

На правах рукописи

Ромаскевич Ольга Леонидовна

Динамика физических систем, нормальные формы и цепи Маркова

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2016

Работа выполнена на факультете математики Национального
исследовательского университета "Высшая Школа Экономики"

Научные руководители:	<i>доктор физико-математических наук, профессор Юлий Сергеевич Ильяшенко; академик Французской Академии Наук, ведущий научный сотрудник Этьен Жис</i>
Официальные оппоненты:	<i>доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики СПбГУ, доцент Сергей Геннадьевич Крыжевич; доктор физико-математических наук, профессор факультета ВМК НГУ им. Н.И. Лобачевского, профессор Евгений Викторович Жужома</i>
Ведущая организация:	Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

Защита состоится 25 октября 2016 г. в 17 часов на заседании
диссертационного совета Д 002.077.03 на базе ИППИ РАН, расположенном
по адресу: Большой Каретный пер., д.19, стр.1, Москва, 127051.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИППИ РАН

Автореферат разослан « » августа 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 002.077.03,
доктор физико-математических наук
Соболевский А.Н. _____

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень разработанности проблемы.

Диссертационная работа посвящена различным задачам теории динамических систем, включающих в себя эргодическую теорию (Главы 1–3), теорию бильярдов (Глава 4) и теорию нормальных форм отображений (Глава 5).

1. В первой главе диссертации рассматривается трехпараметрическое семейство векторных полей на двумерном торе, имеющее следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \tau} = \cos x + a + b \cos t, \\ \frac{\partial t}{\partial \tau} = \mu. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $a, b \in \mathbb{R}, \mu > 0$ – вещественные параметры. Нас интересует отображение Пуанкаре $P_{a,b,\mu}$ этого уравнения, определенное как отображение первого возвращения с трансверсали $\{t = 0\}$ на саму себя, и в особенности его число вращения ρ как функция параметров $\rho = \rho_{a,b,\mu}$. Напомним

Определение. Числом вращения ρ отображения $P : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ называется предел

$$\rho := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{P}^{\circ n}(x) - x}{2\pi n},$$

где $\tilde{P}$ есть поднятие P на универсальную накрывающую и $x \in \mathbb{S}^1$ – произвольная точка окружности $\mathbb{S}^1$.

Оказывается, что этот предел существует и не зависит от точки $x \in \mathbb{S}^1$ окружности, выбранной для его определения. Таким образом, число вращения является важной числовой характеристикой соответствующего гомеоморфизма P окружности: оно показывает, на сколько в среднем сдвигаются точки окружности под действием P . Также рациональность числа вращения эквивалентна наличию периодической орбиты.

В 1959 году В.И. Арнольд предложил рассматривать числа вращения не для единичных диффеоморфизмов, а для конечнопараметрических семейств отображений окружности $f_{\mathbf{p}}$, где $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ - вектор параметров, $\mathcal{P}$ - пространство параметров. В этом контексте им был рассмотрен пример двухпараметрического семейства $f_{a,\varepsilon}: x \mapsto x + a + \varepsilon \sin 2\pi x$ синусоидальных возмущений семейства поворотов окружности. Здесь пространство параметров $\mathcal{P}$ является двумерной плоскостью $\mathbb{R}^2$ с координатами (a, ε) .

Арнольда интересовало, как меняется число вращения отображения $f_{\mathbf{p}}$, когда вектор параметров $\mathbf{p}$ меняется в пространстве $\mathcal{P}$. Для изучения этого вопроса он дал следующее

Определение. Будем говорить, что для конечнопараметрического семейства $f_{\mathbf{p}}$, $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ имеет место захват фазы для значения ρ_0 числа вращения, если множество уровня

$$E_{\rho_0} = \{\mathbf{p} \in \mathcal{P} | \rho(f_{\mathbf{p}}) = \rho_0\}$$

имеет непустую внутренность. Эти множества называются зонами захвата фазы. Впоследствии они получили название *языков Арнольда*.

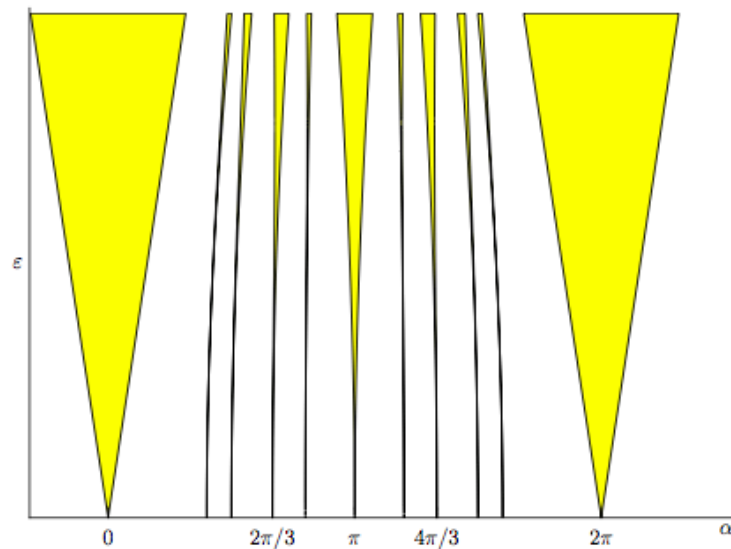


Рис. 1. Семейство языков Арнольда для стандартного семейства $x \mapsto x + a + \varepsilon \sin 2\pi x$ на плоскости параметров (a, ε)

Название *языки Арнольда* объясняется расширяющейся формой областей захвата фазы для стандартного семейства возмущений поворотов окружности, рассмотренных Арнольдом, Рис.1

Из каждой точки $(\frac{p}{q}, 0) \in \mathcal{P}$ на плоскости параметров *растет* язык Арнольда - подмножество пространства параметров, соответствующее числу вращения $\frac{p}{q}$. Соображения монотонности и теорема Данжуа для C^2 -гладких диффеоморфизмов показывают, что языков Арнольда для иррациональных чисел вращения в стандартном семействе не появляется - соответствующие множества уровня суть гладкие кривые. В типичном семействе диффеоморфизмов окружности будет наблюдаться тот же эффект: языки Арнольда существуют для рациональных значений числа вращения и отсутствуют для иррациональных значений.

В данной диссертации изучается поведение языков Арнольда для семейства (1). Это семейство моделирует динамику джозефсоновского контакта из физики сверхпроводимости. Более точно, это трехпараметрическое семейство векторных полей на двумерном торе называется резистивной моделью джозефсоновского контакта с малой емкостью (большим затуханием) и синусоидальным током. В данной диссертации мы будем для простоты называть это семейство *уравнением Джозефсона*.

Помимо связи с физикой сверхпроводимости, данное исследование мотивировано необычным (вырожденным) поведением языков Арнольда для отображения первого возвращения $R_{a,b,\mu}$. А именно, оказывается, что языки Арнольда в данном семействе существуют только для *целых* значений числа вращения. Это соответствует тому факту, что отображение $R_{a,b,\mu}$ является мебиусовым отображением окружности. Таким образом, в ограниченных подмножествах пространства параметров наблюдается лишь конечное число языков Арнольда. Этот эффект называется *эффектом квантования числа вращения*.

Языки Арнольда уравнения Джозефсона имеют очень красивую структуру, Рис. 2. Данная работа подробно изучает это поведение.

Семейство (1) изучалось в различных работах вне контекста динамики джозефсоновского контакта: насколько нам известно, впервые это уравнение появляется в литературе в статье Р. Фута в контексте планиметра Притца¹. Позднее оно изучалось также при изучении динамики движения велосипеда.² Также Ю.С. Ильяшенко и Дж. Гукенхеймер в 2001 году³, ещё не подозревая о связи этого семейства с динамикой джозефсоновских контактов, рассматривали уравнение (1) в контексте изучения уточных циклов быстро-медленных систем на торе в случае, когда $\mu \ll 1$. Данная диссертация использует методы Ильяшенко-Гукенхеймера для описания поведения языков Арнольда уравнения Джозефсона в случае малости параметра μ .

