленов Холла–Литтлвуда,

- определения подпространств Фейгина–Стояновского и мономиальных базисов в интегрируемых неприводимых представлениях алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$,

- понятие валюации и теорема Бриона для выпуклых рациональных многогранников.

Во второй главе формулируются основные результаты диссертации. Она составлена из четырех разделов следующего содержания.

В первом разделе формулируется обобщение теоремы Бриона (*взвешенная теорема Бриона*). Оно представляет сумму экспонент целых точек в выпуклом рациональном многограннике с весами, зависящими от минимальной грани, содержащей точку, в виде суммы по вершинам многогранника.

Во втором разделе приводятся результаты для финитного случая. Показывается, что теорема Бриона для многогранника Гельфанда–Цетлина GT_λ после определенной специализации U дает формулу для характера неприводимого характера. Вклады $U(\sigma(C_v))$ вершин описаны нижеследующей теоремой, из которой следует формула Вейля для характера.

Теорема 1. У множества вершин многогранника GT_λ есть выделенное подмножество, параметризованное орбитой $W\lambda$ группы Вейля. Для вершины v из этого подмножества, соответствующей $\mu \in W\lambda$, имеем

$$U(\sigma(C_v)) = \sum_{w\lambda=\mu} w\left(\frac{e^\lambda}{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(1-x_j/x_i)}\right),$$

а для всех остальных вершин $U(\sigma(C_v)) = 0$. При этом для регулярного веса λ выделенное подмножество вершин совпадает с множеством простых вершин.

В том же разделе показывается, что вес целой точки многогранника Гельфанда–Цетлина в комбинаторной формуле для многочленов Холла–Литтлвуда определяется минимальной гранью, содержащей точку. Это означает, что можно применить взвешенную теорему Бриона к многограннику GT_λ и данной системе весов и получить тем самым формулу для многочленов Холла–Литтлвуда. Результат этой процедуры описывается аналогом теоремы 1.

В третьем разделе представлена новая комбинаторная формула для аффинной функции Холла–Литтлвуда P_λ. Для каждого элемента A комбинаторного множества $\mathbf{\Pi}_\lambda$, параметризующего мономиальный базис из раздела 1.4, определяется вес $p(A) \in \mathbb{Z}[t]$. Тогда центральный, в определенном смысле, результат работы имеет такой вид.

Теорема 2. Для целочисленного доминантного ненулевого $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$-веса λ выполнено тождество

$$P_\lambda = \sum_{A \in \mathbf{\Pi}_\lambda} p(A) e^{\mu_A},$$

где μ_A — вес соответствующего элементу A базисного вектора.

В четвертом разделе вводится бесконечномерный многогранник Π, целые точки которого параметризуются множеством $\mathbf{\Pi}_\lambda$. Для этого многогранника формулируется определенный аналог теоремы Бриона. Затем объясняется, каким образом для этого случая можно написать аналог теоремы 1, из которого последует формула Каца–Вейля для характера. Далее, для многогранника Π и определенных в предыдущем разделе весов $p(A)$ формулируется аналог взвешенной теоремы Бриона. Вклады вершин $\tau_{\overline{v}}$ описываются очередным аналогом теоремы 1, из которого вытекает справедливость теоремы 2:

Теорема 3. В множестве вершин многогранника Π выделяется подмножество, занумерованное орбитой $W\lambda$, со следующими свойствами.

a) Если вершина v принадлежит выделенному подмножеству и соответствует $\mu \in W\lambda$, то

$$\tau_{\overline{v}} = \frac{1}{W_\lambda(t)} \sum_{w\lambda = \mu} \frac{e^{w\lambda - \lambda} w\left(\prod\limits_{\alpha \in \Phi^+} (1 - te^{-\alpha})^{m_\alpha}\right)}{w\left(\prod\limits_{\alpha \in \Phi^+} (1 - e^{-\alpha})^{m_\alpha}\right)}.$$

b) Для всех остальных вершин v имеет место $\tau_{\overline{v}} = 0$.

(Здесь использованы некоторые стандартные обозначения, которые вводятся в главе 1.)

В третьей главе разрабатывается комбинаторный арсенал, необходимый для доказательства теорем о вкладах вершин из предыдущей главы.

В первом разделе доказывается взвешенная теорема Бриона и несколько связанных с ней вспомогательных фактов.

Во втором разделе определяется и обсуждается понятие вырождения многогранника и его взаимодействие с теоремой Бриона и взвешенной теоремой Бриона.

