

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи

РОМАСКЕВИЧ Ольга Леонидовна

Динамика физических систем, нормальные формы и цепи Маркова

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор Юлий Сергеевич Ильяшенко

Научный руководитель
академик Французской Академии Наук,
ведущий научный сотрудник Этьен Жис

Москва – 2016

Содержание

1. Введение.....	3
2. Глава 1. Динамика уравнения Джозефсона	21
3. Глава 2. Задача Лагранжа о среднем движении.....	70
4. Глава 3. Марковские цепи и эргодическая теория для действий свободной группы	94
5. Глава 4. Эллиптический бильярд и комплексный закон отражения..	113
6. Глава 5. Теорема Стернберга о нормализации в косых произведениях	128
7. Заключение.	159
8. Литература.	160

Введение

Актуальность темы исследования и степень разработанности проблемы.

Диссертационная работа посвящена различным задачам теории динамических систем, включающих в себя эргодическую теорию (см. Главы 1–3), теорию бильярдов (Глава 4) и теорию нормальных форм отображений (Глава 5).

1. В первой главе диссертации рассматривается так называемое уравнение Джозефсона. Это трёхпараметрическое семейство векторных полей на двумерном торе с координатами (x, τ) , имеющее следующий вид

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \tau} = \cos x + a + b \cos t, \\ \frac{\partial t}{\partial \tau} = \mu. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $a, b \in \mathbb{R}, \mu > 0$ – вещественные параметры. Нас интересует отображение Пуанкаре $P_{a,b,\mu}$ этого уравнения, определенное как отображение первого возвращения с трансверсали $\{t = 0\}$ на саму себя, и в особенности его число вращения ρ как функция параметров $\rho = \rho_{a,b,\mu}$. Напомним

Определение. Числом вращения ρ отображения $P : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ называется предел

$$\rho := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{P}^{\circ n}(x) - x}{2\pi n}.$$

где $\tilde{P}$ есть поднятие P на универсальную накрывающую.

Следующее определение впервые было дано В.И. Арнольдом в 1978 году в контексте рассмотрения им двухпараметрического семейства $x \mapsto x + a + \varepsilon \sin 2\pi x$ синусоидальных возмущений семейства поворотов окружности.

Определение. Будем говорить, что имеет место захват фазы для значения $k \in \mathbb{R}$ числа вращения, если множество линий уровня

$$E_k := \{(a, b, \mu) | \rho_{a,b,\mu} = k\}$$

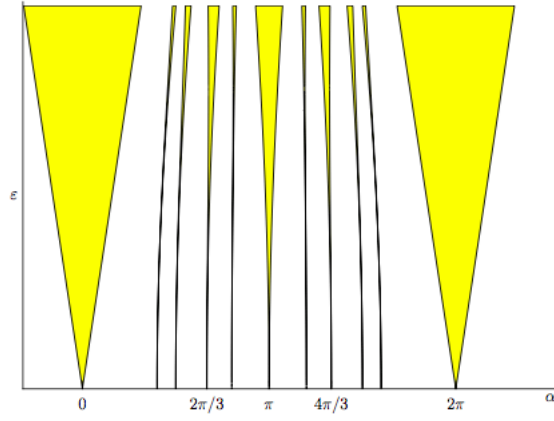


Рис. 1. Семейство языков Арнольда для стандартного семейства $x \mapsto x + a + \varepsilon \sin 2\pi x$ на плоскости параметров (a, ε) , рисунок Ильи Щурова

пространства параметров $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ имеет непустую внутренность. В этом случае множество E_k называется языком Арнольда.

В своих рассуждениях Арнольд получает Рис.1 – из каждой рациональной точки $\left(\frac{p}{q}, 0\right)$ *растет* язык, подмножество пространства параметров, соответствующее числу вращения $\frac{p}{q}$. Теорема Данжуа для C^2 – гладких диффеоморфизмов вместе с соображениями монотонности показывают, что при иррациональных числах вращения языков Арнольда не появляется и что соответствующее множество уровня числа вращения есть гладкая кривая.

Изучение языков Арнольда для уравнения Джозефсона продолжает процесс, начатый Арнольдом, однако в этом случае ситуация сильно отличается от стандартного семейства: языки Арнольда существуют только для целых значений числа вращения, что соответствует некоторому вырождению – а именно, соответствующее отображение Пуанкаре $P_{a,b,\mu}$ мёбиусово. Данный эффект называется *квантованием числа вращения*. Языки Арнольда уравнения Джозефсона имеют очень красивую структуру, см. Рис. 2, которая и изучается в данной диссертации. Мотивацией для изучения данного уравнения являлась не только его математическая привлекательность, но и наличие физической мотивации и его связи с эффектом Джозефсона физики сверхпроводников.

Языки Арнольда уравнения Джозефсона изучались в следующих работах.

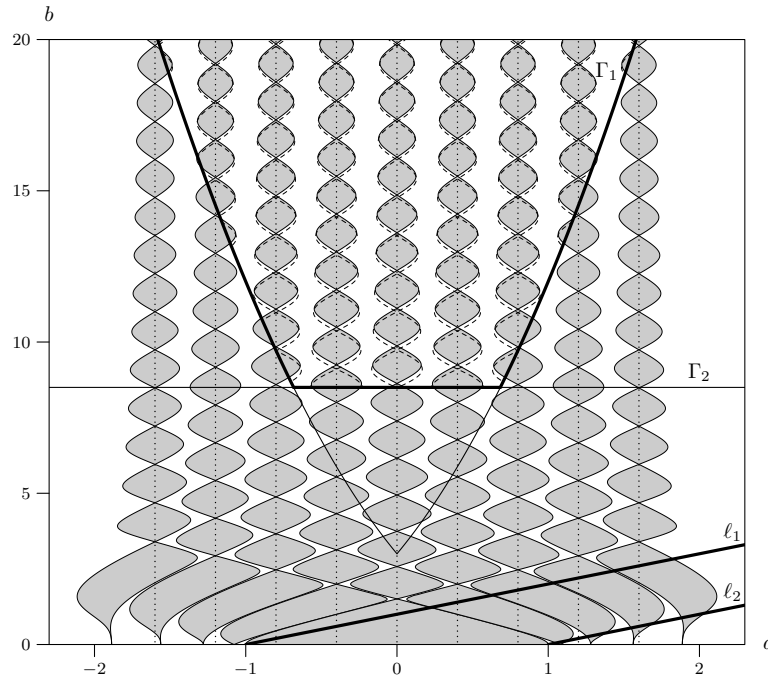


Рис. 2. Семейство языков Арнольда для уравнения Джозефсона на плоскости параметров (a, b) при фиксированном μ , рисунок Ильи Щурова

Цикл работ Бухштабера –Карпова - Тертычного, [9–14]. В этом цикле работ уравнение (1) впервые было рассмотрено в контексте эффекта Джозефсона, были переоткрыты свойства мебиусовости отображения Пуанкаре и намечены первые эмпирические описания языков Арнольда.

А. Глуцюк. В работе [15] Алексея Глуцюка с соавторами доказывается так называемый эффект *квантования перемычек языков Арнольда*, а именно тот факт, что пересечения границ каждого языка находятся на одной вертикальной прямой (при достаточно большом фиксированном μ , $\mu > 1$).

Ильяшенко-Рыжов-Филимонов, Глуцюк-Рыбников. В работе [16] изучается поведение языков возмущений уравнения Джозефсона и доказывается, что квантование числа вращения только в целых точках представляет собой явление коразмерности бесконечность. В работе [31] показывается, что уравнение Джозефсона уникально: оно является одним из уравнений единственного счетного семейства, допускающего языки Арнольда лишь для целых чисел вращения.

Стоит также заметить, что это уравнение появляется естественным обра-

зом в контексте планиметра Притца [19], а также в контексте динамики движения велосипеда [20, 21]. Также, в работе [22] уравнение (1) было рассмотрено в кадре изучения свойств быстро-медленных систем, без применения к динамике уравнения Джозефсона и к форме языков Арнольда.

В данной диссертации подробно изучается поведение языков Арнольда в двух режимах: когда параметр b стремится к бесконечности, и когда параметр μ стремится к нулю. В обоих случаях доказываются теоремы об асимптотическом поведении языков Арнольда. Результаты диссертации вписываются в ряд работ об уравнении Джозефсона, они опираются на проведенные исследования, особенно [22] и [9–14], а также используются как отправной пункт в новых работах, напр. [15, 31].

2. Во второй главе диссертации рассматривается так называемая задача Лагранжа. Это задача об асимптотическом поведении конца системы N вращающихся отрезков, *вращающейся цепи*. Более точно, при заданных длинах отрезков $l_1, \dots, l_N \in \mathbb{R}_+$ и заданных исходных положениях отрезков друг относительно друга, мы задаемся вопросом о предельном приращении аргумента функции $z(t)$, описывающей конечную точку такой системы при условии, что каждый из отрезков вращается с постоянной угловой скоростью ω_j относительно конца предыдущего отрезка. Таким образом, задача состоит в корректном определении и доказательстве существования предела

$$\omega = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{z(t)}{t}$$

Эта задача рассматривается нами на произвольной ориентированной полной поверхности M . До этого в литературе эта задача была рассмотрена только для случая евклидовой плоскости.

В случае, когда M – евклидова плоскость, эта задача была поставлена **Лагранжем** в [101] и решена в простейшем случае, когда длина одного из отрезков (например, с номером j) больше суммы длин оставшихся, в этом случае

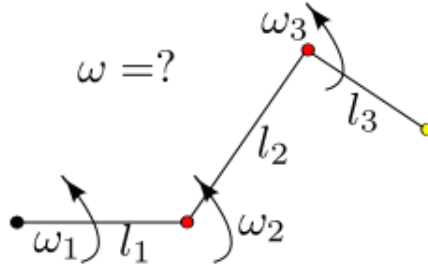


Рис. 3. Проблема Лагранжа – задача нахождения асимптотической угловой скорости вращающейся системы отрезков, *вращающейся цепи*. На рисунке изображена вращающаяся цепь типа (l_1, l_2, l_3) , соответствующая векторному полю (2.2), $N = 3$

асимптотическая скорость ω существует и совпадает с асимптотической скоростью наибольшего из отрезков, $\omega = \omega_j$.

В случае, когда ω_j рационально независимы, ответ для задачи Лагранжа был получен в ряде работ **П. Бодем, П. Хартманом, Е.Р. Ван Кампеном, А. Винтнером и Г. Вейлем**, см. работы [102–104]. Полное решение задачи было позднее получено **Джессеном и Торнхейвом** в [105].

В случае, когда вращающаяся цепь на евклидовой плоскости состоит из трех отрезков, ответ в задаче Лагранжа имеет красивую геометрическую форму.

Теорема 1. *Рассмотрим динамику вращающейся цепи, состоящей из отрезков с длинами $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{R}_+$ на плоскости $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, вращающимися с относительными угловыми скоростями ω_j .*

Предположим, что числа l_j удовлетворяют трем неравенствам треугольника

$$l_1 < l_2 + l_3, l_2 < l_1 + l_3, l_3 < l_1 + l_2$$

и что числа $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ являются рационально независимыми (не существует соотношения $\sum_j t_j \omega_j = 0, t_j \in \mathbb{Z}$). Тогда асимптотическая скорость движения конца такой вращающейся цепи равна

$$\omega = \frac{\alpha_1}{\pi} \omega_1 + \frac{\alpha_2}{\pi} \omega_2 + \frac{\alpha_3}{\pi} \omega_3 \quad (2)$$

где α_j являются углами треугольника, сформированного отрезками со сторонами l_1, l_2, l_3 . Угол $\alpha_j > 0$ расположен соответственно напротив стороны l_j .

В данной диссертации эта теорема передоказывается новыми геометрическими методами, а также предоставляются её обобщения на случаи поверхностей с произвольной метрикой.

Стоит отметить, что задача Лагранжа может быть рассмотрена также в намного более общем контексте почти периодических функций, см. работы **Джессена** [106]. Также задача Лагранжа связана с рядом интересных топологических вопросов, изучавшихся, среди прочих, **Жаном-Клодом Османом** в [99, 100].

3. Третья глава диссертации посвящена эргодической теории действий конечно-порожденных свободных групп.

Работа диссертации продолжает начатый фон Нейманном и Биркхофом путь изучения временных средних функций вдоль орбит преобразований. Сложность (и интерес!) данной тематики состоит в том, что усреднение происходит не по действию абелевой группы ($\mathbb{Z}$ в случае классической теоремы фон Неймана), а по действию некоммутативных групп.

Нас в первую очередь интересует сходимость сферических, а не шаровых средних для действий конечно-порожденных групп. Это объясняется тем, что основная масса элементов в шаре в свободной группе находится именно на границе этого шара, и сходимость сферических средних представляет интерес первой важности. Более точно, рассматривается конечно-порожденная группа G , действующая сохраняющими меру преобразованиями на вероятностном пространстве X с мерой μ . Таким образом определен гомоморфизм группы G в группу сохраняющих меру преобразований пространства X :

$$T : G \rightarrow \text{Aut}(X, \mu), g \mapsto T_g.$$

Зафиксировав набор образующих S группы $G = \langle S \rangle$, мы определяем норму

на группе (как расстояние до единичного элемента в графе Кэли) и сферические средние некоторой функции $\varphi \in L_1(X, \mu)$ как

$$S_n \varphi(x) := \frac{1}{|S(n)|} \sum_{\omega \in S(n)} \varphi(T_\omega x),$$

где $S(n) := \{w : |w| = n\}$ – сфера радиуса n в данной группе.

Сходимость сферических средних для действий свободной группы изучалась в следующих работах.

Арнольд и Крылов [38] доказали сходимость и закон равномерного распределения Вейля для двух поворотов сферы.

Гиварш [39] доказал общую теорему об эргодичности в среднем для действий свободной группы, используя спектральные методы.

Нево и Стейн [43] обобщили результат Гиварша для функций $\varphi \in L_p$.

Нас интересует вопрос о сходимости сферических средних для свободной группы $\mathbb{F}$ в немного более широком контексте, а именно в контексте марковских операторов. Конструкция сферических средних обобщается следующим образом: отображения T_ω берутся с весами, соответствующими путям в марковской цепи. Мы рассматриваем конечный алфавит V с отображением кодирования $\mathcal{L} : V \rightarrow \mathbb{F}$.

Мы будем изучать произвольную марковскую цепь с пространством состояний V . А именно, возьмём стохастическую матрицу $\Pi = (\Pi_{v,w})_{v,w \in V}$, строки и столбцы которой пронумерованы элементами алфавита V (то есть, $\sum_w \Pi_{v,w} = 1$ для каждого v).

Пусть $\Gamma = (V, E)$ — ориентированный граф, множество вершин которого совпадает с V , а множество рёбер определено так:

$$E := \{(w, v) : \Pi_{vw} > 0\}.$$

Под *ориентированным путём* в графе Γ мы подразумеваем такую последовательность $s = (s_1, \dots, s_n) \in V^n$ вершин, что $(s_i, s_{i+1}) \in E$ для всех i . Длина

такого пути равна $|s| := n$. Для каждого из таких путей мы обозначаем

$$\mathcal{L}(s) = \mathcal{L}(s_1) \cdots \mathcal{L}(s_n) \in \mathbb{F}, \quad T_s = T_{\mathcal{L}(s)} \in \text{Aut}(X, \mu), \Pi_s = \Pi_{s_n s_{n-1}} \cdots \Pi_{s_2 s_1}.$$

Определим сферические средние $S_n : L^1(X, \mu) \rightarrow L^1(X, \mu)$ по формуле

$$S_n(\phi)(x) := \sum_{s=(s_1, \dots, s_n)} \nu(s_n) \Pi_s \phi(T_s x) \quad (3)$$

В данной диссертации мы изучаем сходимость этих сферических средних в L^1 , используя метод марковских операторов. Для доказательства эргодических теорем для действий свободных групп и полугрупп он был предложен **Р.И.Григорчуком** [45], **Ж.-П. Тувено** (в устной беседе) и применен в работе **А.И. Буфетова** [47].

А.И. Буфетов доказывает сходимость марковских сферических средних при условиях довольно жестких ограничений на матрицу Π , задающую марковский процесс. В данной диссертации доказывается сходимость сферических средних при довольно слабых условиях на матрицу Π .

Интерес изучения такого общего определения сферических средних состоит в том, что меняя матрицу Π , такой подход позволяет интересоваться сходимостью сферических средних для конечно-порожденных групп с соотношениями, для которых возможно марковское кодирование: групп поверхностей и гиперболических групп. Первые результаты, связанные со сходимостью сферических средних для гиперболических по Громову групп, полученные в предположении о сильном экспоненциальном перемешивании действия, принадлежат **Фуджигаре и Нево** [51]. Эргодическая теорема для действий гиперболических групп на конечных пространствах была получена **Боуэном** в работе [52].

4. В четвертой главе диссертации рассматривается задача изучения геометрического места точек центров вписанных в треугольные орбиты эллиптического бильярда окружностей. Оказывается, что это геометрическое место точек является эллипсом.

Диссертация продолжает подход **Алексея Глуцюка** [73, 74], предложившего использовать комплексный закон отражения для изучения динамики периодических орбит бильярдов.

5. Пятую главу диссертации можно отнести к теории нормальных форм гиперболических отображений. Основным объектом изучения является класс гёльдеровых косых произведений.

Косые произведения есть отображения прямого произведения базы B на слой I (в нашем случае, одномерный) следующего вида:

$$F : M = B \times I \rightarrow M, (b, x) \mapsto (\alpha(b), f_b(x)).$$

Здесь $\alpha(b)$ – преобразование базы (часто – сдвиг Бернулли в случае дискретной базы или гиперболическое преобразование в непрерывном случае), а $f_b(x)$ – послойное отображение, зависящее от элемента базы. Косые произведения имеют таким образом инвариантное вертикальное слоение $b = \text{const}$. Изучение косых произведений, таким образом, является первым шагом в изучении динамики слоений.

Косые произведения, удовлетворяющие так называемому условию dominated splitting condition (динамика по слою является слабее динамики в базе) являются частным случаем нормально гиперболических систем. Оказывается, что при возмущении косые произведения с этим свойством сохраняют инвариантное слоение с гладкими слоями, но лишь непрерывными относительно точки базы. Недавно было доказано, что их отображения слоёв на самом деле гёльдеровы относительно точки базы: в работах **Городецкого** и **Ильяшенко-Негута** [87–88] для случая косых произведений, и в работе **Пью, Шуба и Вилкинсон** [89] в более общем контексте нормально гиперболических отображений.

Понимание гладкости возмущений косых произведений позволяет строить примеры открытых подмножеств в пространстве диффеоморфизмов, обладающих странными аттракторами. Новые найденные эффекты диффеоморфизмов косых произведений могут быть перенесены на гёльдеровы косые произведения,

и тем самым может быть доказана их типичность. Эта программа выполнена в большом числе работ [90-96].

В данной диссертации, в рамках этой программы, мы ищем нормальную форму для косоугольного произведения $F : M \rightarrow M$ над линейным гиперболическим автоморфизмом A в базе $B = \mathbb{T}^d$ и со слоем отрезок. А именно, мы ищем гомеоморфизм $H : M \rightarrow M$, касательный к тождественному отображению, сопрягающий исходное гиперболическое косоугольное произведение с его линейной частью $(b, x) \mapsto (Ab, \lambda(b)x)$, где $\lambda(b)$ – мультипликатор линейной части исходного отображения в слое.

Важным в этой задаче является тот факт, что H не меняет координату в базе, то есть сохраняет структуру косоугольного произведения. Такая теорема может упростить изучение возмущений косых произведений. Интересным для нас в этой диссертации является вопрос изучения степени гладкости зависимости сопряжения H от точки в базе.

Цели и задачи диссертационной работы:

1. Целью первой главы диссертации было понять и описать как можно более точно поведение языков Арнольда для уравнения Джозефсона.
2. Целью второй главы диссертации было решить задачу Лагранжа о нахождении асимптотической угловой скорости вращающейся цепи в намного более общем контексте.
3. Целью третьей главы диссертации было развить эргодическую теорию поведения сферических средних для действий конечно-порожденных групп.
4. Целью четвертой главы диссертации было доказать теорему планиметрии о центрах вписанных окружностей для орбит периода три в эллиптическом бильярде, используя чисто комплексные методы.
5. Целью пятой главы было найти более простую нормальную форму для гиперболических косых произведений в окрестности неподвижной точки и доказать, что к ней можно привести любое косоугольное произведение с помощью гомеоморфизма, сохраняющего послойную структуру.

Научная новизна работы.

Все результаты диссертации являются новыми. Основные результаты заключаются в следующем.

- Доказано асимптотическое поведение языков Арнольда уравнения Джозефсона в режиме большой амплитуды: языки Арнольда приближаются целочисленными функциями Бесселя, когда $b \rightarrow \infty$.
- Описана структура языков Арнольда уравнения Джозефсона в режиме малой внешней частоты сигнала, при $\mu \rightarrow \infty$.
- Решена задача Лагранжа при малых длинах звеньев трехзвенной вращающейся цепи для произвольной римановой ориентированной и полной поверхности.
- Доказана теорема о сходимости марковских сферических средних для действий конечно-порожденной свободной группы для открытого множества в пространстве стохастических матриц, задающих марковскую цепь.
- Доказано, что центры окружностей, вписанных в треугольные орбиты эллиптического бильярда, лежат на эллипсе.
- Доказана теорема о нормализации Стернберга косых произведений с сохранением структуры косого произведения при нормализации, при этом показано, что сопрягающее отображение гладко по слою и гёльдерово по базе.

Теоретическая и практическая значимость.