Семейство (1) в контексте моделирования джозефсоновского контакта впервые изучается в цикле работ В.М. Бухштабера, О.В. Карпова и С.И. Тертычного⁴. Ими (одновременно с Ю.С. Ильяшенко⁵) были переоткрыты свойства мебиусовости отображения Пуанкаре (изначально установленные Футом) и было дано эмпирическое описание языков Арнольда.

Результаты данной диссертации являются частью активного исследования языков Арнольда отображения первого возвращения для семейства (1). Благодаря численному моделированию языков Арнольда уравнения Джозефсона, описанному во второй части Главы 1 диссертации, удастся получить достаточно точное их изображение при малом μ , Рис.4.

В работах А. Глуцюка, В. Клепцына, Д. Филимонова, Д. Рыжова, И. Щурова,

¹ Foote R.L. Geometry of the Prytz planimeter (1998)

² Finn D. Can a bicycle create a unicycle track? (2002); Levi M., Tabachnikov S. On bicycle tire tracks geometry, hatchet planimeter, Menzin's conjecture and oscillation of unicycle tracks (2009)

³ Guckenheimer J., Ilyashenko Yu.S. The duck and the devil: canards on the staircase (2001)

⁴ Karpov O.V., Buchstaber V.M., Tertychniy S.I. et al. Modeling of rf-biased overdamped Josephson junctions (2008); Buchstaber V.M., Karpov O.V., Tertychniy S.I. Features of the dynamics of a Josephson junction biased by a sinusoidal microwave current (2006); Математические модели динамики сильношунтированного перехода Джозефсона (2008); Эффект квантования числа вращения (2010); Система на торе, моделирующая динамику перехода Джозефсона (2012); Бухштабер В.М., Тертычный С.И. Семейство явных решений уравнения резистивной модели перехода Джозефсона (2013)

⁵ Лекции Летней Школы по динамическим системам, (2009), не опубликовано

Ю. Ильяшенко и др. формулируются строгие математические утверждения, подтверждающие эмпирические результаты, полученные благодаря численному моделированию. Существование необычных самопересечений языков Арнольда (называемых *перемычками*) объясняется в Главе 1 данной диссертации.

А. Глуцок с соавторами⁶ доказывают, что для каждого языка Арнольда перемычки лежат на одной и той же вертикальной прямой. Эта прямая задается уравнением $a = \rho_0 \mu$, где ρ_0 — значение числа вращения на этом языке. Этот результат называется *эффектом квантования перемычек языков Арнольда* и он доказан при фиксированном μ , $\mu > 1$. При меньших μ этот факт остается правдоподобной гипотезой.

Результаты данной диссертации являются отправным пунктом в работе Глуцoka с соавторами, так как само существование перемычек вытекает из теоремы об асимптотическом поведении границ языков при $b \rightarrow \infty$, доказанной в Главе 1.

Глава 1 состоит из двух частей: в первой из них изучается структура языков Арнольда в так называемом режиме большой амплитуды, $b \rightarrow \infty$. Эта часть основана на совместной работе автора с Алексеем Клименко. Во второй части Главы 1 рассматривается поведение языков Арнольда в быстромедленном режиме, $\mu \rightarrow 0$. Эта часть основана на совместной работе автора с И. Щуровым и В. Клепцыным. В обоих режимах доказываются теоремы об асимптотическом поведении языков Арнольда.

Стоит отметить, что уравнение Джозефсона представляет интерес не только из-за интересной формы языков Арнольда, а также из-за удивительного свойства *квантования числа вращения*, уже упомянутого выше. Языки Арнольда уравнения Джозефсона существуют *только* для целых значений чисел вращения. В работе Ю.С. Ильяшенко, Д.А. Рыжова и Д.А. Филимонова⁷ изучается

⁶ Глуцок А.А., Клепцын В.А., Филимонов Д.А., Щуров И.В. О квантовании перемычек в уравнении, моделирующем эффект Джозефсона (2014)

⁷ Ильяшенко Ю.С., Филимонов Д.А., Рыжов Д.А. Захват фазы для уравнений, описывающих резистивную модель джозефсоновского перехода, и их возмущений (2011)

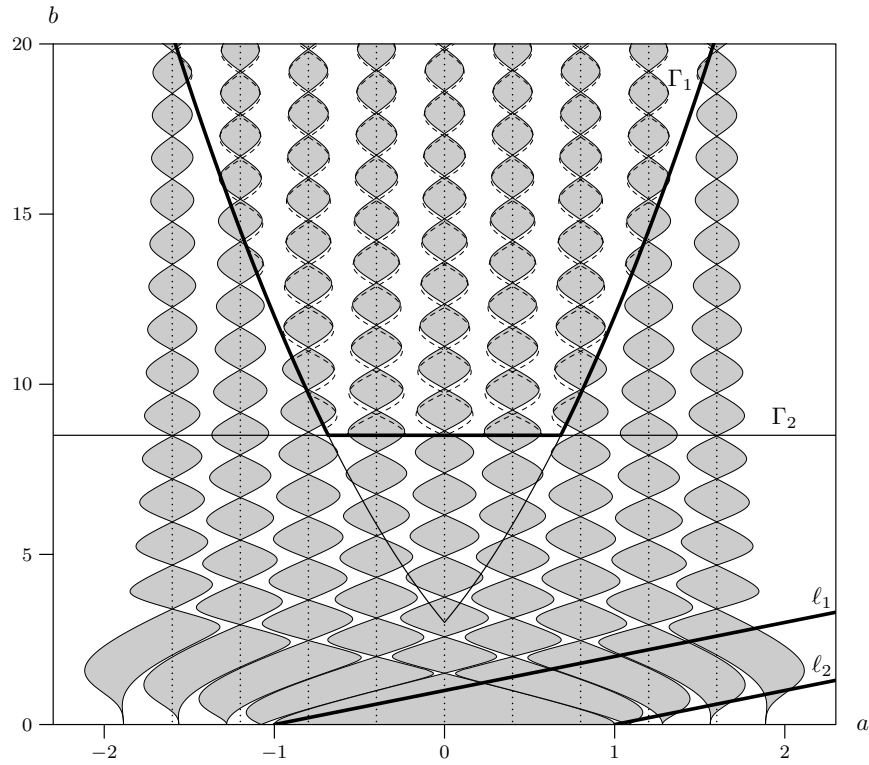


Рис. 2. Семейство языков Арнольда для уравнения Джозефсона на плоскости параметров (a, b) при фиксированном значении параметра μ

поведение языков Арнольда возмущений специального вида уравнения Джозефсона и доказывается, что квантование числа вращения представляет собой явление коразмерности бесконечность. Продолжая это исследование, А. Глуцюк и Л. Рыбников показывают⁸, что изучаемое уравнение Джозефсона и его возмущения гармониками уникальны – в каком-то смысле, эффект квантования числа вращения происходит только для них. А именно, в работе Глуцюка-Рыбникова доказывается, что при рассмотрении векторного поля на торе с координатами (x, t) вида $\dot{x} = v(x) + a + bf(t)$ и для фиксированной аналитической функции $v(x)$, отличной от $v(x) = \alpha \sin(mx) + \beta \cos(mx) + \gamma$, $m \in \mathbb{Z}$ существует аналитическая функция $f(t)$ такая, что соответствующее семейство уравнений обладает языками Арнольда для *всех* рациональных чисел вращения.

