

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи

РУДЕНКО Даниил Глебович

Усиленный закон взаимности Суслина и смежные вопросы

01.01.06 Математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук, профессор
Ландо Сергей Константинович

Москва— 2016 г.

Оглавление

1. Введение	4
1.1. Постановка задачи	4
1.2. Основное содержание работы	10
2. Усиленный закон взаимности Суслина	15
2.1. Мотивные кохомологии поля	15
2.1.1. K -теория Милнора	16
2.1.2. Группа Блоха	17
2.1.3. Гипотезы Гончарова	19
2.2. Основные результаты и их следствия	21
2.2.1. Отображения вычета	21
2.2.2. Теорема гомотопической инвариантности и закон взаимности	23
2.2.3. Приложения к теории равносоставленности	24
2.3. Доказательство Теоремы 2.4	26
2.3.1. План доказательства Теоремы 2.4	26
2.3.2. Гомотопическая инвариантность K -теории Милнора	27
2.3.3. Резольвента комплекса $\Gamma(k, 2)$	29
2.3.4. Фильтрации на полилогарифмическом комплексе поля функций на проективной прямой	31
2.3.5. Отображения ковычета $h_P: \bar{\Gamma}(F_P, 2) \longrightarrow gr_d \Gamma(F(t), 3)$	34
2.3.6. Завершение доказательства Теоремы 2.4.	40

3. Разрезания многоугольников на треугольники равной площади	45
3.1. Сбалансированные многоугольники	45
3.2. Сбалансированные графы	46
3.3. Доказательство теоремы 3.9	51

Глава 1

Введение

1.1. Постановка задачи

Актуальность и степень разработанности темы Диссертация посвящена изучению двух открытых вопросов, поставленных А. Б. Гончаровым и Ш. Штайном в работах [9] и [16].

Первый вопрос связан с теорией смешанных мотивов Тейта и гипотезами Гончарова. В работах А. Гротендика, П. Делиня, Ю. И. Манина, А. А. Бейлинсона и многих других ведущих математиков современности разработана гипотетическая теория смешанных мотивов алгебраических многообразий. В соответствии с этой теорией, каждому многообразию должен соответствовать комплекс объектов некоторой (пока не построенной) абелевой категории смешанных мотивов. При этом, такие инварианты многообразий, как числа Бетти и группы этальных когомологий, должны вычисляться по одним лишь мотивным данным.

В гипотетической категории смешанных мотивов над некоторым полем F можно выделить ее самую простую часть: подкатегорию смешанных мотивов Тейта, порожденную мотивом проективной прямой. В совместной работе [5] А. А. Бейлинсоном и П. Делинем был предложен способ построения обрамленных смешанных мотивов Тейта, связанных с классической полилогарифмической функцией $Li_n(z)$, для которых должны быть справедливы функциональ-

ные уравнения, которым удовлетворяет полилогарифмическая функция. Позднее Гончаров сформулировал набор гипотез, дающих внутреннее описание смешанных мотивов Тейта, получающихся с помощью конструкции Делиня и Бейлинсона. Это дало возможность явно определить комплексы абелевых групп, когомологии которых должны совпадать с мотивными когомологиями поля с рациональными коэффициентами $H_{\mathcal{M}}^{p,q}(F, \mathbb{Q})$. Такие комплексы называют *полилогарифмическими* из-за их связи с классическими полилогарифмами, особенно явной для случая числового поля.

Гипотезы о том, что когомологии полилогарифмических комплексов совпадают с мотивными когомологиями, представляются очень сложными. В частности, из этих гипотез можно вывести гипотезы Д. Загье о специальных значениях дзета-функций числовых полей. Другим их следствием являлось бы явное описание высшей K –теории поля с точностью до кручения, обобщающее символическое определение K –теории Милнора.

Одной из главных трудностей теории полилогарифмических комплексов является отсутствие естественного отображения нормы, связанного с расширением полей конечной степени, см. [8]. Это отображение определено для мотивных когомологий, следовательно, должно быть определено и для полилогарифмических комплексов, по крайней мере, на уровне производной категории. Старшие когомологии полилогарифмических комплексов совпадают с K –теорией Милнора. Уже в этом случае построение отображения нормы — непростая задача, элегантно решенная, в частности, А. А. Суслиным в [3].

В настоящей работе это построение продолжено на вторые с конца группы когомологий полилогарифмических комплексов. Из этого результата выводится усиление закона взаимности Суслина, сформулированного как гипотеза А. Б. Гончаровым, а также некоторые теоремы о равносоставленности гиперболических многогранников. Заметим, что полученные результаты служат косвенным подтверждением справедливости общих гипотез Гончарова, Бейлинсона и Делиня.

Второй вопрос, изучаемый в диссертации, связан с разрезаниями многоугольников на треугольники равной площади. Под разрезанием мы понимаем представление многоугольника в виде объединения конечного числа треугольников, непересекающихся по внутренним точкам. В работе [11] П. Монски было доказано, что квадрат нельзя разрезать на нечетное число треугольников равной площади. Доказательство представляет из себя комбинацию двух идей: раскраски плоскости в три цвета, построение которой использует дискретное 2-адическое нормирование, и леммы Шпернера.

Известно несколько различных обобщений теоремы Монски. В 1990 году П. Монски доказал предположение, высказанное ранее Ш. Штайном, утверждающее, что центрально-симметричный многоугольник не может быть разрезан на нечетное число треугольников равной площади ([10]). Далее, будем называть *полимино* фигуру, являющуюся объединением конечного числа клеток прямоугольной целочисленной решётки. В 1999 году Ш. Штайн доказал, что полимино нечетной площади нельзя разрезать на нечетное число треугольников равной площади ([17]). Позже И. Пратон доказал то же самое утверждение для полимино произвольной площади ([12]). В 2000 году Ш. Штайн сформулировал гипотезу, обобщающую все вышеперечисленные результаты.

Пусть B — многоугольник на плоскости, про который мы не предполагаем ни выпуклости, ни связности границы. Мы будем называть B сбалансированным, если его рёбра можно разбить на пары равных по длине и параллельных между собой. Гипотеза Штайна утверждает, что сбалансированный многоугольник не может быть разрезан на нечетное число треугольников равной площади.

В диссертации разрабатывается новый подход к задачам о разрезании на треугольники равной площади, и доказывается гипотеза Штайна при некоторых дополнительных предположениях целочисленности. Случай многоугольника нечетной площади опубликован, а общий случай готовится к публикации.

Цель работы. У этой работы было три основных цели. Первая цель —

доказать теорему гомотопической инвариантности для некоторых когомологий полилогарифмических комплексов. Вторая — использовать эти результаты для построения интересных классов равносоставленности гиперболических многогранников по данным алгебраической геометрии. Наконец, третьей целью было разработать новые методы доказательства невозможности разрезания многоугольников на треугольники равной площади.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Основные результаты диссертации заключаются в следующем.

- Доказана теорема гомотопической инвариантности для предпоследних групп когомологий полилогарифмических комплексов.
- В качестве следствия этой теоремы получено доказательство гипотезы А. Б. Гончарова об усиленном законе взаимности Суслина.
- Придумана конструкция классов равносоставленности гиперболических многогранников по тройкам мероморфных функций на гладких проективных кривых. Вычислены объемы и инварианты Дена этих многогранников.
- Определены *сбалансированные графы* и доказана теорема о минимальном индексе вершин у таких графов.
- В качестве следствия этой теоремы получено доказательство гипотезы Ш. Штайна о сбалансированных многоугольниках в рациональном случае.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты и методы работы могут быть использованы для дальнейшего развития теории когомологий полилогарифмических комплексов. Новые методы вычислений в группах Блоха могут найти независи-

мые применения. Кроме этого, автор надеется, что комбинаторные и теоретико-числовые свойства сбалансированных графов могут быть использованы в задачах, смежных с теорией разрезаний.

Методология и методы исследования. В диссертации используются различные комбинаторные, алгебраические и теоретико-числовые методы. Кроме этого, используются некоторые стандартные методы гомологической алгебры.

Положения, выносимые на защиту. В диссертации доказаны, в частности, следующие теоремы.

- Для произвольного поля F следующая последовательность групп когомологий полилогарифмических комплексов точна:

$$0 \longrightarrow H_G^{n-1,n}(F)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow H_G^{n-1,n}(F(t))_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\oplus \partial_P} \bigoplus_{P \neq \infty} H_G^{n-2,n-1}(F_P)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow 0.$$

- Для гладкой проективной кривой $\mathcal{X}$ над $\mathbb{C}$ отображение полного вычета

$$Res: H_G^{n-1,n}(\mathbb{C}(\mathcal{X}))_{\mathbb{Q}} \longrightarrow H_G^{n-2,n-1}(\mathbb{C})_{\mathbb{Q}},$$

определяемое как сумма отображений вычета ∂_P по всем точкам кривой $\mathcal{X}$, тождественно равно нулю.

- Целочисленный сбалансированный многоугольник нечетной площади нельзя разрезать на нечетное число треугольников равной площади так, чтобы координаты всех вершин триангуляции были целыми числами.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах и конференциях:

- На семинаре "Geometric Langlands" , The University of Chicago, 01/2016;
- На семинаре "Topology", Northwestern University, 03/2016;
- На конференции фонда "Династия", НМУ, Москва, 06/2015;
- На конференции по алгебраическим структурам в выпуклой геометрии, ВШЭ, Москва, 02/2015;
- На семинаре лаборатории алгебраической геометрии, ВШЭ, Москва, 12/2014, 12/2013;
- На семинаре "Комбинаторика характеристических классов", ВШЭ, Москва, 11/2014.

Публикации автора по теме диссертации. Результаты диссертации опубликованы в следующих изданиях:

1. Rudenko D. On equidissection of balanced polygons // 851. Записки научных семинаров ПОМИ им. В.А.Стеклова Российской академии наук. 2012. Т. 403. С. 142-158.
2. Руденко Д.Г. Об усиленном законе взаимности Суслина и его приложениях к вопросам равносоставленности гиперболических многогранников // Функциональный анализ и его приложения. 2016. Т. 50 вып.1. С. 79-84.
3. Rudenko D. Arithmetic of 3-valent graphs and equidissections of flat surfaces [Электронный ресурс]// Working papers by Cornell University. Series math «arxiv.org». 2014.
URL:<http://arxiv.org/abs/1409.7996>.
4. Rudenko D. Scissor Congruence and Suslin reciprocity law [Электронный ресурс]// Working papers by Cornell University. Series math «arxiv.org». 2015.
URL:<http://arxiv.org/pdf/1511.00520>.

1.2. Основное содержание работы

Диссертация состоит из вводной главы, двух глав, содержащих изложение основных результатов исследования, и списка литературы.

Содержание главы 1 (введения). Во введении описана актуальность темы исследования и степень её разработанности, перечислены цели и задачи исследования, описана научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, методы исследования, апробация результатов исследования.

Содержание главы 2. Вторая глава содержит доказательство теоремы гомотопической инвариантности и её следствия. Перед тем, как сформулировать основные результаты этой главы, дадим необходимые определения.

Рассмотрим подгруппу $R_2(k)$ свободной группы на точках проективной прямой $\mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(k)]$, порожденную элементами $[0]$, $[\infty]$ и комбинациями

$$\sum_{i=1}^5 (-1)^i [r(y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_5)],$$

где $(y_1, \dots, y_5)$ — всевозможные пятерки различных точек проективной прямой $\mathbb{P}^1(k)$, а символом $r(a, b, c, d) = \frac{(a-b)(c-d)}{(c-b)(a-d)}$ обозначается двойное отношение четырех точек. Группа $B_2(k)$ определяется как следующий фактор:

$$B_2(k) := \frac{\mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(k)]}{R_2(k)}.$$

Образ элемента $[x]$ в факторе обозначим символом $\{x\}_2$.

Рассмотрим отображение

$$\delta: \mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(k)] \longrightarrow k^\times \wedge k^\times,$$

переводящее базисный элемент $[x] \in \mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(k)]$ в $x \wedge (1-x)$. Можно показать, что δ равно нулю на группе $R_2(k)$.

Определение 1.1. Группой $H_G^{n-1,n}(k)$ мы будем называть ядро отображения

$$B_2(k) \otimes_a \bigwedge^{n-2} k^\times \xrightarrow{\delta} \bigwedge^n k^\times.$$

Здесь символом $B_2(k) \otimes_a \bigwedge^{n-2} k^\times$ обозначен фактор группы $B_2(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge^{n-2} k^\times$ по подгруппе, порожденной элементами вида $\{x\}_2 \otimes x \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-3}$ для некоторых $x, x_1, \dots, x_{n-3} \in k$, а отображение δ задаётся формулой

$$\delta(\{x\}_2 \otimes x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-2}) = x \wedge (1 - x) \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-2}.$$

С каждой абелевой группой A можно связать её рационализацию $A_{\mathbb{Q}} = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Первой целью диссертации является доказательство следующей теоремы о гомотопической инвариантности:

Теорема 1.2. *Для произвольного поля F следующая последовательность точна:*

$$0 \longrightarrow H_G^{n-1,n}(F)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow H_G^{n-1,n}(F(t))_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\oplus \partial_P} \bigoplus_{P \neq \infty} H_G^{n-2,n-1}(F_P)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow 0.$$

Здесь символом P обозначена точка проективной прямой $\mathbb{P}^1(F)$, а F_P — соответствующее поле вычетов. Далее, инъективное отображение индуцировано вложением поля F в поле $F(t)$, а сюръективное есть прямая сумма отображений вычета.

Из утверждения этой теоремы несложно вывести *усиленный закон взаимности Суслина*.

Следствие 1.3. *Для гладкой проективной кривой $\mathcal{X}$ над $\mathbb{C}$ отображение полного вычета*

$$Res: H_G^{n-1,n}(\mathbb{C}(\mathcal{X}))_{\mathbb{Q}} \longrightarrow H_G^{n-2,n-1}(\mathbb{C})_{\mathbb{Q}},$$

определяемое как сумма отображений вычета ∂_P по всем точкам кривой $\mathcal{X}$,

тождественно равно нулю.

Перед тем как сформулировать еще одно следствие, напомним некоторые определения из теории равносоставленности многогранников в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^3$.