Работа носит теоретический характер. Полученные в Главе 1 результаты о поведении языков Арнольда для уравнения Джозефсона могут быть полезны для дальнейшего изучения этого уравнения (и уже применялись в нескольких работах). Численные методы построения языков также могут быть применимы

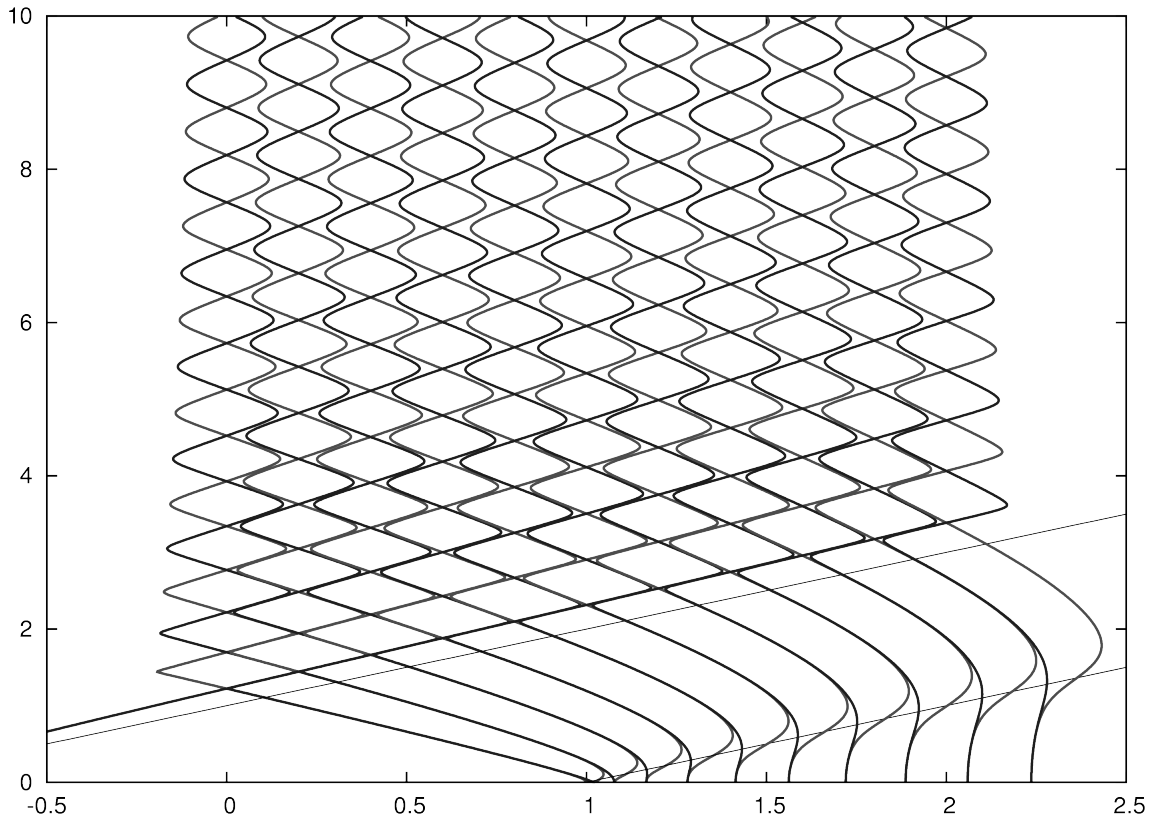


Рис. 4. Сечение семейства языков Арнольда для уравнения Джозефсона на плоскости параметров (a, b) при малом фиксированном $\mu, \mu = 0.2$: расстояние между языками экспоненциально мало в ограниченной области.

и для других семейств отображений. В Главе 3 разрабатываются методы работы с несамосопряженными марковскими операторами в контексте сходимости сферических средних – эти методы могут быть полезны при работе с действиями различных конечно-порожденных групп, отличных от свободной группы. В Главе 4 разрабатываются комплексные методы работы с бильярдами, в том числе комплексный закон отражения. Они могут быть полезны для работы в теории бильярдов. В Главе 5 доказывается новая теорема о нормализации гиперболических косых произведений – она может быть полезна для работы с их возмущениями.

Положения, выносимые на защиту.

В диссертации доказаны следующие теоремы.

- (Глава 1.) Существуют такие положительные константы $C'_1, C'_2, K'_1, K'_2, K'_3$,

что если параметры b, μ и число $k \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют неравенствам

$$|k\mu| + 1 \leq C'_1 \sqrt{b\mu}, \quad b \geq C'_2 \mu, \quad (4)$$

то имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{0,k}(b)}{\mu} - k + \frac{1}{\mu} J_k \left(-\frac{b}{\mu} \right) \right| &\leq \frac{1}{b} \left(K'_1 + \frac{K'_2}{\mu^3} + K'_3 \ln \left(\frac{b}{\mu} \right) \right), \\ \left| \frac{a_{\pi,k}(b)}{\mu} - k - \frac{1}{\mu} J_k \left(-\frac{b}{\mu} \right) \right| &\leq \frac{1}{b} \left(K'_1 + \frac{K'_2}{\mu^3} + K'_3 \ln \left(\frac{b}{\mu} \right) \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $a_{0,k}(b)$ и $a_{\pi,k}(b)$ – функции, определяющие границы языка Арнольда уравнения Джозефсона, соответствующего целому значению k числа вращения, $\rho_{a,b,\mu} = k$ и $J_k(b)$ – целочисленные функции Бесселя

$$J_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kt - z \sin t) dt.$$

- **(Глава 1.)** Для фиксированного μ рассматриваются подмножества плоскости (a, b) параметров: область B ($a - 1 < b < a + 1$) и область C ($b > a + 1$). Тогда для любого фиксированного ограниченного подмножества плоскости, компактно вложенного в B (в C) и для достаточно малого μ расстояние между соседними языками в области B (области C) не превосходит $C_1 \exp \left(-\frac{C_2}{\mu} \right)$ для некоторых положительных констант C_1, C_2 . Таким образом, языки почти полностью заполняют это ограниченное подмножество, см. Рис.4.
- **(Глава 2.)** Рассмотрим произвольную ориентированную полную риманову поверхность M и динамику вращающейся цепи с длинами звеньев l_1, l_2, l_3 с базой в точке $0 \in M$ под действием векторного поля

$$X = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \omega_3 \frac{\partial}{\partial \theta_3} \quad (6)$$

на трехмерном торе направлений звеньев $\mathbb{T}^3$. Предположим, что угловые скорости $\omega_j \in \mathbb{R}$ рационально независимы. Тогда если длины l_j достаточно

малы, асимптотическая угловая скорость существует и равна

$$\omega = \omega_1 \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_2}{\pi} - \frac{\bar{\alpha}_3}{\pi} \right) + \frac{\bar{\alpha}_2}{\pi} \omega_2 + \frac{\bar{\alpha}_3}{\pi} \omega_3, \quad (7)$$

где

$$\bar{\alpha}_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} \alpha_2(\varphi) d\varphi, \quad (8)$$

$$\bar{\alpha}_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} \alpha_3(\varphi) d\varphi \quad (9)$$

суть средние значения углов треугольника, образованного длинами l_1, l_2, l_3 в направлении φ из точки 0. Таким образом, получен ответ задачи Лагранжа для трехзвенной цепи на произвольной поверхности.

- **(Глава 3.)** Рассмотрим действие свободной группы $\mathbb{F}$ автоморфизмами пространства с мерой (X, μ) , а также конечное множество V (помеченное элементами группы) и марковскую цепь, заданную графом с вершинами на этом множестве. Две вершины v и w соединены ребром, если $\Pi_{w,v} > 0$ для некоторой фиксированной стохастической матрицы Π . Пусть $\Pi + \dots + \Pi^k > 0$ поэлементно для некоторого k и пусть Π имеет стационарное распределение $\nu(v), \nu(v) > 0 \forall v \in V$. Тогда для некоторого открытого множества в пространстве матриц Π , удовлетворяющим перечисленным условиям и для любого сохраняющего вероятностную меру действия $\mathbb{F}$ на (X, μ) и любой функции $f \in L^1(X, \mu)$ выражение

$$\frac{1}{2k} \sum_{i=0}^{2k-1} S_{n+i} f$$

при $n \rightarrow \infty$ сходится в L^1 к $\mathbb{E}[f|\mathbb{F}]$, то есть, к условному математическому ожиданию относительно сигма-алгебры $\mathbb{F}$ -инвариантных измеримых подмножеств. В диссертации дается конкретное техническое условие на матрицу Π .

- **Глава 4.** Центры вписанных окружностей треугольных орбит эллиптического бильярда лежат на эллипсе.
- **Глава 5.** Пусть $M = \mathbb{T}^d \times I$, $\mathbb{T}^d$ — d -мерный тор, $I = [0, 1]$. Рассмотрим сохраняющее границу косое произведение

$$F : M \rightarrow M, (b, x) \mapsto (Ab, f_b(x)), \quad (10)$$

где $f_b(0) = 0, f_b(1) = 1$, отображение слоёв f_b является сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом $I \rightarrow I$, и отображение базы A является линейным гиперболическим автоморфизмом тора. Допустим также, что f является гёльдеровым непрерывным в x относительно C^k -нормы с показателем β , $k \geq 2$. Пусть $O \in \mathbb{T}^d \times \{0\}$ — гиперболическая фиксированная точка F . И пусть

$$\lambda_b = f'_b(0). \quad (11)$$

Предположим также, что

$$\lambda_b \leq q < 1 \quad \forall b \in \mathbb{T}^d \quad (12)$$

Тогда существует окрестность U точки O и сохраняющий слои гомеоморфизм

$$H : (U, O) \rightarrow U, (b, x) \mapsto (b, x + h_b(x)) \quad h_b(0) = \frac{\partial h_b}{\partial x}(0) = 0, \quad (13)$$

такой что

1. H сопрягает F в (U, O) с его «послойной линеаризацией»

$$F_0 : (b, x) \mapsto (Ab, \lambda_b x), \quad (14)$$

Это означает, что

$$F \circ H = H \circ F_0. \quad (15)$$

2. H гладкий по x при фиксированном b : степень гладкости равна $k - 2$.

3. H послойно гёльдеров в C^{k-2} норме с показателем α , где

$$\alpha \leq \min(\beta, \log_{\mu} q), \quad (16)$$

где μ — максимальная абсолютная величина собственных значений A , а q является непрерывной нормой послойного мультипликатора $\lambda(b)$. Таким образом, показатель гёльдеровости связан с соотношением сжатия по слою и по базе.

Апробация результатов. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях, школах и семинарах.

На конференциях и школах

- Конференция Взаимодействие физики и математики: новые перспективы, Москва, *Уравнение Джозефсона и быстро-медленные системы*, август 2012
- Школа по геометрии и динамике ICTP-SISSA-Москва, ICTP, Триест, *Языки Арнольда уравнения Джозефсона*, июнь 2013
- Школа молодых учёных в области динамических систем (Parole aux jeunes chercheurs en systèmes dynamiques), CIRM, Marseille, *Потенциалы с замкнутыми орбитами и поверхности с замкнутыми геодезическими. Обзор и открытые вопросы*, ноябрь 2013
- Конференция по геометрии и динамическим системам, CIRM, Марсель, постерный доклад *О центрах вписанных окружностей в треугольные орбиты эллиптического бильярда*, март 2014
- Конференция Геометрические аспекты современной динамики, Порто, *Комплексное отражение в бильярдах*, январь 2016

На семинарах

- Семинар по динамическим системам, МГУ им. М.В. Ломоносова, *Теорема локальной нормализации косых произведений*, сентябрь 2013 институт Математики, Дижон, *Ещё одна теорема о сходимости сферических средних для действий свободной группы*, ноябрь 2015
- Семинар по динамике, Лаборатория Дьёдонне, Университет Ниццы София-Антиполис, *Линеаризация косых произведений по Стернбергу*, февраль 2016
- Семинар по динамическим системам, Федеральный Университет UFF, Рио-де-Жанейро, *Марковские цепи и сходимость сферических средних для действий свободной группы*, май 2016
- Семинар по динамическим системам, Католический Университет PUC, Рио-де-Жанейро, *Теорема о нормализации Стернберга для косых произведений*, май 2016

Список публикаций автора по теме диссертации.

Материалы диссертации опубликованы в 5 печатных работах, из них 4 статей в рецензируемых журналах, 1 статья в сборниках трудов конференций.

1. Ilyashenko Yu. , Romaskevich O. Sternberg linearization theorem for skew products // Journal of Dynamical and Control systems, accepted
2. Bowen L., Bufetov A., Romaskevich O. On convergence of spherical averages for Markov operators // Geometriae Dedicata. 2016. Vol. 181 (1). P. 293–306.
3. Romaskevich O. On the incenters of triangular orbits on elliptic billiards // L'Enseignement Mathématique. 2014. Vol. 60 (2). P. 247–255.
4. Klimenko A., Romaskevich O. Asymptotic properties of Arnold tongues and Josephson effect // Moscow Mathematical Journal. 2014. Vol. 14:2. P. 367–384.

5. Клепцын В., Ромаскевич О., Щуров И. Эффект Джозефсона и быстро-медленные системы // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование. 2013. Vol. 8:1. P. 31–46.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами (Главы 1,3,5), причем вклад диссертанта был определяющим. Результаты Глав 2 и 4 были получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 170 страниц. Библиография включает 108 наименований на 10 страницах.

Глава 1

Динамика уравнения Джозефсона

Данная глава организована следующим образом: мы начинаем с введения в теорию уравнения Джозефсона и даем все базовые определения. Затем мы описываем два основных режима, в которых мы будем изучать это уравнение. Первый режим (так называемый режим большой амплитуды) изучался нами в совместной статье [4] с Алексеем Клименко, содержание которой мы воспроизводим практически без изменений (помимо перевода на русский язык) в части 1.3. Для этого режима нами доказана теорема о приближении языков Арнольда уравнения Джозефсона целочисленными функциями Бесселя.

Второй режим (так называемый режим малых частот) более сложен для понимания и содержит множество открытых вопросов. Мы описываем качественное поведение языков Арнольда в этом режиме и даем алгоритм для вычисления границ языков Арнольда. Наши результаты используют теорию быстро-медленных динамических систем. Эта часть диссертации основывается на статье [5] с Виктором Клепцыным и Ильей Щуровым.

1.1. Введение

1.1.1. Основные определения и контекст

Опишем более подробно, какая динамика нас интересует. После введения всех обозначений, в последующих двух разделах мы дадим математические и физические мотивировки данной работы. Нас интересует следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cos x + a + b \cos t}{\mu}, \quad (1.1)$$

где $a, b, \mu \in \mathbb{R}$ являются вещественными параметрами и $\mu > 0$. Поскольку

правая часть является 2π -периодической функцией по t и по x , это уравнение факторизуется и дает систему уравнений на двумерном торе $R^2/2\pi\mathbb{Z}^2$ с координатами x и t :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \tau} = \cos x + a + b \cos t, \\ \frac{\partial t}{\partial \tau} = \mu. \end{cases} \quad (1.2)$$

Заметим, что здесь мы ввели новую координату τ . Заметим, что соответствующее уравнению (1.2) векторное поле может быть рассмотрено на цилиндре $\mathbb{R}^2/((x, t) \sim (x, t + 2\pi))$. В обоих случаях определено отображение Пуанкаре с трансверсали $\{t = 0 \bmod 2\pi\}$ может быть определено и мы обозначим его $P_{a,b,\mu}$ в случае тора, и $\tilde{P}_{a,b,\mu}$ в случае цилиндра. Итак, $P_{a,b,\mu}$ – гомеоморфизм окружности, а $\tilde{P}_{a,b,\mu}$ – его поднятие на прямую $\mathbb{R}$.

Напомним читателю определение *числа вращения* $\rho_{a,b,\mu}$ отображения $P_{a,b,\mu}$. Оно определяется как предел

$$\rho_{a,b,\mu} := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{P}_{a,b,\mu}^{on}(x) - x}{2\pi n}. \quad (1.3)$$

Хорошо известно, что этот предел существует и не зависит от выбора начальной точки $x \in \mathbb{R}$ (см., например, [6]). Значение числа вращения является важным инвариантом отображения $P_{a,b,\mu}$: в частности, оно сохраняется при сопряжении и гомеоморфизмах.

Определение 1. Будем говорить, что имеет место *захват фазы* для значения $k \in \mathbb{R}$ числа вращения, если множество линий уровня

$$E_k := \{(a, b, \mu) | \rho_{a,b,\mu} = k\} \quad (1.4)$$

пространства параметров $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ имеет непустую внутренность. В этом случае множество E_k называется *языком Арнольда*.

Начиная с этого момента и до конца этой главы основным вопросом для нас будет: для каких значений числа вращения ρ существуют языки Арнольда, и как они выглядят ?

1.1.2. Физическая мотивировка

Уравнение (1.1) приходит к нам из физики сверхпроводников и может быть найдено в физических работах и учебниках [7–9] в качестве модели динамики джозефсоновского перевода. Уравнение Джозефсона в физическом контексте записывается в синусоидальной форме

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sin x + a + b \sin t}{\mu}. \quad (1.5)$$

Замены $x \rightarrow x \pm \pi/2$, $t \rightarrow t \pm \pi/2$ переводят первый вариант уравнения (1.1) во второй (1.5). Мы исследуем уравнение в более удобной для нас косинусоидальной форме, это никак не влияет на результаты.

Свойства этого уравнения изучались в контексте эффекта Джозефсона в большом количестве работ [10–18], однако изначально свойства этого уравнения изучались в совершенно других областях. К примеру, это уравнение появляется естественным образом в контексте планиметра Притца [19], а также в контексте динамики движения велосипеда [20, 21]. Изначально техника быстро-медленных динамических систем (для $\mu \ll 1$) была применена Дж. Гукенхаймером и Ю. Ильяшенко в [22], однако в контексте эффекта Джозефсона семейство (1.10) не было изучено с математической точки зрения до серии работ [10, 11] В.М. Бухштабера, О.В. Карпова и С.И. Тертычного. Сейчас этот предмет исследования обрёл широкую популярность.

Дадим физическую интерпретацию (см. [7, 8, 23]) уравнения (1.5). Это уравнение дает математическую модель так называемого джозефсоновского перехода. Это небольшое устройство, названное в честь Брайана Джозефсона, который предсказал возможность его существования в 1962 году. Джозефсон удостоился Нобелевской премии за это открытие десять лет спустя, поскольку его гипотеза была экспериментально подтверждена.

В наши дни джозефсоновские контакты широко используются для построения замкнутых электронных цепей. Имеется большое количество научных работ об ультра-быстрых компьютерах (с низким потреблением энергии), исполь-

зующих "джозефсоновскую логику". Что может быть даже более значительно, джозефсоновские контакты могут быть использованы в устройствах, называемых сквидами (от англ. *squid*, сверхпроводящее квантовое интерференционное устройство). Сквиды являются самыми чувствительными из известных ныне детекторов магнитного поля. Они используются для построения чрезвычайно чувствительных датчиков магнитного поля и вольтметров (в 1000 раз более чувствительных любых других устройств). Поскольку сквиды чувствуют даже малейшее изменение магнитного поля, они могут быть использованы для измерения магнитных полей живых организмов: например, при изучении активности мозга или сердца человека. Другие применения – составление магнитных карт в геологии и детектирования объектов, скрытых под поверхностью (поиск подводных лодок и так далее).

Контакт собирается следующим образом: нужно поместить очень тонкий барьер несверхпроводящего материала (так называемую слабую связь) между двумя слоями сверхпроводящего материала. Этот барьер может быть сделан из разных материалов, например диэлектрик или любой другой не сверхпроводящий металл. В этом случае, размер барьера составляет несколько микронов. Джозефсоном было предсказано, что в такой микроскопической системе возможен *эффект туннелирования*: суперпроводящие электроны проходят через барьер без сопротивления.

Мы знаем, что для многих металлов резкое охлаждение переводит их в совершенно другое состояние. А именно, существует критическая температура (которая зависит от металла, но в любом случае очень низка - в районе минус 250 градусов по Цельсию), при которой металл переходит из состояния электрического сопротивления в состояние сверхпроводника. В этом новом состоянии металл практически не дает никакого сопротивления электрическому току. Заметим, что недавно было установлено существования сверхпроводимости на высоких температурах, например для некоторых керамических материалов. Они дают то же поведение при температурах около - 70 градусов Цельсия, [24].

Объяснение такого поведения следующее: в некоторый момент понижения температуры, из-за взаимодействия электронов с ионной решеткой металла, два электрона начинают слабо притягиваться, в то время как при температуре выше критической они отталкивались. Это новое притяжение позволяет электронам попасть в состояние меньшей энергии, поэтому для электронов появляется возможность путешествовать через ионную решетку, и поэтому появляется ток. В этом состоянии нет электрического сопротивления, и, в то же время, есть суперток, называемый *критическим током*.

В джозефсоновском контакте до того как критический ток достигнут, пары электронов могут путешествовать через несверхпроводящий барьер без всякого сопротивления. Как только суперток превзойден, появляется напряжение через барьер (между пластинками). Это напряжение – функция времени и тока, и пока ток меньше критического, напряжение равно нулю. Как только ток превосходит критический ток, напряжение будет осциллировать во времени. Брайан Джозефсон предсказал точные соотношения между током и напряжением. Именно эти соотношения будут нам интересны.

Предположим, что ток, проходящий через контакт, имеет вид $I(t) = \bar{I}(t) + \tilde{I}(t)$, то есть является суммой постоянного члена $\bar{I}$ и периодического члена $\tilde{I}$ с нулевым средним (мы предполагаем, что это так порождается внешним электромагнитным сигналом). Напряжение электродов джозефсоновского контакта дается производной по времени функции $x(t)$, имеющей квантовую природу. Эта функция x дает разность фаз волновых функций, описывающих свойства собрания электронов в сверхпроводящих материалах. Несмотря на то, что сама функция имеет квантовую природу, ее производная – макроскопическая величина, отвечающая напряжению между сверхпроводящими пластинками.

Для описания джозефсоновского перехода используется резистивная модель с малой емкостью (большим затуханием), задающаяся [7, 8] уравнением

$$\dot{x} + F(x) = I(t), \quad (1.6)$$

где F нечетная 2π -периодическая функция, которая соответствует связи между током и фазой. Для большинства реализаций $F(x) = \sin x + H(x)$, где H нулевая или небольшая поправка. Важен тот факт, что такая модель хорошо сопоставляется с результатами экспериментов [9].

Заметим, что строго говоря, все функции и переменные в данном уравнении – безразмерные величины, соответствующие их физическим аналогам. Для более точного описания уравнения (1.6), см. [7, 25, 26].

Физически важной величиной является так называемая вольт-амперная (V-I) характеристика контакта. Эта функция соответствует соотношению между средним по времени значением $\dot{x}$ и средним значением тока $\int I(t) dt$. Для контакта описанного уравнением (1.5) ток синусоидален и выражается как $I(t) = a + b \sin t$. Поэтому вольт-амперная характеристика совпадает с числом вращения $\rho_{a,b,\mu}$, которое рассматривается как функция параметра a при фиксированных b и μ . Здесь параметр μ играет роль отношения между частотой внешнего сигнала и внутренней частотой контакта, подробнее см. [16].