2. Во второй главе диссертации предлагается новый взгляд на классическую задачу об асимптотическом поведении конца *вращающейся цепи* из N

⁸ Glutsyuk A., Rybnikov L. On families of differential equations on two-torus with all Arnold tongues

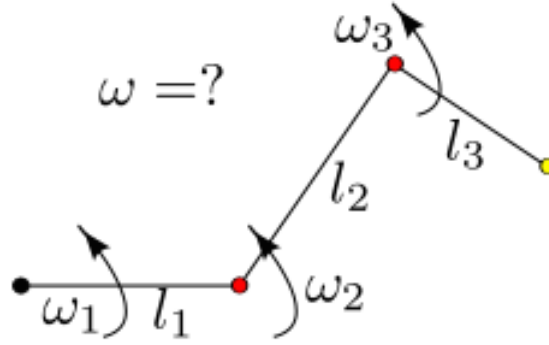


Рис. 3. Проблема Лагранжа – задача нахождения асимптотической угловой скорости конца вращающейся цепи отрезков. На рисунке изображена вращающаяся цепь из трех отрезков с длинами l_1, l_2, l_3 . Угловые скорости отрезков относительно конца предыдущего отрезка в цепи (или начала координат для первого отрезка) равны $\omega_1, \dots, \omega_N$

отрезков, поставленную ещё Жозефом Луи Лагранжем⁹ в контексте изучения движения планет.

Напомним постановку этой задачи, которую мы будем в дальнейшем называть *задачей Лагранжа*, Рис.3. При фиксированных $l_1, \dots, l_N \in \mathbb{R}$ (соответствующих длинам отрезков цепи) и при фиксированных $\omega_1, \dots, \omega_N$ (соответствующих относительным угловым скоростям отрезков) изучается поведение суммы

$$z(t) = \sum_{j=1}^N l_j \exp(i\omega_j t) \exp(i\beta_j^0),$$

где $\beta_j^0, j = 1, \dots, N$, соответствуют исходным положениям отрезков системы. Лагранжа интересовали корректное определение и вопрос существования предела

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\arg z(t)}{t}, \quad (2)$$

который разумно называть *асимптотической угловой скоростью* конца вра-

⁹ Lagrange J.L. Théorie des variations séculaires des éléments des planètes, I, II, (1781)

щающейся цепи.

Лагранж решил эту задачу в простейшем случае, когда длина l_j одного из отрезков превосходит сумму длин оставшихся отрезков. Тогда асимптотическая угловая скорость конца системы ω (предел, заданный в (2)) существует и совпадает с соответствующей угловой скоростью самого длинного отрезка, $\omega = \omega_j$.

В общем случае задача Лагранжа была решена в цикле работ П.Боля, П.Хартмана, Е.Р. Ван Кампена, А.Винтнера, Г.Вейля, Б.Джессена и Х.Торнхейва¹⁰.

Идея доказательства состоит в явном подсчете угловой скорости с применением эргодической теоремы в случае, когда угловые скорости ω_j являются рационально независимыми. Случай рационально зависимых ω_j является более сложным, и был полностью разобран Джессеном и Торнхейвом для произвольного числа отрезков N . Помимо теоретико-числовых свойств вектора $(\omega_1, \dots, \omega_N)$, сложности представляют конфигурации, в которых цепь проходит через начало координат и в которых аргумент конца системы не определен. Г.Вейль преодолел эти сложности в своей работе о среднем движении 1938 года.

В данной диссертации нас будет интересовать случай $N = 3$. В этом случае задача Лагранжа имеет красивый ответ.

Теорема 1. *Рассмотрим динамику вращающейся цепи на плоскости, состоящей из отрезков с длинами $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{R}_+$, вращающимися с относительными угловыми скоростями ω_j , Рис.3.*

Предположим, что числа l_j таковы, что из отрезков соответствующих длин можно составить треугольник. Обозначим (положительные) углы этого треугольника как $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Угол α_j противолежит стороне l_j соответственно.

¹⁰ 9 Bohl P. Über ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem (1909); Hartman P., Van Kampen E. R., Wintner A. Mean Motions and Distribution Functions (1937); Weyl H. Mean Motion (1938), Jessen B. and Tornehave H. Mean motions and zeros of almost periodic functions(1945)

Предположим, что угловые скорости ω_j являются рационально независимыми (не существует соотношения $\sum_j t_j \omega_j = 0, t_j \in \mathbb{Z}$).

Тогда предел (2) существует, и асимптотическая угловая скорость конца такой системы равна

$$\omega = \frac{\alpha_1}{\pi} \omega_1 + \frac{\alpha_2}{\pi} \omega_2 + \frac{\alpha_3}{\pi} \omega_3.$$

В данной диссертации данная теорема передоказывается новыми геометрическими методами. Затем эти методы обобщаются и применяются на случай вращающейся системы не на евклидовой плоскости, а на произвольной полной ориентируемой римановой поверхности.

Стоит отметить, что задача Лагранжа была рассмотрена в намного более общем контексте почти периодических функций в работах Борге Джессена¹¹. Также задача Лагранжа связана с рядом интересных топологических вопросов, связанных с множеством положений цепи, в которых конец системы фиксирован. Эти вопросы изучались, среди прочих, Жаном-Клодом Османом¹².

3. Третья глава диссертации посвящена эргодической теории для действий свободной группы преобразованиями, сохраняющими меру на множестве (X, μ) . В этой главе продолжается начатый фон Нейманном и Биркхофом путь изучения временных средних функций вдоль орбит преобразований. Классическая эргодическая теорема утверждает, что для обратимого сохраняющего меру преобразования $T : X \rightarrow X$ пространства с конечной мерой, $\mu(X) < \infty$ и для интегрируемой функции $\varphi \in L^1(X, \mu)$, для почти всех $x \in X$ существует предел временных средних

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n \varphi(T^k x).$$

Эту теорему можно рассматривать как теорему о сходимости шаровых средних для действия абелевой группы $\mathbb{Z}$.

¹¹ Jessen B. Some Aspects of the theory of almost periodic functions (1954)

¹² Haussmann J.-C. Sur la topologie des bras articulés (1989), Contrôle des bras articulés et transformations de Möbius, (2005)

В данной диссертации изучаются аналогичные вопросы сходимости для действий свободной группы $\mathbb{F}_r$ с r образующими на пространстве с мерой (X, μ) , $\mu(X) < \infty$.

На свободной группе с r образующими $\mathbb{F}_r = \langle a_1, \dots, a_r \rangle$ задается стандартная норма $\| \cdot \|$, соответствующая длине кратчайшего представителя элемента $g \in \mathbb{F}_r$ как слова в алфавите $\{a_1, \dots, a_r, a_1^{-1}, \dots, a_r^{-1}\}$. Таким образом можно определить сферу радиуса n в свободной группе как множество элементов нормы n , количество элементов в сфере равно $|S(n)| = (2r)(2r - 1)^{n-1}$.

Действие свободной группы задается гомоморфизмом $T : \mathbb{F}_r \rightarrow \text{Aut}(X, \mu)$. Тогда определен оператор S_n сферических средних: для функции $\varphi \in L^1(X, \mu)$

$$S_n \varphi := \frac{1}{(2r)(2r - 1)^{n-1}} \sum_{g: \|g\|=n} \varphi \circ T(g).$$

Изучение сходимости сферических средних для действий свободной группы было начато В.И. Арнольдом и А.Л. Крыловым¹³: ими был доказан аналог теоремы Вейля о равномерной распределенности орбит иррационального поворота на сфере. А именно, ими было доказано, что в случае действия свободной группы из двух образующих $\mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$ поворотами сферы $T_a, T_b \in SO(3)$, плотные орбиты $\mathbb{F}_2 x$ точки $x \in \mathbb{S}^2$ равномерно распределены, а именно для любого измеримого подмножества сферы $P \subset \mathbb{S}^2$ относительная доля элементов сферы $S(n)$ в группе, отправляющая x в множество P , стремится к относительной мере P , $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|S(n)x \cap P|}{|S(n)|} \rightarrow \frac{\text{mes} P}{\text{mes} \mathbb{S}^2}.$$

Обобщая результат Арнольд-Крылова на произвольное унитарное действие группы $\mathbb{F}_2$, Гиварш доказал¹⁴ теорему о сходимости сферических средних в норме L^2 : для сохраняющего меру действия $\mathbb{F}_2 \curvearrowright (X, \mu)$ и для произвольной функ-

¹³ Арнольд В.И., Крылов А. Л. Равномерное распределение точек на сфере и некоторые эргодические свойства решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области (1963)

¹⁴ Guivarc'h Y. Généralisation d'un théorème de von Neumann, (1969)

ции $\varphi \in L^2(X, \mu)$ сферические средние $S_{2n}\varphi$ сходятся в норме L^2 . Заметим, что нет надежды ожидать сходимости $S_n\varphi$, если функция φ является собственной функцией операторов T_a, T_b с собственным значением -1 . Позднее Нево и Стейн¹⁵, используя спектральные методы, обобщили результат Гиварша на сходимость в $L^p, p \in (1, \infty)$ для функций $\varphi \in L^p$ соответственно.

