

На правах рукописи

Руденко Даниил Глебович

Усиленный закон взаимности Суслина и смежные вопросы

Специальность:

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата
физико-математических наук

Москва— 2016

Работа выполнена на факультете математики Национального исследовательского университета «Высшая Школа Экономики».

Научный руководитель: *доктор физико-математических наук,
профессор факультета математики
Национального исследовательского
университета «Высшая Школа Экономики»
Сергей Константинович Ландо.*

Официальные оппоненты: *доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН,
главный научный сотрудник ПОМИ РАН
Панин Иван Александрович;*

*кандидат физико-математических
наук, старший научный сотрудник
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН
Горчинский Сергей Олегович.*

Ведущая организация: *Санкт-Петербургский
государственный университет.*

Защита состоится 13 сентября 2016 г. в 15:00
на заседании диссертационного совета Д 002.077.03
на базе ФГБУН ИППИ им. А.А. Харкевича РАН по адресу:
Москва, Большой Каретный пер., д. 19, стр. 1.

С диссертацией можно ознакомиться
в библиотеке ИППИ РАН им. А. А. Харкевича.

Автореферат разослан « » июня 2016 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук

А. Н. Соболевский

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы. Диссертация посвящена изучению двух открытых вопросов, поставленных А. Б. Гончаровым¹ и Ш. Штайном².

Первый вопрос связан с теорией смешанных мотивов Тейта и гипотезами Гончарова. В работах А. Гротендика, П. Делиня, Ю. И. Манина, А. А. Бейлинсона и многих других ведущих математиков современности разработана гипотетическая теория смешанных мотивов алгебраических многообразий. В соответствии с этой теорией, каждому многообразию должен соответствовать комплекс объектов некоторой (пока не построенной) абелевой категории смешанных мотивов. При этом, такие инварианты многообразий, как числа Бетти и группы этальных когомологий, должны вычисляться по одним лишь мотивным данным.

В гипотетической категории смешанных мотивов над некоторым полем F можно выделить ее самую простую часть: подкатегорию смешанных мотивов Тейта, порожденную мотивом проективной прямой. А. А. Бейлинсоном и П. Делинем³ был предложен способ построения обранных смешанных мотивов Тейта, связанных с классической полилогарифмической функцией $Li_n(z)$, для которых должны быть справедливы функциональные уравнения, которым удовлетворяет полилогарифмическая функция. Позднее Гончаров сформулировал набор гипотез, дающих внутреннее описание смешанных мотивов Тейта, получающихся с помощью конструкции Делиня и Бейлинсона. Это дало возможность явно определить комплексы абелевых групп, когомологии которых должны совпадать с мотивными когомологиями поля с рациональными коэффициентами $H_{\mathcal{M}}^{p,q}(F, \mathbb{Q})$. Такие комплексы называют *полилогарифмическими* из-за их связи с классическими полилогарифмами, особенно явной для случая чис-

¹A. B. Goncharov, *Polylogarithms, Regulators, and Arakelov Motivic Complexes*, Journal of the American Mathematical Society **18**:1 (2005), 1–60. .

²S. Stein, *A generalized conjecture about cutting a polygon into triangles of equal areas*, Discrete Comput. Geom. **24** (2000), 141–145.

³A. A. Beilinson, P. Deligne, *Interpretation motivique de la conjecture de Zagier*, Symp. in Pure Math. **55**:2 (1994), 97–121.

лового поля.

Гипотезы о том, что когомологии полилогарифмических комплексов совпадают с мотивными когомологиями, представляются очень сложными. В частности, из этих гипотез можно вывести гипотезы Д. Загье о специальных значениях дзета-функций числовых полей. Другим их следствием являлось бы явное описание высшей K -теории поля с точностью до кручения, обобщающее символическое определение K -теории Милнора.

Одной из главных трудностей теории полилогарифмических комплексов является отсутствие естественного отображения нормы, связанного с расширением полей конечной степени⁴. Это отображение определено для мотивных когомологий, следовательно, должно быть определено и для полилогарифмических комплексов, по крайней мере, на уровне производной категории. Старшие когомологии полилогарифмических комплексов совпадают с K -теорией Милнора. Уже в этом случае построение отображения нормы — непростая задача, элегантно решенная, в частности, А. А. Суслиным⁵.