В типичных семействах диффеоморфизмов окружности рациональные числа вращения существуют на интервалах пространства параметров (поскольку малые возмущения не разрушают периодических гиперболических орбит). Для уравнения Джозефсона, соответствующие сечения языков Арнольда (прямыми $b = \text{const}$ при фиксированных a и μ) называются *ступеньками Шапиро* в физической терминологии. На картинке 1.1 можно увидеть изображение ступенек Шапиро из оригинальной статьи Сидни Шапиро 1963 года, citeShapiro. Заметим, что эти ступеньки неспроста похоже на Канторову лестницу: это сходство станет яснее чуть позже.

Далее мы увидим, что уравнение Джозефсона не удовлетворяет общей парадигме существования ступенек для всех рациональных значений чисел вращения: языки для уравнения (1.2) существуют только для *целых* значений числа вращения. Этот факт имеет простое математическое объяснение, к которому мы переходим.

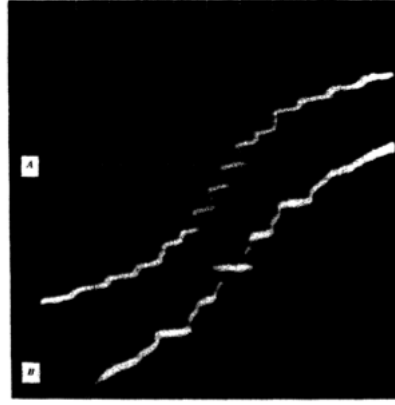


FIG. 3. Microwave power at 9300 Mc/sec (A) and 24850 Mc/sec (B) produces many zero-slope regions spaced at $h\nu/2e$ or $h\nu/e$. For A, $h\nu/e = 38.5 \mu\text{V}$, and for B, $103 \mu\text{V}$. For A, vertical scale is $58.8 \mu\text{V/cm}$, horizontal scale is 67 nA/cm ; for B, vertical scale is $50 \mu\text{V/cm}$, horizontal scale is $50 \mu\text{A/cm}$.

Рис. 1.1. Ступеньки Шапиро на вольт-амперной характеристике из оригинальной статьи [27]

1.1.3. Математическая мотивировка

Несмотря на то, что мы предпочли бы не отделять физику от математики, начнем эту часть несколькими "более математическими" объяснениями. Уравнение (1.1) является в каком-то смысле уникальным в контексте изучения языков Арнольда.

Впервые числа вращения семейств диффеоморфизмов окружности были рассмотрены В. И. Арнольдом для следующего семейства диффеоморфизмов (при достаточно малом ε) окружности:

$$x \mapsto x + a + \varepsilon \sin 2\pi x \quad (1.7)$$

Арнольд рассматривал открытые подмножества пространства параметров (a, ε) , в которых число вращения оставалось постоянным. Им была получена картинка языков, см. Рис. 1.2. При $\varepsilon = 0$ семейство является семейством поворотов $\rho_{a,0} = a$. Арнольд заметил, что для семейства (1.7) языки не существуют для иррациональных значений числа вращения $\rho_{a,\varepsilon}$ из-за теоремы Данжуа и соображений монотонности: несложно показать, что множество $\rho(a, \varepsilon) = \alpha \neq \mathbb{Q}$ — это непрерывная кривая, стартующая из точки $(\alpha, 0)$, см. [28]. Для каждого $\rho \in \mathbb{Q}$

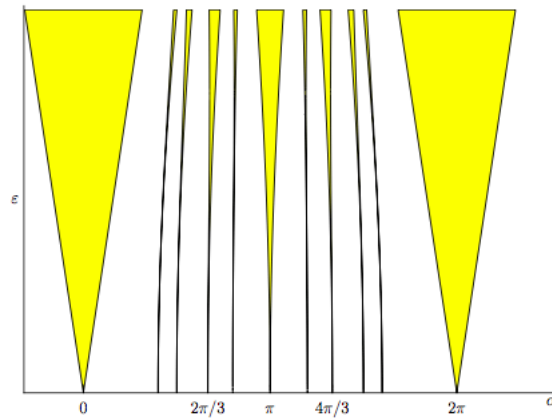


Рис. 1.2. Языки Арнольда для стандартного семейства (1.7) на плоскости параметров (a, ε)

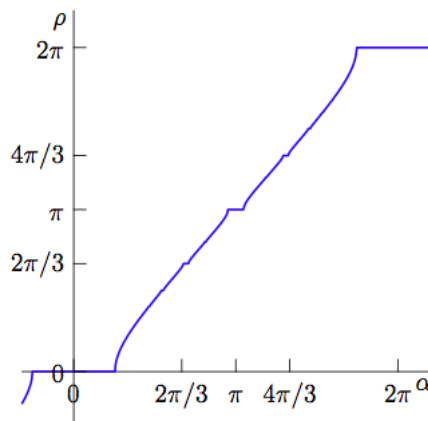


Рис. 1.3. "Канторова лестница" для стандартного семейства (1.7): представленный график является сечением картинке Рис. 1.2 прямой $\varepsilon = \text{const}$

соответствующий язык существует и "растет" из точки $(\rho, 0)$. Заметим, что для фиксированного $\varepsilon > 0$ число вращения как функция параметра a – канторова лестница, см. Рис. 1.3. Однако, вопреки классической Канторовской лестнице множество точек роста (замыкание множества параметров a , соответствующих иррациональным числам вращения) имеет положительную меру Лебега.

Изучение языков Арнольда для уравнения Джозефсона продолжает процесс, начатый Арнольдом, однако в случае уравнения (1.2) и соответствующего отображения Пуанкаре $P_{a,b,\mu}$ ситуация сильно отличается от стандартного семейства. Мы опишем ее в следующей части.

1.2. Чем необычно уравнение Джозефсона?

1.2.1. Уравнение Риккати и целые числа вращения

Заметим, что правая часть уравнения (1.2) (а поэтому и отображение $\tilde{P}_{a,b,\mu}$) растёт монотонно с a , поэтому захват фазы невозможен для $k \notin \mathbb{Q}$. Это верно для типичных семейств дифференциальных уравнений, но необычность уравнения (1.1) состоит именно в том, что для $k \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ захват фазы также не наблюдается. Это следует из того, что уравнение Джозефсона записано в каком-то смысле в плохих координатах: в правильно выбранной карте оно просто является уравнением Риккати, для которого свойство отсутствия захвата фазы для нецелых чисел вращения практически очевидно.

Впервые это наблюдение было сделано Футом в [19] и затем переоткрыто независимо в [12] и в [16, 29] в контексте уравнения Джозефсона.

Лемма 1.1. Уравнение Джозефсона (1.2) сопряжено уравнению Риккати и его отображение Пуанкаре $P_{a,b,\mu}$ с трансверсалил $\{t = 0\}$ на себя сопряжено дробно-линейному (мёбиусову) отображению.

Доказательство. После замены координат $u = \tan \frac{x}{2}$, $\frac{2\dot{u}}{u^2+1} = \dot{x}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ система (1.2) превращается в систему

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \tau} = \alpha(t)u^2 + \beta(t)u + \gamma(t), \\ \frac{\partial t}{\partial \tau} = \mu. \end{cases} \quad (1.8)$$

где $\alpha(t) = a + b \cos t - \frac{1}{2}$, $\beta(t) = 0$, $\gamma(t) = a + b \cos t + \frac{1}{2}$. Это уравнение Риккати, для которого отображение Пуанкаре мёбиусово, см. например [30].

Нужное утверждение следует из данной леммы: любое мёбиусово отображение имеет ноль, одну или две неподвижные точки и в этих случаях называется соответственно эллиптическим, параболическим или гиперболическим. Предположим, что число вращения для фиксированных параметров рационально, $\rho = \frac{p}{q} \notin \mathbb{Z}$, тогда P – эллиптическое отображение в правильно выбранной

координате. Тогда, как отображение окружности, P – вращение. И в этом случае число вращения изменяется при малом возмущении. $\square$

Итак, языки Арнольда существуют только для целых чисел вращения, и более того, при фиксированном μ точка (a, b) принадлежит внутренности языка тогда и только тогда, когда $P_{a,b,\mu}$ – гиперболическое отображение, и лежит на границе языка тогда и только тогда, когда $P_{a,b,\mu}$ – параболическое (или тождественное). Действительно, граница языка соответствует случаю неподвижных точек отображения, исчезающих при малом возмущении: эти точки называются параболическими. При движении по кривой внутри языка по направлению к границе, вещественные решения уравнения $P_{a,b,\mu}(z) = z$ схлопываются в одно решение и при выходе переходят в две комплексно сопряженные точки.

Это свойство уравнения Джозефсона (1.1) отсутствия языков Арнольда для всех рациональных значений числа вращения уникально, а именно как недавно доказано в [31], семейство уравнений вида $\dot{x} = v(x) + A + Bf(t)$ на торе не имеет всех рациональных языков Арнольда для всех функций f только в случае, если $v(x)$ есть комбинация двух гармоник $v(x) = a \sin(mx) + b \cos(mx) + c$. При таком виде v языки Арнольда существуют для значений числа вращения в дискретном множестве $\frac{1}{m}\mathbb{Z}$.

1.2.2. Динамическое описание границ

Помимо мёбиусовости ещё одним важным свойством уравнения (1.2) является обратимость динамики, то есть сохранение фазовых кривых при отображении

$$(t, x) \mapsto (-t, -x). \quad (1.9)$$

Это свойства симметрии объясняет (чисто практическую) замену синуса на косинус и перехода от уравнения (1.5) к уравнению (1.1). Мебиусовость и центральная симметрия фазовых кривых вместе дают аналитическое описание границ языков Арнольда в терминах отображения Пуанкаре. Это очень важный

факт, как для теоретического изучения языков, так и для практического построения границ на компьютере.

Действительно, пусть $P_{a,b,\mu} \neq \text{id}$ и точка (a, b) лежит на границе некоторого языка Арнольда при фиксированном μ . Тогда число вращения $\rho_P \in \mathbb{Z}$ (см. Лемму 1.1). В этом случае P имеет неподвижную точку. Фазовые кривые сохраняются при центральной симметрии, и значит эта неподвижная точка отображения Пуанкаре должна переходить в неподвижную точку отображения Пуанкаре под действием симметрии $x \mapsto -x$ на окружности. Поскольку у параболического дробно-линейного отображения неподвижная точка единственна, она обязана переходить в себя. Значит, она обязана удовлетворять уравнению $x = -x$ на окружности. Существуют две точки, удовлетворяющие этому уравнению: 0 и π . Таким образом, границы языка Арнольда с числом вращения $k \in \mathbb{Z}$ суть две аналитических кривые $a_{0,k}$ и $a_{\pi,k}$, задающиеся условиями

$$a = a_{0,k}(b) \Leftrightarrow P_{a,b,\mu}(0) = 0$$

$$a = a_{\pi,k}(b) \Leftrightarrow P_{a,b,\mu}(\pi) = \pi$$

Численные эксперименты показывают, что границы одного языка Арнольда пересекаются друг с другом в счетном числе точек, см. Рис 1.4. Мы будем называть их *точками перемчки* (или перемычками). Математическое доказательство существования перемычек следует из нашей теоремы с Алексеем Клименко, см. часть 1.3. На рисунке видно, что границы "осциллируют": мы доказываем, что эта осцилляция близка осцилляции целочисленных бесселевых функций, см. 1.3 для более формального утверждения. Можно также заметить по картинке Рис. 1.4, что перемычки для одного языка располагаются на одной и той же прямой $a = k\mu$, где k – номер языка. Это было доказано (для $\mu \geq 1$) в [15] с помощью явления Стокса. Для $\mu < 1$ этот факт не доказан и остается разумной гипотезой. Сложность состоит в изучении перемычек в окрестности $b = 0$.

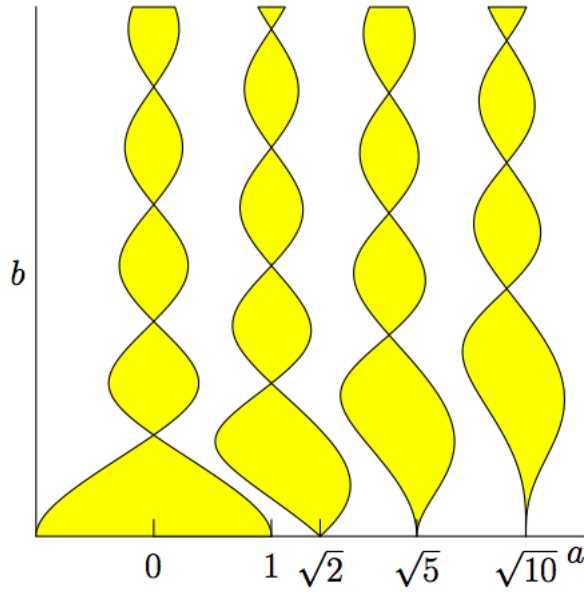


Рис. 1.4. Языки Арнольда уравнения Джозефсона на плоскости параметров (a, b) при фиксированном μ , здесь $\mu = 1$

1.2.3. Корни языков

Здесь мы хотим представить два небольших замечания о структуре языков, которые будут важны в дальнейшем. Во-первых, благодаря симметрии (см. часть 1.2.2), достаточно рассматривать структуру языков в первом квадранте плоскости параметров $a, b > 0$. Второе замечание состоит в том, что нам известны "корни" языков (то, где языки "начинаются"). Иначе говоря значение числа вращения $\rho_{a,0,\mu}$ может быть явно вычислено, так как при $b = 0$ уравнение (1.1) может быть проинтегрировано. После некоторых вычислений (см., например, [16]) мы видим, что язык с номером k (соответствующий $\rho = k$) пересекает прямую $\{b = 0\}$ в точке $(\operatorname{sgn} k \cdot \sqrt{k^2 \mu^2 + 1}, 0)$, если $k \neq 0$. В случае $k = 0$ пересечением является отрезок $[-1, 1]$. Поэтому (за исключением $k = 0$) языки ($k > 0$) пробиваются в некоторых точках на оси a и затем наклоняются немного влево, осциллируя в окрестности кривой $a = k\mu$ с помощью бесселевской асимптотики.

Основные результаты данной главы.

Мы будем изучать сечения языков Арнольда плоскостью с фиксированным μ в двух режимах:

- *Первый режим: большая амплитуда тока* Мы предполагаем, что амплитуда тока достаточно велика, или $b \rightarrow \infty$. В нашей статье с Алексеем Клименко [4] мы описываем асимптотически бесселевое поведение языков. Несмотря на то, что μ фиксировано, мы учитываем его в оценках остаточных членов.
- *Второй режим: малая внешняя частота сигнала* Этот случай соответствует пределу $\mu \rightarrow 0$ и больше подходит физическим конструкциям. Мы объясним качественное поведение системы в данном случае и покажем связь между геометрической структурой языков и быстро-медленными свойствами уравнения (1.2). Также будут показаны области пространства параметров, которые почти полностью (за исключением пробелов, экспоненциально малых по μ) покрыты ковром языков Арнольда. Мы строим эффективный алгоритм построения границ для малых значений μ (до 0.01).

1.3. Первый режим: большая амплитуда тока

Режим больших амплитуд был рассмотрен в работе [4] и мы приводим здесь результаты и доказательства из этой статьи.

1.3.1. Обобщения уравнения Джозефсона

В этой части мы будем рассматривать специальный режим поведения уравнения Джозефсона и его обобщений (когда $b \rightarrow \infty$). В этом разделе мы суммируем основные идеи введения, и определяем семейство, обобщающее уравнение Джозефсона.

Напомним (см. введение 1.1), что мы рассматриваем семейство дифференциальных уравнений на окружности $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cos x + a + b \cos t}{\mu}, \quad (1.10)$$

которое возникает в физике при исследовании эффекта Джозефсона.

Семейство уравнений (1.10) может быть обобщено в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(x) + a + bg(t)}{\mu}, \quad (1.11)$$

где f и g — 2π -периодические функции с нулевыми средними значениями:

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} g(t) dt = 0. \quad (1.12)$$

Как уже объяснено для уравнения Джозефсона во введении, любое уравнение вида (1.11) задаёт векторное поле на двумерное торе $\mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$ с координатами x и t . А именно, вводя переменную времени τ , мы можем задать векторное поле следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \tau} = f(x) + a + bg(t), \\ \frac{\partial t}{\partial \tau} = \mu. \end{cases} \quad (1.13)$$

То же векторное поле можно рассматривать как векторное поле на цилиндре $\mathbb{R}^2/((x, t) \sim (x, t + 2\pi))$. В обоих случаях можно определить отображение Пуанкаре из трансверсальной полю кривой $\{t = 0 \bmod 2\pi\}$ на себя. Мы будем обозначать его $P_{a,b,\mu}$ в случае тора и $\tilde{P}_{a,b,\mu}$ в случае цилиндра. Ясно, что как и раньше, $\tilde{P}_{a,b,\mu}$ является поднятием $P_{a,b,\mu}$.

Число вращения для обобщенной системы и понятие захвата фазы определяются аналогично уравнению Джозефсона, см. Введение 1.1. Нас будут интересовать языки Арнольда, соответствующие числу вращения $\rho_{a,b,\mu}$.

Как было объяснено ранее, структура языков Арнольда для уравнения (1.10) и его обобщений представляет значительный интерес как с точки зрения приложений в физике, так и с чисто математической точки зрения. В этой части мы изучаем сечения языков Арнольда, задаваемые плоскостями с фиксированным значением параметра μ . Тем не менее, мы обращаем внимание на параметр μ , в частности, константы асимптотических членов $O(\cdot)$ не зависят от μ .

Как было показано во введении, языки Арнольда для уравнения Джозефсона возникают только при целочисленных значениях параметра: языки Арнольда отсутствуют для иррациональных чисел вращения (что неудивительно, см. введение), однако для данного уравнения они отсутствуют и для нецелых рациональных чисел вращения. Это связано с тем, что при замене $u = \tan \frac{x}{2}$ уравнение (1.10) оказывается сопряжённым уравнению Риккати, см. раздел 1.2.1. Р.Фут обратил внимание на это в работе [19] в контексте планиметра Притца, а впоследствии это было независимо переоткрыто Ю.С. Ильяшенко [16, 29] и В.М. Бухштабером, О.В. Карповым и С.И. Тертычным [12] в контексте эффекта Джозефсона. Это простое, но важное замечание говорит о том, что отображение Пуанкаре $P_{a,b,\mu}$ сопряжено преобразованию Мёбиуса.

Таким образом, для фиксированного значения μ существует счётное число языков на плоскости с координатами (a, b) , соответствующих целым значениям числа вращения. С этого момента и далее мы будем рассматривать полуплоскость $b > 0$. Дополнительная полуплоскость может быть изучена при помощи симметрий уравнения.

Предыдущее рассуждение использует только факт, что $f(x) = \cos x$, не налагая никаких условий на функцию $g(t)$. Тем временем, если функция g чётна (в частности, для $g(t) = \cos t$) уравнение (1.13) обладает дополнительной симметрией: отображение $(x, t) \mapsto (-x, -t)$ переводит фазовые кривые в себя, меняя ориентацию. Это означает, что $-P_{a,b,\mu}(-x) = P_{a,b,\mu}^{-1}(x)$. Следовательно, если точка x_0 неподвижна при отображении $P_{a,b,\mu}$, то точка $-x_0$ также является фиксированной для этого отображения. Если точка (a, b, μ) лежит на границе языка Арнольда, то преобразование Мёбиуса $\tilde{P}_{a,b,\mu}$ является либо параболическим, либо тождественным. В параболическом случае единственная неподвижная точка $\hat{x}$ обязана удовлетворять соотношению $\hat{x} \equiv -\hat{x} \pmod{2\pi}$, откуда $\hat{x}$ равно либо 0, либо π .

Для любых фиксированных значений b и μ множество $E_k^{b,\mu} = \{a \in \mathbb{R} : (a, b, \mu) \in E_k\}$ является отрезком $E_k^{b,\mu} = [a_{b,\mu}^-, a_{b,\mu}^+]$. При движении точки a от ле-

вого конца $a_{b,\mu}^-$ отрезка $E_k^{b,\mu}$ к его правому концу $a_{b,\mu}^+$ множество $\{x : \tilde{P}_{a,b,\mu}(x) > x + k\}$ монотонно возрастает, так как правая часть уравнения (1.11) монотонна по a . Значит, если точка $\hat{x}$ является неподвижной для отображения $P_{a,b,\mu}$ для $a = a_{b,\mu}^-$, то $\tilde{P}_{a,b,\mu}(\hat{x}) > \hat{x} + k$ для всех $a \in E_k^{b,\mu}$, кроме $a = a_{b,\mu}^-$, и $\hat{x}$ не может быть неподвижной точкой отображения $P_{a,b,\mu}$ для $a = a_{b,\mu}^+$. Отсюда отображение $P_{a,b,\mu}$ имеет фиксированную точку 0 для одного конца отрезка $E_k^{b,\mu}$ и неподвижную точку π для другого конца отрезка.

Таким образом, для фиксированного значения μ границу языка Арнольда, соответствующего числу вращения $k \in \mathbb{Z}$, можно представить как объединение графиков двух аналитических функций, обозначаемых через $a_{0,k}(b)$ и $a_{\pi,k}(b)$, где 0 (соответственно, π) является неподвижной точкой отображения Пуанкаре, где $a = a_{0,k}(b)$ (соответственно, $a = a_{\pi,k}(b)$). Графики этих функций могут пересекаться, и отображение Пуанкаре $\tilde{P}_{a,b,\mu}$ тождественно в точках пересечения.

1.3.2. Основные результаты

Нас интересуют асимптотические оценки границ $a_{0,k}(b)$ и $a_{\pi,k}(b)$ языков Арнольда уравнения (1.10) при $b \rightarrow \infty$. Эти оценки доказываются в два шага. Сначала в теореме 1.2 мы показываем, что границы $a_{0,k}(b)$ и $a_{\pi,k}(b)$ близки к прямой $a = k\mu$. Далее в теореме 1.3 мы показываем, что функции $a_{0,k}(b) - k\mu$ и $a_{\pi,k}(b) - k\mu$ асимптотически близки к нормализованной целой функции Бесселя. Впервые этот факт был замечен в работе [32] сразу после открытия эффекта Джозефсона в 1962г., где впервые был объяснён на физическом уровне строгости. См. также часть 5 статьи [7], §11.1 статьи [33], а также статью [12]. В данной работе мы приводим полное доказательство этого результата, а также оценки разности.