В третьем разделе вводятся обобщенные многогранники Гельфанда–Цетлина. Для них доказывается некоторая теорема о занулении, близкая по природе к феноменам зануления, отмеченным в теоремах 1 и 3.

В четвертом разделе доказывается лемма, описывающая вырождения обобщенных многогранников Гельфанда–Цетлина.

Четвертая глава посвящена доказательству теорем о вкладах вершин из главы 2.

В первом разделе этой главы доказываются результаты из раздела 2.1 о многогранниках Гельфанда–Цетлина. Для этого непосредственно применяется техника из предыдущей главы.

Дальнейшие разделы посвящены аффинному случаю. Во втором разделе исследуется структура бесконечномерного многогранника Π и при помощи предельного перехода доказывается аналог взвешенной теоремы Бриона для этого многогранника.

В третьем разделе обсуждается некоторый комбинаторный подход к многограннику Π и его атрибутам, который обнаруживает связь между Π и многогранниками из предыдущей главы.

В четвертом разделе подход из предыдущего раздела используется для представления касательного конуса к П в виде индуктивного предела последовательности обобщенных многогранников Гельфанда–Цетлина. Это дает возможность вычислить вклады вершин при помощи результатов из предыдущей главы и предельного перехода и доказать тем самым теорему 3.

Список публикаций

1. Махлин И. Ю. Характеры подпространств Фейгина–Стояновского и теорема Бриона // Функц. анализ и его прил. 2015. Т. 49. С. 18–30.
2. Feigin B., Makhlin I. A combinatorial formula for affine Hall–Littlewood functions via a weighted Brion theorem // Selecta Mathematica. 2016. URL: http://link.springer.com/article/10.1007/s00029-016-0223-4.
3. Makhlin I. Weyl's Formula as the Brion Theorem for Gelfand-Tsetlin Polytopes // Working papers by Cornell University. 2014. В печати в журнале «Функциональный анализ и его приложения». URL: http://arxiv.org/abs/1409.7996.

Цитированная литература

4. Гельфанд И. М., Цетлин М. Л. Конечномерные представления группы унимодулярных матриц // Доклады Академии наук. 1950. Т. 71. С. 1017–1020.
5. Molev A. Weight bases of Gelfand-Tsetlin type for representations of classical Lie algebras // J. Phys. A. 2000. Vol. 33. P. 4143–4168.
6. Littelmann P. Cones, crystals, and patterns // Transform. Groups. 1998. Vol. 3. P. 145–179.
7. Berenstein A., Zelevinsky A. Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties // Invent. Math. 2001. Vol. 143. P. 77–128.
8. Feigin E., Fourier G., Littelmann P. PBW filtration and bases for irreducible modules in type A_n // Transformation Groups. 2011. Vol. 16. P. 71–89.

9. Feigin E., Fourier G., Littelmann P. PBW filtration and bases for symplectic Lie algebras // Int. Math. Res. Not. 2011. Vol. 24. P. 5760–5784.
10. Macdonald I. G. Symmetric functions and Hall polynomials. 2nd edition. New York: Oxford University Press, 1995.
11. Стояновский А. В., Фейгин Б. Л. Функциональные модели представлений алгебр токов и полубесконечные клетки Шуберта // Функц. анализ и его прил. 1994. Т. 28. С. 68–90.
12. Feigin B., Stoyanovsky A. Quasi-particles models for the representations of Lie algebras and geometry of flag manifold. 1993. URL: http://arxiv.org/abs/hep-th/9308079.
13. Primc M. Vertex operator construction of standard modules for $A_n^{(1)}$ // Pacific J. Math. 1994. Vol. 162. P. 143–187.
14. Feigin B., Jimbo M., Loktev S. et al. Bosonic formulas for (k,l)-admissible partitions // Ramanujan J. 2003. Vol. 7. P. 485–517.
15. Feigin B., Jimbo M., Loktev S. et al. Addendum to “Bosonic Formulas for (k, l)-Admissible Partitions” // Ramanujan J. 2003. Vol. 7. P. 519–530.
16. Cherednik I. A New Take on Spherical, Whittaker and Bessel Functions. 2009. URL: http://arxiv.org/abs/0904.4324.
17. Fishel S., Grojnowski I., Teleman C. The strong Macdonald conjecture and Hodge theory on the Loop Grassmannian // Ann. of Math. 2008. Vol. 168. P. 175–220.
18. Локтев С. А., Фейгин. Б. Л. О финитизации тождеств Гордона // Функц. анализ и его прил. 2001. Т. 35. С. 53–61.