Определение 1.4. Группа $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{H}}^3)$ — это абелева группа, заданная образующими $[T]$, соответствующими гиперболическим многогранникам T , возможно, с вершинами на абсолюте, и следующими соотношениями. Во-первых, $[T_1 \sqcup T_2] = [T_1] + [T_2]$, если внутренности многогранников T_1 и T_2 не пересекаются. Во-вторых, элементы группы, соответствующие изометричным многогранникам, совпадают.

Каждому комплексному числу $z \in \mathbb{C}$ соответствует элемент $[z] \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{H}}^3)$, отвечающий тетраэдру с вершинами на абсолюте, имеющими координаты $\infty, 0, 1, z$ в модели Пуанкаре в верхнем полупространстве.

У каждого элемента группы $[T] \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{H}}^3)$ однозначно определен гиперболический объем $Vol(T) \in \mathbb{R}$ и инвариант Дена $D(T) \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Для многогранника с длинами рёбер l_i и соответствующими двугранными углами α_i инвариант Дена определяется формулой $D(T) = \sum l_i \otimes \alpha_i$.

Неформально содержание следующего результата можно описать так: по каждой тройке обратимых мероморфных функций на компактной гладкой кривой можно построить класс равносоставленности гиперболического многогранника. Полученное отображение полилинейно и антисимметрично. Инвариант Дена полученного многогранника выражается через значения одних функций в нулях и полюсах других, а гиперболический объем выражается как интеграл по кривой от некоторой явно заданной дифференциальной формы. Желание доказать существование подобной конструкции и было первоначальной мотивировкой данной работы.

Обозначим через p проекцию $\mathbb{C}^\times \wedge \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, заданную формулой $p(z \wedge w) = z \wedge w - \bar{z} \wedge \bar{w}$. Нетрудно проверить, что $D([z]) = p(z \wedge (1 - z))$.

Следствие 1.5. Для гладкой проективной кривой $\mathcal{X}$ над $\mathbb{C}$ существует линейное отображение

$$H: \mathbb{C}(\mathcal{X})^\times \wedge \mathbb{C}(\mathcal{X})^\times \wedge \mathbb{C}(\mathcal{X})^\times \longrightarrow \mathcal{P}(\overline{\mathbb{H}})$$

со следующими свойствами:

1. [Инвариант Дена] $D \circ H = \sum_{P \in \mathcal{X}} p \circ \partial_P$,
2. $H(f \wedge (1 - f) \wedge g) = \sum_{P \in \mathcal{X}} \text{ord}_P(g) \cdot [f(P)]$,
3. [Объем] $\text{Vol} \circ H(f_1 \wedge f_2 \wedge f_3) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{X}(\mathbb{C})} r_2(f_1, f_2, f_3)$, где $r_2(f_1, f_2, f_3) = \dots$

это следующая форма на кривой:

$$\text{Alt}_3 \left(\frac{1}{6} \log |f_1| d \log |f_2| \wedge d \log |f_3| - \frac{1}{2} \log |f_1| d \arg(f_2) \wedge d \arg(f_3) \right).$$

Содержание главы 3. Третья глава посвящена доказательству целочисленной версии гипотезы Штайна.

Определение 1.6. Сбалансированным графом $\{\Gamma, B\}$ мы будем называть пару, состоящую из трехвалентного графа Γ и функции B , сопоставляющей каждому ориентированному ребру Γ пару целых 2-адических чисел и удовлетворяющую следующим свойствам, которые мы будем называть условиями балансировки:

- Для каждой пары ориентированных ребер $\mathbf{e}^+$ и $\mathbf{e}^-$, отвечающих одному и тому же неориентированному ребру $\mathbf{e}$, выполнено следующее равенство:

$$B(\mathbf{e}^+) + B(\mathbf{e}^-) = (0, 0).$$

- Для каждой тройки ориентированных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, начинающихся в одной и той же вершине графа, выполнено следующее равенство:

$$B(\mathbf{e}_1) + B(\mathbf{e}_2) + B(\mathbf{e}_3) = (0, 0).$$

Индексом $m(\mathbf{v})$ вершины $\mathbf{v}$ мы будем называть 2-адическое нормирование определителя, образованного из координат векторов $B(\mathbf{e}_1)$ и $B(\mathbf{e}_2)$. Иначе говоря,

$$m(\mathbf{v}) = \nu_2 (B_x(\mathbf{e}_1)B_y(\mathbf{e}_2) - B_y(\mathbf{e}_1)B_x(\mathbf{e}_2)).$$

Из определения сбалансированного графа следует равенство $B(\mathbf{e}_1) + B(\mathbf{e}_2) + B(\mathbf{e}_3) = (0, 0)$, откуда легко заключить, что данное выше определение не зависит от того, какие именно два ребра выбирать. Заметим, что индекс вершины не обязательно конечен.

Второй целью диссертации является доказательство следующей теоремы об индексах вершин сбалансированного графа:

Теорема 1.7. *У произвольного сбалансированного графа число вершин наименьшего индекса четно.*

Опишем приложение этой теоремы.

Определение 1.8. Назовем многоугольник *сбалансированным*, если его стороны можно разбить на пары таким образом, чтобы в каждой паре соответствующие векторы были противоположны друг другу. Назовем многоугольник *целочисленным*, если координаты всех его вершин целочисленны в некоторой аффинной системе координат на плоскости.

Из утверждения теоремы о четности числа вершин минимального индекса несложно вывести целочисленную версию гипотезы Штайна.

Следствие 1.9. *Целочисленный сбалансированный многоугольник нельзя разрезать на нечетное число треугольников равной площади так, чтобы координаты всех вершин триангуляции были целыми числами.*

В частности отсюда следует, что целочисленный сбалансированный многоугольник нечетной площади нельзя разрезать на нечетное число треугольников равной площади так, чтобы координаты всех вершин триангуляции были целыми числами.

Глава 2

Усиленный закон взаимности Суслина

С каждой абелевой группой A можно связать её рационализацию $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. На протяжении всей второй главы мы будем работать только с соответствующими $\mathbb{Q}$ –векторными пространствами, не указывая этого каждый раз явно.

2.1. Мотивные кохомологии поля

Для совершенного поля F и гладкого алгебраического многообразия X над полем k Воеводский определил группы мотивных кохомологий $H_{\mathcal{M}}^{p,q}(k, \mathbb{Q})$. В частном случае, когда $X = \operatorname{Spec}(k)$, эти группы определяются как кохомологии явно заданного комплекса свободных абелевых групп $H^p(\mathbb{Q}(q)(k))$ (см., например, [19].) Эти же группы имеют более классическое описание на языке алгебраической K –теории поля: $H_{\mathcal{M}}^{p,q}(X, \mathbb{Q}) \cong gr_{\gamma}^q K_{2q-p}(X) \otimes \mathbb{Q}$. Здесь символом gr_{γ} обозначены присоединённые факторы фильтрации Адамса γ .

2.1.1. K –теория Милнора

Важным частным случаем мотивных когомологий является K –теория Милнора поля k . Напомним определение группы $K_n^M(k)$. Рассмотрим подгруппу $R_1(k)$ свободной группы на точках проективной прямой $\mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(k)]$, порожденную элементами $[0], [\infty]$ и

$$t_1(x_1, x_2) = [x_1] + [x_2] - [x_1 \cdot x_2]$$

для произвольных $x_1, x_2 \in k$. Группой $k^\times$ мы назовём фактор $k^\times := \frac{\mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(k)]}{R_1(k)}$. Эта группа совпадает с рационализацией мультипликативной группы поля k . Определим K –теорию Милнора $K_n^M(k)$ как фактор группы $\bigwedge^n k^\times$ по подгруппе, порожденной элементами вида $x \wedge (1-x) \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-2}$, где $x, x_1, \dots, x_{n-2} \in k^\times$.

Сделаем небольшое терминологическое отступление. Одна и та же группа $\mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(k)]$ будет появляться у нас в нескольких разных контекстах. Чтобы их было удобнее различать, мы будем приписывать справа индекс i , смысл которого состоит в том, что бы обозначить мотивный "вес" элементов $\mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(k)]$. В частности, выше мы использовали группу веса 1 и определили группу $k^\times$ через точную последовательность

$$0 \longrightarrow R_1(k) \longrightarrow \mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(k)]_1 \longrightarrow k^\times \longrightarrow 0.$$

Из результатов Суслина следует, что K –теория Милнора $K_n^M(k) \otimes \mathbb{Q}$ совпадает с группой мотивных когомологий $H_{\mathcal{M}}^{n,n}(k, \mathbb{Q})$. Иными словами, у группы мотивных когомологий поля веса (n, n) имеется простое описание на языке символов. Многие свойства мотивных когомологий можно доказать для K –теории Милнора непосредственно через это явное описание. Например, в параграфе 2.3.2 мы напомним доказательство следующей теоремы гомотопической инвариантности:

Теорема 2.1 (Milnor). *Для произвольного поля F следующая последователь-*

ность точна:

$$0 \longrightarrow K_n^M(F) \longrightarrow K_n^M(F(t)) \xrightarrow{\oplus \partial_P} \bigoplus_{P \neq \infty} K_{n-1}^M(F_P) \longrightarrow 0.$$

В этой последовательности инъективное отображение индуцировано вложением поля F в поле рациональных функций $F(t)$, символом F_P обозначены поля вычетов, связанные с точками проективной прямой $\mathbb{P}_F^1$. Отображения вычета ∂_P будут определены в параграфе 2.2.1.

С помощью этой теоремы можно определить отображение нормы на K –теории Милнора, связанное с расширением полей конечной степени L/F . Мы напомним идею этой конструкции в параграфе 2.2.2. Одним из следствий этого результата является следующий закон взаимности:

Следствие 2.2. *Для гладкой проективной кривой $\mathcal{X}$ над полем $\mathbb{C}$ отображение полного вычета*

$$Res: K_n^M(\mathbb{C}(\mathcal{X})) \longrightarrow K_{n-1}^M(\mathbb{C}),$$

определяемое как сумма отображений вычета ∂_P по всем точкам кривой $\mathcal{X}$, тождественно равно нулю.

2.1.2. Группа Блоха

Помимо K –теории Милнора есть еще один случай, когда известно явное описание группы мотивных когомологий через символы. Такое описание было найдено Суслиным для группы $H_{\mathcal{M}}^{1,2}(k, \mathbb{Q})$, изоморфной неприводимой части K –теории $K_3^{ind}(k)$. В работе [3] доказан более сильный результат, учитывающий кручение, но мы сразу опишем его рационализированную версию.

Рассмотрим подгруппу $R_2(k)$ свободной группы на точках проективной прямой $\mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(k)]_2$, порожденную элементами $[0], [\infty]$ и

$\sum_{i=1}^5 (-1)^i [r(y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_5)]$, где $(y_1, \dots, y_5)$ — всевозможные пятерки различных точек проективной прямой $\mathbb{P}^1(k)$, а символом $r(a, b, c, d) = \frac{(a-b)(c-d)}{(c-b)(a-d)}$ обозначается двойное отношение четырех точек. Группа $B_2(k)$ определяется как следующий фактор:

$$B_2(k) := \frac{\mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(k)]_2}{R_2(k)}$$

и вкладывается в точную последовательность

$$0 \longrightarrow R_2(k) \longrightarrow \mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(k)]_2 \longrightarrow B_2(k) \longrightarrow 0.$$

Образ элемента $[x]$ в факторе обозначим символом $\{x\}_2$.

Группу соотношений $R_2(k)$ можно определить немного иначе. Для каждой пары различных элементов $x_1, x_2 \in k$ определим рекуррентную последовательность $\{x_i\}$ формулой $x_{i+1} \cdot x_{i-1} = 1 - x_i$. Эта последовательность является 5-периодичной. Определим $R_2(k)$ как подгруппу $\mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(k)]_2$, порожденную элементами $[0], [\infty]$ и

$$t_2(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^5 [x_i].$$

Наметим ход доказательства эквивалентности двух приведенных выше определений. Для этого рассмотрим произвольную пятёрку различных точек $y_1, \dots, y_5 \in \mathbb{P}^1(k)$. Существует проективное преобразование $\mathbb{P}^1(k)$, переводящее y_3 в 0, y_4 в 1, а y_5 в ∞ . Обозначим образ точки y_1 при этом отображении символом x_1 , а образ y_2 — символом x_2 . Остаётся заметить, что все элементы x_i являются двойными отношениями некоторой четвёрки точек y_i .

Рассмотрим отображение

$$\delta: \mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(k)] \longrightarrow k^\times \wedge k^\times,$$

переводящее базисный элемент $[x] \in \mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(k)]$ в $x \wedge (1-x)$. Покажем, что δ равно

нулю на группе $R_2(k)$. Действительно,

$$\begin{aligned}\delta(t_2(x_1, x_2)) &= \sum_{i=1}^5 \delta([x_i]) = \sum_{i=1}^5 x_i \wedge (1 - x_i) = \\ \sum_{i=1}^5 x_i \wedge (x_{i-1} \cdot x_{i+1}) &= - \sum_{i=1}^5 x_{i-1} \wedge x_i + \sum_{i=1}^5 x_i \wedge x_{i+1} = 0.\end{aligned}$$

Это позволяет рассмотреть фактор-отображение

$$\delta: B_2(k) \longrightarrow k^\times \wedge k^\times,$$

заданное формулой $\delta(\{x\}_2) = x \wedge (1 - x)$.

В работе [2] Суслин показал, что ядро отображения

$$\delta: B_2(k) \longrightarrow k^\times \wedge k^\times$$

совпадает с группой мотивных кохомологий $H_{\mathcal{M}}^{1,2}(k, \mathbb{Q}) = K_3^{ind}(k) \otimes \mathbb{Q}$. Это ядро называется группой Блоха.

Свойства гомотопической инвариантности мотивных кохомологий вместе с результатами Суслина позволяют утверждать, что теорема, аналогичная 2.1, должна быть справедлива для групп Блоха, заданных через символы. Однако, на момент написания данной работы автору не удалось доказать этого элементарными методами.