Теорема 1.2. Существуют такие положительные константы C_1, C_2, K_1, K_2 , что

если для параметров a, b, μ выполнены неравенства

$$|a| + 1 \leq C_1 \sqrt{b\mu}, \quad b \geq C_2 \mu, \quad (1.14)$$

то

$$\left| \frac{a}{\mu} - \rho_{a,b,\mu} \right| \leq \frac{K_1}{\sqrt{b\mu}} + \frac{K_2}{b\mu} \ln \left(\frac{b}{\mu} \right) \leq \frac{K_1}{\sqrt{b\mu}} + \frac{2K_2}{\sqrt{b\mu^3}}. \quad (1.15)$$

Теорема 1.3. Существуют такие положительные константы $C'_1, C'_2, K'_1, K'_2, K'_3$, что если параметры b, μ и число $k \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют неравенствам

$$|k\mu| + 1 \leq C'_1 \sqrt{b\mu}, \quad b \geq C'_2 \mu, \quad (1.16)$$

то имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{0,k}(b)}{\mu} - k + \frac{1}{\mu} J_k \left(-\frac{b}{\mu} \right) \right| &\leq \frac{1}{b} \left(K'_1 + \frac{K'_2}{\mu^3} + K'_3 \ln \left(\frac{b}{\mu} \right) \right), \\ \left| \frac{a_{\pi,k}(b)}{\mu} - k - \frac{1}{\mu} J_k \left(-\frac{b}{\mu} \right) \right| &\leq \frac{1}{b} \left(K'_1 + \frac{K'_2}{\mu^3} + K'_3 \ln \left(\frac{b}{\mu} \right) \right). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Теорема 1.3 является нашим основным результатом: она показывает, как границы языков Арнольда могут быть приближены функциями Бесселя при достаточно больших значениях параметра b , что иллюстрирует рис. 1.5.

Напомним, что функция Бесселя первого рода определяется следующим образом:

$$J_k(-z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kt + z \sin t) dt. \quad (1.18)$$

Она имеет следующую асимптотику при больших z (см. [34]):

$$J_k(-z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left(-z - \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + O \left(\frac{1}{z^{3/2}} \right) \quad \text{при } z \rightarrow +\infty.$$

Применяя это к уравнению (1.17), получаем

$$a_{\dots,k}(b) = k \pm \sqrt{\frac{2}{\pi b\mu}} \cos \left(\frac{b}{\mu} - \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + O_\mu(b^{-1} \ln b). \quad (1.19)$$

(Здесь $O_\mu(\cdot)$ является $O(\cdot)$ с константой, зависящей от μ .) Таким образом, в действительности функция Бесселя является главным членом асимптотического разложения функции $a_{\dots,k}(b)$. В частности, из асимптотического разложения

(1.19) следует, что графики функций $a_{0,k}(b)$ и $a_{\pi,k}(b)$ имеют бесконечно много точек пересечения. Это означает, что каждый язык Арнольда имеет бесконечно много горизонтальных сечений нулевой ширины. Точки (a, b) плоскости параметров, соответствующие пересечениям границ языков Арнольда, само собой, являются очень специальными. Отображение Пуанкаре $P_{a,b,\mu}$, соответствующее этим точкам, тождественно.

Определение 2. Точка $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ с $b \neq 0$ на границе языка Арнольда с $\rho_{a,b,\mu} = k \in \mathbb{Z}$ называется *перемычкой*, если она лежит на пересечении границ, то есть $a = a_{0,k}(b) = a_{\pi,k}(b)$.

Недавно было получено множество интересных результатов о структуре языков Арнольда для эффекта Джозефсона. Ниже мы приводим краткое изложение основных результатов.

Прежде всего, заметим, что k -ый язык Арнольда E_k пересекает прямую $b = 0$ в единственной точке $(\operatorname{sgn} k \cdot \sqrt{k^2 \mu^2 + 1}, 0)$, если $k \neq 0$, а E_0 пересекает эту прямую по отрезку $[-1, 1]$ (в случае $b = 0$ уравнение (1.10) не зависит от переменной времени и может быть просто интегрировано). Как отмечалось выше, из теоремы 1.3 следует, что каждый язык имеет бесконечно много перемычек.

Что более удивительно, рис. 1.5 наталкивает на следующую гипотезу: все перемычки k -го языка Арнольда лежат на одной прямой $a(b) \equiv k\mu$ (пунктирная линия на рис. 1.5). Это доказано в [15] для $\mu \geq 1$, и доказательство использует классическую теорию неавтономных линейных уравнений комплексной переменной. Для $\mu < 1$ этот факт до сих пор не доказан и остаётся осмысленной гипотезой. Сложность состоит в изучении перемычек около прямой $b = 0$.

Результат работы [15] является единственным нетривиальным глобальным результатом о структуре языков Арнольда уравнения (1.10), тогда как прочие результаты касаются поведения языков Арнольда в некоторых областях плоскости параметров.

Например, при достаточно малых значениях μ применима техника быстро-

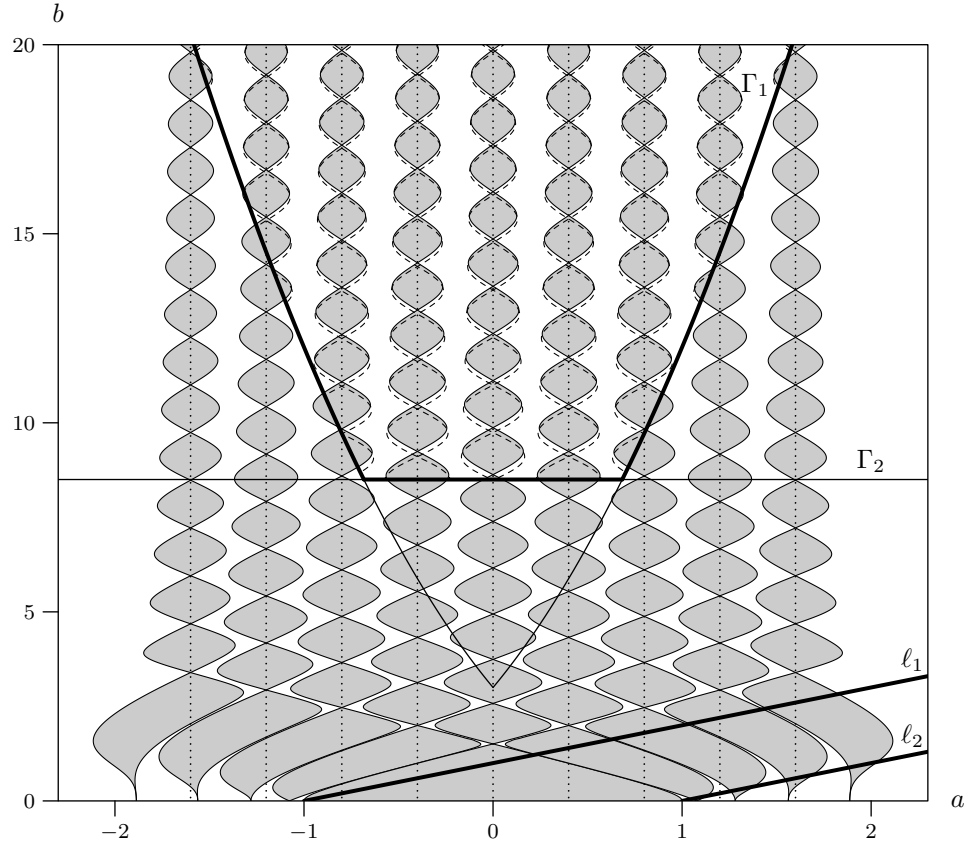


Рис. 1.5. Языки Арнольда уравнения Джозефсона в области на плоскости с координатами (a, b) для фиксированного значения $\mu = 0.4$.

Серые области соответствуют языкам Арнольда E_k для $k = -4, \dots, 4$, их границы (жирные линии) соответствуют кривым $a = a_{0,k}(b)$ и $a = a_{\pi,k}(b)$.

Кривые Γ_1 и Γ_2 задаются условиями вида (1.14). Оценки из теоремы 1.3 применимы в области выше обеих кривых Γ_1 и Γ_2 (очерченной жирной линией). Связь условий вида (1.14) и условий (1.16) теоремы 1.3 изучается в первой части доказательства этой теоремы. Штрихованные линии в этой области представляют приближения функциями Бесселя, заданные теоремой 1.3.

Штрихованные линии являются прямыми $a = k\mu$, содержащими все перемычки языков Арнольда [15].

Область между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 является областью применимости техники быстро-медленных систем [5].

Компьютерное вычисление, приводящее к данной иллюстрации, выполнено И.Щуровым.

медленных динамических систем, показывающая, что область между прямыми $\ell_1 = \{b = a + 1\}$ и $\ell_2 = \{b = a - 1\}$ плотно заполнена языками Арнольда и что расстояние между ними уменьшается экспоненциально по μ . Обзор по технике быстро-медленных систем в случае уравнения (1.10) см. в [5].

В целом картина поведения языков Арнольда следующая: в любой конечной области вокруг прямой $b = 0$ языки плотно заполняют пространство [5], в то же время для b , стремящихся к бесконечности (когда “ b более большое, чем μ маленькое”) поведение, описываемое функциями Бесселя, преобладает над поведением, описываемым быстро-медленными системами. Однако, это описание достаточно схематично, и многие вопросы о локальном поведении языков Арнольда по-прежнему имеют смысл. Например, иллюстрация подсказывает, что правые границы языков Арнольда E_k , $k > 0$ имеют точки перегиба на прямой ℓ_2 . Мы не имеем догадок, правда ли это, а также, как это можно было бы доказать.

Приведём теперь набросок доказательств теоремы 1.2 и теоремы 1.3. В первую очередь, перепишем уравнение (1.10) как интегральное уравнение

$$x(t) - x(0) = \frac{at + b \sin t + \int_0^t \cos x(\tau) d\tau}{\mu} \quad (1.20)$$

и используем факт, что на основной части отрезка $[0, 2\pi]$ функция $\cos x(t)$ очень быстро осциллирует, так как значение dx/dt достаточно велико, если только значение $|\cos t|$ не очень мало. Ниже будет показано, что отсюда следует, что интеграл в (1.20) достаточно мал, а, значит, для всех решений уравнения (1.10) разность $x(2\pi) - x(0) = \tilde{P}_{a,b,\mu}(x(0)) - x(0)$ близка к $2\pi a/\mu$. Но если отображение окружности равномерно $2\pi\varepsilon$ -близко к жёсткому повороту на угол $2\pi\alpha$, то его число вращения ε -близко к α . Отсюда внутри k -го языка Арнольда a/μ должно быть близко к k , поэтому a близко к $k\mu$.

В случае второй теоремы мы раскроем интеграл в (1.20), используя саму

формулу (1.20):

$$x(2\pi) - x(0) = \frac{2\pi a}{\mu} + \frac{1}{\mu} \int_0^{2\pi} \cos \left(\frac{a\tau + b \sin \tau + \int_0^\tau \cos x(s) ds}{\mu} + x(0) \right) d\tau. \quad (1.21)$$

На границе языка Арнольда, где либо $a = a_{0,k}(b)$, либо $a = a_{\pi,k}(b)$, левая часть равна $2\pi k$, если либо $x(0) = 0$, либо $x(0) = \pi$. Мы покажем, что внутренний интеграл мал, и его влияние на значение внешнего интеграла также мало, и таким образом он может быть отброшен. Далее мы заменяем $a\tau$ на $k\mu\tau$ внутри внешнего интеграла (так как $a - k\mu$ мало по теореме 1.2). Это влечёт замену внешнего интеграла в (1.21) на величину следующего порядка. Таким образом,

$$2\pi k \approx \frac{2\pi a}{\mu} + \frac{1}{\mu} \int_0^{2\pi} \cos \left(k\tau + \frac{b}{\mu} \sin \tau + x(0) \right) d\tau.$$

Интеграл в правой части может быть выражен через $J_k(z)$ при помощи (1.18), следовательно, мы получаем

$$k \approx \frac{a}{\mu} \pm \frac{1}{\mu} J_k(-b/\mu),$$

где знак “+” соответствует $x(0) = 0$, а знак “−” соответствует $x(0) = \pi$.

Оставшаяся часть работы устроена следующим образом. В следующем разделе мы получаем несколько оценок интеграла $\int_0^\tau \cos x(s) ds$ и связанных с ним величин. В разделе 1.3.4 мы выводим теоремы 1.2 и 1.3 из этих оценок. Наконец, в разделе 1.3.5 обсуждаются некоторые частные обобщения этих результатов для уравнений типа (1.11).

1.3.3. Оценки интегралов

Для результатов, получаемых в следующем разделе, нам потребуются оценки интегральных выражений, содержащихся в (1.20) и (1.18). К счастью, эти оценки могут быть получены одновременно. В самом деле, рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\gamma \cos x + a + b \cos t}{\mu}. \quad (1.22)$$

Если $\gamma = 1$, мы получаем стандартное уравнение Джозефсона (1.10), тогда как при $\gamma = 0$ мы получаем интегрируемое дифференциальное уравнение с решениями

$$x(t) = x(0) + \frac{at + b \sin t}{\mu}.$$

Значит, если $\hat{x}(t)$ является решением, соответствующим $\gamma = 0$ с начальным условием $\hat{x}(0) = 0$, то $\int_0^{2\pi} \cos \hat{x}(\tau) d\tau$ совпадает с интервалом в (1.18) для $k = \frac{a}{\mu}$ и $z = -\frac{b}{\mu}$.

Везде ниже мы считаем, что

$$|\gamma| \leq 1.$$

Основным инструментом наших доказательств является следующая лемма 1.4. Неформально говоря, она утверждает, что если $x(t)$ движется с примерно постоянной скоростью, то среднее по времени граничной функции ψ и её пространственное среднее вдоль одной и той же дуги траектории близки друг к другу.

Лемма 1.4. Предположим, что $\dot{x}(t)$ имеет постоянный знак при $t \in [t_0, t_1]$.

Обозначим

$$|\dot{x}|_{\min} = \min_{t \in [t_0, t_1]} |\dot{x}(t)|, \quad |\dot{x}|_{\max} = \max_{t \in [t_0, t_1]} |\dot{x}(t)|, \quad \text{osc}_{[t_0, t_1]}(\dot{x}) = |\dot{x}|_{\max} - |\dot{x}|_{\min}.$$

Тогда для любой ограниченной интегрируемой функции ψ на окружности имеем

$$\left| \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} (x(t)) dt - \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} (x) dx \right| \leq \frac{\text{osc}_{[t_0, t_1]}(\dot{x})}{|\dot{x}|_{\min}} \cdot \|\psi\|_{C^0}, \quad (1.23)$$

где $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$, $\|\psi\|_{C^0} = \sup_{x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} |\psi(x)|$.

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \psi(x(t)) dt - \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} \psi(x) dx \right| &= \\ &= \left| \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} \cdot \frac{dt}{dx} - 1 \right] \psi(x) dx \right|. \end{aligned}$$

Остаётся показать, что абсолютная величина выражения в квадратных скобках не превосходит $\text{osc}_{[t_0, t_1]}(\dot{x})/|\dot{x}|_{\min}$. Допустим, функция $\dot{x}(t)$ положительна на $[t_0, t_1]$. Тогда $(x_1 - x_0)/(t_1 - t_0)$ и dx/dt принадлежат отрезку $[|\dot{x}|_{\min}, |\dot{x}|_{\max}]$, откуда

$$\frac{|\dot{x}|_{\min}}{|\dot{x}|_{\max}} - 1 \leq \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} \cdot \frac{dt}{dx} - 1 \leq \frac{|\dot{x}|_{\max}}{|\dot{x}|_{\min}} - 1,$$

и, наконец, мы получаем, что

$$\left| \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} \cdot \frac{dt}{dx} - 1 \right| \leq \frac{\text{osc}_{[t_0, t_1]}(\dot{x})}{|\dot{x}|_{\min}},$$

таким образом, неравенство (1.23) доказано. Случай отрицательного $\dot{x}(t)$ рассматривается аналогично. $\square$

Рассмотрим решение $x(t)$ уравнения (1.22) на некотором отрезке $[0, t^*]$. Рассмотрим все точки $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k \leq t^*$, для которых $x(t_k) \equiv x(0) \pmod{2\pi}$, и разделим отрезок $[0, t^*]$ этими точками на отрезки $I_i = [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, k$ и отрезок $I^* = [t_k, t^*]$.

Как было показано выше, отрезки с “малыми” и “не столь малыми” значениями $|\dot{x}|$ рассматриваются отдельно. Рассмотрим множество

$$M_\delta = \{\tau \in [0, t] : |\cos \tau| < \delta\},$$

где δ будет выбрано позже.

Далее будем предполагать, что

$$A := |a| + 1 \leq \frac{b\delta}{C_a}, \quad (1.24a)$$

$$\delta \geq C_b \sqrt{\frac{\mu}{b}}, \quad (1.24b)$$

$$\delta \leq 1, \quad (1.24c)$$

где положительные константы C_a и C_b достаточно велики.

Таким образом, отрезки I_i и I^* разбиваются на следующие классы:

отрезки типа 1: отрезки, полностью покрытые M_δ ;

отрезки типа 2: отрезки I_i , частично покрытые M_δ , а также I^* в случае, если он не покрывается полностью множеством M_δ ;

отрезки типа 3: отрезки I_i , не пересекающие M_δ .

Обратим внимание, что существует не более пяти отрезков типа 2, так как любой из них либо есть I^* , либо содержит одну из четырёх точек τ с $|\cos \tau| = \delta$ строго внутри. Обозначим через $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, и $\mathcal{I}_3$ объединения отрезков соответствующих типов.

Начнём с оценки длин отрезков типов 2 и 3.

Замечание 1. В последующем изложении мы используем обозначение $u(s) = O(v(s))$ в следующем точном смысле: существует такая константа C , что $|u(s)| \leq Cv(s)$ (здесь $v(s)$ всегда положительно), и предполагается, что эта константа не зависит от параметров a , b , μ , от значений δ , C_a , C_b (тем не менее, мы предполагаем, что выполнены неравенства (1.24)) и от прочих переменных. Нестрого говоря, можно фиксировать некоторые явные достаточно большие значения C_a и C_b (скажем, миллион) и далее заменить все $O(\cdot)$ в тексте ниже на явные численные оценки. Мы предпочитаем не делать таких непредусмотрительных замен, чтобы не терять зависимость между константами в различных оценках.

Предложение 1.5. Если константы C_a и C_b в неравенствах (1.24) достаточно велики, верно следующее.

Пусть I — любой отрезок типа 2 или 3. Пусть $\hat{t}$ — любая точка в $I \setminus M_\delta$. Тогда длина $|I|$ этого отрезка удовлетворяет следующей оценке:

$$|I| = O\left(\frac{\mu}{b \cos \hat{t}}\right).$$

Доказательство. Доказательство в случае отрезка типа 3 тривиально: $x(t)$ преодолевает расстояние, не превосходящее 2π , с ограниченной снизу скоростью, поэтому время перемещения ограничено сверху. Однако в случае отрезка типа 2 нам потребуется в некотором смысле самоподстраивающийся аргумент: нижняя оценка скорости выполнена только в начальный момент времени $\hat{t}$, и со временем эта оценка ухудшается; тем не менее, она уменьшается настолько медленно, что мы не можем преодолеть расстояние 2π за столь долгое время, чтобы оценка скорости была полностью нарушена.

Перейдём к формальному доказательству. Обозначим $I = [t_-, t_+]$, $L = |I| = t_+ - t_-$. Из неравенства $|x(t_+) - x(t_-)| \leq 2\pi$ и теоремы о среднем значении следует, что

$$|I| \cdot \min_I |\dot{x}| \leq |x(t_i) - x(t_{i-1})| \leq 2\pi. \quad (1.25)$$

Для любого $\tau \in I$ имеем $\tau = \hat{t} + s$ для некоторого s , такого что $|s| \leq L$. Значит,

$$\begin{aligned} |\dot{x}(\hat{t} + s)| &\geq \left| \frac{b \cos(\hat{t} + s)}{\mu} \right| - \left| \frac{\gamma \cos x + a}{\mu} \right| \\ &\geq \frac{b(|\cos \hat{t}| - |\cos(\hat{t} + s) - \cos \hat{t}|)}{\mu} - \frac{A}{\mu} \geq \frac{b|\cos \hat{t}| - A - b \cdot L}{\mu} \end{aligned}$$

так как косинус является липшицевой функцией с константой 1. Теперь из (1.25) следует

$$L \cdot \frac{b|\cos \hat{t}| - A - b \cdot L}{\mu} \leq 2\pi.$$

Тот же аргумент работает для любого отрезка $\tilde{I} \subset I$, такого что $\hat{t} \in \tilde{I}$. Мы можем выбрать отрезок $\tilde{I}$ любой длины от нуля до L , откуда

$$by^2 - (b|\cos \hat{t}| - A)y + 2\pi\mu \geq 0 \quad \text{для любого } y \in [0, L].$$

Поскольку $|\cos \hat{t}| > \delta$, можно заметить, что если $C_a \geq 2$ и $C_b \geq 32\pi$, то из (1.24a) и (1.24b) следует, что этот квадратичный многочлен имеет два различных положительных вещественных корня. Поэтому L не превосходит меньший из его корней:

$$\begin{aligned} L &\leq \frac{b|\cos \hat{t}| - A - \sqrt{(b|\cos \hat{t}| - A)^2 - 8\pi b\mu}}{2b} \\ &= \frac{4\pi\mu}{b|\cos \hat{t}| - A + \sqrt{(b|\cos \hat{t}| - A)^2 - 8\pi b\mu}} \leq \frac{4\pi\mu}{b|\cos \hat{t}| - A} \leq \frac{8\pi\mu}{b|\cos \hat{t}|}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство здесь использует (1.24a) с $C_a \geq 2$. Предложение доказано. $\square$

Это влечёт оценку меры Лебега объединения $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$, которую мы обозначим символом $\text{mes}(\cdot)$.

Предложение 1.6. Если константы C_a и C_b в неравенствах (1.24) достаточно велики, то

$$\text{mes}(\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2) = O\left(\frac{\mu}{b\delta} + \delta\right).$$

Доказательство. Множество $\mathcal{I}_2$ состоит из не более чем пяти отрезков, длина каждого из которых ограничена по предложению 1.5 (выберем $\hat{t}$, для которого $|\cos \hat{t}| = \delta$):

$$\text{mes} \mathcal{I}_2 = 5 \cdot O(\mu/b\delta).$$

Множество $\mathcal{I}_1$ лежит в M_δ , откуда

$$\text{mes} \mathcal{I}_1 \leq \text{mes} M_\delta \leq 4 \arcsin \delta \leq 4 \cdot \frac{\pi}{2} \delta = O(\delta). \square$$

$\square$

Теперь оценим интеграл по любому отрезку I_k типа 3.