В настоящей работе это построение продолжено на вторые с конца группы когомологий полилогарифмических комплексов. Из этого результата выводится усиление закона взаимности Суслина, сформулированного как гипотеза А. Б. Гончаровым, а также некоторые теоремы о равноставленности гиперболических многогранников. Заметим, что полученные результаты служат косвенным подтверждением справедливости общих гипотез Гончарова, Бейлинсона и Делиня.

Второй вопрос, изучаемый в диссертации, связан с разрезаниями многоугольников на треугольники равной площади. Под разрезанием мы понимаем представление многоугольника в виде объединения конечного числа треугольников, непересекающихся по внутренним точкам. П. Монски⁶ было доказано, что квадрат нельзя разрезать на нечетное число треугольников равной площади. Доказательство

⁴А.В. Goncharov, *Polylogarithms and motivic Galois groups*, Symposium in pure mathematics **55**:2 (1994), 43–96.

⁵А. А. Суслин, *Законы взаимности и стабильный ранг колец многочленов*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **43**:6 (1979), 1394–1429.

⁶P. Monsky, *On dividing a square into triangles*, Amer. Math. Monthly **77**(1970) 161–164.

представляет из себя комбинацию двух идей: раскраски плоскости в три цвета, построение которой использует дискретное 2-адическое нормирование, и леммы Шпернера.

Известно несколько различных обобщений теоремы Монски. В 1990 году П. Монски доказал предположение, высказанное ранее Ш. Штайном, утверждающее, что центрально-симметричный многоугольник не может быть разрезан на нечетное число треугольников равной площади⁷. Далее, будем называть *полимино* фигуру, являющуюся объединением конечного числа клеток прямоугольной целочисленной решётки. В 1999 году Ш. Штайн доказал, что полимино нечетной площади нельзя разрезать на нечетное число треугольников равной площади⁸. Позже И. Пратон доказал то же самое утверждение для полимино произвольной площади⁹. В 2000 году Ш. Штайн сформулировал гипотезу, обобщающую все вышеперечисленные результаты. Пусть B — многоугольник на плоскости, про который мы не предполагаем ни выпуклости, ни связности границы. Мы будем называть B сбалансированным, если его рёбра можно разбить на пары равных по длине и параллельных между собой. Гипотеза Штайна утверждает, что сбалансированный многоугольник не может быть разрезан на нечетное число треугольников равной площади.

В диссертации разрабатывается новый подход к задачам о разрезании на треугольники равной площади, и доказывается гипотеза Штайна при некоторых дополнительных предположениях целочисленности. Случай многоугольника нечетной площади опубликован, а общий случай готовится к публикации.

Цель работы. У этой работы было три основных цели. Первая цель — доказать теорему гомотопической инвариантности для некоторых когомологий полилогарифмических комплексов. Вторая — использовать эти результаты для построения интересных классов равносо-

⁷P. Monsky, *A conjecture of Stein on plane dissections*, Math. Z. **205**, (1990) 583–592.

⁸S. Stein, *Cutting a polyomino into triangles of equal areas*, Amer. Math. Monthly **106** (1999), 255–257.

⁹I. Praton, *Cutting Polyominoes into Equal-Area Triangles*, Amer. Math. Monthly **109** (2002), 818–826.

ставленности гиперболических многогранников по данным алгебраической геометрии. Наконец, третьей целью было разработать новые методы доказательства невозможности разрезания многоугольников на треугольники равной площади.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Основные результаты диссертации заключаются в следующем.

- Доказана теорема гомотопической инвариантности для предпоследних групп когомологий полилогарифмических комплексов.
- В качестве следствия этой теоремы получено доказательство гипотезы А. Б. Гончарова об усиленном законе взаимности Суслина.
- Придумана конструкция классов равносоставленности гиперболических многогранников по тройкам мероморфных функций на гладких проективных кривых. Вычислены объемы и инварианты Дена этих многогранников.
- Определены *сбалансированные графы* и доказана теорема о минимальном индексе вершин у таких графов.
- В качестве следствия этой теоремы получено доказательство гипотезы Ш. Штайна о сбалансированных многоугольниках в рациональном случае.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты и методы работы могут быть использованы для дальнейшего развития теории когомологий полилогарифмических комплексов. Новые методы вычислений в группах Блоха могут найти независимые применения. Кроме этого, автор

надеется, что комбинаторные и теоретико-числовые свойства сбалансированных графов могут быть использованы в задачах, смежных с теорией разрезов.