2.1.3. Гипотезы Гончарова

Александром Гончаровым было предложено явное описание групп мотивных кохомологий поля произвольного веса. Подробное изложение гипотез Гончарова содержится, например, в [8]. Из предложенного им описания, в частности, можно вывести гипотезы Загье о выражении дзета-функций числовых полей в целых точках через полилогарифмы. Для наших целей будет достаточно при-

вести это описание для группы $H_{\mathcal{M}}^{n-1,n}(k, \mathbb{Q})$.

Определение 2.3. (Обрезанным) полилогарифмическим комплексом $\Gamma(k, n)$ веса n над полем F называется комплекс

$$B_2(k) \otimes_a \bigwedge^{n-2} k^\times \xrightarrow{\delta} \bigwedge^n k^\times.$$

Здесь символом $B_2(k) \otimes_a \bigwedge^{n-2} k^\times$ обозначен фактор группы $B_2(k) \otimes_{\mathbb{Q}} \bigwedge^{n-2} k^\times$ по подгруппе, порожденной элементами вида $\{x\}_2 \otimes x \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-3}$ для некоторых $x, x_1, \dots, x_{n-3} \in k$, а отображение δ задаётся формулой

$$\delta(\{x\}_2 \otimes x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-2}) = x \wedge (1 - x) \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-2}.$$

Заметим, что коядро отображения δ совпадает с K -теорией Милнора. Группой $H_G^{n-1,n}(k)$ мы будем называть ядро отображения δ .

Приведем некоторые соображения, мотивирующие данное выше определение. В статье [5] Александр Бейлинсон высказал предположение о том, что для произвольного поля k существует положительно градуированная коалгебра Ли $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}(k)$, для которой выполнено соотношение

$$H_{[q]}^p(\mathcal{L}_{\mathcal{M}}(k)) = H_{\mathcal{M}}^{p,q}(k, \mathbb{Q}).$$

Символом $H_{[q]}^p$ мы обозначаем p -е когомологии градуировки q . Можно показать, что если такая коалгебра существует, то компонента градуировки 1 совпадает с группой $k^\times$, а компонента градуировки 2 — с описанной выше группой $B_2(k)$. При этом, коумножение задаётся отображением δ . Александр Гончаров высказал предположение о схожем описании коалгебры $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}(k)$ в градуировке 3. В соответствии с этим предположением, $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}(k)_3$ совпадает с группой $B_3(k)$, являющейся фактором свободной группы на точках проективной прямой по некоторой группе соотношений R_3 , связанных с уравнениями для функции трило-

гарифм:

$$B_3(k) := \frac{\mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(k)]}{R_3(k)}.$$

При этом, коумножение является отображением δ :

$$\delta: B_3(k) \longrightarrow B_2(k) \otimes k^\times,$$

заданном на образующих формулой $\delta([x]) = \{x\}_2 \otimes x$. Рассмотрим три крайних члена коцепного комплекса коалгебры Ли $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}(k)$ в градуировке n :

$$B_3(k) \otimes \bigwedge^{n-3} k^\times \xrightarrow{\delta_3} B_2(k) \otimes \bigwedge^{n-2} k^\times \xrightarrow{\delta} \bigwedge^n k^\times.$$

Легко видеть, что первая группа когомологий этого комплекса совпадает с группой $H_G^{n-1,n}(k)$, определенной выше. В соответствии с гипотезами Гончарова, она также должна совпадать с $H_{\mathcal{M}}^{n-1,n}(k, \mathbb{Q})$.

Нашей целью будет доказать аналог Теоремы 2.1 для групп $H_G^{n-1,n}(k)$ и вывести из этого некоторые следствия.

2.2. Основные результаты и их следствия

2.2.1. Отображения вычета

Для того чтобы сформулировать теорему гомотопической инвариантности, нам необходимо определить отображения вычета ∂_P для полилогарифмических комплексов. Начнем с напомним конструкции отображений вычета для K -теории Милнора.

Рассмотрим поле L с дискретным нормированием ν и полем вычетов $\bar{L}$. Определим отображение вычета

$$\partial_\nu: \bigwedge^n L^\times \longrightarrow \bigwedge^{n-1} \bar{L}^\times.$$

на элементе $X = x_1 \wedge \dots \wedge x_n$ следующим правилом: если все нормирования элементов x_i равны нулю, то положим $\partial_\nu(X) = 0$, а если $\nu(x_1) = 1, \nu(x_2) = 0, \dots, \nu(x_n) = 0$, положим

$$\partial_\nu(X) = \overline{x_2} \wedge \dots \wedge \overline{x_n}.$$

На остальные элементы группы $\bigwedge^n L^\times$ определение вычета распространяется по линейности. Легко видеть, что оно корректно определено на K -теории Милнора и приведет к отображениям вычета $\partial_\nu: K_n^M(L) \longrightarrow K_{n-1}^M(\overline{L})$.

Аналогично определим отображение вычета

$$\partial_\nu: B_2(L) \otimes_a \bigwedge^{n-2} L^\times \longrightarrow B_2(\overline{L}) \otimes_a \bigwedge^{n-3} \overline{L}^\times$$

на элементе $Y = \{y\}_2 \otimes y_1 \wedge \dots \wedge y_{n-2}$ следующими правилами: если $\nu(y) \neq 0$, то положим $\partial_\nu(Y) = 0$; если все нормирования элементов y_i равны нулю, то также положим $\partial_\nu(Y) = 0$; наконец, если $\nu(y_1) = 1, \nu(y_2) = 0, \dots, \nu(y_{n-2}) = 0$, положим

$$\partial_\nu(Y) = \{\overline{y}\}_2 \otimes \overline{y_2} \wedge \dots \wedge \overline{y_{n-2}}.$$

На остальные элементы группы $B_2(L) \otimes_a \bigwedge^{n-2} L^\times$ определение вычета распространяется по линейности.

В итоге, определено цепное отображение вычета

$$\begin{array}{ccc} B_2(L) \otimes_a \bigwedge^{n-2} L^\times & \xrightarrow{\delta} & \bigwedge^n L^\times \\ \downarrow \partial_\nu & & \downarrow \partial_\nu \\ B_2(\overline{L}) \otimes_a \bigwedge^{n-3} \overline{L}^\times & \xrightarrow{\delta} & \bigwedge^{n-1} \overline{L}^\times \end{array},$$

индуцирующее отображение вычета на K -теории Милнора, определенное вы-

ше. Иначе говоря, мы построили отображение комплексов

$$\Gamma(L, n) \xrightarrow{\partial_\nu} \Gamma(\bar{L}, n-1),$$

индуцирующее отображение вычета

$$H_G^{n-1,n}(L) \xrightarrow{\partial_\nu} H_G^{n-2,n-1}(\bar{L}).$$

В дальнейшем нам будет важен случай, когда L — поле рациональных функций на гладкой кривой над полем F , а ν — дискретное нормирование, связанное с некоторой точкой P этой кривой. В этом случае поле вычетов будет обозначаться символом F_P , а отображение вычета — ∂_P .

2.2.2. Теорема гомотопической инвариантности и закон взаимности

Основным результатом этой главы является теорема гомотопической инвариантности:

Теорема 2.4. *Для произвольного поля F следующая последовательность точна:*

$$0 \longrightarrow H_G^{n-1,n}(F) \longrightarrow H_G^{n-1,n}(F(t)) \xrightarrow{\oplus \partial_P} \bigoplus_{P \neq \infty} H_G^{n-2,n-1}(F_P) \longrightarrow 0.$$

В этой последовательности инъективное отображение индуцировано вложением поля F в поле $F(t)$, а сюръективное есть прямая сумма по всем точкам $\mathbb{A}_F^1$ отображений вычета, построенных выше.

В статье [2] Суслин построил отображение нормы для K –теории Милнора и доказал закон взаимности, опираясь на теорему гомотопической инвариантности Милнора, в точности аналогичную теореме 2.4. Доказательство Суслина слово в слово переносится на случай групп $H_G^{n-1,n}(F)$, что позволяет построить

на этих группах отображения нормы, доказать их свойства и вывести закон взаимности, дословно следуя второму параграфу работы [2]. В частности, таким образом получается следующее утверждение, эквивалентное гипотезе 6.2 из [9].

Следствие 2.5. *Для гладкой проективной кривой $\mathcal{X}$ над $\mathbb{C}$ отображение полного вычета*

$$Res: H_G^{n-1,n}(\mathbb{C}(\mathcal{X})) \longrightarrow H_G^{n-2,n-1}(\mathbb{C}),$$

определяемое как сумма отображений вычета ∂_r по всем точкам кривой $\mathcal{X}$, тождественно равно нулю.

2.2.3. Приложения к теории равноставленности

Перед тем как сформулировать еще одно следствие, напомним некоторые определения из теории равноставленности многогранников в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^3$. Подробное изложение можно найти, например, в [7].

Определение 2.6. Группа $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{H}}^3)$ — это абелева группа, заданная образующими $[T]$, соответствующими гиперболическим многогранникам T , возможно, с вершинами на абсолюте, и следующими соотношениями. Во-первых, $[T_1 \sqcup T_2] = [T_1] + [T_2]$, если внутренности многогранников T_1 и T_2 не пересекаются. Во-вторых, элементы группы, соответствующие изометричным многогранникам, совпадают.

Каждому комплексному числу $z \in \mathbb{C}$ соответствует элемент $[z] \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{H}}^3)$, отвечающий тетраэдру с вершинами на абсолюте, имеющими координаты $\infty, 0, 1, z$ в модели Пуанкаре в верхнем полупространстве.

У каждого элемента группы $[T] \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{H}}^3)$ однозначно определен гиперболический объем $Vol(T) \in \mathbb{R}$ и инвариант Дена $D(T) \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Для многогранника с длинами рёбер l_i и соответствующими двугранными углами α_i , инвариант Дена определяется формулой $D(T) = \sum l_i \otimes \alpha_i$.

Неформально содержание нашего результата можно описать так: по каждой

тройке обратимых мероморфных функций на компактной гладкой кривой можно канонически построить класс равносоставленности гиперболического многогранника. Полученное отображение полилинейно и антисимметрично. Инвариант Дена полученного многогранника выражается через значения одних функций в нулях и полюсах других, а гиперболический объем выражается как интеграл по кривой от некоторой явно заданной дифференциальной формы. Желание доказать существование подобной конструкции и было первоначальной мотивировкой данной работы.

Обозначим через p проекцию $\mathbb{C}^\times \wedge \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, заданную формулой $p(z \wedge w) = z \wedge w - \bar{z} \wedge \bar{w}$. Нетрудно проверить, что $D([z]) = p(z \wedge (1 - z))$.

Следствие 2.7. *Для гладкой проективной кривой $\mathcal{X}$ над $\mathbb{C}$ существует линейное отображение*

$$H: \mathbb{C}(\mathcal{X})^\times \wedge \mathbb{C}(\mathcal{X})^\times \wedge \mathbb{C}(\mathcal{X})^\times \longrightarrow \mathcal{P}(\overline{\mathbb{H}})$$

со следующими свойствами:

1. [Инвариант Дена] $D \circ H = \sum_{P \in \mathcal{X}} p \circ \partial_P$,
2. $H(f \wedge (1 - f) \wedge g) = \sum_{P \in \mathcal{X}} \text{ord}_P(g) \cdot [f(P)]$,
3. [Объем] $\text{Vol} \circ H(f_1 \wedge f_2 \wedge f_3) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{X}(\mathbb{C})} r_2(f_1, f_2, f_3)$, где

$$r_2(f_1, f_2, f_3) = \text{Alt}_3 \left(\frac{1}{6} \log |f_1| d \log |f_2| \wedge d \log |f_3| - \frac{1}{2} \log |f_1| d \arg(f_2) \wedge d \arg(f_3) \right).$$

Доказательство. Наметим (несложное) доказательство этого результата. Напомним, что ядро отображения

$$B_2(F) \otimes_a F^\times \xrightarrow{\delta} \bigwedge^n F^\times.$$

совпадает с группой $H_G^{2,3}(F)$, а коядро — с $K_3^M(F)$. Для гладкой проективной

кривой $\mathcal{X}$ над $\mathbb{C}$ мы показали, что отображение полного вычета

$$Res: H_G^{2,3}(\mathbb{C}(\mathcal{X})) \longrightarrow H_G^{1,2}(\mathbb{C})$$

нулевое. Как было показано в [2], подобное отображение на —теории Милнора

$$Res: K_3^M(\mathbb{C}(\mathcal{X})) \longrightarrow K_2^M(\mathbb{C})$$

также нулевое. Следовательно, цепное отображение полного вычета

$$\begin{array}{ccc} B_2(\mathbb{C}(\mathcal{X}) \otimes_a \mathbb{C}(\mathcal{X})^\times) & \xrightarrow{\delta} & \bigwedge^3 \mathbb{C}(\mathcal{X})^\times \\ \downarrow Res & & \downarrow Res \\ B_2(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{C}^\times \wedge \mathbb{C}^\times \end{array},$$

определяемое как сумма отображений вычета ∂_P по всем точкам кривой $\mathcal{X}$, цепно гомотопно нулю. Значит, существует стягивающее отображение

$$h: \bigwedge^3 \mathbb{C}(\mathcal{X})^\times \longrightarrow B_2(\mathbb{C}),$$

такое что $h \circ \delta = Res$ и $\delta \circ h = Res$. Положим $H = [h]$. Тогда свойства **1** и **2** очевидны, а свойство **3** следует из результатов работы [9]. $\square$

2.3. Доказательство Теоремы 2.4

2.3.1. План доказательства Теоремы 2.4

Теорема 2.4 является наиболее важным результатом этой работы. Её утверждение заключается в том, что прямая сумма отображений вычета по всем конечным точкам проективной прямой $\oplus \partial_P$ индуцирует квазиизоморфизм комплексов

$$\frac{\Gamma(F(t), n)}{\Gamma(F, n)} \xrightarrow{\oplus \partial_P} \bigoplus_{P \neq \infty} \Gamma(F_P, n - 1).$$

Для случая $n = 2$ утверждение этой теоремы следует из результатов А. А. Суслина. Мы изложим доказательство со всеми деталями только для случая $n = 3$. Для больших значений параметра n рассуждение проводится полностью аналогично, но обозначения становятся значительно более громоздкими.