Таким образом, многое понято для сходимости сферических средних для действия $T : \mathbb{F}_r \rightarrow \text{Aut}(X, \mu)$ свободной группы $\mathbb{F}_r$ на пространстве с мерой (X, μ) . Нас интересует обобщение определения равновесных сферических средних на *марковские сферические средние*: разные элементы $g \in S(n)$ сферы $S(n) \subset \mathbb{F}_r$ будут выбираться с разными весами в соответствии с вероятностями, заданными марковской цепью.

Эта цепь задается *конечным* ориентированным графом $\Gamma = (V, E)$ с множеством вершин V и ребер E . Вершины V кодируются элементами группы посредством инъективного отображения $\mathcal{L} : V \rightarrow \mathbb{F}_r$. Пространство состояний марковской цепи - вершины V графа Γ . Вероятности перехода определяются стохастической матрицей $(\Pi_{v,w})$, строки и столбцы которой пронумерованы элементами алфавита V (то есть, все элементы матрицы Π неотрицательны и $\sum_w \Pi_{v,w} = 1 \forall v \in V$). Также мы предполагаем, что эта матрица имеет стационарное распределение $\nu = (\nu(v))_{v \in V} : \Pi^T \nu = \nu$, у которого все координаты положительны $\nu(v) > 0 \forall v \in V$.

Множество ребер графа определяется как

$$E = \{(w, v) | \Pi_{v,w} > 0\}.$$

Ориентированным путём длины n в графе Γ называется такая последовательность n вершин $s = (s_1, \dots, s_n)$, что $(s_i, s_{i+1}) \in E$. Каждому из таких путей сопоставляется соответствующий автоморфизм X :

$$T_s = T_{\mathcal{L}(s_1)} \dots T_{\mathcal{L}(s_n)}$$

¹⁵ Nevo A., Stein E. M. A generalization of Birkho's pointwise ergodic theorem (1994)

и вероятность этого пути в графе, выражающаяся произведением

$$\Pi_s = \Pi_{s_n s_{n-1}} \cdots \Pi_{s_2 s_1}.$$

Определение 1. *Марковские сферические средние для действия T свободной группы $\mathbb{F}_r$ на пространстве (X, μ) , заданные стохастической матрицей Π – это операторы $S_n : L_1(X, \mu) \rightarrow L_1(X, \mu)$, определяемые как средние по всем путям длины n*

$$S_n \varphi(x) := \sum_{(s_1, \dots, s_n)} \nu(s_n) \Pi_s \varphi(T_s x).$$

В данной диссертации нас интересует сходимость в среднем марковских сферических средних при максимально слабых условиях на матрицу Π , задающую марковскую цепь. Эта работа основана на совместной статье с Люисом Боуэном и Александром Буфетовым.

Мы используем метод марковских операторов, предложенный для доказательства эргодических теорем для действий свободных групп и полугрупп Р.И.Григорчуком¹⁶, а также Ж.-П. Тувено (в устной беседе). Этот метод был применен А.И. Буфетовым¹⁷ для доказательства сходимости марковских сферических средних при достаточно жестких ограничениях на матрицу Π . Нашей целью было расширить применимость теоремы Буфетова на открытое множество в пространстве матриц Π , задающих марковскую цепь (при фиксированном множестве вершин V).

Интерес изучения марковских сферических средних для свободной группы состоит в том, что марковские средние для свободной группы могут совпадать с равновесными сферическими средними для других конечно-порожденных групп, если матрица Π подобрана подходящим образом. Таким образом подход марковских сферических средних позволяет доказывать теоремы о сходимости сферических средних для конечно-порожденных групп с соотношениями,

¹⁶ Grigorchuk R. I. Ergodic theorems for actions of free semigroups (1999)

¹⁷ Bufetov A. I. Convergence of spherical averages for actions of free groups (2002)

для которых возможно марковское кодирование: в частности и в особенности, групп поверхностей и гиперболических групп. Первые результаты, связанные со сходимостью сферических средних для гиперболических по Громову групп, полученные в предположении о сильном экспоненциальном перемешивании действия, принадлежат Фудживаре и Нево¹⁸. Нас, однако, интересовала сходимость сферических средних без каких либо предположений о самой природе действия.

В общем случае (для произвольной матрицы Π) вопрос о сходимости в среднем марковских сферических средних пока не решен. Стоит отметить, что сходимость почти всюду не имеет места: Терренс Тао недавно привел пример¹⁹ сохраняющего меру действия свободной группы и интегрируемой функции $\varphi \in L^1(X, \mu)$ таких, что для μ -почти всех $x \in X$ сферические средние неограничены по n :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |S_n \varphi(x)| = \infty.$$

4. В четвертой главе диссертации рассматривается планиметрическая задача, связанная с эллиптическим бильярдом. Рассматривается однопараметрическое семейство орбит периода три эллиптического бильярда. Каждая орбита задается треугольником, биссектрисы которого перпендикулярны исходному эллипсу.

В данной диссертации доказывается, что геометрическое место центров вписанных в эти треугольники окружностей есть *эллипс*.

Диссертация основывается на классических теоремах геометрии бильярдов: теореме Понселе и теореме о существовании каустик эллиптического бильярда, а также продолжает подход Алексея Глуцюка²⁰, предложившего использовать комплексный закон отражения для изучения динамики периодических орбит бильярдов.

Таким образом, теорема о центрах вписанных окружностей доказывается

¹⁸ Fujiwara K., Nevo A. Maximal and pointwise ergodic theorems for word-hyperbolic groups, (1998)

¹⁹ Tao T. Failure of the L^1 pointwise and maximal ergodic theorems for the free group, (2016)

²⁰ Glutsyuk A. On quadrilateral orbits in complex algebraic planar billiards (2014), Glutsyuk A., Kudryashov Yu. No planar billiard possesses an open set of quadrilateral trajectories (2012)

посредством методов комплексной алгебраической геометрии. Основной идеей является идея о том, что комплексифицировав задачу, достаточно доказать, что искомое геометрическое место точек является комплексной алгебраической кривой степени 2. Это следует из несложных геометрических наблюдений.

Таким образом, комплексный подход оказывается проще вещественного, который также приведен в диссертации.

5. Пятая глава диссертации относится к теории нормальных форм гиперболических отображений. Она основана на совместной работе с Ю.С. Ильяшенко.

Основным объектом изучения является класс *гёльдеровых косых произведений*.

Косые произведения есть отображения прямого произведения базы B на слой I следующего вида:

$$F : M = B \times I \rightarrow M, (b, x) \mapsto (\alpha(b), f_b(x)).$$

Здесь $\alpha(b)$ – преобразование базы (часто – сдвиг Бернулли на пространстве последовательностей в случае дискретной базы или гиперболическое отображение в случае многообразия в базе), а $f_b(x)$ – послойное отображение, зависящее от элемента базы.

Таким образом, косые произведения являются одним из примеров отображений с *инвариантным слоением*: здесь инвариантное слоение состоит из вертикальных листов $\{b = \text{const}\}$. Понимание косых произведений, таким образом, является первым шагом в изучении динамики слоений, и им посвящено необозримое количество работ.

Косые произведения, удовлетворяющие так называемому условию *dominated splitting condition (DSC)* являются частным случаем нормально гиперболических систем.

Свойство нормальной гиперболичности (и, в частности, свойство DSC) гарантирует тот факт, что динамика в слое слабее динамики в базе. Оказывается, что при C^1 возмущении нормально гиперболические системы сохраняют инва-

риантное слоение с гладкими слоями, но в трансверсальном направлении это слоение может не быть гладким.