Методология и методы исследования. В диссертации используются различные комбинаторные, алгебраические и теоретико-числовые методы. Кроме этого, используются некоторые стандартные методы гомологической алгебры.

Положения, выносимые на защиту. В диссертации доказаны, в частности, следующие теоремы.

- Для произвольного поля F следующая последовательность групп когомологий полилогарифмических комплексов точна:

$$0 \longrightarrow H_G^{n-1,n}(F)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow H_G^{n-1,n}(F(t))_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\oplus \partial_P} \bigoplus_{P \neq \infty} H_G^{n-2,n-1}(F_P)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow 0.$$

- Для гладкой проективной кривой $\mathcal{X}$ над $\mathbb{C}$ отображение полного вычета

$$Res: H_G^{n-1,n}(\mathbb{C}(\mathcal{X}))_{\mathbb{Q}} \longrightarrow H_G^{n-2,n-1}(\mathbb{C})_{\mathbb{Q}},$$

определяемое как сумма отображений вычета ∂_P по всем точкам кривой $\mathcal{X}$, тождественно равно нулю.

- Целочисленный сбалансированный многоугольник нечетной площади нельзя разрезать на нечетное число треугольников равной площади так, чтобы координаты всех вершин триангуляции были целыми числами.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах и конференциях:

- На семинаре "Geometric Langlands", The University of Chicago, 01/2016;
- На семинаре "Topology", Northwestern University, 03/2016;
- На конференции фонда "Династия", НМУ, Москва, 06/2015;
- На конференции по алгебраическим структурам в выпуклой геометрии, ВШЭ, Москва, 02/2015;
- На семинаре лаборатории алгебраической геометрии, ВШЭ, Москва, 12/2014, 12/2013;
- На семинаре "Комбинаторика характеристических классов", ВШЭ, Москва, 11/2014.

Основное содержание работы

Диссертация состоит из вводной главы, двух глав, содержащих изложение основных результатов исследования, и списка литературы.

Содержание главы 1 (введения). Во введении описана актуальность темы исследования и степень её разработанности, перечислены цели и задачи исследования, описана научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, методы исследования, апробация результатов исследования.

Содержание главы 2. Вторая глава содержит доказательство теоремы гомотопической инвариантности и её следствия. Перед тем, как сформулировать основные результаты этой главы, дадим необходимые определения.

Рассмотрим подгруппу $R_2(k)$ свободной группы на точках проективной прямой $\mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(k)]$, порожденную элементами $[0]$, $[\infty]$ и комбинациями

$$\sum_{i=1}^5 (-1)^i [r(y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_5)],$$

где $(y_1, \dots, y_5)$ — всевозможные пятерки различных точек проективной прямой $\mathbb{P}^1(k)$, а символом $r(a, b, c, d) = \frac{(a-b)(c-d)}{(c-b)(a-d)}$ обозначается двойное отношение четырех точек. Группа $B_2(k)$ определяется как следующий фактор:

$$B_2(k) := \frac{\mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(k)]}{R_2(k)}.$$

Образ элемента $[x]$ в факторе обозначим символом $\{x\}_2$. Рассмотрим отображение

$$\delta: \mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(k)] \longrightarrow k^\times \wedge k^\times,$$

переводящее базисный элемент $[x] \in \mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(k)]$ в $x \wedge (1-x)$. Можно показать, что δ равно нулю на группе $R_2(k)$.

Определение 1. Группой $H_G^{n-1,n}(k)$ мы будем называть ядро отображения

$$B_2(k) \otimes_a \bigwedge^{n-2} k^\times \xrightarrow{\delta} \bigwedge^n k^\times.$$

Здесь символом $B_2(k) \otimes_a \bigwedge^{n-2} k^\times$ обозначен фактор группы $B_2(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge^{n-2} k^\times$ по подгруппе, порожденной элементами вида $\{x\}_2 \otimes x \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-3}$ для некоторых $x, x_1, \dots, x_{n-3} \in k$, а отображение δ задаётся формулой

$$\delta(\{x\}_2 \otimes x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-2}) = x \wedge (1-x) \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-2}.$$