Изложим план доказательства. В начале мы построим комплексы $\bar{\Gamma}(F_P, n - 1)$, квазиизоморфные $\Gamma(F_P, n - 1)$, используя задание групп $B_2(F_P)$ и $F_P^\times$ через образующие и соотношения. Затем мы построим комплексы $gr_d\Gamma(F(t), n)$, используя фильтрацию по степеням многочленов. Самой содержательной частью доказательства теоремы будет построение отображений ковычета $\bar{\Gamma}(F_P, n - 1) \longrightarrow gr_d\Gamma(F(t), n)$ и доказательство того, что это отображение - квазиизоморфизм. Отсюда мы выведем Теорему 2.4, используя спектральную последовательность фильтрованного комплекса.

То, что отображение $\oplus \partial_P$ является квазиизоморфизмом, эквивалентно тому, что оно индуцирует изоморфизм на первых и на вторых когомологиях рассматриваемых нами полилогарифмических комплексах. Мы начнем с того, что напомним доказательство второго из этих утверждений, которое эквивалентно Теореме 2.1.

2.3.2. Гомотопическая инвариантность K -теории Милнора

Доказательство. Нам нужно доказать точность последовательности

$$0 \longrightarrow K_n^M(F) \longrightarrow K_n^M(F(t)) \xrightarrow{\oplus \partial_P} \bigoplus_{P \neq \infty} K_{n-1}^M(F_P) \longrightarrow 0.$$

Рассмотрим следующую фильтрацию на группе $\bigwedge^n F(t)^\times$:

$$\bigwedge^n F^\times = L_0^n \subset L_1^n \subset \dots \subset L_d^n \subset \dots,$$

в которой группа L_d^n порождена элементами $f_1 \wedge \dots \wedge f_n$, где f_i — многочлены, степень которых не превышает d . Для $n = 1$ мы будем писать вместо L_d^1 просто L_d . Эта фильтрация индуцирует фильтрацию на $K_n^M(F(t))$, присоединенные факторы которой мы обозначим $gr_d K_n^M(F(t))$. Докажем, что при $d \geq 1$ отображение

$$gr_d K_n^M(F(t)) \xrightarrow{\oplus \partial_P} \bigoplus_{deg(P)=d} K_{n-1}^M(F_P)$$

является изоморфизмом. Из этого утверждения Теорема 2.1 очевидно следует.

Во-первых, заметим, что это отображение корректно определено на факторах фильтрации, так как для произвольной точки P степени d отображение вычета ∂_P обнуляет L_{d-1} .

Для произвольного элемента $a \in F_P$ существует единственный полином с коэффициентами в поле F степени, не превышающей $d - 1$, совпадающий с a по модулю P . Обозначим этот элемент символом $\tilde{a}$.

Рассмотрим отображение h_P

$$\bigwedge^{n-1} F_P^\times \xrightarrow{h_P} gr_d K_n^M(F(t)),$$

заданное формулой

$$h_P(a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1}) = P \wedge \tilde{a}_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{a_{n-1}}.$$

Докажем, что это отображение полилинейно. Проверка этого свойства для произвольного n сводится к проверке для случая $n = 2$. Рассмотрим два произвольных элемента $a, b \in F_P$. Докажем, что $P \wedge \tilde{a} + P \wedge \tilde{b} - P \wedge \tilde{ab}$ равно нулю в группе $gr_d K_2^M(F(t))$. Для этого применим теорему о делении с остатком для полиномов к паре $\tilde{a}\tilde{b}$. По этой теореме существует единственный полином q , степень которого не превосходит $d - 1$, такой что $\tilde{a}\tilde{b} = -Pq + \tilde{a}\tilde{b}$. Степень этого

полинома, очевидно, не превышает $d - 1$. Следовательно

$$\frac{\tilde{a} \cdot \tilde{b}}{\tilde{a}\tilde{b}} + \frac{-P \cdot q}{\tilde{a}\tilde{b}} = 1.$$

Введем обозначение

$$x_P(a, b) = \frac{\tilde{a} \cdot \tilde{b}}{\tilde{a}\tilde{b}}.$$

В группе $K_2^M(F(t))$ элемент $x_P(a, b) \wedge (1 - x_P(a, b))$ равен нулю, следовательно, $P \wedge \tilde{a} + P \wedge \tilde{b} - P \wedge \tilde{a}\tilde{b}$ выражается через элементы, лежащие в группе L_{d-1}^2 . Остаётся заметить, что все эти элементы равны нулю в $gr_d K_2^M(F(t))$.

Так как отображение h_P переводит элементы Стайнберга в элементы Стайнберга, можно рассмотреть фактор-отображение

$$K_{n-1}^M(F_P) \xrightarrow{h_P} gr_d K_n^M(F(t)).$$

Легко проверить, что отображения $\oplus \partial_P$ и $\oplus h_P$ взаимно обратны. □

2.3.3. Резольвента комплекса $\Gamma(k, 2)$

В этом параграфе мы определим комплексы $\bar{\Gamma}(k, 2)$ и квазиизоморфизмы

$$\bar{\Gamma}(k, 2) \xrightarrow{j_P} \Gamma(k, 2)$$

для произвольного поля k . Позднее нас будет интересовать случай поля вычетов $k = F_P$.

Напомним, каким образом были определены группы соотношений $R_1(k)$ и $R_2(k)$ в параграфе 2.1. Группа $R_1(k)$ является подгруппой свободной группы на точках проективной прямой $\mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(k)]_1$, порожденной элементами $[0], [\infty]$ и $t_1(x_1, x_2) = [x_1] + [x_2] - [x_1 \cdot x_2]$ для произвольных $x_1, x_2 \in k$. Группа $R_2(k)$ — это подгруппа свободной группы на точках проективной прямой $\mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(k)]_2$, порожденная элементами $[0], [\infty]$ и $t_2(y_1, y_2) = \sum_{i=1}^5 [y_i]$, где числа $\{y_i\}$ заданы

рекуррентно формулой $y_{i+1} \cdot y_{i-1} = 1 - y_i$.

Определим комплекс $\bar{\Gamma}(k, 2)$ следующим образом:

$$R_2(k) \xrightarrow{\alpha} \frac{R_1(k) \otimes \mathbb{Q}[k]_1}{\mathbb{S}^2 R_1(k)} \oplus \mathbb{Q}[k]_2 \xrightarrow{\beta} \bigwedge^2 \mathbb{Q}[k]_1.$$

Опишем дифференциалы в этом комплексе:

$$\alpha(t_2(y_1, y_2)) = \left[\sum_{i=1}^5 (-[y_{i-1}] - [y_{i+1}] + [y_{i-1} \cdot y_{i+1}]) \wedge [y_i] \right] \oplus \sum_{i=1}^5 [y_i],$$

$$\beta(t_1(x_1, x_2) \otimes [x_3]) \oplus [x_4] = ([x_1] \wedge [x_3] + [x_2] \wedge [x_3] - [x_1 \cdot x_2] \wedge [x_3]) \oplus [x_4] \wedge [1 - x_4].$$

Теперь определим ценные отображения $j: \bar{\Gamma}(k, 2) \longrightarrow \Gamma(k, 2)$:

$$\begin{array}{ccc} R_2(k) & \xrightarrow{\alpha} & \frac{R_1(k) \otimes \mathbb{Q}[k]_1}{\mathbb{S}^2 R_1(k)} \oplus \mathbb{Q}[k]_2 \xrightarrow{\beta} \bigwedge^2 \mathbb{Q}[k]_1 \\ & & \downarrow j_2 \qquad \qquad \qquad \downarrow j_1 \\ & & B_2(k) \qquad \qquad \xrightarrow{\delta} k^\times \wedge k^\times \end{array},$$

формулами

$$j_1([a] \wedge [b]) = a \wedge b,$$

$$j_2(t_1(a, b) \otimes [c]) \oplus [d] = \{d\}_2.$$

Лемма 2.8. *Отображение j является квазиизоморфизмом.*

Доказательство. По определению групп $R_1(k), R_2(k)$ следующие две последовательности точны:

$$0 \longrightarrow R_1(k) \longrightarrow \mathbb{Q}[k]_1 \longrightarrow k^\times \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow R_2(k) \longrightarrow \mathbb{Q}[k]_2 \longrightarrow B_2(k) \longrightarrow 0.$$

Применяя к первой из них функтор внешнего квадрата, получаем точную по-

следовательность

$$0 \longrightarrow \mathbb{S}^2 R_1(k) \longrightarrow R_1(k) \otimes \mathbb{Q}[k]_1 \longrightarrow \bigwedge^2 \mathbb{Q}[k]_1 \longrightarrow \bigwedge^2 k^\times \longrightarrow 0.$$

Это приводит к следующей коммутативной диаграмме с точными строками:

$$\begin{array}{ccccc} R_2(k) & \longrightarrow & \mathbb{Q}[k]_2 & \longrightarrow & B_2(k) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \frac{R_1(k) \otimes \mathbb{Q}[k]_1}{\mathbb{S}^2 R_1(k)} & \longrightarrow & \bigwedge^2 \mathbb{Q}[k]_1 & \xrightarrow{\delta} & \bigwedge^2 k^\times \end{array}.$$

Эту диаграмму можно понимать как утверждение о том, что комплекс

$$\begin{array}{c} B_2(k) \\ \downarrow \\ \bigwedge^2 k^\times \end{array}$$

квазиизоморфен тотальному комплексу бикомплекса

$$\begin{array}{ccc} R_2(k) & \longrightarrow & \mathbb{Q}[k]_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{R_1(k) \otimes \mathbb{Q}[k]_1}{\mathbb{S}^2 R_1(k)} & \longrightarrow & \bigwedge^2 \mathbb{Q}[k]_1 \end{array},$$

что нам и требовалось доказать. □

2.3.4. Фильтрации на полилогарифмическом комплексе поля функций на проективной прямой

В параграфе 2.3.2 мы определили следующую фильтрацию на группе $F(t)^\times$

$$F^\times = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_d \subset \dots$$

Группа L_d порождена элементами $P(t)$, где P — неприводимый многочлен, степень которого не превышает d . Аналогично, мы определили фильтрации L_d^n на группах $\bigwedge^n F(t)^\times$. Определим фильтрацию M_d на группе $B_2(F(t))$ правилом

$$M_d = \delta^{-1} L_d.$$

У неё есть и альтернативное описание.

Лемма 2.9. *Группа M_d порождена над своей подгруппой M_{d-1} элементами следующих двух типов:*

- для каждой точки P степени d и двух элементов $a, b \in F_P$ — элементами $\{x_P(f_1, f_2)\}_2 = \left\{ \frac{\widetilde{f}_1 \cdot \widetilde{f}_2}{\widetilde{f_1 f_2}} \right\}_2$,
- для каждой пары различных унитарных неприводимых многочленов g_1 и g_2 степени d — элементами $\left\{ \frac{g_1}{g_2} \right\}_2$.

Доказательство. Суслин доказал свойство гомотопической инвариантности группы Блоха. В силу теоремы 2.1, это эквивалентно утверждению Теоремы 2.4 для $n = 2$, состоящему в том, что отображение

$$\oplus \partial_P: \frac{\Gamma(F(t), 2)}{\Gamma(F, 2)} \longrightarrow \bigoplus_{P \neq \infty} \Gamma(F_P, 1)$$

является квазиизоморфизмом. Иными словами, следующая последовательность точна:

$$0 \longrightarrow \frac{B_2(F(t))}{B_2(F)} \xrightarrow{\delta} \frac{F(t)^\times \wedge F(t)^\times}{F^\times \wedge F^\times} \xrightarrow{\oplus \partial_P} \bigoplus_{P \neq \infty} F(P)^\times \longrightarrow 0.$$

Из этой последовательности видно, что нам достаточно доказать, что группы $(Ker(\oplus \partial_P) \cap L_d^2) / L_{d-1}^2$ порождаются элементами $x_P(f_1, f_2) \wedge (1 - x_P(f_1, f_2))$ и $\frac{g_1}{g_2} \wedge (1 - \frac{g_1}{g_2})$.

Рассмотрим произвольный элемент X группы $Ker(\oplus \partial_P) \cap L_d^2$ и представим его как сумму мономов вида $x_1 \wedge x_2$, где x_i — неприводимые многочлены, сте-

пень которых не превышает d . Покажем, что можно отнять от него некоторое количество элементов вида $\delta\{x_P(f_1, f_2)\}$ и $\delta\left\{\frac{g_1}{g_2}\right\}_2$, где $\deg(g_1) = \deg(g_2) = d$, так что получившийся элемент будет лежать в L_{d-1}^2 .

Для этого сгруппируем мономы, входящие в X , в две группы. В первую группу войдут мономы вида $P \wedge a$, где P — некоторый неприводимый многочлен степени d , а a — неприводимый многочлен, степень которого не превышает $d - 1$. Во вторую группу входят мономы вида $a \wedge b$, где a и b — неприводимые многочлены степени d . Для каждого монома $a \wedge b$ из второй группы вычтем из X элемент

$$-\delta\left\{\frac{b}{a}\right\}_2 = b \wedge a + b \wedge (a - b) - a \wedge (a - b)$$

с соответствующим коэффициентом. В результате этой операции останутся только мономы первой группы. Для каждой точки P сгруппируем все соответствующие мономы первой группы в элемент $P \wedge \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{b_1 b_2 \dots b_m}$, где $\deg(a_i), \deg(b_i) \leq (d-1)$ и $\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{b_1 b_2 \dots b_m}$ сравним с 1 по модулю P . Остаётся заметить, что по модулю L_{d-1}^2 элемент $x_P(a, b) \wedge (1 - x_P(a, b)) = P \wedge a + P \wedge b - P \wedge \tilde{a}b$, поэтому элемент $P \wedge \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{b_1 b_2 \dots b_m}$ является суммой элементов вида $x_P \wedge (1 - x_P)$ по модулю L_{d-1}^2 . $\square$

Далее, определим фильтрацию на группе $B_2(F(t)) \otimes_a F(t)^\times$ как тензорное произведение $M_d \otimes L_d$. Мы будем обозначать символом gr_d градуированные факторы каждой из введенных фильтраций.