Предложение 1.7. Если константы C_a и C_b в неравенствах (1.24) достаточно велики, то для любой ограниченной функции $h: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ с нулевым средним

$$\int_0^{2\pi} h(\xi) d\xi = 0,$$

и для любого отрезка I_j типа 3 имеем

$$\left| \int_{I_j} h(x(\tau)) d\tau \right| \leq \|h\|_{C^0} \int_{I_j} \left[O\left(\frac{1}{b|\cos \hat{t}|}\right) + O\left(\frac{\mu}{b \cos^2 \hat{t}}\right) \right] d\hat{t}.$$

Доказательство. Из леммы 1.4 следует, что

$$\frac{1}{|I_j|} \left| \int_{I_j} h(x(\tau)) d\tau \right| \leq \|h\|_{C^0} \cdot \frac{\text{osc}_{I_j}(\dot{x})}{\min_{I_j} |\dot{x}|}. \quad (1.26)$$

Здесь мы используем, что $x(t_j) - x(t_{j-1}) = \pm 2\pi$, откуда $\int_{x(t_{j-1})}^{x(t_j)} h(x) dx = 0$.

Чтобы ограничить выражения в правой части неравенства (1.26), возьмём любое $\hat{t} \in I_j$. Из предложения 1.5 и липшицевости косинуса следует, что

$$\text{osc}_{I_j}(\cos t) \leq |I_j| \leq O\left(\frac{\mu}{b|\cos \hat{t}|}\right).$$

Далее

$$\begin{aligned} \text{osc}_{I_j}(\dot{x}(t)) &\leq \frac{1}{\mu} (\text{osc}_{I_j} \cos x(t) + b \text{osc}_{I_j}(\cos t)) \leq \frac{2}{\mu} + O\left(\frac{1}{|\cos \hat{t}|}\right), \\ \min_{I_j} |\dot{x}(t)| &\geq \frac{1}{\mu} (\min_{I_j} |b \cos t| - A) \geq \frac{1}{\mu} (b|\cos \hat{t}| - \text{osc}_{I_j}(b \cos t) - A) \\ &= \frac{1}{\mu} \left(b|\cos \hat{t}| - O\left(\frac{\mu}{|\cos \hat{t}|}\right) - A \right). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Для достаточно больших C_a и C_b неравенства (1.24a) и (1.24b) делают второй и третий члены правой части неравенства (1.27) меньшими, чем $b|\cos \hat{t}|/3$, откуда

$$\min_{I_j} |\dot{x}(t)| \geq \frac{b|\cos \hat{t}|}{3\mu}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{|I_j|} \left| \int_{I_j} h(x(\tau)) d\tau \right| \leq \|h\|_{C^0} \cdot O\left(\frac{1}{b|\cos \hat{t}|} + \frac{\mu}{b \cos^2 \hat{t}}\right),$$

и остаётся интегрировать последнее неравенство по $\hat{t} \in I_j$. $\square$

1.3.4. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1.2. Обратим внимание, что если отображение окружности равномерно $2\pi\varepsilon$ -близко к жёсткому повороту на угол $2\pi a/\mu$, то его число вращения ε -близко к a/μ . Для любого решения $x(t)$ уравнения (1.10) имеем

$$\left| \frac{x(2\pi) - x(0)}{2\pi} - \frac{a}{\mu} \right| = \left| \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^{2\pi} \cos x(t) dt \right|,$$

откуда первое неравенство в (1.15) следует из следующего предложения. Второе неравенство в (1.15) использует простую оценку $\ln z < 2\sqrt{z}$. $\square$

Предложение 1.8. Существуют положительные константы C_1, C_2, K_1, K_2 , для которых верно следующее.

Если параметры a, b, μ удовлетворяют (1.14), то для любого $t^* \in [0, 2\pi]$ и для любого решения $x(t)$ уравнения (1.10) имеем

$$\left| \int_0^{t^*} \cos x(t) dt \right| \leq K_1 \sqrt{\frac{\mu}{b}} + \frac{K_2}{b} \ln\left(\frac{b}{\mu}\right). \quad (1.28)$$

Доказательство. 1. Фиксируем значения констант C_a с C_b , для которых выполнены предложения 1.5, 1.6 и 1.7. Также предположим, что $C_b \geq 2$. Положим

$$\delta = C_b \sqrt{\frac{\mu}{b}}, \quad C_1 = \frac{C_b}{C_a}, \quad C_2 = C_b^2. \quad (1.29)$$

Можно видеть, что если параметры a, b и μ удовлетворяют (1.14) с данными значениями констант C_1 и C_2 , то выполнены все неравенства в (1.24).

2. Разложим интеграл (1.28) на сумму интегралов по отрезкам I_i и I^* . В случае интегралов по отрезкам типов 1 и 2 мы используем предложение 1.6 и оценку подынтегрального выражения единицей. Для отрезков типа 3 мы используем предложение 1.7. Таким образом,

$$\left| \int_0^{2\pi} \cos x(t) dt \right| \leq O\left(\frac{\mu}{b\delta} + \delta\right) + \int_{\mathcal{I}_3} O\left(\frac{1}{b|\cos \hat{t}|} + \frac{\mu}{b \cos^2 \hat{t}}\right) dt.$$

Поскольку $\mathcal{I}_3 \subset [0, 2\pi] \setminus M_\delta$, последний интеграл не превосходит соответствующий интеграл по $[0, 2\pi] \setminus M_\delta$, равный

$$\begin{aligned} 4 \int_0^{\arccos \delta} O\left(\frac{1}{b|\cos \hat{t}|} + \frac{\mu}{b \cos^2 \hat{t}}\right) d\hat{t} \\ = O\left(\frac{1}{b}\right) \cdot \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} + O\left(\frac{\mu}{b}\right) \cdot \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} \\ \leq O\left(\frac{1}{b} \ln \frac{2}{\delta}\right) + O\left(\frac{\mu}{b\delta}\right) = O\left(\frac{1}{b} \left[\ln \sqrt{\frac{b}{\mu}} + \ln \frac{2}{C_b} \right]\right) + O\left(\sqrt{\frac{\mu}{b}}\right). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Поскольку $C_b \geq 2$, второе слагаемое в квадратных скобках отрицательно и может быть отброшено. Отсюда следует (1.28). $\square$

Доказательство теоремы 1.3. Доказательство содержит две части. Основная часть (см. пункты 2–6 ниже) показывает, что если выполнены некоторые условия, аналогичные условиям теоремы 1.2 для $a = a_{0,k}(b, \mu)$ (или $a = a_{\pi,k}(b, \mu)$), b и μ , то функция a близка к функции Бесселя, как утверждается в (1.17). Однако *a priori* мы не знаем, что для заданных значений b и μ границы $a_{\dots,k}(b, \mu)$ k -го языка Арнольда удовлетворяют этим оценкам. Поэтому мы начинаем с предварительной части (пункт 1 ниже), показывающей, что при некоторых условиях на k , b и μ тройки $(a_{0,k}(b, \mu), b, \mu)$ и $(a_{\pi,k}(b, \mu), b, \mu)$ удовлетворяют условиям, нужным для основной части доказательства.

1. Прежде всего фиксируем такие константы C_a и C_b , что будут выполнены предложения 1.5, 1.6 и 1.7. Теперь фиксируем значения C_1 , C_2 и $\delta = C_b \sqrt{b/\mu}$, определённого в (1.29).

Покажем, что при подходящем выборе C'_1 и C'_2 и любых b, μ и k , удовлетворяющих (1.16), каждая из троек

$$(k\mu, b, \mu), \quad (a_{0,k}(b, \mu), b, \mu), \quad (a_{\pi,k}(b, \mu), b, \mu) \quad (1.31)$$

удовлетворяет (1.14). Для первой тройки это очевидно выполнено для любых $C'_1 \leq C_1, C'_2 \geq C_2$. Рассмотрим вторую тройку (аргумент для третьей в точности такой же). Если C'_1 достаточно мало, а C'_2 достаточно велико, то выполнены следующие неравенства:

$$\frac{K_1}{\sqrt{C'_2}} + K_2 C'_1 < 1, \quad C'_1 \leq C_1/2, \quad C'_2 \geq C_2, \quad (1.32)$$

Возьмём любые константы C'_1 и C'_2 , удовлетворяющие (1.32). Теперь покажем, что для любых b, μ, k , удовлетворяющих (1.16), верно

$$|a_{0,k}(b, \mu) - k\mu| < 1. \quad (1.33)$$

Действительно, неравенство (1.33) выполнено для любые достаточно больших b по теореме 1.2. Значит, если оно не выполнено для некоторых b', μ' и k' , удовлетворяющих (1.16), то из непрерывности существует $b'' \geq b'$, для которого (1.33) “почти выполнено”: $|a_{0,k'}(b'', \mu') - k'\mu'| = 1$. Ясно, что тройка (b'', μ', k') также удовлетворяет (1.16), а тройка $(a_{0,k'}(b'', \mu'), b'', \mu')$ удовлетворяет условиям (1.14) теоремы 1.2, потому что

$$|a_{0,k'}(b'', \mu')| + 1 \leq |k'\mu'| + 2 \leq 2C'_1 \sqrt{b''\mu'} \leq C_1 \sqrt{b''\mu'}.$$

Значит, по теореме 1.2

$$|a_{0,k'}(b'', \mu') - k'\mu'| \leq K_1 \sqrt{\frac{\mu'}{b'}} + \frac{K_2}{\sqrt{b'\mu'}} \leq \frac{K_1}{\sqrt{C'_2}} + K_2 C'_1 < 1,$$

что противоречит нашему предположению $|a_{0,k'}(b'', \mu') - k'\mu'| = 1$.

2. С этого момент и далее фиксируем константы $C'_{1,2}$, удовлетворяющие (1.32). В частности, то означает, что предложения 1.5, 1.6 и 1.7 выполнены для всех троек в (1.31), где b, μ и k удовлетворяют (1.16).

Рассмотрим точку $a_{0,k}(b, \mu)$ с такими значениями b , μ и k . Пусть $x_0(t)$ — такое решение уравнения (1.10) с $a = a_{0,k}(b, \mu)$, что $x_0(0) = 0$. Как было сказано выше, тогда $x_0(2\pi) - x_0(0) = 2\pi k$, и из (1.20) следует

$$k = \frac{x_0(2\pi) - x_0(0)}{2\pi} = \frac{a_{0,k}(b, \mu)}{\mu} + \frac{1}{\mu} \int_0^{2\pi} \cos x_0(\tau) d\tau.$$

Поэтому

$$a_{0,k}(b, \mu) - k\mu + J_k\left(-\frac{b}{\mu}\right) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos\left(kt + \frac{b}{\mu} \sin t + \psi(t)\right) - \cos\left(kt + \frac{b}{\mu} \sin t\right) dt, \quad (1.34)$$

где

$$\psi(t) = \left(\frac{a_{0,k}(b, \mu)}{\mu} - k\right)t + \frac{1}{\mu} \int_0^t \cos x_0(\tau) d\tau. \quad (1.35)$$

Обозначим также $\hat{x}(t) = kt + (b/\mu) \sin t$. Тогда правая часть равенства (1.34) равна

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\hat{x}(t)) \cdot (\cos \psi(t) - 1) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\hat{x}(t)) \cdot \sin \psi(t) dt.$$

Обозначим слагаемые здесь через S_1 и S_2 соответственно.

3. Начнём с оценки нормы ψ . Поскольку тройка $(a_{0,k}(b, \mu), b, \mu)$ удовлетворяет условиям (1.14), мы можем применить теорему 1.2 к первому слагаемому в (1.35) и предложение 1.8 ко второму. Тогда мы получим

$$\|\psi\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{\sqrt{b}} \left(\frac{1}{\mu^{1/2}} + \frac{1}{\mu^{3/2}}\right)\right), \quad (1.36)$$

Чтобы оценить S_1 , мы оценим первый косинус единиц, а второй множитель величиной $\|\psi\|_{C^0}^2/2$. Отсюда

$$|S_1| = O\left(\frac{1}{b} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^3}\right)\right).$$

4. Оценка S_2 производится аналогично доказательству предложения 1.8. Мы разбиваем отрезок $[0, 2\pi]$ в объединение отрезков J_j и J^* точками, где $\hat{x}(t) \equiv$

$0 \pmod{2\pi}$, рассматриваем множество M_δ и классифицируем отрезки по типам 1, 2 и 3, как выше.

Напомним, что $\hat{x}(t)$ является решением уравнения (1.22) с $\gamma = 0$ и значениями параметров, равными $\hat{a} = k\mu$, $\hat{b} = b$, $\hat{\mu} = \mu$. Как было сказано выше, мы можем применить к нему предложения 1.5, 1.6 и 1.7.

Интеграл в S_2 распадается в сумму интегралов по отрезкам J_j и J^* . Обозначим части этой суммы, соответствующие отрезкам типов 1 и 2, через $S_2^{(1,2)}$, а часть, соответствующую отрезкам типа 3, через $S_2^{(3)}$. Применим предложение 1.6 к $S_2^{(1,2)}$:

$$\begin{aligned} |S_2^{(1,2)}| &\leq \sum_{\substack{J=J_j, J^* \\ \text{типа 1 или 2}}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_J \sin \hat{x}(t) \cdot \sin \psi(t) dt \right| \leq \frac{\|\sin \psi\|_{C^0}}{2\pi} \sum_{\substack{J=J_j, J^* \\ \text{типа 1 или 2}}} |J| \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{b}} \left(\frac{1}{\mu^{1/2}} + \frac{1}{\mu^{3/2}} \right) \right) \cdot O\left(\frac{\mu}{b\delta} + \delta \right) = O\left(\frac{1}{b} \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) \right). \end{aligned}$$

5. Часть $S_2^{(3)}$ оценивается следующим образом. Фиксируем произвольную точку t_j в каждом I_j . Тогда

$$\begin{aligned} |S_2^{(3)}| &\leq \sum_{J_j \text{ типа 3}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{J_j} \sin \hat{x}(t) \cdot \sin \psi(t_j) dt \right| \\ &\quad + \sum_{J_j \text{ типа 3}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{J_j} \sin \hat{x}(t) \cdot [\sin \psi(t) - \sin \psi(t_j)] dt \right|. \end{aligned}$$

Обозначим две суммы в правой части через $S_2^{(3)*}$ и $S_2^{(3)**}$ соответственно. Первая сумма $S_2^{(3)*}$ оценивается при помощи предложения 1.7:

$$S_2^{(3)*} \leq \|\psi\|_{C^0} \int_{\mathcal{I}_3} \left[O\left(\frac{1}{b|\cos \hat{t}|} \right) + O\left(\frac{\mu}{b \cos^2 \hat{t}} \right) \right] d\hat{t}.$$

С этим интегралом можно справиться ровно таким же образом, как с интегралом по $\mathcal{I}_3$ в доказательстве предложения 1.8. Из этого вместе с неравенством $\ln z \leq 2\sqrt{z}$ и уравнением (1.36) следует, что

$$S_2^{(3)*} = O\left(\frac{1}{b} \left(1 + \frac{1}{\mu^2} \right) \right).$$

6. В сумме $S_2^{(3)\star\star}$ оценим $\sin \hat{x}(t)$ единицей, а разность в квадратных скобках величиной $\text{osc}_{J_j} \psi \leq |J_j| \cdot \max_{J_j} |\psi'| \leq |J_j| \cdot (|a - k\mu| + 1)/\mu$:

$$S_2^{(3)\star\star} \leq \sum_{J_j \text{ of type 3}} |J_j| \text{osc}_{J_j} \psi \leq \sum_{J_j \text{ of type 3}} |J_j|^2 \cdot \left(\left| \frac{a}{\mu} - k \right| + \frac{1}{\mu} \right).$$

Мы уже видели в (1.33), что $|a - k\mu| = O(1)$, поэтому последняя квадратная скобка является $O(1/\mu)$. Из предложения 1.5 следует, что

$$|J_j|^2 \leq \int_{J_j} O\left(\frac{\mu}{b|\cos \hat{t}|}\right) d\hat{t},$$

поэтому из (1.30) мы получаем

$$S_2^{(3)\star\star} \leq \int_{[0, 2\pi] \setminus M_\delta} O\left(\frac{d\hat{t}}{b|\cos \hat{t}|}\right) = O\left(\frac{\ln(b/\mu)}{b}\right).$$

Собирая вместе оценки для S_1 , $S_2^{(1,2)}$, $S_2^{(3)\star}$ и $S_2^{(3)\star\star}$, мы завершаем доказательство. $\square$

1.3.5. Обобщения

Изучим теперь некоторые возможные обобщения теорем 1.2 и 1.3. Теорема 1.2 может быть прямо обобщена на случай любого уравнения вида (1.11), для которого график функции g трансверсально пересекает линию $\{t = 0\}$. Точнее, приведённое выше доказательство использует только следующие свойства функций f и g :

1. функции f и g ограничены единицей;
2. g липшицева с константой 1;
3. график $y = g(t)$ трансверсально пересекает линию $y = 0$.

(Напомним также, что $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$, $\int_0^{2\pi} g(t) dt = 0$.)

Константы, равные единице в этих свойствах, могут быть просто заменены на любые другие константы посредством замен

$$(f, g, a, b, \mu) \rightarrow (f/D, g/D, a/D, b, \mu/D),$$

$$(f, g, a, b, \mu) \rightarrow (f, g/D, a, bD, \mu)$$

для некоторых $D > 0$. Что касается последнего условия, оно используется в двух частях доказательства: (1) оценка $\text{mes } M_\delta$ и (2) оценки интегралов

$\int_{[0, 2\pi] \setminus M_\delta} d\hat{t}/|g(\hat{t})|$ и $\int_{[0, 2\pi] \setminus M_\delta} d\hat{t}/g^2(\hat{t})$ в (1.30). Выразим условие трансверсальности следующим количественным образом: существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $L > 0$, такие что для любого $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ имеем

$$\text{mes } M_\varepsilon := \text{mes}\{t : |g(t)| \leq \varepsilon\} \leq L\varepsilon.$$

Предположим, что $\delta \leq \varepsilon_0$ (это требуемая модификация условия (1.24с)), тогда $\text{mes } M_\delta$ оценивается ровно тем же образом, как в доказательстве, и для интегралов мы используем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \int_{[0, 2\pi] \setminus M_\delta} \frac{d\hat{t}}{g^2(\hat{t})} &= \int_0^\infty \text{mes}\left\{\hat{t} \in [0, 2\pi] \setminus M_\delta : \frac{1}{g^2(\hat{t})} \geq y\right\} dy \\ &= \int_0^\infty \text{mes}\left\{\hat{t} \in [0, 2\pi] : \delta \leq g(\hat{t}) \leq \frac{1}{\sqrt{y}}\right\} dy. \end{aligned}$$

Множество пусто, если $y > 1/\delta^2$, иначе мы можем оценить его меру величиной $\text{mes } M_{1/\sqrt{y}}$, которая оценивается при помощи условия трансверсальности:

$$\int_0^{1/\delta^2} \text{mes } M_{1/\sqrt{y}} dy \leq \int_0^{1/\varepsilon_0^2} 2\pi dy + \int_{1/\varepsilon_0^2}^{1/\delta^2} \frac{L}{\sqrt{y}} dy \leq O(1) + O\left(\frac{1}{\delta}\right).$$

Ещё один интеграл оценивается аналогично, и (1.30) сохраняет его форму. Следовательно, мы получаем следующее обобщение теоремы 1.2.

Теорема 1.9. Фиксируем любые положительные константы L_0, L_1, L_2, L_3 . Тогда существуют положительные константы C_1, C_2, K_1, K_2 , зависящие от $L_{0,1,2,3}$,

такие что верно следующее. Рассмотрим любые функции f и g с нулевыми средними, для которых

1. их непрерывные нормы ограничены: $\|f\|_{C_0} \leq L_1$, $\|g\|_{C_0} \leq L_1$,
2. g липшицева с константой L_2 : $|g(t_1) - g(t_2)| \leq L_2|t_1 - t_2|$,
3. для любого $\delta < 1/L_0$ выполнено ограничение $\text{mes}\{|g(t)| < \delta\} \leq L_3\delta$.

Тогда, если параметры a, b, μ уравнения (1.11) таковы, что

$$|a| + 1 \leq C_1\sqrt{b\mu}, \quad b \geq C_2\mu,$$

то верно

$$\left| \frac{a}{\mu} - \rho_{a,b,\mu} \right| \leq \frac{K_1}{\sqrt{b\mu}} + \frac{K_2}{b\mu} \ln\left(\frac{b}{\mu}\right) \leq \frac{K_1}{\sqrt{b\mu}} + \frac{2K_2}{\sqrt{b\mu^3}}.$$

Что касается теоремы 1.3, мы заметили в разделе 1.3.1, что сведение к уравнению Риккати и отождествление неподвижной точки отображения $\tilde{P}_{a,b,\mu}$ для границ языка Арнольда с 0 и π работает, только если $f(x) = \cos x$, и $g(t)$ чётна. Эти условия не могут быть значительно расширены (тривиальное расширение достигается заменой координат $x' = x + x_0$, $t' = t + t_0$; условие принимает форму $f(x') = \cos(x' - x_0)$, $g(t') = g(2t_0 - t')$). В данных предположениях и при условии трансверсальности выполнен следующий обсуждавшийся выше аналог теоремы 1.3. Изменения в доказательстве ровно такие же, как выше.

Теорема 1.10. Фиксируем любые положительные константы L_0, L_1, L_2, L_3 . Тогда существуют положительные константы $C'_1, C'_2, K'_1, K'_2, K'_3$, зависящие от $L_{0,1,2,3}$, для которых верно следующее.