С каждой абелевой группой A можно связать её рационализацию $A_{\mathbb{Q}} = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Первой целью диссертации является доказательство следующей теоремы о гомотопической инвариантности:

Теорема 2. *Для произвольного поля F следующая последовательность точна:*

$$0 \longrightarrow H_G^{n-1,n}(F)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow H_G^{n-1,n}(F(t))_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\oplus \partial_P} \bigoplus_{P \neq \infty} H_G^{n-2,n-1}(F_P)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow 0.$$

Здесь символом P обозначена точка проективной прямой $\mathbb{P}^1(F)$, а F_P — соответствующее поле вычетов. Далее, инъективное отображение индуцировано вложением поля F в поле $F(t)$, а сюръективное есть прямая сумма отображений вычета.

Из утверждения этой теоремы несложно вывести *усиленный закон взаимности Суслина*.

Следствие 3. Для гладкой проективной кривой $\mathcal{X}$ над $\mathbb{C}$ отображение полного вычета

$$\text{Res}: H_G^{n-1,n}(\mathbb{C}(\mathcal{X}))_{\mathbb{Q}} \longrightarrow H_G^{n-2,n-1}(\mathbb{C})_{\mathbb{Q}},$$

определяемое как сумма отображений вычета ∂_P по всем точкам кривой $\mathcal{X}$, тождественно равно нулю.

Перед тем как сформулировать еще одно следствие, напомним некоторые определения из теории равносоставленности многогранников в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^3$.

Определение 4. Группа $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{H}}^3)$ — это абелева группа, заданная образующими $[T]$, соответствующими гиперболическим многогранникам T , возможно, с вершинами на абсолюте, и следующими соотношениями. Во-первых, $[T_1 \sqcup T_2] = [T_1] + [T_2]$, если внутренности многогранников T_1 и T_2 не пересекаются. Во-вторых, элементы группы, соответствующие изометричным многогранникам, совпадают.

Каждому комплексному числу $z \in \mathbb{C}$ соответствует элемент $[z] \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{H}}^3)$, отвечающий тетраэдру с вершинами на абсолюте, имеющими координаты $\infty, 0, 1, z$ в модели Пуанкаре в верхнем полупространстве.

У каждого элемента группы $[T] \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{H}}^3)$ однозначно определен гиперболический объем $\text{Vol}(T) \in \mathbb{R}$ и инвариант Дена $D(T) \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Для многогранника с длинами рёбер l_i и соответствующими двугранными углами α_i инвариант Дена определяется формулой $D(T) = \sum l_i \otimes \alpha_i$.

Неформально содержание следующего результата можно описать так: по каждой тройке обратимых мероморфных функций на компактной гладкой кривой можно построить класс равносоставленности гиперболического многогранника. Полученное отображение полилинейно и антисимметрично. Инвариант Дена полученного многогранника выражается через значения одних функций в нулях и полюсах других, а гиперболический объем выражается как интеграл по кривой от некоторой явно заданной дифференциальной формы. Желание доказать существование подобной конструкции и было первоначальной мотивировкой данной работы.

Обозначим через p проекцию $\mathbb{C}^\times \wedge \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, заданную формулой $p(z \wedge w) = z \wedge w - \bar{z} \wedge \bar{w}$. Нетрудно проверить, что $D([z]) = p(z \wedge (1 - z))$.

Следствие 5. *Для гладкой проективной кривой $\mathcal{X}$ над $\mathbb{C}$ существует линейное отображение*

$$H: \mathbb{C}(\mathcal{X})^\times \wedge \mathbb{C}(\mathcal{X})^\times \wedge \mathbb{C}(\mathcal{X})^\times \longrightarrow \mathcal{P}(\overline{\mathbb{H}})$$

со следующими свойствами:

1. [Инвариант Дена] $D \circ H = \sum_{P \in \mathcal{X}} p \circ \partial_P$,
2. $H(f \wedge (1 - f) \wedge g) = \sum_{P \in \mathcal{X}} \text{ord}_P(g) \cdot [f(P)]$,
3. [Объем] $\text{Vol} \circ H(f_1 \wedge f_2 \wedge f_3) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{X}(\mathbb{C})} r_2(f_1, f_2, f_3)$, где $r_2(f_1, f_2, f_3) -$
— это следующая форма на кривой:

$$\text{Alt}_3 \left(\frac{1}{6} \log |f_1| d \log |f_2| \wedge d \log |f_3| - \frac{1}{2} \log |f_1| d \arg(f_2) \wedge d \arg(f_3) \right).$$

Содержание главы 3. Третья глава посвящена доказательству целочисленной версии гипотезы Штайна.