Комплекс $gr_d \Gamma(F(t), 3)$ определяется как

$$gr_d [B_2(F(t)) \otimes_a F(t)^\times] \xrightarrow{\delta_d} gr_d \bigwedge^3 F(t)^\times,$$

то есть

$$\frac{M_d \otimes L_d}{M_{d-1} \otimes L_{d-1}} \xrightarrow{\delta_d} \frac{L_d^3}{L_{d-1}^3}.$$

2.3.5. Отображения ковычета $h_P: \bar{\Gamma}(F_P, 2) \longrightarrow gr_d \Gamma(F(t), 3)$

Этот параграф является наиболее сложным в доказательстве Теоремы 2.4. Отсутствие естественных отображений ковычета для полилогарифмических комплексов является основной трудностью в доказательстве теоремы гомотопической инвариантности.

Нам нужно построить два отображения h_P^1 и h_P^2 :

$$\begin{array}{ccc} R_2(F_P) & \xrightarrow{\alpha_P} & \frac{R_1(F_P) \otimes \mathbb{Q}[F_P]_1}{\mathbb{S}^2 R_1(F_P)} \oplus \mathbb{Q}[F_P]_2 \xrightarrow{\beta_P} \bigwedge^2 \mathbb{Q}[F_P]_1 \\ & & \downarrow h_P^2 \qquad \qquad \qquad \downarrow h_P^1 \\ & & gr_d [B_2(F(t)) \otimes_a F(t)^\times] \xrightarrow{\delta} gr_d \bigwedge^3 F(t)^\times \end{array} .$$

Положим

$$h_P^1([f_1] \wedge [f_2]) = \tilde{f}_1 \wedge \tilde{f}_2 \wedge P,$$

$$h_P^2(t_1(f_1, f_2) \times [f_3]) \oplus [f_4] = \{\tilde{f}_4\}_2 \otimes P - \{x_P(f_1, f_2)\}_2 \otimes \tilde{f}_3.$$

Напомним, что отображение

$$x_P: R_1(F_P) \longrightarrow F(t)^\times$$

определено формулой

$$x_P([a] + [b] - [a \cdot b]) = \frac{\widetilde{ab}}{\widetilde{ab}}.$$

Обозначим символом L_P минимальную подгруппу в L_d , содержащую L_{d-1} и P . Главная трудность состоит в том, что бы показать, что отображение h_P определено корректно и является цепным.

Функции $x_P: R_1(F_P) \longrightarrow F(t)^\times$ и $\{x_P\}_2: R_1(F_P) \longrightarrow gr_d [B_2(F(t))]$ удовлетворяют уравнению коцикла:

$$x_P(c, d) + x_P(cd, a) = x_P(c, a) + x_P(ca, d),$$

$$\{x_P(c, d)\}_2 + \{x_P(cd, a)\}_2 = \{x_P(c, a)\}_2 + \{x_P(ca, d)\}_2.$$

Первое из них очевидно, так как и левая, и правая части равны $\frac{\tilde{a} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{d}}{\widetilde{acd}}$. Второе равенство следует из первого. Действительно, выражение, лежащее в группе $gr_d[B_2(F(t))]$, равно нулю, если его образ при отображении δ лежит в L_{d-1}^2 . Остаётся заметить, что $\delta \circ \{x_P\}_2 - P \wedge x_P \in L_{d-1}^2$.

Для того, чтобы показать, что h_P является корректно определенным, осталось показать, что h_P^2 равно нулю на группе $\mathbb{S}^2 R_1(F_P)$. Это эквивалентно следующему утверждению:

Лемма 2.10. *Для произвольной точки $P \in \mathbb{A}_F^1$ и $a, b, c, d \in F_P$,*

$$\{x_P(a, b)\}_2 \otimes x_P(c, d) + \{x_P(c, d)\}_2 \otimes x_P(a, b) = 0$$

в группе $gr_d[B_2(F(t)) \otimes_a F(t)^\times]$.

Доказательство. Обозначим элемент

$$\{x_P(a, b)\}_2 \otimes x_P(c, d) + \{x_P(c, d)\}_2 \otimes x_P(a, b)$$

символом $S(a, b|c, d)$. Доказательство будет проведено в несколько шагов.

Шаг 1. Если для некоторых $x, y \in L_{d-1}$ выполнено

$$1 - x, 1 - y, x - y \in P \cdot L_{d-1},$$

то $\{x\}_2 \otimes y + \{y\}_2 \otimes x = 0$ в группе $gr_d[B_2(F(t)) \otimes_a F(t)^\times]$.

Действительно,

$$0 = t_2(x, 1-y) \otimes \frac{x}{y} = \left(\{x\}_2 + \{1-y\}_2 + \left\{ \frac{y}{x} \right\}_2 + \left\{ \frac{x-y}{x(1-y)} \right\}_2 + \left\{ \frac{1-x}{1-y} \right\}_2 \right) \otimes \frac{x}{y}.$$

Заметим, что $\{x\}_2 \otimes x = \{1-y\}_2 \otimes y = \left\{ \frac{x}{y} \right\}_2 \otimes \frac{x}{y} = 0$ в группе $B_2(F(t)) \otimes_a F(t)^\times$.

Так как $1 - x, 1 - y, x - y \in L_P$, легко видеть, что $\left\{ \frac{x - y}{x(1 - y)} \right\}_2$ и $\left\{ \frac{1 - x}{1 - y} \right\}_2$ лежат в группе M_{d-1} (поскольку образ этих элементов при отображении δ лежит в L_{d-1}^2). Отсюда следует, что $\{x\}_2 \otimes y + \{y\}_2 \otimes x \in M_{d-1} \otimes L_{d-1}$, что нам и нужно было показать.

Шаг 2. Если $a = c$ или $ab = cd$, то $S(a, b|c, d) = 0$.

Рассмотрим элементы $x = x_P(a, b) = \frac{\widetilde{a} \cdot \widetilde{b}}{\widetilde{ab}}$ и $y = x_P(c, d) = \frac{\widetilde{c} \cdot \widetilde{d}}{\widetilde{cd}}$. Тогда $1 - x, 1 - y, x - y \in P \cdot L_{d-1}$. Например, если $a = c$, то

$$x - y = \widetilde{a} \frac{\widetilde{b} \cdot \widetilde{cd} - \widetilde{d} \cdot \widetilde{ab}}{\widetilde{ab} \cdot \widetilde{cd}},$$

и остаётся заметить, что $\widetilde{b} \cdot \widetilde{cd} - \widetilde{d} \cdot \widetilde{ab}$ — это кратный P полином, степень которого не превышает $2d$. Таким образом, утверждение Шага 2 следует из утверждения Шага 1.

Шаг 3. $S(a, b|c, d) = S(a, b|a \cdot c, d)$.

Поскольку функции x_P и $\{x_P\}_2$ удовлетворяют уравнению коцикла,

$$S(a, b|c, d) + S(a, b|c \cdot d, a) = S(a, b|a, c) + S(a, b|a \cdot c, d),$$

а в соответствии с Шагом 2, $S(a, b|c \cdot d, a) = S(a, b|a, c) = 0$.

Шаг 4. $S(a, b|c, d) = -S(a, d|b, c)$. Рассмотрим элементы

$$x = \frac{\widetilde{ab} \cdot \widetilde{cd}}{\widetilde{abc} \cdot \widetilde{d}} = \frac{x_P(c, d)}{x_P(ab, c)},$$

$$y = \frac{\widetilde{ad} \cdot \widetilde{bc}}{\widetilde{abc} \cdot \widetilde{d}} = \frac{x_P(a, d)}{x_P(a, bc)}.$$

В соответствии с Шагом 1, $\{x\}_2 \otimes y + \{y\}_2 \otimes x = 0$ в группе $gr_d[B_2(F(t)) \otimes_a F(t)^\times]$. С другой стороны, применяя пятичленное соотношение,

легко видеть, что в группе $gr_d[B_2(F(t))]$

$$\{x\}_2 = \{x_P(c, d)\}_2 - \{x_P(ab, c)\}_2,$$

$$\{y\}_2 = \{x_P(a, d)\}_2 - \{x_P(a, bc)\}_2.$$

Поэтому,

$$\begin{aligned} 0 &= \{x\}_2 \otimes y + \{y\}_2 \otimes x = \\ &= (\{x_P(c, d)\}_2 - \{x_P(ab, c)\}_2) \otimes \frac{x_P(a, d)}{x_P(a, bc)} + (\{x_P(a, d)\}_2 - \{x_P(a, bc)\}_2) \otimes \frac{x_P(c, d)}{x_P(ab, c)} = \\ &= S(a, d|c, d) - S(a, bc|c, d) - S(ab, c|a, d) + S(ab, c|a, bc). \end{aligned}$$

По Шагу 2 $S(a, d|c, d) = S(ab, c|a, bc) = 0$. Кроме этого, по Шагу 3 $S(a, bc|c, d) = S(a, b|c, d)$ и $S(ab, c|a, d) = S(b, c|a, d)$, откуда $S(a, b|c, d) + S(b, c|a, d) = 0$.

Завершение доказательства.

Трижды применяя Шаг 4, находим: $S(a, b|c, d) = -S(a, d|b, c) = S(a, c|b, d) = -S(a, b|c, d)$. $\square$

Далее, необходимо проверить, что отображение h_P является цепным. Равенство $h_P^1 \circ \beta_P = \delta \circ h_P^2$ является очевидным. Остаётся доказать, что $h_P^2 \circ \alpha_P = 0$. Это эквивалентно утверждению следующей леммы:

Лемма 2.11. *Для произвольной точки $P \in \mathbb{A}_F^1$ и элементов $f_1, f_2 \in F_P$ определим последовательность элементов поля F_P следующим правилом: $f_{i+1} = \frac{1 - f_i}{f_{i-1}}$. Заметим, что при этом $f_{i+5} = f_i$. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{i=5} \{\tilde{f}_i\} \otimes P + \sum_{i=1}^{i=5} \left\{ \frac{\widetilde{f_{i-1} \cdot f_{i+1}}}{\widetilde{1 - f_i}} \right\} \otimes \tilde{f}_i = 0$$

в группе $gr_d[B_2(F(t)) \otimes_a F(t)^\times]$.

Доказательство. Разберём случай нечетной степени $d = 2k + 1$, случай четного d полностью аналогичен. В этом доказательстве мы будем использовать

следующие соотношения в группе $B_2(F(t)) \otimes_a F(t)^\times$:

$$\{x\}_2 - \{y\}_2 - \left\{ \frac{x}{y} \right\}_2 + \left\{ \frac{1-x}{1-y} \right\}_2 - \left\{ \frac{y(1-x)}{x(1-y)} \right\}_2 = 0.$$

$$\{x\}_2 \otimes (1-x) = 0.$$

Для простоты будем опускать тильду в обозначении $\tilde{f}_i \in F[t]$ и 2 в символе $\{x\}_2$.

Шаг 1. Для произвольного элемента $x \in F(P)$ существуют полиномы $x_1, x_2 \in F[t]$, степень которых не превосходит $\frac{d}{2}$, такие что $x = \frac{x_1}{x_2}$.

Так как случай $x = 0$ очевиден, предположим, что x обратим в поле F_P . Рассмотрим поле $F(P) = \frac{F[t]}{(P)}$ как векторное пространство над F с базисом $1, t, t^2, \dots, t^{d-1}$. Символом $F(P)_s$ обозначим линейное подпространство с базисом $1, t, t^2, \dots, t^s$ размерности $s+1$. Обозначим оператор умножения на x , действующий на пространстве F_P , символом m_x . Нам нужно показать, что

$$m_x(F(P)_k) \cap F(P)_k \neq \emptyset.$$

Действительно, так как оператор m_x обратим, $\dim(m_x(F(P)_k)) = \dim(F(P)_k) = k+1$, поэтому

$$\dim(m_x(F(P)_k)) + \dim(F(P)_k) = 2k+2 > \dim(F(P)).$$

Шаг 2. Существуют элементы $x_i \in L_{d-1}$ такие, что $x_i \equiv f_i(\text{mod } P)$, а также $1 - x_i \in L_{d-1}$ и $\frac{x_i - f_i}{P} \in L_{d-1}$.

Используя результаты Шага 1, найдем многочлены $a, b, c, d \in F[t]$, степень которых не превышает k , такие что $x_1 = \frac{a}{b} \equiv f_1(\text{mod } P)$ и $x_2 = \frac{c}{d} \equiv f_2(\text{mod } P)$. Зададим рекуррентно $x_{i+1} = \frac{1 - x_i}{x_{i-1}}$. Тогда

$$x_1 = \frac{a}{b}; 1 - x_1 = \frac{b - a}{b},$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{c}{d}; 1 - x_2 = \frac{d - c}{d}, \\
x_3 &= \frac{b(d - c)}{ad}; 1 - x_3 = \frac{ad - bd + bc}{ad}, \\
x_4 &= \frac{ad - bd + bc}{ac}; 1 - x_4 = \frac{(d - c)(b - a)}{ac}, \\
x_5 &= \frac{(b - a)d}{bc}; 1 - x_5 = \frac{bc - bd + ad}{bc}.
\end{aligned}$$

Из этих формул очевидно, что $x_i, 1 - x_i, \frac{x_i - f_i}{P} \in L_{d-1}$.