Рассмотрим любую функцию g с нулевым средним, удовлетворяющую условиям 1–3 теоремы 1.9 и условию $g(t) = g(-t)$. Пусть $a_{0,k}(b, \mu)$ и $a_{\pi,k}(b, \mu)$ — границы k -го языка Арнольда уравнения (1.11) с данной g и $f(x) = \cos x$. Тогда, если параметры b, μ и число $k \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют неравенствам

$$|k\mu| + 1 \leq C'_1\sqrt{b\mu}, \quad b \geq C'_2\mu,$$

то выполнены следующие оценки:

$$\left| \frac{a_{0,k}(b)}{\mu} - k + \frac{1}{\mu} \tilde{J}_k \left(-\frac{b}{\mu} \right) \right| \leq \frac{1}{b} \left(K'_1 + \frac{K'_2}{\mu^3} + K'_3 \ln \left(\frac{b}{\mu} \right) \right),$$

$$\left| \frac{a_{\pi,k}(b)}{\mu} - k - \frac{1}{\mu} \tilde{J}_k \left(-\frac{b}{\mu} \right) \right| \leq \frac{1}{b} \left(K'_1 + \frac{K'_2}{\mu^3} + K'_3 \ln \left(\frac{b}{\mu} \right) \right),$$

где

$$\tilde{J}_k(-z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kt + zG(t)) dt, \quad G(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau.$$

Функция $\tilde{J}_k$ происходит из интегральных представлений (1.20) (1.21), которые теперь имеют вид

$$x(t) - x(0) = \frac{at + bG(t) + \int_0^t \cos x(\tau) d\tau}{\mu},$$

$$x(2\pi) - x(0) = \frac{2\pi a}{\mu} + \frac{1}{\mu} \int_0^{2\pi} \cos \left(\frac{a\tau + bG(\tau) + \int_0^\tau \cos x(s) ds}{\mu} + x(0) \right) d\tau$$

(обратим внимание, что $G(2\pi) = 0$ из (1.12)). Функция $\tilde{J}_k$ также имеет асимптотическое представление, аналогичное представлению J_k :

$$\tilde{J}_k(-z) \sim \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\pi z |g'(t_j)|}} \cos \left(zG(t_j) + kt_j + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}(g'(t_j)) \right)$$

as $z \rightarrow +\infty$, (1.37)

где сумма берётся по всем нулям t_j функции g на окружности.

Напомним, что эти нули простые (и поэтому знаменатели в (1.37) ненулевые) из условия трансверсальности 3 теорем 1.9 и 1.10.

1.4. Второй режим: малая внешняя частота сигнала

Мы уже привыкли к уравнению (1.2): теперь рассмотрим его при малых μ . Совершенно дивный новый мир откроется нам: мир быстро-медленных систем, и техника изучения уравнения в этом мире отличается от техники Части 1.3. Эта часть основывается на совместной статье автора с В.Клепцыным и И.Шуровым, [5].

1.4.1. Зональное поведение языков

С помощью алгоритма, описанного в разделе 1.4.5, были получены диаграммы зон резонансного захвата для различных значений параметра μ (см. Рис. 1.6 и Рис. 1.7). На них видно, что с уменьшением μ языки уменьшаются по ширине и приближаются друг к другу; при этом в фиксированной (не зависящей от μ) окрестности нуля становятся явно выраженными три области в пространстве параметров с различным поведением языков:

- **Область A :** $b < a - 1$. Языки тонкие.
- **Область B :** $a - 1 < b < a + 1$. Языки заполняют практически всё пространство параметров, перемычки отсутствуют.
- **Область C :** $b > a + 1$. Языки образуют сетчатую (паркетную) структуру, заполняя почти всё пространство параметров, наблюдаются перемычки.

При больших b границы языков перестают приближаться друг к другу, уже не образуют явно выраженной сетчатой структуры и начинают приближаться функциями Бесселя (см. раздел 1.3). Область C , таким образом, постепенно «растворяется»: интересный открытый вопрос — при каких значениях b (в зависимости от μ) это происходит: теоремы раздела 1.3 дают оценку снизу на область бесселевости.

Цель этой части диссертации — сформулировать математически некоторые из данных выше описаний и доказать их, а также объяснить алгоритм построения границ языков, который позволил нам нарисовать картинки Рис. 1.6 и Рис. 1.7.

1.4.2. Быстро-медленные системы: напоминание

Структуру языков в областях A , B , C можно объяснить с точки зрения теории *быстро-медленных систем*. Напомним основные понятия.

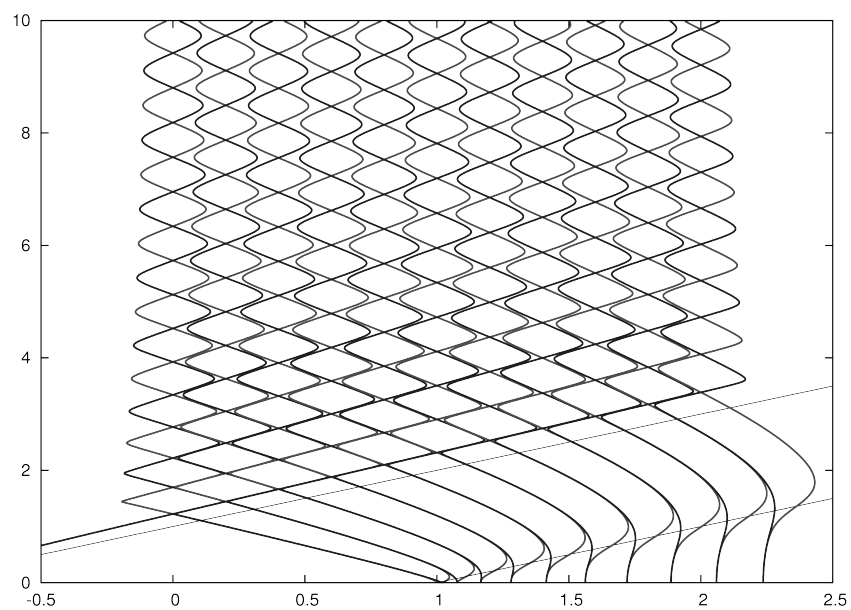


Рис. 1.6. Линиями изображены границы зон резонансного захвата с номерами $k = 0, \dots, 10$, $\mu = 0.2$

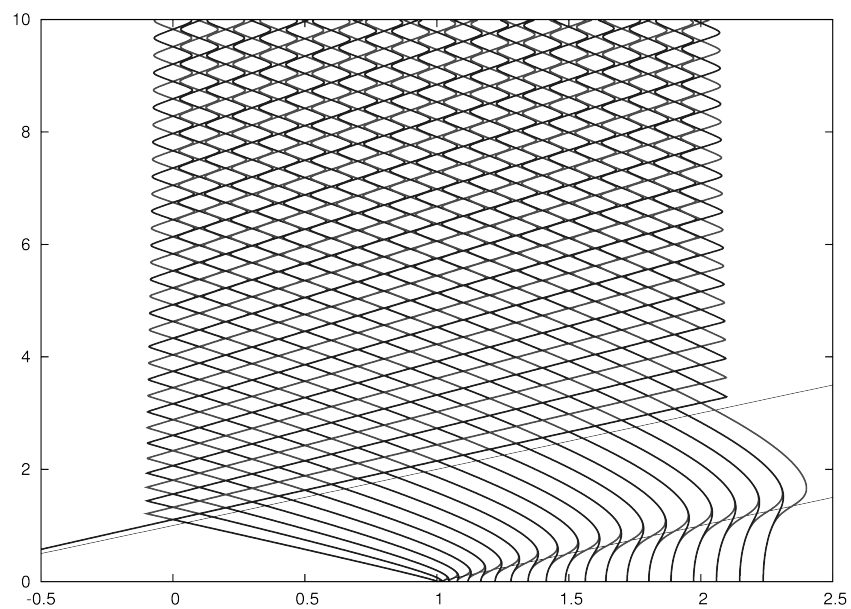


Рис. 1.7. Здесь $\mu = 0.1$ и по сравнению с $\mu = 0.2$ языков на том же промежутке по a становится больше: $k = 0, \dots, 20$, промежутки между языками уже неразличимы на глаз

Определение 3. Рассмотрим семейство дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon) \end{cases} \quad (1.38)$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, переменные x и y могут быть многомерными. Такое семейство называется *быстро-медленной системой*. Переменная x называется *быстрой*, а переменная y — *медленной*.

В типичной точке фазового пространства при малых ε скорость изменения переменной x много больше, чем скорость изменения переменной y . Это объясняет терминологию. При $\varepsilon = 0$, система (1.38) превращается в семейство уравнений на x : переменная y становится параметром. Такая система называется *быстрой*.

Определение 4. Множество неподвижных точек

$$M = \{(x, y) \mid f(x, y, 0) = 0\}$$

быстрой системы называется *медленной поверхностью* или, в двумерном случае, *медленной кривой*.

Типичная траектория типичной быстро-медленной системы с одномерной быстрой и одномерной медленной переменной допускает следующее описание [35]: это чередующиеся фазы медленного (со скоростью порядка $O(\varepsilon)$) дрейфа вблизи медленной кривой и быстрых «срывов» (скорость порядка $O(1)$) вдоль траекторий $y = \text{const}$ быстрой системы. Срывы происходят вблизи точек, в которых касательная к медленной кривой параллельна оси быстрого движения (точек складок).

Нетрудно видеть, что семейство уравнений (1.13) можно рассматривать как быстро-медленную систему, положив $\varepsilon = \mu$, $g \equiv 1$. Фактически, исследование уравнения (1.13) с точки зрения теории быстро-медленных систем было начато в работе [22].

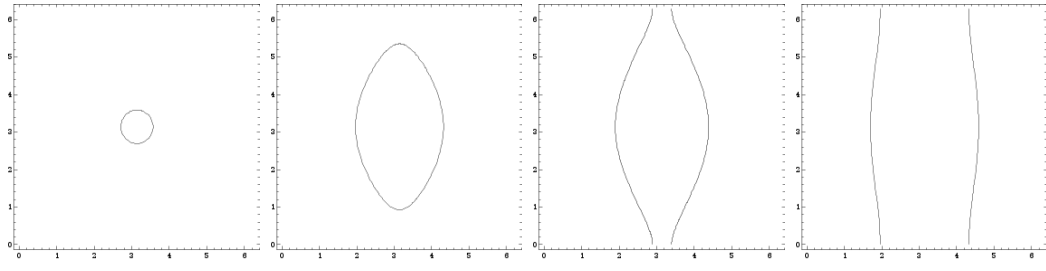


Рис. 1.8. Мультфильм об изменении медленной кривой при фиксированном a и увеличении b : медленная кривая появляется при $b = a - 1$, растёт и при $b = a + 1$ начинает пересекать саму себя: далее она распадается на две окружности, которые при увеличении b стремятся к меридианам тора

1.4.3. Медленная кривая для уравнения Джозефсона

Медленная кривая для уравнения (1.2) есть подмножество M тора, описываемое уравнением

$$M = \{(x, t) \mid \cos x + a + b \cos t = 0\} \quad (1.39)$$

Несложным вычислением доказывается следующее утверждение о форме медленной кривой в зависимости от значений параметров

Предложение 1.11. В области A медленная кривая системы (1.2) отсутствует; в области B она имеет вид стягиваемой выпуклой кривой; имеющей ровно две точки складки, в области C она распадается на пару нестягиваемых кривых с гомотопическим типом $(1, 0)$, каждая из которых имеет две точки складки.

Небольшой мультфильм в стоп-моушн показывает, как медленная кривая меняется при изменении параметров: Рис. 1.8.

1.4.4. Описание поведения языков

Теорема 1.12. Пусть B' — некоторое открытое ограниченное множество в пространстве параметров (a, b) , замыкание которого компактно вложено в область B . Для достаточно малого μ , расстояние между соседними языками в области

B' не превосходит $C_1 \exp\left(-\frac{C_2}{\mu}\right)$ для некоторых положительных констант C_1, C_2 .

Доказательство. Из рассуждений раздела 1.2.2 мы знаем, что границы языков Арнольда задаются следующим условием: траектория с начальным условием $(x_0, 0)$ должна пройти через точку $(x_0, 2\pi)$ на торе с координатами (x, t) , где $x_0 = 0$ или $x_0 = \pi$. Для универсальной накрывающей окружности $\mathbb{S}^1$ с координатой x эти условия переписываются как

$$\tilde{x}_0(2\pi) = 2\pi k \quad (1.40)$$

$$\tilde{x}_\pi(2\pi) = \pi + 2\pi k, \quad (1.41)$$

где $k \in \mathbb{Z}$ номер языка Арнольда и $\tilde{x}_0(t)$ ($\tilde{x}_\pi(t)$ – фазовая кривая уравнения (1.2) с начальным условием $\tilde{x}_0(0) = 0$ ($\tilde{x}_\pi(0) = \pi$ соотв.), поднятая на универсальную накрывающую.

Из соображений симметрии (1.9) следует, что если отображение Пуанкаре за полный период (2π) сдвигает некоторую точку на $2\pi k$ для целого k , то отображение Пуанкаре за половину периода будет сдвигать эту же точку на вдвое меньшую величину πk . Следовательно, условия (1.40) могут быть записаны в виде

$$\tilde{x}_0(\pi) = \pi k \quad (1.42)$$

$$\tilde{x}_\pi(\pi) = \pi + \pi k, \quad (1.43)$$

Это означает, что границы языков описываются одним из этих условий :

Нулевая граница. 0 переходит в 0 или π по модулю 2π за половину периода.

Пи-граница π переходит в π или 0 по модулю 2π за половину периода.

Ответ 0 или π соответствует четности $k \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что когда при непрерывном изменении параметров a и b значение $x_0(\pi)$ (соотв., $x_\pi(\pi)$) непрерывно меняется от 0 до π (соотв., от π до $2\pi = 0$

$(\bmod 2)\pi$), сдвиг за половину периода увеличивается на половину оборота, а значит за полный период — на полный оборот, то есть число вращения увеличивается на 1. Это соответствует переходу к соседнему языку.

Пусть параметры $(a_0, b_0) \in B'$ лежат на границе языка. Без ограничения общности, можно считать, что при этом выполняется условие «0 переходит в π » (другие условия рассматриваются аналогично).

Рассмотрим дугу $J^u = [(\pi, \pi), (2\pi, \pi)] \subset \{t = \pi\}$, содержащую точку $x = \frac{3\pi}{2}$, см. Рис. 1.9. Она пересекает отталкивающую часть медленной кривой. Обратим время: отталкивающая часть станет притягивающей. Образ D дуги J^u под действием отображения Пуанкаре с трансверсали $t = \pi$ на трансверсаль $\{t = 0\}$ в обратном времени имеет длину $O\left(\exp \frac{-C}{\mu}\right)$ для некоторого $C > 0$. Это следует из того факта, что при движении вблизи *устойчивой* части медленной кривой траектории быстро-медленной системы экспоненциально притягиваются друг к другу, подробное доказательство см. в [22, Proposition 4], точную оценку для C см. в [36, Лемма 5.4]. Мы предположили, что выполняется условие «0 переходит в π » и значит нижний конец J^u попадает в 0. Следовательно, $D = [0, \xi]$, где $\xi = O\left(\exp \frac{-C}{\mu}\right)$.

Нетрудно показать, что производная решения по параметрам a и b в области $t \in [0, \pi]$ отделена от нуля (и на самом деле имеет порядок $O(1/\mu)$). Следовательно, изменяя параметр a или b на величину порядка $O(\exp(-C/\mu))$, можно перевести верхний конец отрезка D в 0. При этом $x_0(\pi)$ непрерывно сдвигается от π до 2π , что соответствует увеличению числа вращения на 1, то есть переходу на границу соседнего языка.

Нетрудно показать, что производная решения по параметрам a и b в области $t \in [0, \pi]$ отделена от нуля (и на самом деле имеет порядок $O(1/\mu)$). Следовательно, изменяя параметр a или b на величину порядка $O(\exp(-C/\mu))$, можно перевести верхний конец отрезка D в 0. При этом $x_0(\pi)$ непрерывно сдвигается от π до 2π , что соответствует увеличению числа вращения на 1, то есть переходу на границу соседнего языка.

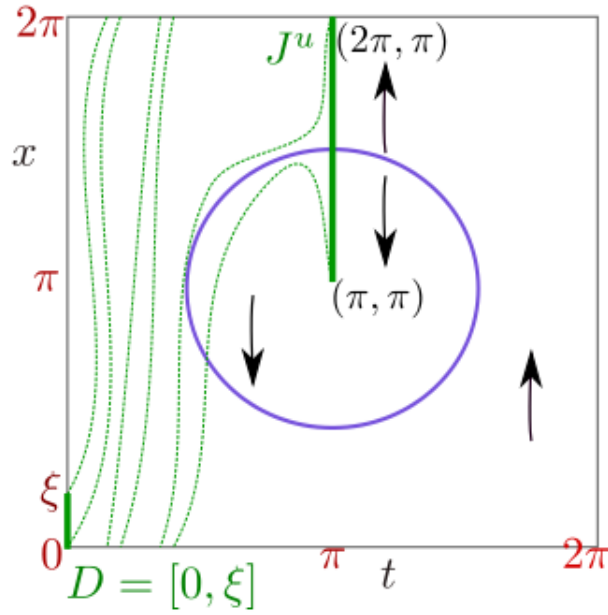


Рис. 1.9. Для параметров (a, b) на границе языка и для отрезка J^u можно построить его прообраз D под действием потока джозефсоновского векторного поля: это экспоненциально маленький по μ отрезок

Аналогичное утверждение может быть доказано также для области C , в которой языки Арнольда выкладываются в плотный ковер:

Теорема 1.13. Пусть C' — некоторое открытое ограниченное множество в пространстве параметров (a, b) , замыкание которого компактно вложено в область C . Для достаточно малого μ расстояние между соседними языками в области C' не превосходит $C_1 \exp\left(-\frac{C_2}{\mu}\right)$ для некоторых положительных констант C_1, C_2 .

Доказательство. Основные соображения аналогичны тем, что использовались в доказательстве теоремы 1.12. Пусть параметры $(a_0, b_0) \in B'$ лежат на границе языка. Без ограничения общности, можно считать, что при этом выполняется условие «0 переходит в π » (другие условия рассматриваются аналогично).

Рассмотрим трансверсаль $\Gamma = \{t = \alpha\}$, где $\alpha \in [0, \pi]$ выбрано таким образом, чтобы Γ пересекала медленную кривую в двух точках (была отделена от точек складок). Разобьем Γ на два полуинтервала, один из которых (J^s) пересекает устойчивую часть медленной кривой, а другой (J^u) — неустойчивую:

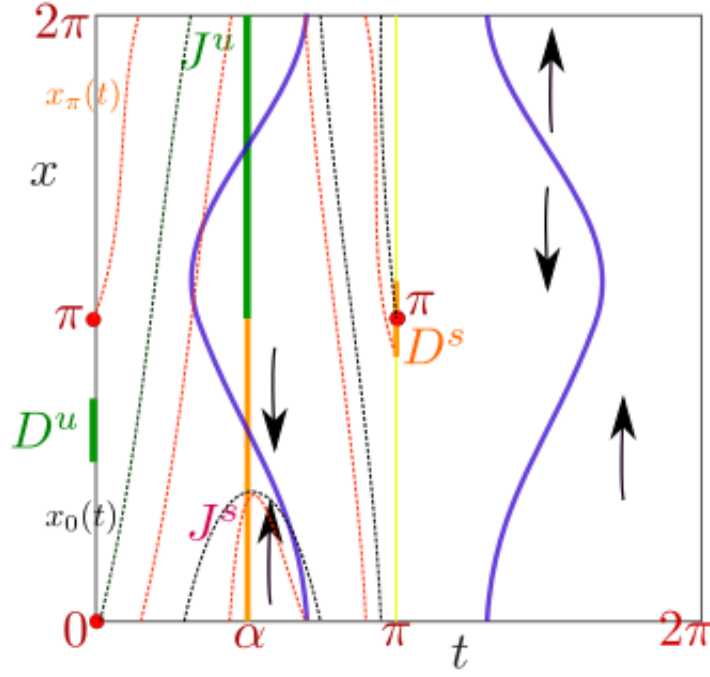


Рис. 1.10. Медленная кривая в области C имеет две компоненты – две окружности. В предположениях, которые мы делаем при доказательстве Теоремы 1.13 картинка будет выглядеть следующим образом. Окружность $\{t = \alpha\}$ разделена на две части: притягивающая часть J^s и отталкивающая часть J^u . Траектории всех точек трансверсали $\{t = 0\}$, за исключением экспоненциально малого интервала D^u пройдут через сечение J^s : поэтому траектории $x_0(t)$ и $x_\pi(t)$ будут близки друг к другу, после того как они находились долгое время очень близко рядом с притягивающей частью медленной кривой. И поскольку $x_0(\pi) = \pi$, малым изменением параметров можно добиться $x_\pi(\pi) = \pi$ и таким образом, перейти на соседний язык.

$$J^s = \{(x, t) \mid t = \alpha, x \in [0, \pi)\} \subset \Gamma,$$

$$J^u = \{(x, t) \mid t = \alpha, x \in [\pi, 2\pi)\} \subset \Gamma.$$

См. Рис. 1.10 в качестве иллюстрации.

Обозначим также через D^u образ полуинтервала J^u под действием отображения Пуанкаре с трансверсали Γ на трансверсаль $t = 0$ в обратном времени, а через D^s — образ полуинтервала J^s под действием отображения Пуанкаре с трансверсали Γ на трансверсаль $t = \pi$ в прямом времени. Отрезки D^u и D^s экспоненциально узкие по соображениям, обсуждавшимся выше (см. доказа-

тельство теоремы 1.12).

Рассмотрим траекторию $x(t)$ (соотв., $x_\pi(t)$), проходящую через точку $(0, 0)$ (соотв., $(\pi, 0)$). Возможны два случая:

1. Точка 0 лежит в полуинтервале D^u , а значит $x_0(\alpha) \in J^u$.
2. Точка 0 не лежит в полуинтервале D^u , а значит $x_0(\alpha) \in J^s$ и $x_0(\pi) = \pi \in D^s$ (мы предположили, что это выполняется условие «0 переходит в π »).

Предположим, что имеет место случай 2. Пусть $\pi \notin D^u$ и значит $x_\pi(\alpha) \in J^s$ и $x_\pi(\pi) \in D^s$. В этом случае расстояние между $\pi = x_0(\pi)$ и $x_\pi(\pi)$ экспоненциально мало, и экспоненциально малым изменением параметров можно добиться выполнения условия « π переходит в π ». При этом число вращения увеличится или уменьшится на 1.

Если $\pi \in D^u$, можно экспоненциально мало пошевелить один из параметров a или b , чтобы это условие нарушилось.

Случай 1 рассматривается аналогично, с заменой индексов u на s и наоборот.

Замечание 2. Из доказательства теоремы 1.13 следует, что любая точка, лежащая на границе языка, удовлетворяет одному из условий: $\{0, \pi\} \cap D^u \neq \emptyset$ или $\{0, \pi\} \cap D^s \neq \emptyset$. Эти условия задают два семейства экспоненциально узких трубок в пространстве параметров, внутри которых лежат границы языков. Эти трубки образуют сетчатую структуру, которую можно видеть в области C в численных экспериментах, см. Рис. 1.7 и 1.6 в области C .