В последнее десятилетие было показано, что в трансверсальном направлении инвариантное слоение возмущения нормально гиперболического диффеоморфизма трансверсально гёльдерово. При этом показатель гёльдеровости связан с соотношением динамики по слоям и в базе (чем слабее динамика в слое, тем выше гладкость). Это было доказано А.Городецким²¹ и Ю. Ильяшенко – А.Негутом²² для случая косых произведений, и позднее в работе Ч.Пью, М.Шуба и Э.Вилкинсон²³ в более общем контексте нормально гиперболических отображений.

Это важное понимание степени гладкости возмущений косых произведений позволяет строить примеры открытых подмножеств в пространстве диффеоморфизмов, обладающих странными аттракторами. Процесс построения часто идет по одной и той же схеме: странный аттрактор строится сначала в классе косых произведений, а затем доказывается, что он сохраняется при возмущении. Таким образом, новые найденные эффекты диффеоморфизмов косых произведений могут быть перенесены на гёльдеровы косые произведения, и тем самым может быть доказана их типичность.

Эта программа выполнена в большом числе работ: для построения отображений с неустранимыми нулевыми показателями Ляпунова²⁴, отображений многообразий с краем с аттрактором Милнора положительной меры²⁵ или с перемежающимися бассейнами притяжения²⁶, костлявых аттракторов.²⁷

В данной диссертации, в рамках этой программы, мы ищем локальную

²¹ Городецкий А.С. Регулярность центральных слоев гиперболических множеств и приложения (2006)

²² Plyashenko Yu. S., Negut A. Hölder properties of perturbed skew products and Fubini regained (2012)

²³ Pugh C., Shub M., Wilkinson A. Hölder foliations, revisited (2012)

²⁴ Ильяшенко Ю.С., Городецкий А.С., Клепцын В.А., Налский М.Б. Неустранимость нулевых показателей Ляпунова (2005)

²⁵ Plyashenko Yu. S. Thick attractors of step skew products (2010), Plyashenko Yu. S. Thick attractors of boundary preserving diffeomorphisms (2011)

²⁶ Ильяшенко Ю.С. Диффеоморфизмы с перемежающимися бассейнами притяжения

²⁷ Кудряшов Ю.Г. Костистые аттракторы (2010)

нормальную форму для косо́го произведения $F : M \rightarrow M$ над линейным гиперболическим автоморфизмом A тора $B = \mathbb{T}^d$ и со слоем отрезок в окрестности неподвижной гиперболической точки. А именно, мы ищем гомеоморфизм $H : M \rightarrow M$, касательный к тождественному отображению, сопрягающий исходное гиперболическое косо́е произведение с его линейной частью

$$(b, x) \mapsto (Ab, \lambda(b)x),$$

где $\lambda(b)$ - мультипликатор линейной части исходного отображения в слое.

Важным в этой задаче является тот факт, что интересующее нас сопряжение H имеет специальный вид: H не меняет координату в базе, то есть сохраняет структуру косо́го произведения:

$$H(b, x) = (b, x + h_b(x)).$$

Существование такой нормальной формы (сопряжения с линейной частью гомеоморфизмом, сохраняющим слои) дает возможность упрощать изучение косых произведений и их возмущений в окрестности неподвижной точки. Интересным для нас в этой главе является вопрос изучения степени гладкости зависимости сопряжения H от точки в базе.

Цели и задачи диссертационной работы.

1. Целью первой главы диссертации было дать максимально точное описание языков Арнольда для уравнения Джозефсона.

2. Целью второй главы диссертации было решить задачу Лагранжа о нахождении асимптотической угловой скорости вращающейся цепи на произвольной полной ориентированной римановой поверхности и, в частности, установить ответ в этой задаче для плоскости Лобачевского и сферической геометрии. Задача о поиске асимптотической скорости конца вращающейся цепи на плоскости Лобачевского была поставлена нам А.М. Степиным. А.М. Степин высказал гипотезу, что ответ для вращающейся системы отрезков длинами $l_j, j = 1, 2, 3$ на гиперболической плоскости должен выражаться как выпуклая комбинация

угловых скоростей ω_j с коэффициентами - функциями углов треугольника, составленного из этих отрезков (аналогично евклидовому случаю) и предложил гипотезу:

$$\omega = \sum_{j=1}^3 \frac{\alpha_j \omega_j}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}.$$

Нашей целью было подтвердить (или опровергнуть) эту гипотезу.

3. Целью третьей главы диссертации было развить эргодическую теорию поведения сферических средних для действий конечно-порожденных групп и доказать теорему о сходимости марковских сферических средних в максимально общих условиях на стохастическую матрицу Π .

4. Целью четвертой главы диссертации было доказать теорему планиметрии о центрах вписанных окружностей для орбит периода три в эллиптическом бильярде, используя чисто комплексные методы.

5. Целью пятой главы диссертации было найти более простую нормальную форму для гиперболических косых произведений в окрестности неподвижной точки и доказать, что к ней можно привести любое косое произведение с помощью гомеоморфизма, сохраняющего послойную структуру, а также доказывать свойство *гёльдеровости* (по базе) этого гомеоморфизма.

Научная новизна работы.

Все результаты диссертации являются новыми. Основные результаты заключаются в следующем.

1. Доказано асимптотическое поведение языков Арнольда уравнения Джозефсона в режиме большой амплитуды: языки Арнольда приближаются целочисленными функциями Бесселя, когда $b \rightarrow \infty$.

2. Описана структура языков Арнольда уравнения Джозефсона в режиме малой внешней частоты сигнала, при $\mu \rightarrow 0$. Доказано, что в ограниченных подмножествах плоскости параметров (a, b) зазоры между языками Арнольда экспоненциально малы по μ .

3. Решена задача Лагранжа при достаточно малых длинах звеньев трех-

звенной вращающейся цепи для произвольной римановой ориентированной и полной поверхности.

4. Доказана теорема о сходимости марковских сферических средних для действий конечно-порожденной свободной группы для открытого множества в пространстве стохастических матриц, задающих марковскую цепь.

5. Доказано, что центры окружностей, вписанных в треугольные орбиты эллиптического бильярда, лежат на эллипсе.

6. Доказана теорема о нормализации Стернберга косых произведений с сохранением структуры косого произведения при нормализации, при этом показано, что сопрягающее отображение гладко по слою и гёльдерово по базе. Показатель гёльдера явно выражен через динамические характеристики исходного отображения.

Теоретическая и практическая значимость.

Работа носит теоретический характер. Полученные в Главе 1 результаты о поведении языков Арнольда для уравнения Джозефсона могут быть полезны для дальнейшего изучения этого уравнения (и уже применялись в нескольких работах).

Численные методы построения языков Арнольда для джозефсоновского семейства (1), представленные во второй части Главы 1, также могут быть применимы и для других семейств отображений.

Результаты Главы 2 могут быть применимы в дальнейшем изучении задачи Лагранжа на поверхностях с кривизной.

В Главе 3 разрабатываются методы работы с несамосопряженными марковскими операторами в контексте сходимости сферических средних – эти методы могут быть полезны при работе с действиями различных конечно-порожденных групп, отличных от свободной группы.

Главе 4 разрабатываются комплексные методы работы с бильярдами, в том числе комплексный закон отражения. Они могут быть полезны для работы в теории бильярдов.

В Главе 5 доказывается новая теорема о нормализации гиперболических косых произведений – она может быть полезна для работы с их возмущениями, и для доказательства новых необычных свойств аттракторов.

Методология и методы исследования.

В диссертации применяются методы марковских операторов для работы со сходимостью последовательностей функций, методы комплексной алгебраической геометрии для изучения комплексификаций бильярдов, а также методы функционального анализа и методы качественной теории дифференциальных уравнений.

Положения, выносимые на защиту.

В диссертации доказаны следующие теоремы.