Шаг 3. $(\{x_i\} - \{f_i\}) \otimes P = - \left\{ \frac{x_i}{f_i} \right\} \otimes (1 - f_i) + \left\{ \frac{1 - x_i}{1 - f_i} \right\} \otimes x_i.$

Обозначим $\frac{x_i - f_i}{P}$ символом q_i . Нетрудно видеть, что

$$\left\{ \frac{f_i}{x_i} \right\} \otimes \frac{Pq_i}{x_i} = 0,$$

$$\left\{ \frac{f_i(1 - x_i)}{x_i(1 - f_i)} \right\} \otimes \frac{Pq_i}{x_i(1 - f_i)} = 0,$$

$$\left\{ \frac{1 - x_i}{1 - f_i} \right\} \otimes \frac{Pq_i}{1 - f_i} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
(\{x_i\} - \{f_i\}) \otimes P &= \left\{ \frac{x_i}{f_i} \right\} \otimes P + \left\{ \frac{f_i(1 - x_i)}{x_i(1 - f_i)} \right\} \otimes P - \left\{ \frac{1 - x_i}{1 - f_i} \right\} \otimes P = \\
&= \left\{ \frac{x_i}{f_i} \right\} \otimes P + \left\{ \frac{f_i(1 - x_i)}{x_i(1 - f_i)} \right\} \otimes \frac{x_i(1 - f_i)}{q_i} - \left\{ \frac{1 - x_i}{1 - f_i} \right\} \otimes \frac{x_i(1 - f_i)}{q_i} + \left\{ \frac{1 - x_i}{1 - f_i} \right\} \otimes x_i = \\
&= \left\{ \frac{x_i}{f_i} \right\} \otimes P + \left(\{x_i\} - \{f_i\} - \left\{ \frac{x_i}{f_i} \right\} \right) \otimes \frac{x_i(1 - f_i)}{q_i} + \left\{ \frac{1 - x_i}{1 - f_i} \right\} \otimes x_i = \\
&= \left\{ \frac{x_i}{f_i} \right\} \otimes \frac{Pq_i}{x_i(1 - f_i)} + \left\{ \frac{1 - x_i}{1 - f_i} \right\} \otimes x_i = - \left\{ \frac{x_i}{f_i} \right\} \otimes (1 - f_i) + \left\{ \frac{1 - x_i}{1 - f_i} \right\} \otimes x_i.
\end{aligned}$$

Шаг 4. $\sum_{i=1}^{i=5} \{f_i\} \otimes P + \sum_{i=1}^{i=5} \left\{ \frac{f_{i-1} \cdot f_{i+1}}{1 - f_i} \right\} \otimes f_i = 0$

Заметим, что в группе $gr_d[B_2(F(t))]$ выполнены равенства

$$\left\{ \frac{1 - x_i}{1 - f_i} \right\} = \left\{ \frac{1 - x_i}{f_i f_{i+1}} \right\} + \left\{ \frac{f_i f_{i+1}}{1 - f_i} \right\},$$

$$\left\{ \frac{x_{i+1}x_{i-1}}{f_{i+1}f_{i-1}} \right\} = \left\{ \frac{x_{i-1}}{f_{i-1}} \right\} + \left\{ \frac{x_{i+1}}{f_{i+1}} \right\}.$$

Кроме этого, $\sum \{x_i\} = 0$, так как $x_{i-1}x_{i+1} = 1 - x_i$. Наконец, по предыдущей лемме,

$$\left\{ \frac{f_{i-1}f_{i+1}}{1-f_i} \right\} \otimes \frac{x_i}{f_i} = - \left\{ \frac{x_i}{f_i} \right\} \otimes \frac{f_{i-1}f_{i+1}}{1-f_i}$$

и

$$\left\{ \frac{x_{i+1}}{f_{i+1}} \right\} \otimes \frac{x_i}{f_i} = - \left\{ \frac{x_i}{f_i} \right\} \otimes \frac{x_{i+1}}{f_{i+1}}.$$

Отсюда мы получаем, что

$$\begin{aligned} \sum \{f_i\} \otimes P + \sum \left\{ \frac{f_{i-1} \cdot f_{i+1}}{1-f_i} \right\} \otimes f_i &= \sum (\{f_i\} - \{x_i\}) \otimes P + \sum \left\{ \frac{f_{i-1} \cdot f_{i+1}}{1-f_i} \right\} \otimes f_i = \\ &= \sum \left\{ \frac{x_i}{f_i} \right\} \otimes (1-f_i) - \sum \left\{ \frac{1-x_i}{1-f_i} \right\} \otimes x_i + \sum \left\{ \frac{f_{i-1} \cdot f_{i+1}}{1-f_i} \right\} \otimes f_i = \\ &= \sum \left\{ \frac{x_i}{f_i} \right\} \otimes (1-f_i) - \sum \left\{ \frac{f_{i-1} \cdot f_{i+1}}{1-f_i} \right\} \otimes x_i - \sum \left\{ \frac{1-x_i}{f_{i+1}f_{i-1}} \right\} \otimes x_i + \sum \left\{ \frac{f_{i-1} \cdot f_{i+1}}{1-f_i} \right\} \otimes f_i = \\ &= \sum \left(\left\{ \frac{x_i}{f_i} \right\} \otimes \frac{1-f_i}{f_{i+1}f_{i-1}} - \sum \left\{ \frac{f_{i-1} \cdot f_{i+1}}{1-f_i} \right\} \otimes \frac{x_i}{f_i} \right) \otimes x_i + \\ &= \sum \left\{ \frac{x_i}{f_i} \right\} \otimes f_{i+1}f_{i-1} - \sum \left\{ \frac{x_{i+1}x_{i-1}}{f_{i+1}f_{i-1}} \right\} \otimes x_i = \\ &= \sum \left\{ \frac{x_i}{f_i} \right\} \otimes f_{i+1}f_{i-1} - \sum \left\{ \frac{x_{i+1}}{f_{i+1}} \right\} \otimes x_i - \sum \left\{ \frac{x_{i-1}}{f_{i-1}} \right\} \otimes x_i = \\ &= - \sum \left\{ \frac{x_i}{f_i} \right\} \otimes \frac{x_{i+1}}{f_{i+1}} - \sum \left\{ \frac{x_i}{f_i} \right\} \otimes \frac{x_{i-1}}{f_{i-1}} = 0. \end{aligned}$$

□

2.3.6. Завершение доказательства Теоремы 2.4.

Напомним, что нам нужно доказать, что отображение

$$\frac{\Gamma(F(t), 3)}{\Gamma(F, 3)} \xrightarrow{\oplus \partial_R} \bigoplus_{P \neq \infty} \Gamma(F_P, 2).$$

является квазиизоморфизмом.

Заметим, что отображение $\oplus \partial_P$ индуцирует отображение спектральных последовательностей фильтрованных комплексов $\frac{\Gamma(F(t), 3)}{\Gamma(F, 3)}$ и $\bigoplus_{P \neq \infty} \Gamma(F_P, 2)$, поэтому для доказательства Теоремы 2.4 достаточно проверить, что $\oplus \partial_P$ — изоморфизм на группах $E_{p,q}^1$ спектральных последовательностей. Легко видеть, что это эквивалентно квазиизоморфности отображения

$$gr_d \Gamma(F(t), 3) \xrightarrow{\oplus \partial_P} \bigoplus_{deg(P)=d} \Gamma(F_P, 2).$$

Выше мы построили комплексы $\bar{\Gamma}(F_P, 2)$, квазиизоморфные $\Gamma(F_P, 2)$, и отображения ковычета $h_P: \bar{\Gamma}(F_P, 2) \longrightarrow gr_d \Gamma(F(t), 3)$. Нам осталось показать, что

$$\oplus h_P: \bigoplus_{deg(P)=d} \Gamma(F_P, 2) \longrightarrow gr_d \Gamma(F(t), 3)$$

является квазиизоморфизмом.

Напомним, что h_P задаётся коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} R_2(F_P) & \xrightarrow{\alpha_P} & \frac{R_1(F_P) \otimes \mathbb{Q}[F_P]_1}{\mathbb{S}^2 R_1(F_P)} \oplus \mathbb{Q}[F_P]_2 \xrightarrow{\beta_P} \bigwedge^2 \mathbb{Q}[F_P]_1 \\ & \downarrow h_P^2 & \downarrow h_P^1 \\ & gr_d [B_2(F(t)) \otimes_a F(t)^\times] & \xrightarrow{\delta} gr_d \bigwedge^3 F(t)^\times \end{array}.$$

Так как $R_2(F_P)$ является подгруппой $\mathbb{Q}[F_P]_2$, очевидно, что α_P инъективно. То, что $h_P^1: Coker(\beta_P) \longrightarrow Coker(\delta_P)$ является изоморфизмом, следует из доказательства Теоремы 2.1. То, что

$$\overline{h_P^2}: \frac{Ker(\beta_P)}{Im(\alpha_P)} \longrightarrow Ker(\delta_P)$$

инъективно, легко видеть, так как отображение $res_P \circ h_P = j_P$, а j_P является изоморфизмом. Остаётся заметить, что из инъективности h_P для каждой точки

P степени d следует инъективность $\oplus h_P$.

Покажем, что отображение $\overline{h_P^2}$ сюръективно. Вначале докажем следующую лемму:

Лемма 2.12. *Отображение*

$$\bar{\delta}: \frac{gr_d [B_2(F(t)) \otimes_a F(t)^\times]}{Im(\oplus h_P^2)} \longrightarrow \frac{gr_d \bigwedge^3 F(t)^\times}{Im(\oplus h_P^1)}$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Построим обратное отображение

$$\bar{\delta}^{-1}: \frac{gr_d \bigwedge^3 F(t)^\times}{Im(\oplus h_P^1)} \longrightarrow \frac{gr_d [B_2(F(t)) \otimes_a F(t)^\times]}{Im(\oplus h_P^2)}.$$

Группа $\frac{gr_d \bigwedge^3 F(t)^\times}{Im(\oplus h_P^1)}$ порождена элементами вида $g_1 \wedge g_2 \wedge g_3$ и $g_1 \wedge g_2 \wedge f$, где g_i - неприводимые многочлены степени d , а f - неприводимый многочлен, степень которого не превышает $d - 1$. Единственный тип соотношений, которым удовлетворяют эти элементы, — их антисимметричность по g_i . Положим

$$\bar{\delta}^{-1}(g_1 \wedge g_2 \wedge f) = - \left\{ \frac{g_1}{g_2} \right\}_2 \wedge f,$$

$$\bar{\delta}^{-1}(g_1 \wedge g_2 \wedge g_3) = - \left\{ \frac{g_1}{g_2} \right\}_2 \otimes g_3 + \left\{ \frac{g_1}{g_3} \right\}_2 \otimes (g_2 - g_1) - \left\{ \frac{g_2}{g_3} \right\}_2 \otimes (g_2 - g_1).$$

Чтобы увидеть, что это отображение корректно, покажем, что

$$\bar{\delta}^{-1}(g_1 \wedge g_2 \wedge g_3) + \bar{\delta}^{-1}(g_1 \wedge g_3 \wedge g_2)$$

лежит в $Im(\oplus h_P^2)$. Действительно, в соответствии с пятичленным соотношением,

$$\left\{ \frac{g_1}{g_2} \right\}_2 - \left\{ \frac{g_1}{g_3} \right\}_2 + \left\{ \frac{g_2}{g_3} \right\}_2 - \left\{ \frac{g_1 - g_2}{g_1 - g_3} \right\}_2 + \left\{ \frac{g_3(g_2 - g_1)}{g_2(g_3 - g_1)} \right\}_2 = 0.$$

Умножив это равенство на $\frac{g_3(g_2 - g_1)}{g_2(g_3 - g_1)}$ и применяя соотношения

$$\left\{ \frac{g_3(g_2 - g_1)}{g_2(g_3 - g_1)} \right\}_2 \otimes \frac{g_3(g_2 - g_1)}{g_2(g_3 - g_1)} = \left\{ \frac{g_1}{g_2} \right\}_2 \otimes \frac{g_2 - g_1}{g_2} = 0,$$

$$\left\{ \frac{g_1}{g_3} \right\}_2 \otimes \frac{g_3 - g_1}{g_3} = \left\{ \frac{g_2}{g_3} \right\}_2 \otimes \frac{g_2}{g_3} = \left\{ \frac{g_1 - g_2}{g_1 - g_3} \right\}_2 \otimes \frac{g_1 - g_2}{g_1 - g_3} = 0,$$

получим

$$\bar{\delta}^{-1}(g_1 \wedge g_2 \wedge g_3) + \bar{\delta}^{-1}(g_1 \wedge g_3 \wedge g_2) = \left\{ \frac{g_1 - g_2}{g_1 - g_3} \right\}_2 \otimes \frac{g_3}{g_2}.$$

Чтобы завершить доказательство корректности отображения $\bar{\delta}^{-1}$, покажем, что для любого неприводимого многочлена g степени d и многочленов f_1, f_2 меньшей степени выражение $\left\{ \frac{f_1}{f_2} \right\}_2 \otimes g$ лежит в группе $Im(\oplus h_P^2)$. Действительно, пусть $r(t)$ — это многочлен, степень которого меньше d , сравнимый с $\frac{f_1}{f_2}$ по модулю g . Тогда,

$$\left\{ \frac{f_1}{f_2} \right\}_2 \otimes g = \{r\}_2 \otimes g - \left\{ \frac{rf_2}{f_1} \right\}_2 \otimes g + \left\{ \frac{r(f_1 - f_2)}{f_1(r - 1)} \right\}_2 \otimes g - \left\{ \frac{f_2 - f_1}{f_2(1 - r)} \right\}_2 \otimes g.$$

Элемент $\{r\}_2 \otimes g$ лежит в образе $\oplus h_P^2$. Все остальные элементы, стоящие в правой части, выражаются через элементы вида $x_g \otimes g$, поэтому тоже лежат в образе h_P^2 . Чтобы это увидеть, заметим, что при отображении δ элементы $\left\{ \frac{rf_2}{f_1} \right\}_2, \left\{ \frac{r(f_1 - f_2)}{f_1(r - 1)} \right\}_2, \left\{ \frac{f_2 - f_1}{f_2(1 - r)} \right\}_2$ попадают в группу $L_{d-1} \wedge P + L_{d-1}^2$. То, что все такие элементы выражаются через x_g , следует из доказательства Леммы 3.14.