При движении вдоль границы языка, соответствующая характеристическая траектория проходит вблизи устойчивой или неустойчивой части медленной кривой, в зависимости от того, какой из случаев 1 или 2 реализуется. Это соответствует движению «влево» или «вправо». В тот момент, когда граница совершает «поворот», траектория проводит сравнимое время вблизи устойчивой и неустойчивой части медленной кривой. Такие решения называются «уточными» (см. [37]).

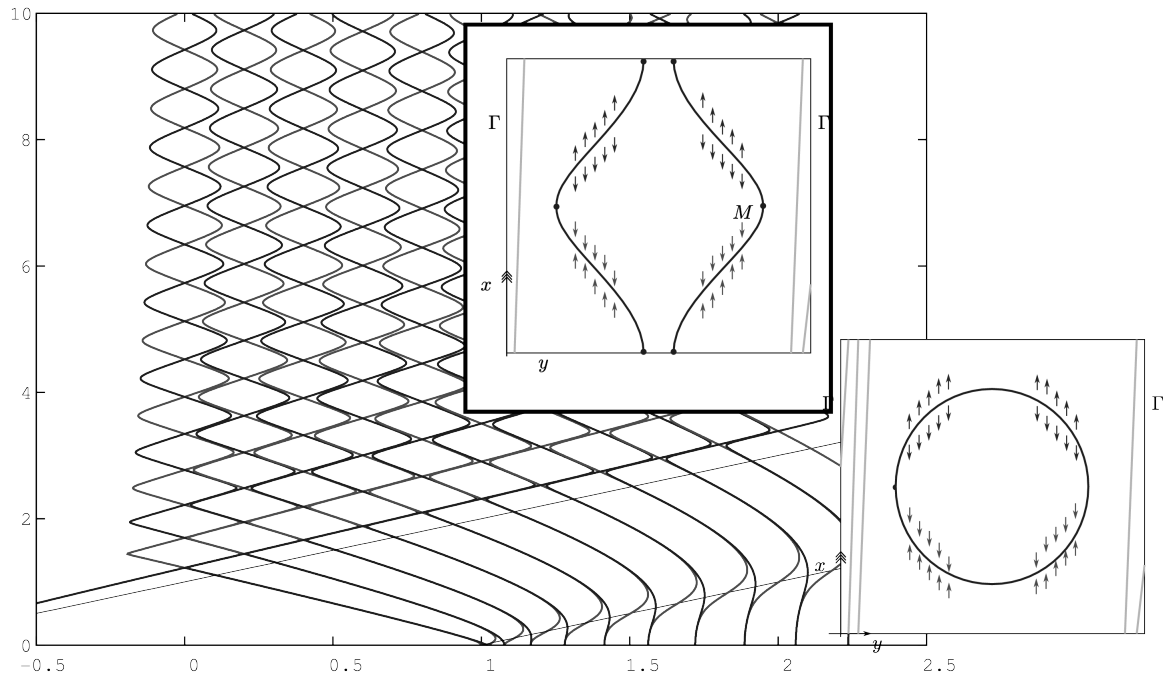


Рис. 1.11. Области A , B и C описаны в разделе 1.4.1. Области B и C соответствуют непустой медленной кривой: в этих областях возможно применение техники теории быстро-медленных систем, однако область A трудна для изучения и практически ничего не известно о языках в этой области.¹

1.4.5. Моделирование границ и метод Ньютона

Учитывая наличие физических приложений, актуальной является задача построения языков Арнольда для уравнения (1.2) с помощью численных методов. В общем случае, такая задача вычислительно сложна: для нахождения числа вращения по формуле (1.3) требуется численно интегрировать уравнение (1.2) на длительных промежутках времени. Так, чтобы найти число вращения с точностью $\pm\epsilon$, требуется проинтегрировать уравнение на промежутке времени порядка $(\epsilon\mu)^{-1}$. Для построения языков Арнольда требуется находить значение числа вращения на достаточно густой сетке в пространстве параметров.

Однако, используя свойства уравнения (1.2), описанные в разделе 1.2, можно предложить гораздо более эффективный алгоритм построения языков. Его описанию будет посвящена оставшаяся часть настоящего раздела.

Напомним, что границы языков Арнольда определяются условиями на об-

разы точек 0 и π под действием отображения Пуанкаре за половину периода (см. (1.42)). Рассмотрим условие « 0 переходит в 0 » (и значит $k = 2l$ чётно); остальные условия рассматриваются аналогично. Пусть $x = x_0(t; a, b, \mu)$ задаёт фазовую кривую, проходящую через точку $(0, 0)$

Зафиксируем некоторое μ и положим

$$Q(a, b) = x_0(\pi; a, b, \mu) \quad (1.44)$$

Нас интересует πk -линия уровня функции $Q(a, b)$:

$$L_k := \{(a, b) \mid Q(a, b) = \pi k = 2\pi l\}.$$

Пусть граница L_k задаётся графиком функции $a = a(b)$. При $b = 0$, уравнение (1.2) интегрируется в квадратурах, и значение $a(0)$ можно получить явно:

$$a(0) = \sqrt{1 + l^2 \mu^2}$$

Пусть найдено значение $a_0 = a(b_0)$ для некоторого b_0 . Возьмем некоторый маленький шаг h и найдём приблизительно значение $a(b_0 + h)$. Это означает, что нам нужно решить уравнение

$$Q(a, b_0 + h) - \pi k = 0 \quad (1.45)$$

относительно a . В качестве нулевого приближения положим $a = a_0$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x' = \cos x + a + b \cos t, \\ t' = \mu, \\ u' = -u \sin x + 1. \end{cases} \quad (1.46)$$

Третье уравнение является уравнением в вариациях по параметру, $u = \frac{\partial x}{\partial a}$.

Путём численного интегрирования системы (1.46), найдём $Q_0 = Q(a_0, b_0 + h)$ и $Q' = \frac{\partial Q}{\partial a}|_{a_0, b_0 + h}$. Заменяя Q как функцию от a на касательную в точке a_0 (то есть применяя один шаг метода Ньютона для нахождения корня уравнения (1.45)), находим в качестве первого приближения для a :

$$a_1 = a_0 - (Q_0 - \pi k)/Q'.$$

После нахождения a_1 , делаем замену $b_0 + h \mapsto b_0$, $a_1 \mapsto a_0$ и повторяем процедуру. Таким образом, можем найти $a(b)$ для любых значений b на сетке с шагом h .

Несмотря на то, что на каждом шаге по b мы делаем только один шаг метода Ньютона, погрешность не накапливается: по индукции легко доказать, что на каждом шаге погрешность нулевого приближения составляет $O(h)$, а погрешность первого приближения составляет $O(h^2)$, что в свою очередь гарантирует, что погрешность нулевого приближения на следующем шаге составляет $O(h^2 + h) = O(h)$ и т.д.

Описанный алгоритм эффективно работает при μ порядка 1, однако при малых значениях μ (порядка 0.1) возникают проблемы со сходимостью метода Ньютона. Дело в том, что рассматриваемая траектория в этом случае проходит вблизи *отталкивающей* части медленной кривой M . При этом накапливается большая производная по начальному условию и параметрам, что приводит к вычислительной неустойчивости метода.

При нахождении в области B данная проблема решается путём рассмотрения отображения Q^{-1} вместо Q (то есть интегрирования системы (1.46) в обратном времени). В этом случае рассматриваемая траектория будет проходить вблизи *притягивающей* части медленной кривой и описанные проблемы не возникают.

В то же время, в области C данный приём не срабатывает: при прохождении границы вблизи точки перемены соседнего языка рассматриваемая траектория является *точной*, то есть в прямом и обратном времени проходит вблизи *отталкивающей* части медленной кривой. Для решения этой проблемы используется адаптивный алгоритм, совершающий несколько шагов метода Ньютона, и в случае отсутствия сходимости использующий более устойчивый (хотя и ме-

нее эффективный) метод бисекции отрезка.

С помощью описанного адаптивного алгоритма удаётся получать границы языков Арнольда для малых значений параметра μ вплоть до $\mu = 0.01$. Следует отметить, что ранее в литературе были описаны алгоритмы, позволяющие получать языки Арнольда лишь для μ порядка 0.1 (см. [10, 25]).

Глава 2

Задача Лагранжа о среднем движении

В данной Главе изучается классическая задача нахождения асимптотической угловой скорости движения, представленной как сумма круговых движений. Этот вопрос был впервые поставлен Жозеф-Луи Лагранжем в восемнадцатом веке в контексте изучения вопросов небесной механики. Лагранжа интересовал вопрос изучения асимптотического поведения конца системы зацепленных отрезков, каждый из которых вращается вокруг конца предыдущего с постоянной скоростью.

В этой Главе мы даем решение задачи Лагранжа для случая, когда система зацепленных отрезков вращается на произвольной геодезически полной ориентированной римановой поверхности.

Глава организована следующим образом: в Разделе 2.1 мы даем классическую постановку задачи в случае движения на евклидовой плоскости. Эта задача была решена в серии работ Болем, Хартманом, Ван Кампеном и Вейлем. Мы приводим библиографическую справку, и, наконец, даем новое доказательство теоремы об асимптотическом поведении в классическом случае. В Разделе 2.2 мы формулируем задачу для произвольной римановой поверхности, и даем доказательство, основанное на доказательстве классического случая в Разделе 2.1.

2.1. Классическая задача Лагранжа: евклидова плоскость

2.1.1. Определения и история задачи

Фиксируем вещественные числа $l_1, l_2, \dots, l_N \in \mathbb{R}_+$ и рассмотрим отображение Ψ N -мерного тора $\mathbb{T}^N$ на комплексную плоскость $\mathbb{C}$, которое отображает

точку $(\theta_1, \dots, \theta_N) \in \mathbb{T}^N$ в точку

$$\sum_{j=1}^N l_j e^{i\beta_j^0} e^{2\pi i \theta_j}. \quad (2.1)$$

Мы будем называть Ψ *вращающейся цепью типа* $l = (l_1, \dots, l_N)$ на комплексной плоскости. Здесь числа $e^{i\beta_j^0}$ определяют исходные позиции отрезков, являющихся звеньями цепи.

Интересным вопросом является, например, топология $\Psi^{-1}(z)$ для некоторого фиксированного z : этот вопрос изучался, среди прочих, Жан-Клодом Османом в [99, 100]. Мы добавим к геометрической конструкции вращающейся цепи динамику.

Рассмотрим линейный поток φ^t на $\mathbb{T}^N$, заданный векторным полем

$$X = \sum_{j=1}^N \omega_j \frac{\partial}{\partial \theta_j}, \omega_j \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Этот поток φ^t задает динамику вращающихся цепей: каждое звено j цепи вращается с постоянной угловой скоростью ω_j вокруг конца предыдущего звена $j - 1$. Интересующий нас вопрос таков: имеет ли конец системы (конец N -ого звена) асимптотическую угловую скорость в данном движении и если да, то возможно ли рассчитать ее значение ω как функцию длин l_j и угловых скоростей ω_j ? Строго говоря, асимптотическая скорость определяется следующим образом:

Определение 1. Для динамики вращающейся цепи $l = (l_1, \dots, l_N)$, заданной потоком векторного поля (2.2), асимптотическая скорость конца системы ω определяется как предел

$$\omega = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\arg z(T)}{T} \quad (2.3)$$

где $\arg$ есть непрерывно определенное на пути $z(t)$ значение аргумента функции $z(t)$, где $z(t) \in \mathbb{C}$ – координата конца системы.

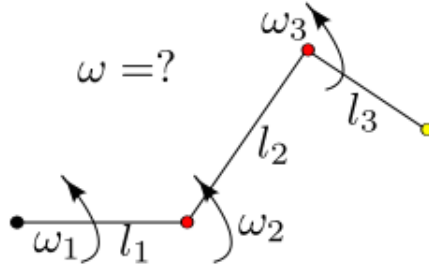


Рис. 2.1. Вращающаяся цепь типа (l_1, l_2, l_3) , соответствующая векторному полю (2.2), $N = 3$

Пока мы предполагаем, что цепь не проходит через начало координат: $z(t) \neq 0$. В этом случае вдоль кривой $z(t), t \in \mathbb{R}_+$ возможно определить непрерывное значение аргумента.

См. Рис. 2.1 для изображения вращающейся цепи.

Вопрос нахождения асимптотической скорости для вращающейся цепи был впервые поставлен Лагранжем в его двухтомной работе [101] по небесной механике.

Формулировка этой задачи напоминает теорию эпициклов Гиппарха Родосского второго века до нашей эры: идеей теории было разложение движения планет на сумму круговых движений. Естественно, Лагранж (следуя работам Кеплера, Гука и Ньютона) знал, что теория эпициклов не подходила для описания движения планет солнечной системы и что движение планет на самом деле было чрезвычайно сложным (хоть и близким к эллиптическому движению). Конец вращающейся цепи $(l_1, \dots, l_n)$ в момент времени t задается формулой

$$z(t) = l_1 e^{i\beta_1^0} e^{i\omega_1 t} + \dots + l_N e^{i\beta_N^0} e^{i\omega_N t}, \quad (2.4)$$

где β_j^0 задают начальные позиции отрезков (по отношению к общей горизонтали). Таким образом, интересующий нас конец системы

$$z(t) = r(t) \exp(i\varphi(t)) \quad (2.5)$$

— комплексное число с модулем r и аргументом φ , которые зависят от времени.

При изучении возмущений движения Земли под действием силы притяжения больших планет, Лагранж смотрел на функции $r(t)$ и $\varphi(t)$ как на эксцентриситет и долготу перигелия орбиты планеты во время t . Затем, следуя дифференциальным уравнениям движения (дифференциальные уравнения задачи N тел) с целью определить, чему равны r и φ , в первом приближении Лагранж получил формулу (2.4).

Таким образом, изучение изменения долготы перигелия привело Лагранжа к изучению изменения аргумента экспоненциального полинома в правой части (2.4).

Лагранж ответил на вопрос об асимптотической скорости для $N = 2$, когда или $l_1 > l_2$ или $l_2 > l_1$. В этом случае $\omega = \omega_j$, где j - номер более длинного отрезка.

Заметим, что идеи Лагранжа обобщаются на случай произвольного N . Если один из членов $l_j e^{i\theta_j}$ (преобладающий член) больше суммы модулей оставшихся членов (в этом случае вращающуюся цепь мы называем *лагранжевой*), то вращающаяся цепь никогда не пройдет через ноль, а также асимптотическая скорость конца системы будет совпадать с асимптотической скоростью самого длинного из звеньев и угол $\varphi(t)$ в уравнении (2.5) будет иметь асимптотику $\varphi(t) = \omega_j t + O(1)$.

Общий случай Лагранжем рассмотрен не был, и он даже пишет: "*Hors de ces deux cas, il est fort difficile et peut-être même impossible de se prononcer, en général, sur la nature de l'angle φ .*" В переводе на русский, "*помимо этих двух случаев очень сложно и наверное даже невозможно, в общем, понять природу угла φ* (в наших обозначениях, ω). Сейчас мы знаем, что Лагранж был слишком пессимистичен: ответ в общем случае был получен в ряде работ П. Болем, П. Хартманом, Е.Р. Ван Кампеном, А. Винтнером и Г. Вейлем, см. работы [102–104], в которых угол подсчитывается напрямую (с использованием эргодической теоремы).

Заметим, однако несколько сложностей: во-первых, Лагранж интересовал-

ся значением асимптотической скорости для всех значений ω_j , однако методы Вейля и др. работали не во всех случаях. Решение значительно упрощалось в случае рационально независимых ω_j , однако не работало в произвольном случае. Полное решение задачи было позднее получено Джессеном и Торнхейвом, см. более подробный обзор вопроса в [105].

Стоит отметить, что задача Лагранже может быть рассмотрена также в намного более общем контексте почти периодических функций, см. [106].

2.1.2. Что происходит при прохождении цепью через точку 0

Если в экспоненциальном полиноме (2.4) нет преобладающего слагаемого, то вращающаяся цепь может пройти через 0. Однако даже в этом случае, асимптотическую скорость ω для цепи все равно можно определить. Во-первых, если $z(t) = 0$ в конечном числе точек на временной оси, тогда, очевидно, предел (2.3) имеет смысл при $T \rightarrow \infty$. Однако, может случиться, что множество $\{t : z(t) = 0\}$ бесконечно (заметим, что это случается даже в случае $N = 2$ и $l_1 = l_2$). В этом случае мы определим непрерывное значение для $\arg z(t)$ следующим образом.

Заметим, что $z(t)$ – аналитическая функция, поэтому при $z(t) = 0$ касательная прямая к кривой $z(t)$ все ещё корректно определена при $z(t) = 0$. Это верно даже если $z(t)$ имеет сингулярность при прохождении через 0. Углы наклона касательных прямых к различным ветвям кривой в сингулярности равны по $\text{mod } \pi$. Поэтому аргумент $z(t)$ при прохождении через 0 может быть определен как угол, соответствующий углу наклона соответствующей касательной прямой.

Таким образом, рассматривая аргумент по меньшему модулю ($\text{mod } \pi$, а не 2π) и полагая, что $r(t)$ может принимать отрицательные значения (менять знак, когда t проходит через ноль нечетного порядка функции $z(t)$), мы можем придать смысл аргументу, и соответственно, пределу (2.3). Например, в случае $N = 2$ и $l_1 = l_2$ и для этого нового определения мы будем иметь

$\varphi(t) = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t + o(t)$. Это может быть проверено явным вычислением, см. [105]. См. также [108] для более простого доказательства. В дальнейшем мы рассматриваем задачу в таком контексте.

2.1.3. Формулировка теоремы: случай общего N и $N = 3$

Случай $N = 2$ полностью рассмотрен, таким образом мы переходим к случаю $N = 3$. Мы представим новое (чисто геометрическое) доказательство следующего факта.

Теорема 2. *Рассмотрим динамику вращающейся цепи типа $l = (l_1, l_2, l_3)$ на плоскости $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ под действием векторного поля (2.2). Предположим, что числа l_j удовлетворяют трем неравенствам треугольника*

$$l_1 < l_2 + l_3, l_2 < l_1 + l_3, l_3 < l_1 + l_2$$

и что числа $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ являются рационально независимыми (не существует соотношения $\sum_j t_j \omega_j = 0, t_j \in \mathbb{Z}$). Тогда асимптотическая скорость движения конца такой вращающейся цепи равна

$$\omega = \frac{\alpha_1}{\pi} \omega_1 + \frac{\alpha_2}{\pi} \omega_2 + \frac{\alpha_3}{\pi} \omega_3 \quad (2.6)$$

где α_j являются углами треугольника, сформированного отрезками со сторонами l_1, l_2, l_3 . Угол $\alpha_j > 0$ расположен соответственно напротив стороны l_j .

Этот результат для $N = 3$ есть частный случай общей теоремы, для произвольного N :

Теорема 3. [102, 107] *Рассмотрим динамику вращающейся цепи типа $l = (l_1, \dots, l_N)$ на плоскости $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ под действием векторного поля (2.2). Предположим, что числа ω_j рационально независимы. Тогда асимптотическая скорость движения конца системы ω существует и равна выпуклой комбинации*

$\omega = \sum_{j=1}^N \omega_j q_j$, где коэффициенты q_j равны мерам Лебега следующих подмножеств тора $\mathbb{T}^N$ с координатами $(\theta_1, \dots, \theta_N)$:

$$q_k = \mathbb{P} \left\{ |l_1 e^{i\theta_1} + \dots + l_{k-1} e^{i\theta_{k-1}} + l_{k+1} e^{i\theta_{k+1}} + \dots + l_N e^{i\theta_N}| > |l_k| \right\}.$$

2.1.4. Новое доказательство в случае $N = 3$

Этот параграф посвящен доказательству Теоремы 2.

Во первых, заметим, что для того, чтобы получить результат Теоремы 2, достаточно предположить, что первый отрезок неподвижен $\omega_1 = 0$. Это следует из следующего Предложения.

Предложение 1. *Предположим, что предельная асимптотическая скорость ω существует для динамики вращающейся цепи (l_1, l_2, l_3) и соответствующего векторного поля*

$$(\omega_2 - \omega_1) \frac{\partial}{\partial \theta_2} + (\omega_3 - \omega_1) \frac{\partial}{\partial \theta_3} \quad (2.7)$$

Тогда предельная асимптотическая скорость существует также для вращающейся цепи того же типа и векторного поля

$$\omega_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \omega_3 \frac{\partial}{\partial \theta_3} \quad (2.8)$$

и она равна сумме $\omega_1 + \omega$.

Доказательство. Доказательство практически очевидно: две описанные системы с угловыми скоростями $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ и $(0, \omega_2 - \omega_1, \omega_3 - \omega_1)$ соответственно связаны вращением. Действительно, позиция первой системы в момент времени t – это просто образ позиции второй системы в момент времени t , к которому применено вращение на угол $\omega_1 t$ вокруг начала координат, точки 0. $\square$

Далее мы предполагаем, что $\omega_1 = 0$ и мы будем думать об отображении как об отображении двумерного тора $\mathbb{T}^2$ с координатами (θ_2, θ_3) в $\mathbb{C}$. Также

будем думать о потоке φ^t как о линейном потоке на, опять же, двумерном торе, соответствующем векторному полю

$$X = \omega_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \omega_3 \frac{\partial}{\partial \theta_3}.$$

Определение 2. Для любой аналитической кривой γ определим отображение аргумента $f_\gamma = \arg : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ как многозначное отображение, определяющее аргумент $\arg \gamma(t)$ точки на этой кривой. Каждый раз, когда мы используем это обозначение, мы предполагаем, что мы берем непрерывно определенный аргумент (который можно определить даже в случае прохождения γ через 0, см. Параграф 2.1.2).

Тогда предельная асимптотическая скорость (2.3), которая нас интересует, может быть представлена временным средним

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T df_{\gamma(t)}$$

где $\gamma(t) = \Psi(\varphi^t(\theta_2^0, \theta_3^0))$ для некоторой исходной позиции (θ_2^0, θ_3^0) вращающейся цепи.

Итак, для каждой траектории $z(t)$ (соотв. начальному положению) вращающейся цепи на комплексной плоскости мы определили 1-форму $\beta(z) = d \arg \Psi(z)$. Рассматривать временное среднее этой формы эквивалентно изучению предела (2.3). Мы будем называть эту 1-форму *лагранжевой формой*.