1. (Глава 1.) Существуют такие положительные константы $C'_1, C'_2, K'_1, K'_2, K'_3$, что если параметры b, μ и число $k \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют неравенствам

$$|k\mu| + 1 \leq C'_1 \sqrt{b\mu}, \quad b \geq C'_2 \mu,$$

то имеют места следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{0,k}(b)}{\mu} - k + \frac{1}{\mu} J_k \left(-\frac{b}{\mu} \right) \right| &\leq \frac{1}{b} \left(K'_1 + \frac{K'_2}{\mu^3} + K'_3 \ln \left(\frac{b}{\mu} \right) \right), \\ \left| \frac{a_{\pi,k}(b)}{\mu} - k - \frac{1}{\mu} J_k \left(-\frac{b}{\mu} \right) \right| &\leq \frac{1}{b} \left(K'_1 + \frac{K'_2}{\mu^3} + K'_3 \ln \left(\frac{b}{\mu} \right) \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где $a_{0,k}(b)$ и $a_{\pi,k}(b)$ – аналитические функции, определяющие границы языка Арнольда, соответствующего целому значению числа вращения k : $\rho_{a,b,\mu} = k$ и $J_k(b)$ – целочисленная функция Бесселя

$$J_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kt - z \sin t) dt.$$

Замечание. Обозначения границ $a_{0,k}(b), a_{\pi,k}(b)$ связаны с тем фактом, что при целочисленном числе вращения отображение Пуанкаре $P_{a,b,\mu}$ уравнения Джозефсона имеет неподвижные точки. Фазовые кривые векторного по-

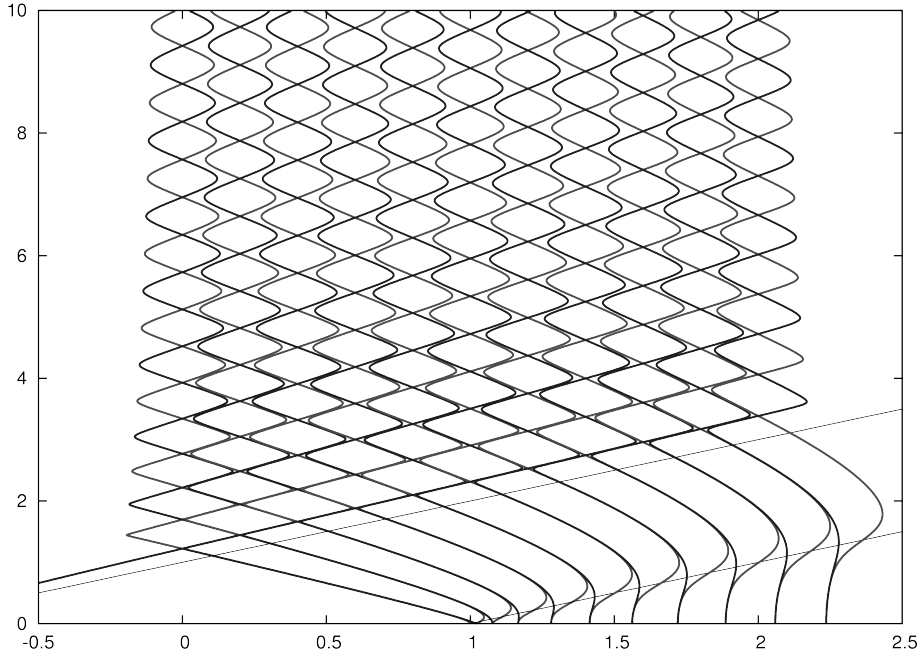


Рис. 4. Линиями изображены границы языков Арнольда уравнения Джозефсона с числами вращения, равными соответственно $k = 0, 1, \dots, 10$, при достаточно малом значении параметра μ , $\mu = 0.2$. При стремлении μ к нулю, в ограниченных областях плоскости (a, b) языки экспоненциально (по μ) сближаются.

ля (1) сохраняются относительно симметрии $(x, t) \mapsto (-x, -t)$, таким образом неподвижными точками могут быть лишь точки 0 и π .

2. (Глава 1) Рассмотрим два подмножества плоскости (a, b) параметров: область $B = \{(a, b) \mid a < 1 < b < a + 1\}$ и область $C = \{(a, b) \mid b > a + 1\}$. Тогда для любого фиксированного ограниченного подмножества плоскости, компактно вложенного в B (в C) и для достаточно малого μ расстояние между соседними языками в области B (области C) не превосходит $C_1 \exp\left(-\frac{C_2}{\mu}\right)$ для некоторых положительных констант C_1, C_2 . Таким образом, языки почти полностью заполняют это ограниченное подмножество, Рис.4.

3. (Глава 2.) Рассмотрим произвольную ориентированную полную поверхность M и динамику вращающейся цепи из трёх отрезков с длинами l_1, l_2, l_3 . Фиксируем начало первого отрезка в некоторой точке $0 \in M$ на поверхности. Предположим, что соответствующие относительные угловые скорости равны

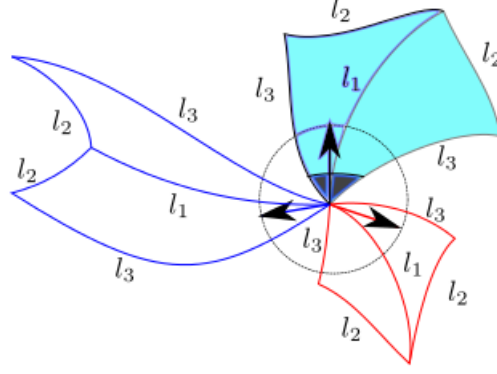


Рис. 5. Для каждого направления (показанного стрелками) геодезической, исходящей из точки 0, строятся два треугольника Δ^+, Δ^- со сторонами l_j такие, что сторона длины l_1 обоих треугольников принадлежит геодезической, а вершина 0 является общей для сторон длин l_1 и l_3 . На рисунке изображено три различных пары треугольников: на поверхностях непостоянной кривизны эти треугольники могут не быть изометричны.

$\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{R}$ и рационально независимы. Тогда для любой вращающейся цепи с достаточно малыми длинами звеньев, асимптотическая угловая скорость конца системы (предел (2)) существует и выражается выпуклой комбинацией исходных угловых скоростей

$$\omega = \omega_1 q_1 + \omega_2 q_2 + \omega_3 q_3,$$

где коэффициенты q_j выражаются через углы треугольников, составленных из отрезков l_j , Рис. 5.

А именно, для любого направления $\varphi \in \mathbb{S}^1$ геодезической, выходящей из 0 при достаточно малых l_j существует ровно два треугольника Δ^+, Δ^- со сторонами l_1, l_2, l_3 такими, что сторона длины l_1 отложена вдоль геодезической и сторона l_3 имеет вершину в 0 (и цепь таким образом замыкается). Обозначим $\alpha_1^\pm, \alpha_2^\pm, \alpha_3^\pm$ соответственно их углы, противолежащие сторонам длин l_1, l_2, l_3 . Тогда

$$q_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} \frac{\alpha_2^+(\varphi) + \alpha_2^-(\varphi)}{2\pi} d\varphi,$$

$$q_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} \frac{\alpha_3^+(\varphi) + \alpha_3^-(\varphi)}{2\pi} d\varphi,$$

$$q_1 = 1 - q_2 - q_3.$$

В случае геометрии Лобачевского эта теорема дает соотношение

$$\omega = \frac{\alpha_1 + A}{\pi} + \frac{\alpha_2}{\pi} + \frac{\alpha_3}{\pi},$$

где углы α_j суть соответствующие углы в треугольнике со сторонами l_j , а A — его площадь.

4. (Глава 3.) Рассмотрим действие свободной группы $\mathbb{F}_r$ автоморфизмами пространства с мерой (X, μ) , а также конечное множество V (помеченное элементами группы) и марковскую цепь на графе Γ , заданную стохастической матрицей Π .