То, что композиция $\bar{\delta} \circ \bar{\delta}^{-1}$ тождественна, очевидно. Проверим тождественность композиции $\bar{\delta}^{-1} \circ \bar{\delta}$. В силу Леммы 3.14, группа $gr_d[B_2(F(t)) \otimes_a F(t)^\times]$ порождена элементами вида

$$\left\{ \frac{g_1}{g_2} \right\}_2 \otimes g_3, \left\{ \frac{g_1}{g_2} \right\}_2 \otimes f, \{x_{g_1}(r_1, r_2)\}_2 \otimes g_2, \{x_g(r_1, r_2)\}_2 \otimes f, \left\{ \frac{f_1}{f_2} \right\}_2 \otimes g, \{x_f(r_1, r_2)\}_2 \otimes g,$$

где g_i — неприводимые многочлены степени d , f_i — многочлены, степень которых не превышает $d - 1$, а r_i — остатки по соответствующему модулю. На элементах $\left\{\frac{g_1}{g_2}\right\}_2 \otimes g_3$ и $\left\{\frac{g_1}{g_2}\right\}_2 \otimes f$ композиция $\bar{\delta}^{-1} \circ \bar{\delta}$ тождественна. Как было показано выше, элементы $\{x_g(r_1, r_2)\}_2 \otimes f$ и $\left\{\frac{f_1}{f_2}\right\}_2 \otimes g$ лежат в $Im(\oplus h_P^2)$, поэтому для них ничего проверять не надо. Случай элементов $\{x_f(r_1, r_2)\}_2 \otimes g$ не отличается от уже разобранных.

Докажем, что элементы вида $\{x_{g_1}(r_1, r_2)\}_2 \otimes g_2$ по модулю образа отображения $\oplus h_P^2$ попадают в группу $\left\{\frac{g_1}{g_2}\right\}_2 \otimes L_{d-1}$. Обозначим символом r вычет $x_{g_1}(r_1, r_2)$ по модулю g_2 . Тогда

$$\{x_{g_1}(r_1, r_2)\}_2 \otimes g_2 = \{x_{g_1}(r_1, r_2)\}_2 \otimes g_1 + \{r\}_2 \otimes \frac{g_2}{g_1} -$$

$$\left\{\frac{r}{x_{g_1}(r_1, r_2)}\right\}_2 \otimes \frac{g_2}{g_1} + \left\{\frac{r(x_{g_1}(r_1, r_2) - 1)}{x_{g_1}(r_1, r_2)(r - 1)}\right\}_2 \otimes \frac{g_2}{g_1} - \left\{\frac{1 - x_{g_1}(r_1, r_2)}{1 - r}\right\}_2 \otimes \frac{g_2}{g_1}.$$

Все пять элементов, стоящих в правой части равенства, принадлежат группе $\left\{\frac{g_1}{g_2}\right\}_2 \otimes L_{d-1} + Im(\oplus h_P^2)$. Разберем, например, случай $\left\{\frac{1 - x_{g_1}(r_1, r_2)}{1 - r}\right\}_2 \otimes \frac{g_2}{g_1}$. Пусть $r_1 \cdot r_2 = q_1 \cdot g_1 + \widetilde{r_1 r_2}$, $r_1 \cdot r_2 = q_2 \cdot g_2 + \widetilde{r_1 r_2} \cdot r$. Тогда

$$\left\{\frac{1 - x_{g_1}(r_1, r_2)}{1 - r}\right\}_2 \otimes \frac{g_2}{g_1} = \left\{\frac{q_2 g_2}{q_1 g_1}\right\}_2 \otimes \frac{g_2}{g_1} = - \left\{\frac{q_2 g_2}{q_1 g_1}\right\}_2 \otimes \frac{q_2}{q_1}.$$

Из доказательства Леммы 3.14 следует, что $\left\{\frac{q_2 g_2}{q_1 g_1}\right\}_2 - \left\{\frac{g_2}{g_1}\right\}_2$ выражается через элементы вида x_{g_1} и x_{g_2} , а значит $\left\{\frac{1 - x_{g_1}(r_1, r_2)}{1 - r}\right\}_2 \otimes \frac{g_2}{g_1}$ лежит в группе $\left\{\frac{g_1}{g_2}\right\}_2 \otimes L_{d-1} + Im(\oplus h_P^2)$. $\square$

Проверим, что отображение $\overline{h_P^2}$ сюръективно. Действительно, рассмотрим произвольный элемент $X \in \oplus Ker(\delta_P)$. По Лемме 2.12, существует элемент $Y \in gr_d[B_2(F(t)) \otimes_a F(t)^\times]$, такой что $X = \oplus h_P(Y)$. Остается заметить, что $\beta_P(Y) = 0$, так как h_P^1 инъективно. Это завершает доказательство Теоремы 2.4.

Глава 3

Разрезания многоугольников на треугольники равной площади

3.1. Сбалансированные многоугольники

Под многоугольником на плоскости мы понимаем некоторую область, ограниченную набором непересекающихся друг с другом замкнутых ломаных вместе с множеством точек на ломаных, содержащим все точки излома. Это множество точек мы будем называть вершинами многоугольника, а отрезки между соседними вершинами — сторонами.

Начнем с того, что опишем некоторый класс многоугольников, которые мы будем называть *сбалансированными*. У произвольного многоугольника с каждой стороной можно связать соответствующий вектор на плоскости, выбрав определенным образом ориентацию каждой компоненты границы многоугольника. При изменении ориентации границы все векторы сторон заменяются на противоположные.

Определение 3.1. Назовем многоугольник *сбалансированным*, если его сторо-

ны можно разбить на пары таким образом, что бы в каждой паре соответствующие векторы были противоположны друг другу.

Заметим, что свойство сбалансированности не зависит от выбранной ориентации границы и является инвариантным относительно аффинных преобразований плоскости.

Пример 3.2. Произвольный центрально-симметричный многоугольник является сбалансированным.

Определение 3.3. Назовем многоугольник *целочисленным*, если координаты всех его вершин целочисленны в некоторой аффинной системе координат на плоскости.

Пример 3.4. Будем называть многоугольник *полиомино*, если он является объединением некоторого количества единичных квадратов некоторой целочисленной решетки на плоскости. Легко видеть, что полиомино является примером и целочисленного, и сбалансированного многоугольника.

Нас будут интересовать триангуляции многоугольников в смысле комбинаторной топологии, соответственно мы допускаем вырожденные треугольники, все вершины которых лежат на одной прямой.

Определение 3.5. Будем называть триангуляцию многоугольника *целочисленной*, если все вершины входящих в неё треугольников имеют целые координаты.

Будем называть триангуляцию многоугольника, из которой выброшены все вырожденные треугольники, *разрезанием* многоугольника.

3.2. Сбалансированные графы

Задача о разрезании сбалансированного многоугольника на треугольники равной площади естественно приводит к изучению объектов, которые мы будем

называть *сбалансированными графами*. Сбалансированный граф — это пара, состоящая из трехвалентного графа Γ и некоторой функции B , определенной на множестве ребер Γ и удовлетворяющей условиям, напоминающим уравнения замкнутости симплицеального 1-цикла. Функция B принимает значения в фиксированном свободном модуле ранга 2 над кольцом целых 2-адических чисел. Мы начнем с формального определения сбалансированного графа, а затем опишем, как строить эти объекты по сбалансированным многоугольникам, разрезанным на треугольники.

Все графы, которые мы рассматриваем, не будут иметь петель и кратных ребер. Граф, все вершины которого имеют степень 3, мы будем называть *трехвалентным*. В некоторых случаях нам будет удобно думать о ребре e графа как о паре ориентированных ребер e^+ и e^- , направленных в противоположные стороны. В частности, мы будем говорить, что функция B определена на ориентированных ребрах трехвалентного графа, имея в виду, что на каждом ребре e она принимает два значения, которые мы будем обозначать $B(e^+)$ и $B(e^-)$.

Определение 3.6. Сбалансированным графом $\{\Gamma, B\}$ мы будем называть пару, состоящую из трехвалентного графа Γ и функции B , сопоставляющей каждому ориентированному ребру Γ пару целых 2-адических чисел и удовлетворяющую следующим свойствам, которые мы будем называть условиями балансировки:

- Для каждой пары ориентированных ребер e^+ и e^- , отвечающих одному и тому же неориентированному ребру e , выполнено следующее равенство:

$$B(e^+) + B(e^-) = (0, 0).$$

- Для каждой тройки ориентированных ребер e_1, e_2, e_3 , начинающихся в одной и той же вершине графа, выполнено следующее равенство:

$$B(e_1) + B(e_2) + B(e_3) = (0, 0).$$

Рассмотрим целочисленный сбалансированный многоугольник на плоскости и некоторую его целочисленную триангуляцию, согласованную с балансировкой. Оказывается, по этим данным можно построить сбалансированный граф. Для этого рассмотрим двойственный граф триангуляции, вершины которого имеют валентность два и три. Вершины валентности два взаимно однозначно соответствуют треугольникам, примыкающим к границе сбалансированного многоугольника. Из условия согласованности триангуляции с балансировкой следует, что этот граф можно однозначно дополнить до трехвалентного, соединив между собой вершины валентности два, отвечающие противоположным сторонам сбалансированного многоугольника. Далее, каждому ориентированному ребру двойственного графа можно сопоставить пару координат целочисленного вектора общей стороны соответствующих треугольников триангуляции. Полученная функция, определенная на множестве ориентированных ребер трехвалентного графа, будет удовлетворять условиям балансировки, так как сумма векторов сторон треугольника на плоскости равна нулю. Остается рассмотреть её значения как пары целых 2-адических чисел, воспользовавшись естественным вложением $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_2$.

Для дальнейшего нам будет полезно сделать обзор некоторых простых фактов из теории модулей над кольцами главных идеалов. Для простоты мы будем их формулировать сразу для кольца целых 2-адических чисел $\mathbb{Z}_2$. Как известно, $\mathbb{Z}_2$ является кольцом дискретного нормирования, содержащим кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$. Мы будем обозначать 2-адическое нормирование числа $\lambda \in \mathbb{Z}_2$ символом $\nu_2(\lambda)$. На целом числе $n \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_2$ оно определяется как наибольшее неотрицательное целое число k , такое что n делится на 2^k . Будем называть 2-адическое число λ *четным*, если $\nu_2(\lambda) > 0$, и *нечетным*, если $\nu_2(\lambda) = 0$.

Далее, фиксируем свободный модуль ранга два $F_0 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ с базисом $(0, 1)$ и $(1, 0)$. Мы будем называть *решетками* $\mathbb{Z}_2$ -подмодули свободного модуля F_0 . Иначе говоря, решетка — это пара из модуля над кольцом $\mathbb{Z}_2$ и вложения этого модуля в фиксированный свободный модуль F_0 ранга 2.

Так как кольцо 2-адических чисел $\mathbb{Z}_2$ является кольцом главных идеалов, все решетки являются свободными модулями ранга, не превосходящего двух. Для решетки L и её подрешетки M мы будем называть *индексом* $[L : M]$ порядок фактор-модуля L/M . В силу того, что мы рассматриваем модули над кольцом главных идеалов, индекс $[L : M]$ конечен тогда и только тогда, когда ранг решетки L совпадает с рангом её подрешетки M . Индексом решетки мы будем называть её индекс относительно F_0 .

Функция B принимает значения в решетке $F_0 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, мы будем обозначать соответствующие координатные функции B_x и B_y . С каждой вершиной сбалансированного графа мы связываем два инварианта: индекс и решетку. Основные результаты этой главы связаны с тем, какие ограничения на эти инварианты накладывают условия балансировки.

Определение 3.7. Рассмотрим три ориентированных ребра $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ сбалансированного графа $\{\Gamma, B\}$, начинающиеся в вершине $\mathbf{v}$. Индексом $m(\mathbf{v})$ вершины $\mathbf{v}$ мы будем называть 2-адическое нормирование определителя, образованного из координат векторов $B(\mathbf{e}_1)$ и $B(\mathbf{e}_2)$. Иначе говоря,

$$m(\mathbf{v}) = \nu_2 (B_x(\mathbf{e}_1)B_y(\mathbf{e}_2) - B_y(\mathbf{e}_1)B_x(\mathbf{e}_2)).$$

Из определения сбалансированного графа следует равенство $B(\mathbf{e}_1) + B(\mathbf{e}_2) + B(\mathbf{e}_3) = (0, 0)$, откуда легко заключить, что данное выше определение не зависит от того, какие именно два ребра выбирать. Заметим, что индекс вершины не обязательно конечен.

Нам также понадобится более тонкий инвариант вершины, который мы назовем *решеткой*.

Определение 3.8. Рассмотрим три ориентированных ребра $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ сбалансированного графа $\{\Gamma, B\}$, начинающиеся в вершине $\mathbf{v}$. Решеткой $L(\mathbf{v})$ вершины $\mathbf{v}$ мы назовем подрешетку F_0 , порожденную векторами $B(\mathbf{e}_1)$ и $B(\mathbf{e}_2)$. Иначе

говоря,

$$L(\mathbf{v}) = \langle B(\mathbf{e}_1), B(\mathbf{e}_2) \rangle = \mathbb{Z}_2 B(\mathbf{e}_1) + \mathbb{Z}_2 B(\mathbf{e}_2).$$

Так же, как и в определении индекса, решетка не зависит от того, какие именно два ребра, смежные с вершиной $\mathbf{v}$, рассматриваются КРИВАЯ ФРАЗА!!!!. Построенная таким образом решетка будет иметь ранг 0 или 1, если индекс вершины $\mathbf{v}$ бесконечен, и ранг 2 в противном случае. Можно показать, что индекс $m(\mathbf{v})$ совпадает с индексом решетки $L(\mathbf{v})$. Для произвольного сбалансированного графа $\{\Gamma, B\}$ будем обозначать как $M\{\Gamma, B\}$ наименьшее значение индекса его вершин. Сформулируем основной результат этой главы:

Теорема 3.9. *У произвольного сбалансированного графа $\{\Gamma, B\}$ число вершин наименьшего индекса четно.*

Основным приложением этой теоремы является следующий частный случай гипотезы из [16].