Определение 6. Сбалансированным графом $\{\Gamma, B\}$ мы будем называть пару, состоящую из трехвалентного графа Γ и функции B ,

сопоставляющей каждому ориентированному ребру Γ пару целых 2-адических чисел и удовлетворяющую следующим свойствам, которые мы будем называть условиями балансировки:

- Для каждой пары ориентированных ребер $\mathbf{e}^+$ и $\mathbf{e}^-$, отвечающих одному и тому же неориентированному ребру $\mathbf{e}$, выполнено следующее равенство:

$$B(\mathbf{e}^+) + B(\mathbf{e}^-) = (0, 0).$$

- Для каждой тройки ориентированных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, начинающихся в одной и той же вершине графа, выполнено следующее равенство:

$$B(\mathbf{e}_1) + B(\mathbf{e}_2) + B(\mathbf{e}_3) = (0, 0).$$

Индексом $m(\mathbf{v})$ вершины $\mathbf{v}$ мы будем называть 2-адическое нормирование определителя, образованного из координат векторов $B(\mathbf{e}_1)$ и $B(\mathbf{e}_2)$. Иначе говоря,

$$m(\mathbf{v}) = \nu_2 (B_x(\mathbf{e}_1)B_y(\mathbf{e}_2) - B_y(\mathbf{e}_1)B_x(\mathbf{e}_2)).$$

Из определения сбалансированного графа следует равенство $B(\mathbf{e}_1) + B(\mathbf{e}_2) + B(\mathbf{e}_3) = (0, 0)$, откуда легко заключить, что данное выше определение не зависит от того, какие именно два ребра выбирать. Заметим, что индекс вершины не обязательно конечен.

Второй целью диссертации является доказательство следующей теоремы об индексах вершин сбалансированного графа:

Теорема 7. *У произвольного сбалансированного графа число вершин наименьшего индекса четно.*

Опишем приложение этой теоремы.

Определение 8. Назовем многоугольник *сбалансированным*, если его стороны можно разбить на пары таким образом, чтобы в каждой

паре соответствующие векторы были противоположны друг другу. Назовем многоугольник *целочисленным*, если координаты всех его вершин целочисленны в некоторой аффинной системе координат на плоскости.

Из утверждения теоремы о четности числа вершин минимального индекса несложно вывести целочисленную версию гипотезы Штайна.

Следствие 9. *Целочисленный сбалансированный многоугольник нельзя разрезать на нечетное число треугольников равной площади так, чтобы координаты всех вершин триангуляции были целыми числами.*

В частности отсюда следует, что целочисленный сбалансированный многоугольник нечетной площади нельзя разрезать на нечетное число треугольников равной площади так, чтобы координаты всех вершин триангуляции были целыми числами.

Заключение

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю С. К. Ландо за помощь в написании диссертации и А. М. Левину за внимательное чтение рукописи и ценные советы. Очень важным для автора было общение с А. Б. Гончаровым, А. А. Суслиным и А. А. Бейлинсоном во время написания этой работы.

Публикации автора по теме диссертации

1. Rudenko D. On equidissection of balanced polygons // 851. Записки научных семинаров ПОМИ им. В.А.Стеклова Российской академии наук. 2012. Т. 403. С. 142-158.
2. Руденко Д.Г. Об усиленном законе взаимности Суслина и его приложениях к вопросам равносоставленности гиперболических многогранников // Функциональный анализ и его приложения. 2016. Т. 50 вып.1. С. 79-84.
3. Rudenko D. Arithmetic of 3-valent graphs and equidissections of flat surfaces [Электронный ресурс]// Working papers by Cornell University. Series math «arxiv.org». 2014. URL:<http://arxiv.org/abs/1409.7996>.
4. Rudenko D. Scissor Congruence and Suslin reciprocity law [Электронный ресурс]// Working papers by Cornell University. Series math «arxiv.org». 2015. URL:<http://arxiv.org/pdf/1511.00520>.