Определение 2. Подграф $H \subset \Gamma$ называется *хорошим подграфом порядка k* , если он состоит из вершин u, w и ориентированных путей p, q, p^*, q^* длины k таких, что

- urw, uqw, pq^*r, qr^*q — ориентированные пути в графе Γ
- $\mathcal{L}(p^*) = \mathcal{L}(p^{-1})$, $\mathcal{L}(q^*) = \mathcal{L}(q^{-1})$

Определение 3. Стохастическая матрица Π называется *k -допустимой*, если

- соответствующий граф Γ связан (от любой вершины можно пройти до любой другой по ориентированным рёбрам)
- для некоторой вершины $v \in V$ подгруппа $\Gamma_v \subset \mathbb{F}_r$, порожденная всеми элементами вида $\mathcal{L}(p)$, где pv — ориентированный путь из v в себя в графе Γ , совпадает со всей свободной группой $\mathbb{F}_r$

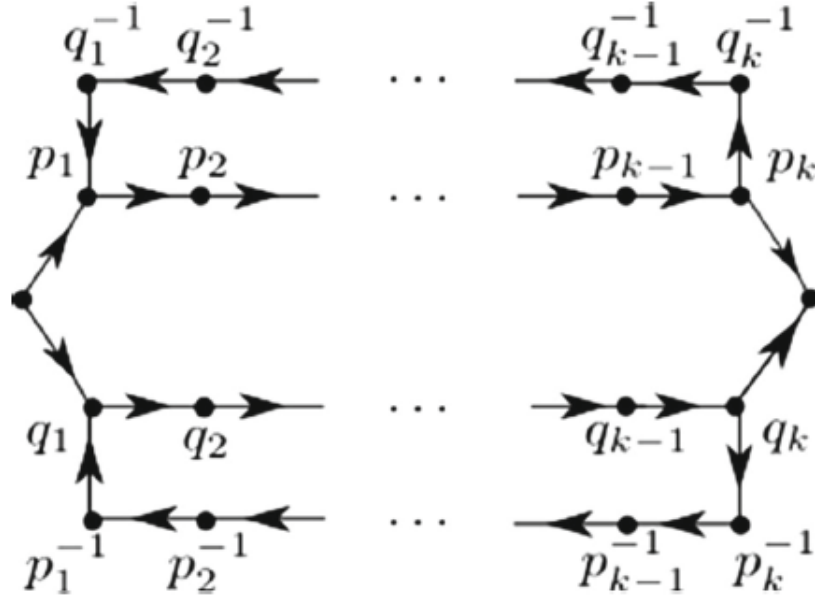


Рис. 6. Вид хорошего подграфа порядка k в графе Γ : наличие такого подграфа позволяет

доказать сходимость сферических средних $\frac{1}{2k} \sum_{i=0}^{2k} S_{n+i} \varphi$ для $\varphi \in L^1(X, \mu)$.

- соответствующий граф Γ содержит хороший подграф порядка k

Тогда если для некоторого k матрица Π является k -допустимой, то для любого сохраняющего вероятностную меру действия $\mathbb{F}_r$ на (X, μ) и любой функции $\varphi \in L^1(X, \mu)$ выражение

$$\frac{1}{2k} \sum_{i=0}^{2k} S_{n+i} \varphi$$

сходится в норме L^1 к $\mathbb{E}(f|\mathbb{F})$, то есть, к условному математическому ожиданию относительно сигма-алгебры $\mathbb{F}_r$ -инвариантных измеримых подмножеств.

Техническое условие на существование хорошего подграфа может быть заменено более слабыми и наглядными условиями. Важным в этой теореме является тот факт, что условие k -допустимости является открытым условием на пространстве матриц Π . Таким образом, имеется сходимость марковских сферических средних в открытых подмножествах пространства стохастических матриц.

5. (Глава 4.) Центры вписанных окружностей треугольных орбит эллиптического бильярда лежат на эллипсе.

5. (Глава 5.) Пусть $M = \mathbf{T}^d \times I$ – многообразие с краем, где $\mathbf{T}^d$ – d -мерный тор, $I = [0, 1]$.

Рассмотрим сохраняющее границу косое произведение

$$F : M \rightarrow M, (b, x) \mapsto (Ab, f_b(x)),$$

где $f_b(0) = 0, f_b(1) = 1$ и отображение слоёв f_b является сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом $I \rightarrow I$, и отображение базы A является линейным гиперболическим автоморфизмом тора.

Допустим также, что f является гёльдеровым непрерывным в x относительно C^k -нормы с показателем $\beta, k \geq 2$.

Пусть $O \in \mathbf{T}^d \times 0$ – гиперболическая неподвижная точка F . Обозначим мультипликатор послойного отображения в окрестности базы как $\lambda_b := \frac{\partial f_b}{\partial x}(0)$. Предположим также, что $\lambda_b \leq \sup_{\mathbf{T}^d} |\lambda(b)| = q < 1 \quad \forall b \in \mathbf{T}^d$.

Тогда существует окрестность U точки O и сохраняющий слои гомеоморфизм

$$H : (U, O) \rightarrow U, (b, x) \mapsto (b, x + h_b(x)), h_b(0) = \frac{\partial h_b}{\partial x}(0) = 0$$

такой, что

1. H сопрягает F в (U, O) с его "послойной линеаризацией"

$$F_0 : (b, x) \mapsto (Ab, \lambda_b x).$$

Это означает, что

$$F \circ H = H \circ F_0.$$

2. H – гладкий по x при фиксированном b : степень гладкости равна $k - 2$.

3. H послойно гёльдеров в C^{k-2} норме с показателем α , где

$\alpha \leq \min(\beta, \log_\mu q)$ и μ есть максимальная абсолютная величина собственных значений A , а q является непрерывной нормой послойного мультипликатора $\lambda(b)$. Таким образом, показатель гёльдеровости связан с соотношением сжатия по слою и по базе.

Апробация результатов.

Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях, школах и семинарах.

На конференциях и школах

- Конференция "Взаимодействие физики и математики: новые перспективы", Москва, Доклад *Уравнение Джозефсона и быстро-медленные системы*, август 2012
- Школа по геометрии и динамике ICTP-SISSA-Москва, ICTP, Триест, Доклад *Языки Арнольда уравнения Джозефсона*, июнь 2013
- Школа молодых учёных в области динамических систем (Parole aux jeunes chercheurs en systèmes dynamiques), CIRM, Marseille, Доклад *Потенциалы с замкнутыми орбитами и поверхности с замкнутыми геодезическими. Обзор и открытые вопросы*, ноябрь 2013
- Конференция по геометрии и динамическим системам, CIRM, Марсель, Постерный доклад *О центрах вписанных окружностей в треугольные орбиты эллиптического бильярда*, март 2014
- Конференция "Геометрические аспекты современной динамики", Порто, Доклад *Комплексное отражение в бильярдах*, январь 2016

На семинарах

- Семинар по динамическим системам, МГУ им. М.В. Ломоносова, Доклад *Теорема локальной нормализации косых произведений*, сентябрь 2013
- Институт Математики, Дижон, Доклад *Ещё одна теорема о сходимости сферических средних для действий свободной группы*, ноябрь 2015
- Семинар по динамике, Лаборатория Дьёдонне, Университет Ниццы София-Антиполис, Доклад *Линеаризация косых произведений по Стернбергу*, фев-

раль 2016

- Семинар по динамическим системам, Федеральный Университет UFF, Рио-де-Жанейро, Доклад *Марковские цепи и сходимость сферических средних для действий свободной группы*, май 2016

- Семинар по динамическим системам, Католический Университет PUC, Рио-де-Жанейро, Доклад *Теорема о нормализации Стернберга для косых произведений*, май 2016

- Семинар по топологии и динамическим системам, Университет Орсэ, Доклад *Сферические средние для действий свободной группы*, июнь 2016

- Семинар по динамическим системам, Университет Авиньона, Доклад *Цепи Маркова и сферические средние для действий свободной группы*, июнь 2016

Список публикаций автора по теме диссертации.

Материалы диссертации опубликованы в 5 печатных работах, из них 4 статей в рецензируемых журналах, 1 статья в сборниках трудов конференций.