Следствие 3.10. *Целочисленный сбалансированный многоугольник нельзя разрезать на нечетное число треугольников равной площади так, что бы координаты всех вершин триангуляции были целыми числами.*

Доказательство. Действительно, предположим противное и рассмотрим соответствующий многоугольник. Добавив необходимое количество вырожденных треугольников с целочисленными координатами вершин, дополним разрезание до целочисленной триангуляции, согласованной с балансировкой. Построим по этим данным сбалансированный граф. Заметим, что индекс произвольной вершины графа совпадает с увеличенным на один 2-адическим нормированием площади соответствующего треугольника триангуляции. Это прямо следует из определения индекса вершины, в котором фигурирует определитель пары векторов, соответствующих сторонам треугольника. У построенного графа индекс всех вершин может принимать единственное конечное значение, так как все невырожденные треугольники имели равную площадь. Следовательно, число

вершин конечного индекса чётно, а значит чётно и количество невырожденных треугольников триангуляции. $\square$

3.3. Доказательство теоремы 3.9

Доказательство будет проводиться индукцией по наименьшему значению индекса вершины графа, то есть по параметру $M\{\Gamma, B\}$, который мы будем сокращённо обозначать M . В начале будет доказана база индукции $M = 0$. Доказательство индукционного перехода будет основано на том, что условия балансировки остаются выполненными, если добавить фиксированный вектор к значениям функции B на ребрах произвольного цикла. Оказывается, что можно изменить значения B на некоторых циклах, не изменив при этом чётности числа вершин индекса M , так, что новые значения будут векторами с чётными координатами. После деления всех векторов на 2, мы приходим к сбалансированному графу, к которому можно применить предположение индукции.

Назовем вектор $(u_x, u_y) \in F_0 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ примитивным, если хотя бы одна из его координат является нечётным 2-адическим числом. Решетка будет называться примитивной, если в ней содержится хотя бы один примитивный вектор. Таким образом, решетка не является примитивной, если координаты всех входящих в неё векторов чётны. Нетрудно показать, что решетка L является примитивной тогда и только тогда, когда ранг модуля F_0/L равен 1.

Определения примитивности естественным образом переносятся на вершины и ребра сбалансированного графа. Ребро называется примитивным, если соответствующий ему вектор примитивен, а вершина называется примитивной, если примитивна соответствующая ей решетка. Мы начнем со следующего простого наблюдения:

Лемма 3.11. *Пусть $\mathbf{v}$ — произвольная вершина сбалансированного графа $\{\Gamma, B\}$. Тогда, либо ее индекс $m(\mathbf{v})$ равен нулю и все три смежных с ней ребра примитивны, либо индекс $m(\mathbf{v})$ положителен и число примитивных ребер,*

смежных с вершиной v чётно.

Рассмотрим три вектора, соответствующих ребрам, смежным с вершиной v . Доказательство леммы получается полным перебором всех их остатков по модулю 2.

Следствие 3.12. *(База индукции.) Если сбалансированный граф $\{\Gamma, B\}$ имеет вершину нулевого индекса, то для него выполнено утверждение Теоремы 3.9.*

Доказательство. Рассмотрим подграф $\mathcal{P}$ графа Γ , образованный примитивными ребрами сбалансированного графа $\{\Gamma, B\}$. По Лемме 3.11, все его вершины имеют валентность 2 или 3. Нам нужно показать, что число его вершин валентности 3 чётно.

Обозначим число двухвалентных вершин графа $\mathcal{P}$ символом $\mathcal{V}_2(\mathcal{P})$, трехвалентных вершин — $\mathcal{V}_3(\mathcal{P})$, а число ребер графа $\mathcal{P}$ — символом $\mathcal{E}(\mathcal{P})$. Посчитаем сумму всех степеней графа $\mathcal{P}$ двумя способами:

$$2\mathcal{V}_2(\mathcal{P}) + 3\mathcal{V}_3(\mathcal{P}) = 2\mathcal{E}(\mathcal{P}).$$

Отсюда легко видеть, что число $\mathcal{V}_3(\mathcal{P})$ чётно. □

Следствие 3.13. *Если все вершины сбалансированного графа $\{\Gamma, B\}$ имеют положительный индекс, то его примитивные ребра образуют набор непересекающихся циклов.*

Доказательство. Рассмотрим подграф $\mathcal{P}$ графа Γ , образованный примитивными ребрами сбалансированного графа $\{\Gamma, B\}$. По Лемме 3.11, все его вершины имеют валентность 2. Как известно, любой граф с таким свойством представляет из себя несвязное объединение циклов. □

Мы будем называть такие циклы *примитивными*. Следующие две леммы описывают структуру решеток, соответствующих вершинам примитивных циклов сбалансированного графа.

- Лемма 3.14.** 1. Рассмотрим две произвольных решетки L_1 и L_2 , имеющие общий примитивный вектор. Тогда одна из них содержит другую.
2. Рассмотрим набор примитивных решеток $L_1, \dots, L_n$ такой, что для любых двух решеток с соседними номерами одна содержится в другой. Тогда одна из решеток L_i содержит все остальные.

Доказательство. 1. Первое утверждение леммы легко следует из несложного факта коммутативной алгебры. Рассмотрим произвольное кольцо R , модуль M и его подмодуль N . Тогда подмодули M , содержащие N , находятся в биективном соответствии с подмодулями M/N . Это соответствие переводит модуль S в модуль S/N и сохраняет включения.

Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}_2$, модуль F_0 и его подмодуль P , порожденный общим примитивным вектором решеток L_1 и L_2 . В силу примитивности вектора, модуль F_0/P является свободным модулем ранга 1 над кольцом дискретного нормирования, а значит семейство его подмодулей линейно-упорядочено по включению. Следовательно, $L_1/P \subseteq L_2/P$ или $L_2/P \subseteq L_1/P$, а значит $L_1 \subseteq L_2$ или $L_2 \subseteq L_1$.

2. Второе утверждение леммы проще всего доказать индукцией по количеству рассматриваемых решеток. База $n = 1$ очевидна. Предположим, что утверждение верно для $n - 1$ решеток. Предположим, что все решетки L_i с индексом $i \leq n - 1$ содержатся в некоторой решетке L_m . Из первого утверждения леммы следует, что $L_n \subseteq L_{n-1}$ или $L_{n-1} \subseteq L_n$. В первом случае, $L_n \subseteq L_{n-1} \subseteq L_m$, следовательно L_m содержит все n решеток. Во втором случае, решетки L_n и L_m имеют общий примитивный вектор, так как они обе содержат примитивную решетку L_{n-1} . Если $L_n \subseteq L_m$, то решетка L_m содержит все решетки набора, а если $L_m \subseteq L_n$, то все решетки содержатся в L_n .

□

Лемма 3.15. *Рассмотрим сбалансированный граф $\{\Gamma, B\}$ у которого минимальный индекс $M\{\Gamma, B\}$ положителен и конечен.*

1. *Каждый примитивный цикл $\mathcal{C}$ графа Γ содержит четное число вершин индекса $M\{\Gamma, B\}$.*
2. *Рассмотрим все непримитивные ребра $\mathbf{e}_i$ графа Γ , смежные с вершинами примитивного цикла $\mathcal{C}$. Векторы $B(\mathbf{e}_i)$ порождают решетку индекса, превышающего $M\{\Gamma, B\}$.*

Доказательство. Рассмотрим две смежных вершины цикла $\mathcal{C}$. Соответствующие им решетки имеют общий примитивный вектор, отвечающий соединяющему их ребру. Следовательно, по Лемме 3.14.1, для каждой двух последовательных вершин цикла $\mathcal{C}$ решетка, отвечающая одной из них, содержит решетку, отвечающую другой. Применив Лемму 3.14.2, мы заключаем, что одна из решеток, отвечающих вершинам цикла $\mathcal{C}$, содержит все остальные. Обозначим эту решетку символом M . Если индекс этой решетки меньше двух, то оба утверждения очевидны. Предположим, что он в точности равен двум. В этом случае решетка M имеет в точности три подрешетки индекса 1, а именно, три ядра ненулевых гомоморфизмов из M в абелеву группу порядка 2. Предположим, что M порождена над $\mathbb{Z}$ примитивными векторами p_1 и p_2 . Эти решетки легко задать порождающими их векторами: $M_+ = \langle p_1, 2p_2 \rangle$, $M_- = \langle 2p_1, p_2 \rangle$ и $M_0 = \langle p_1 + p_2, 2p_2 \rangle$. Из этого очевидно, что M_+ и M_- являются примитивными, а M_0 — нет. Далее, каждый примитивный вектор решетки M содержится либо в M_+ , либо в M_- . Если бы какой-то вектор принадлежал и той, и той решетке, то мы бы получили противоречие с Леммой 3.14.1. Наконец, решетка M_0 состоит в точности из всех непримитивных векторов M .

Пометим ребро цикла $\mathcal{C}$ знаком $+$, если соответствующий примитивный вектор принадлежит решетке M_+ , и знаком $-$, если он принадлежит M_- .

Решетка $L(v)$, отвечающая вершине цикла $\mathbf{v}$, совпадает с M тогда и только тогда, когда смежные с ней ребра помечены разными символами. Действительно, $L(v)$ не совпадает с M тогда и только тогда, когда $L(v)$ содержится в M_+ или M_- , что равносильно совпаданию знаков смежных с $\mathbf{v}$ ребер.

Первое утверждение леммы следует из того, что число перемен знака в цикле всегда четно. Чтобы доказать второе утверждение, заметим, что все векторы, отвечающие непримитивным ребрам, смежным с вершинами цикла $\mathcal{C}$, лежат в решетке M_0 .

□

Теперь уже несложно завершить доказательство Теоремы 3.9.

Доказательство. В случае, если все вершины графа $\{\Gamma, B\}$ имеют бесконечный индекс, нам нужно только показать, что число вершин Γ четно. Так как это справедливо для произвольного трехвалентного графа, мы можем предположить, что число $M\{\Gamma, B\}$ конечно.

Докажем утверждение теоремы индукцией по параметру $M\{\Gamma, B\}$. Так как база индукции уже проверена в Следствие 3.12, остается проверить переход. Предположим, что утверждение теоремы справедливо для всех графов, имеющих вершину индекса меньше M . Тогда оно выполнено и для графа с минимальным индексом M , если у графа $\{\Gamma, B\}$ нет примитивных ребер. Чтобы это увидеть, достаточно применить предположение индукции к графу $\{\Gamma, \frac{B}{2}\}$. Оказывается, что общий случай сводится к этому.

По Следствию 3.13, примитивные ребра графа образуют набор непересекающихся циклов, а по Лемме 3.15.1, число вершин индекса $M\{\Gamma, B\}$ любого примитивного цикла четно. Рассмотрим произвольный примитивный цикл $\mathcal{C}$ с вершинами $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$. Обозначим непримитивное ребро, смежное с $\mathbf{v}_i$, символом $\mathbf{f}_i$, а решетку, порожденную векторами $B(\mathbf{f}_i)$, символом F . По Лемме 3.15.2, индекс решетки F больше, чем $M\{\Gamma, B\}$. Рассмотрим новую функцию

на ребрах графа Γ , значение которой совпадает с B вне ребер цикла и равную

$$-\sum_{j=1}^i B(\mathbf{f}_j)$$

на ребре, соединяющем вершины $\mathbf{v}_i$ и $\mathbf{v}_{i+1}$. Как легко проверить, модифицированная функция также будет удовлетворять условию балансировки, все ребра цикла $\mathcal{C}$ перестанут быть примитивными и четность числа решеток индекса M не изменится. Последовательно модифицируя значения балансировки на всех примитивных циклах, мы сводим утверждение теоремы к случаю графа без примитивных ребер. $\square$

Литература

- [1] Руденко Д.Г. Об усиленном законе взаимности Суслина и его приложениях к вопросам равносоставленности гиперболических многогранников // Функциональный анализ и его приложения. 2016. Т. 50 вып.1. С. 79-84.
- [2] Суслин А. А. Законы взаимности и стабильный ранг колец многочленов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43 вып. 6. С. 1394–1429.
- [3] Суслин А. А. КЗ от поля и группа Блоха, Теория Галуа, кольца, алгебраические группы и их приложения // Сборник статей, Тр. МИАН СССР. 1990. Т.183. С. 180—199.
- [4] Aigner M., Ziegler G. M. Proofs from The Book — Fifth Edition — Berlin: Springer - Verlag, 2014.
- [5] Beilinson A. A. , Deligne P. Interpretation motivique de la conjecture de Zagier // Symp. in Pure Math. 1994. Т. 55 вып. 2. С. 97-121.
- [6] Bekker B. M. and Netsvetaev N. Yu. Generalized Sperner lemma and subdivisions into simplices of equal volume. // Journal of Mathematical Sciences. 1998. Т. 91 вып. 6, С. 3492-3498.
- [7] Dupont J. L. Algebra of polytopes and homology of flag complexes // Osaka J. Math. 1982. Т. 19 вып. 3. С. 599–641.
- [8] Goncharov A.B. Polylogarithms and motivic Galois groups // Symposium in pure mathematics. 1994. Т. 55 вып. 2, С. 43–96.

- [9] Goncharov A. B. Polylogarithms, Regulators, and Arakelov Motivic Complexes // Journal of the American Mathematical Society. 2005. Т.18 вып. 1. С. 1–60.
- [10] Monsky P. A conjecture of Stein on plane dissections // Math. Z. 1990. Т. 205. С. 583–592.
- [11] Monsky P. On dividing a square into triangles // Amer. Math. Monthly. 1970. Т. 77. С. 161–164.
- [12] Praton I. Cutting Polyominoes into Equal-Area Triangles // Amer. Math. Monthly. 2002. Т. 109. С. 818–826.
- [13] Rudenko D. Arithmetic of 3-valent graphs and equidissections of flat surfaces [Электронный ресурс]// Working papers by Cornell University. Series math «arxiv.org». 2014.
URL:<http://arxiv.org/abs/1409.7996>.
- [14] Rudenko D. On equidissection of balanced polygons // 851. Записки научных семинаров ПОМИ им. В.А.Стеклова Российской академии наук. 2012. Т. 403. С. 142–158.
- [15] Rudenko D. Scissor Congruence and Suslin reciprocity law [Электронный ресурс]// Working papers by Cornell University. Series math «arxiv.org». 2015.
URL:<http://arxiv.org/pdf/1511.00520>.
- [16] Stein S. A generalized conjecture about cutting a polygon into triangles of equal areas // Discrete Comput. Geom. 2000. Т. 24. С. 141–145.
- [17] Stein S. Cutting a polygon into triangles of equal areas // Math. Intelligencer. 2004. Т. 26 вып. 1. С. 17–21.
- [18] Stein S. Cutting a polyomino into triangles of equal areas // Amer. Math. Monthly. 1999. Т.106. С. 255–257.

- [19] Suslin A. , Voevodsky V. Bloch–Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients // NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci. 2000. T. 548. C. 117–189.