1. Ilyashenko Yu. , Romaskevich O. Sternberg linearization theorem for skew products // Journal of Dynamical and Control systems, July 2016, Vol. 22 (3). P. 596 – 614

2. Bowen L., Bufetov A., Romaskevich O. On convergence of spherical averages for Markov operators // Geometriae Dedicata. 2016. Vol. 181 (1). P. 293–306.

3. Romaskevich O. On the incenters of triangular orbits on elliptic billiards // L'Enseignement Mathématique. 2014. Vol. 60 (2). P. 247–255.

4. Klimenko A., Romaskevich O. Asymptotic properties of Arnold tongues and Josephson effect // Moscow Mathematical Journal. 2014. Vol. 14:2. P. 367–384.

5. Клепцын В., Ромаскевич О., Щуров И. Эффект Джозефсона и быстро-медленные системы // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование. 2013. Vol.8:1. P.31–46.

Личный вклад автора.

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, от-

ражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами (Главы 1,3,5), причем вклад диссертанта был определяющим. Результаты Глав 2 и 4 были получены лично автором.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и библиографии. Общий объём диссертации 182 страницы. Библиография включает 108 наименований на 10 страницах.

Содержание работы.

Во **Введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В **первой главе** диссертации изучается динамика так называемого уравнения Джозефсона (трехпараметрического семейства уравнений на торе с параметрами a, b, μ) и в особенности структура языков Арнольда для этого уравнения. Эта структура объясняется в двух предельных режимах, $b \rightarrow \infty$ и $\mu \rightarrow 0$.

В Разделе 1.1 этой главы даются основные определения, а также физическая и математическая мотивировки для изучения данного уравнения.

В Разделе 1.2 объясняются основные свойства уравнения Джозефсона -мёбиусовость соответствующего отображения Пуанкаре и симметрии уравнения. Из этих двух свойств выводится динамическое описание границ языков Арнольда.

В Разделе 1.3 формулируется и доказывается результат о приближении языков Арнольда для уравнения Джозефсона целочисленными бесселевыми функциями, когда параметр $b \rightarrow \infty$.

В Разделе 1.4 дается качественное описание языков Арнольда в случае, когда параметр μ достаточно мал. Доказываются две теоремы о том, что в некоторых областях пространства параметров языки Арнольда находятся на экспоненциально малом по μ расстоянии друг от друга при $\mu \rightarrow 0$. Дается объясне-

ние поведения языков Арнольда на языке теории быстро-медленных систем и, наконец, предлагается алгоритм построения языков Арнольда при достаточно малых μ (вплоть до $\mu = 0.01$).

Результаты Раздела 1.1 опубликованы в совместной работе автора с Алексеем Клименко²⁸, результаты Раздела 1.2 опубликованы в совместной работе автора с Ильей Щуровым и Виктором Клепцыным²⁹.

Во второй главе изучается задача Лагранжа о среднем движении вращающейся цепи N отрезков.

В Разделе 2.1 этой главы дается формулировка классической задачи Лагранжа, когда вращающаяся цепь совершает движение на евклидовой плоскости. В этом же разделе приводится новое доказательство классического результата о выражении асимптотической скорости системы при $N = 3$ как выпуклой комбинации угловых скоростей движения отрезков с коэффициентами, пропорциональными углам треугольника, составленном из отрезков цепи.

В Разделе 2.2 это доказательство обобщается на случай произвольной ориентированной полной римановой поверхности. В частности, приводится решение задачи Лагранжа для гиперболической и сферической геометрий.

В третьей главе доказывается теорема о сходимости марковских сферических средних для действий свободной группы на пространстве с мерой.

В Разделе 3.1 этой главы даются все необходимые определения и формулируется основная теорема о сходимости сферических средних, а также дается обзор литературы по данному сюжету.

В Разделе 3.2 доказывается основное техническое утверждение статьи - а именно, исследуется хвостовая сигма-алгебра, соответствующая марковскому оператору, определяющему марковскую цепь, кодирующую действие группы. Доказывается, что эта хвостовая сигма-алгебра тривиальна. Это утверждение влечет за собой сходимость сферических средних. Переход от утверждения раз-

²⁸ Klimenko A., Romaskevich O. Asymptotic properties of Arnold tongues and Josephson effect, (2014)

²⁹ Клепцын В., Ромаскевич О., Щуров И. Эффект Джозефсона и быстро-медленные системы (2013)

дела 3.2 к доказательству основной теоремы осуществляется в разделе 3.3 с помощью стандартных техник. Результаты третьей главы представляют собой совместную работу с Александром Буфетовым и Люисом Боуэном³⁰.

В четвертой главе рассматривается геометрическое место точек центров вписанных окружностей, соответствующих треугольным орбитам эллиптического бильярда. Доказывается, что это геометрическое место точек является эллипсом.

Раздел 4.1 является введением к главе, в нем дается формулировка теоремы.

В Разделе 4.2 теорема доказывается с помощью методов комплексной алгебраической геометрии: в этом разделе соответственно определяется комплексный закон отражения, и дальнейшая работа происходит с комплексификациями исходных кривых.

В Разделе 4.3 приведено планиметрическое доказательство того же результата, в данном случае, более громоздкое, чем доказательство с помощью комплексной техники.

Результаты четвертой главы опубликованы в журнале *L'Enseignement mathématique*³¹.

В пятой главе доказывается теорема о нормализации косых гёльдеровых произведений.

В Разделе 5.1 этой главы дается формулировка основной теоремы, а также дается мотивировка изучения класса именно гёльдеровских косых произведений. В этом разделе доказывается, что косое произведение над линейным диффеоморфизмом Аносова с одномерным слоем может быть линеаризовано в окрестности гиперболической неподвижной точки посредством сопрягающего гомеоморфизма H . При этом линеаризация проводится послойно: H является тождественным преобразованием по базе.

³⁰ Bowen L., Bufetov A., Romaskevich O. On convergence of spherical averages for Markov operators, (2016)

³¹ Romaskevich O. On the incenters of triangular orbits on elliptic billiards , (2014)

В Разделе 5.2 приведен план доказательства теоремы о нормализации: сопрягающий гомеоморфизм находится как неподвижная точка некоторого оператора, сохраняющего некоторое замкнутое подпространство $\mathcal{N}$ в некотором функциональном пространстве $\mathcal{M}$. Этот оператор является композицией $L \circ \Phi$ двух операторов – оператора L решения гомологического уравнения и оператора сдвига Φ .

В Разделе 5.3 изучается оператор решения гомологического уравнения, и доказывается, что этот оператор сохраняет пространство гёльдеровых функций с показателем α , где α – минимум из показателя гёльдеровости исходного отображения и константы, характеризующей соотношение гиперболического динамики в слое и в базе. Этот раздел является основным технически сложным местом.

В Разделе 5.4 изучается оператор сдвига и также доказывается, что он сохраняет замкнутое подпространство $\mathcal{N}$. В Разделе 5.5 доказывается, что композиция операторов $L \circ \Phi$ является сжимающим оператором в $\mathcal{M}$.

В Раздел 5.6 вынесены технические леммы и доказательство основной теоремы в случае более высокой гладкости. Результаты пятой главы – результат работы с Ю.С. Ильяшенко³².

Заключение.

Я хочу в первую очередь поблагодарить моих научных руководителей. Спасибо Юлию Сергеевичу за то, что он поделился со мной своим видением математики, за его умение объяснить и понять. Спасибо Вам за возможность быть частью нашего семинара. Спасибо Этьену за всю чудесную математику, которой он меня научил и за дружескую поддержку в моменты сомнений. Я хочу также поблагодарить моих соавторов, И.Щурова, В. Клепцына, А. Клименко, А.Буфетова и Л.Боуэна за счастье обсуждать и решать сложные задачи вместе. Отдельное спасибо И.Щурову за Рисунки 1,2,4 реферата.

И спасибо моим друзьям, за всё.

³² Plyashenko Yu. , Romaskevich O. Sternberg linearization theorem for skew products, (2016)