Заметим, что поток φ^t – эргодический (и даже строго эргодический), поскольку φ^t – поток линейного векторного поля X с рационально независимыми коэффициентами ω_j , по предположению.

Заметим теперь, что форма β может иметь сингулярности, поскольку отображение Ψ отправляет некоторые точки на торе $\mathbb{T}^2$ в $0 \in \mathbb{C}^2$. Действительно, имеются две точки на торе $A, B \in \mathbb{T}^2$, соответствующие значениям θ_2 и θ_3 , при которых вращающаяся цепь замыкается в треугольник, см. Рис. 2.2.

Сформулируем сначала предложение, которое будет полезно для нас в работе с несингулярной частью формы β .

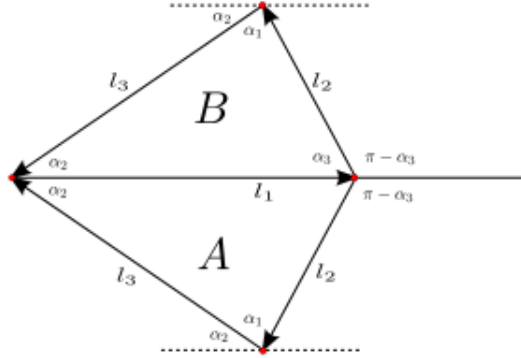


Рис. 2.2. Две позиции вращающейся цепи, дающие сингулярности формы β : цепь формирует один из треугольников A или B

Предложение 2. Рассмотрим пространство с мерой (M, μ) и поток $\varphi^t : M \rightarrow M$ строго эргодический поток векторного поля X на этом пространстве, здесь мера μ – единственная инвариантная мера для такого действия.

а. Тогда, для каждой точки $x \in M$ и любой непрерывной функции $f \in C(M, \mu)$ существует предел временных средних

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f \circ \varphi^t(x) dt$$

и этот предел

- не зависит от точки $x \in M$
- всюду совпадает с пространственным средним $\int_M f d\mu$ функции f .

б. Если заменить функцию f функцией $\bar{f} = f + X(g)$, где $g \in L^1(M, \mathbb{R})$, то временные средние функций f и $\bar{f}$ будут совпадать.

с. Для любой замкнутой 1-формы β на M определим функцию $f := \beta(X)$. Тогда её пространственное среднее $\int_M f d\mu$ корректно определено на классе

когомологий β , иначе говоря, оно не изменяется при замене β на $\bar{\beta} = \beta + dg$, где $g \in C^1(M, \mathbb{R})$.

d. Для случая, когда $M = \mathbb{T}^N$ и X есть линейное векторное поле (2.2), то для любой гладкой 1-формы β выполнено $\int_M \beta(X) = [\beta][\omega_1, \dots, \omega_N]$. Заметим, что $[\beta]$ имеет представителя $\beta_{\text{reg}} \in [\beta]$ с постоянными коэффициентами $\beta_j \in \mathbb{R}$:

$$\beta_{\text{reg}} = \sum_{j=1}^N \beta_j d\theta_j$$

Доказательство. а. Существование предела и его независимость от начальной точки $x \in M$ следует из эргодической теоремы.

б. Рассмотрим вместо f функцию $\bar{f}$. В этом случае, разница искомых пределов для f и для $\bar{f}$ равно (после применения формулы Ньютона-Лейбница)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(g) \circ \varphi^t(x) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{g(\varphi^T(x)) - g(x)}{T} = 0, \quad (2.9)$$

поскольку g ограничена.

с. Утверждение этого пункта следует из утверждения пункта б. Для доказательства того, что добавление dg не меняет значения пространственного интеграла, мы заменяем этот пространственный интеграл на временное среднее (используя эргодическую теорему), и затем применяем рассуждение, описанное в цепочке равенств (2.9).

d. Первое утверждение этого пункта – это просто применение утверждения пункта с. к частному случаю, $M = \mathbb{T}^n$, $X = \sum_j \omega_j \frac{\partial}{\partial \theta_j}$. Тот факт, что каждая форма имеет своего представителя с постоянными коэффициентами следует из того факта, что $H^1(\mathbb{T}^N, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^N$. В заключение заметим, что чтобы найти интеграл $\int_{\mathbb{T}^N} \beta(X)$ для гладкой формы β , нам достаточно найти ее представителя в группе когомологий с постоянными коэффициентами. $\square$

Форма β , измеряющая изменение аргумента системы не является гладкой, как было замечено ранее. Однако её сингулярную часть можно явно описать.

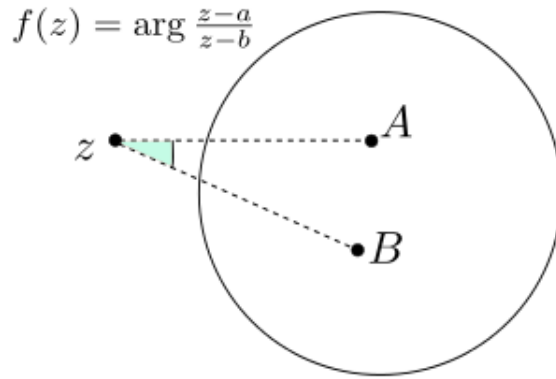


Рис. 2.3. Многозначная функция $f(z) = \arg \frac{z-A}{z-B}$ корректно определена и имеет непрерывное продолжение вне достаточно большого шара, содержащего точки A и B : $f(z)$ это угол между двумя лучами, соединяющими точку z с точками A и B соответственно

Определение 3. Фиксируем две различные точки $A, B \in \mathbb{C}$. Рассмотрим следующую многозначную функцию f на комплексной плоскости $\mathbb{C}$: $f(z) = \arg \frac{z-A}{z-B}$. Эта многозначная функция не может быть непрерывно определена на всей плоскости, однако она корректно определена вне достаточно большого шара $B(R)$, (R —радиус шара), содержащего точки A и B , см. Рис. 2.3. Далее, выберем функцию $\bar{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ так, что $\bar{f} = f$ в $\mathbb{C} \setminus B(R)$ и $\bar{f} \in C^\infty$. Тогда разность $g = f - \bar{f}$ есть многозначная функция такая, что $g = 0$ в $\mathbb{C} \setminus B(R)$ и её дифференциал dg определяет сингулярную 1-форму, которую мы будем называть биполярной формой.

Предложение 3. Для каждой тройки положительных вещественных чисел $l_j, j = 1, 2, 3$, удовлетворяющей всем неравенствам треугольника, лагранжева 1-форма β , ассоциированная с этой тройкой (на фиксированном пути движения цепи) может быть представлена (по модулю эквивалентности в классе когомологий) как сумма регулярной (несингулярной) части и биполярной формы. Иначе говоря, существует гладкая форма $\beta_{\text{reg}} \in H^1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$ и система

координат на торе $\mathbb{T}^2$ такие, что $\beta = \beta_{\text{reg}} + \beta_{\text{sing}}$, где β_{sing} есть биполярная форма с сингулярностями в точках A и B , соответствующих ситуациям, когда цепь проходит через 0 , см. Рис. 2.2.

Доказательство. Это утверждение следует из элементарной теории де Рама. Действительно, разница между исходной формой и соответствующей биполярной формой β_{sing} есть гладкая форма на торе. Поэтому существует ее представление в семействе форм с постоянными коэффициентами. $\square$

Следуя Предложению 2 нам следует посчитать значение $\int_{\mathbb{T}^2} \beta(X)$ лагранжевой формы β на векторном поле $X = \omega_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \omega_3 \frac{\partial}{\partial \theta_3}$. Это сумма значений регулярной и биполярной частей. Для регулярной части, это значение мы подсчитаем как интеграл по тору.

Для биполярной части этот пространственный интеграл $\int_{\mathbb{T}^2} \beta_{\text{sing}}(X)$ можно (из эргодичности) заметить на временное среднее. Форма $\beta_{\text{sing}}(X)$ имеет сингулярности в двух точках, поэтому ее значение на векторном поле есть поток векторного поля X через путь, соединяющий точки $A, B \in \mathbb{T}^2$. Заметим, что путь может быть произвольной непрерывной кривой, однако, когда этот путь выбран, он определяет регулярную часть β_{reg} .

Выберем координаты на двумерном торе $\mathbb{T}^2$ следующим образом. Координаты (θ_2, θ_3) определяют вращающуюся цепь из трех звеньев с неподвижным первым звеном: второй и третий вектор образуют углы θ_2 (соответственно θ_3) с положительным направлением горизонтальной оси (углы отсчитываются против часовой стрелки). В этих координатах точки тора, соответствующие вырожденным положениям вращающейся цепи суть $A = (-\pi + \alpha_3, \pi - \alpha_2)$ и $B = (\pi - \alpha_3, \pi + \alpha_2)$. Выберем путь γ , соединяющий точки A и B и показанный на Рис. 2.4. Этот путь соответствует переходу от одной сингулярности формы β к другой посредством последовательного вращения второго звена, а затем третьего звена цепи. Нам требуется теперь подсчитать поток векторного поля $X = [\omega_2, \omega_3]$ через этот путь. На первом участке, когда угол θ_2 изменяется и

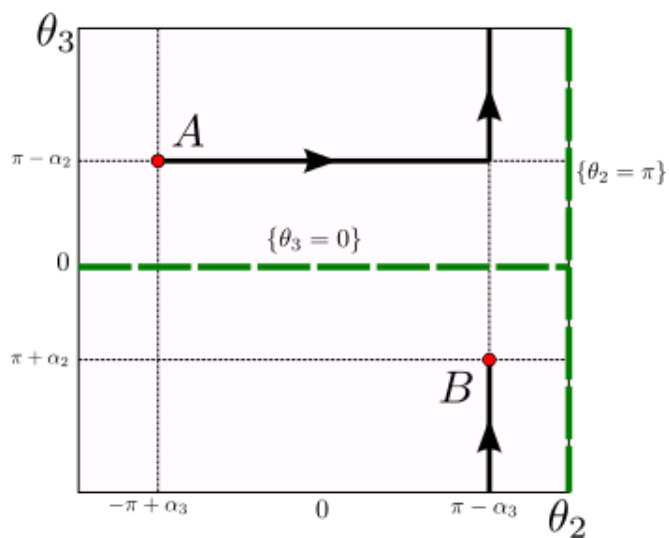


Рис. 2.4. Специально выбранный путь от точки A до точки B , соответствующих сингулярностям формы β : поток векторного поля X по этому пути равен значению биполярной части формы на векторном поле. Также зелёным здесь изображены (соответственно горизонтальный и вертикальный) пути, соответствующие образующим группы кохомологий, соответствующие периодам регулярной части формы β .

$\theta_3 = \pi - \alpha_2$ остается постоянным, поток зависит только от вертикальной компоненты векторного поля, равной ω_3 . Также, траектории трансверсальны пути и пересекают его слева направо, поэтому поток будет подсчитан со знаком. Таким образом, поток по этой части пути равен $-\frac{2\pi-2\alpha_3}{2\pi}\omega_3$, поскольку поток постоянного векторного поля X эргодичен, и поток через отрезок пропорционален длине отрезка. Аналогичным образом подсчитывается поток через вертикальную часть пути γ , он равен $\frac{2\alpha_2}{2\pi}\omega_3$.

Посмотрим теперь на регулярную часть β_{reg} лагранжевой 1-формы β : $\beta_{\text{reg}} = \beta_2 d\theta_2 + \beta_3 d\theta_3$ где $\beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}$. Числа β_2, β_3 являются периодами формы. Чтобы их узнать, мы проинтегрируем форму по путям на торе $\mathbb{T}^2$, соответствующим первой и второй образующей в когомологиях $H^1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$.

Важным здесь является тот факт, что эти пути не должны пересекать выбранный нами путь γ , соединяющий сингулярности. Мы их выбираем так, как показано на Рис. 2.4: геометрически, β_2 соответствует приращению аргумента конца системы, когда $\theta_3 = 0$. В этом случае, аргумент не меняется, когда θ_2 делает полный оборот. Действительно, поскольку стороны удовлетворяют неравенству треугольника, $l_2 < l_1 + l_3$ и второй вращающийся вектор никогда не обойдет ноль, если третий и первый вектора направлены в одну и ту же сторону. Аналогичным образом, $\beta_3 = 1$, поскольку приращение аргумента равно 2π , когда третий отрезок делает один оборот, а второй отрезок фиксирован в направлении $\theta_2 = \pi$. Таким образом, имеем $\beta_{\text{reg}}[\omega_2, \omega_3] = \omega_3$.

Складывая значение биполярной части и регулярной части, мы получим ответ для асимптотической скорости: $\omega = \frac{\alpha_2}{\pi}\omega_2 + \frac{\alpha_3}{\pi}\omega_3$. Возвращаясь обратно к вращающейся цепи, где первый отрезок вращается ($\omega_1 \neq 0$), мы получим ответ в общем случае, $\omega = \omega_1 + \frac{\alpha_2}{\pi}(\omega_2 - \omega_1) + \frac{\alpha_3}{\pi}(\omega_3 - \omega_1) = \sum_j \frac{\alpha_j}{\pi}\omega_j$. Таким образом, Теорема 2 доказана. $\square$

2.2. Задача Лагранжа на произвольной римановой поверхности

Заметим, что задача Лагранжа может быть сформулирована на произвольной римановой поверхности M , если

- M *ориентирована* (это условие нужно для того, чтобы корректно определить угловые скорости и говорить о вращении)
- M *полная* как метрическое пространство (это условие нужно для того, чтобы иметь возможность соединять точки на поверхности геодезическими путями и корректно определить вращающуюся цепь)

Фиксируем некоторую точку $0 \in M$ на поверхности, которая будет базой для вращающейся цепи.

Рассмотрим N отрезков геодезических длин $l_1, l_2, \dots, l_N$ на M так, что они формируют цепь тем же образом, что и в случае вращающейся цепи на евклидовой плоскости. Также фиксируем начальные позиции этих геодезических отрезков (в момент времени $t = 0$). В случае задачи Лагранжа для евклидовой плоскости, углы $\beta_1^0, \dots, \beta_N^0$ использовались для того, чтобы определить исходную позицию вращающейся цепи на евклидовой плоскости с помощью (2.1). Эти углы определялись как углы с общим горизонтальным направлением.

Для произвольной римановой поверхности общее горизонтальное направление не может быть определено, поэтому теперь мы определяем исходные позиции отрезков по отношению к позициям предшествующих интервалов. Таким образом, β_j^0 есть угол между геодезической, соответствующей исходной позиции отрезков с номерами j и $j - 1$, см. Рис.2.5.

Отображение Ψ тора $\mathbb{T}^N$ на поверхность M , соответствующее концу вращающейся цепи отрезков с длинами $l_1, \dots, l_N$ всё ещё может быть определено. Действительно, зафиксировав угловые скорости ω_j , мы можем сказать, что каждый отрезок вращается вокруг конца предыдущего отрезка с соответствующей

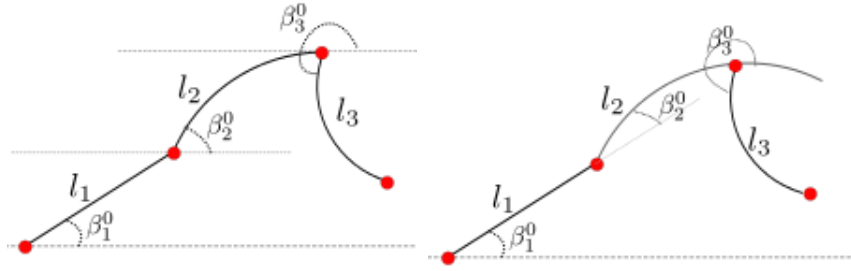


Рис. 2.5. Два различных способа определить начальные позиции отрезков: первый - по отношению к общему горизонтальному направлению (возможный на евклидовой плоскости), второй - по отношению к положению предыдущих отрезков (общий случай).

скоростью (понятие *угла* определено). Таким образом, с помощью линейного векторного поля (2.2) мы определяем движение вращающейся цепи на ориентированной полной поверхности M .

Тот же вопрос об асимптотической угловой скорости (2.3), что и в евклидовом случае, может быть поставлен, если длины l_j достаточно малы для того, чтобы было возможно опеределить локальную карту на комплексной плоскости, моделирующую проблему и корректно определить приращение аргумента.

2.2.1. Поверхности постоянной кривизны

Вопрос о нахождении асимптотической скорости для вращающейся цепи при $N = 3$ на плоскости Лобачевского $M = \mathbb{H}^2$ был поставлен нам А.М. Степиным. Эта задача может быть решена прямым подсчетом в модели Пуанкаре в круге гиперболической плоскости (аналогичным подсчету в евклидовом случае, [107]). Однако, напрямую такое рассуждение требует большого количества вычислений (восьми страниц двойных интегралов). Это было поводом для нас найти более простое рассуждение. Рассуждение, представленное в параграфе 2.1.4 для евклидова случая чисто геометрическое, и может быть обобщено на случай плоскости Лобачевского.

Теорема 4. *Рассмотрим динамику вращающейся цепи типа $l = (l_1, l_2, l_3)$ под*

действием векторного поля (2.2) на плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$. Предположим, что числа l_j удовлетворяют всем трем неравенствам треугольника и что $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ рационально независимы. Тогда асимптотическая скорость (2.3) существует и равна выпуклой комбинации

$$\omega = \frac{\alpha_1 + A}{\pi} \omega_1 + \frac{\alpha_2}{\pi} \omega_2 + \frac{\alpha_3}{\pi} \omega_3 \quad (2.10)$$

где α_j являются углами треугольника, сформированного отрезками со сторонами l_1, l_2, l_3 , а A – его площадь. Угол $\alpha_j > 0$ расположен соответственно напротив стороны l_j .

Доказательство. Доказательство этой теоремы повторяет доказательство в евклидовом случае параграфа 2.1.4. Во-первых, важно заметить, что Предложение 1 выполнено и для гиперболической геометрии (доказательство повторяется дословно), поэтому мы можем считать, что $\omega_1 = 0$. Основной аргумент с применением лагранжевой формы повторяется дословно. Однако, при возвращении к случаю $\omega_1 \neq 0$, ответ изменится, так как сумма углов треугольника в геометрии Лобачевского уже не совпадает с π и окончательным ответом будет формула (2.10). $\square$

Заметим, что ответ для задачи Лагранжа на плоскости Лобачевского несимметричен по отношению к перестановкам отрезков (второй и третий отрезки равноправны, в то время как первый играет особую роль).

Дадим важное

Замечание 1. Заметим, что благодаря Предложению 1, мы можем, переходя к $\omega_1 = 0$, уменьшать размерность фазового пространства с трех до двух. Таким образом, после перехода от системы $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ к системе $(0, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3)$ с $\tilde{\omega}_j = \omega_j - \omega_1$ мы видим, что важным условием для выполнения условий эргодичности является условие рациональной независимости $\tilde{\omega}_2$ и $\tilde{\omega}_3$. Для рационально зависимых $\tilde{\omega}_2$ и $\tilde{\omega}_3$, асимптотическая скорость ω очевидно, также

будет существовать, поскольку система будет периодична. В этом случае, предельная скорость определяется как отношение приращения аргумента за период к длине периода.

Таким образом, асимптотическая скорость ω при $N=3$ существует для любых значений угловых скоростей, а не только в случае рациональной независимости. Факт существования асимптотической скорости для всех значений ω_j для общего N доказан Джессеном и Торнхейвом. Для $N = 3$ в случае геометрии Лобачевского этот результат является новым.

Итак, получен ответ для задачи Лагранжа на евклидовой плоскости и плоскости Лобачевского для вращающейся цепи из трёх звеньев. В случае сферической геометрии, рассуждения, сходные рассуждениям в доказательствах Теорем 2 и 4 повторяются. Однако вращающаяся цепь должна быть не слишком длинной, чтобы аргумент был корректно определен. Таким образом формулировка теоремы для сферического случая такова (важно заметить замену знака):

Теорема 5. Рассмотрим динамику вращающейся цепи типа $l = (l_1, l_2, l_3)$ под действием векторного поля (2.2) на двумерной сфере $\mathbb{S}^2$. Предположим, что числа l_j удовлетворяют всем трем неравенствам треугольника и что сумма $l_1 + l_2 + l_3$ меньше, чем расстояние между двумя полюсами на сфере, а также что $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ рационально независимы. Тогда асимптотическая скорость (2.3) существует и равна выпуклой комбинации

$$\omega = \frac{\alpha_1 - A}{\pi} \omega_1 + \frac{\alpha_2}{\pi} \omega_2 + \frac{\alpha_3}{\pi} \omega_3 \quad (2.11)$$

где α_j являются углами треугольника, сформированного отрезками со сторонами l_1, l_2, l_3 , а A – его площадь. Угол $\alpha_j > 0$ расположен соответственно напротив стороны l_j .

2.2.2. Случай произвольной римановой поверхности: свойство воздушного змея

Рассмотрим задачу Лагранжа на произвольной ориентированной и полной римановой поверхности, см. начало Раздела 2.2, где дается ее формулировка. Различие со случаем постоянной кривизны состоит в отсутствии изотропии и однородности: геометрия поверхности зависит не только от точки, в которой геометрия рассматривается, но и от направления. Эта проблема решается методом усреднения по направлению.

Фиксируем некоторую точку 0 на поверхности и рассмотрим вращающуюся цепь типа (l_1, l_2, l_3) с базой (началом первого отрезка) в точке 0 .

Как видно из основного аргумента параграфа 2.1.4, приращение аргумента происходит, когда конец вращающейся цепи проходит через 0 . Этим моментам соответствуют конфигурации, когда отрезки с длинами l_1, l_2, l_3 формируют треугольники с одной из вершин в нуле так, что отрезки с длинами l_1 и l_3 проходят через эту вершину.

Заметим, что в евклидовой геометрии $M = \mathbb{R}^2$ (а также в гиперболической геометрии $M = \mathbb{H}^2$) выполнено следующее свойство:

Определение 4 (Свойство воздушных змеев на поверхности M). *Мы будем говорить, что ориентированная полная риманова поверхность M обладает свойством воздушных змеев в точке $0 \in M$, если для любых трёх чисел $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих трем неравенствам треугольника и для любого направления $\varphi \in \mathbb{S}^1$ существуют два треугольника на поверхности M со сторонами l_1, l_2, l_3 такие, что*

- *оба эти треугольника имеют вершину в точке 0*
- *для обоих треугольников, стороны с длинами l_1 и l_3 проходят через 0*
- *сторона длины l_1 – общая для обоих треугольников и имеет направление*

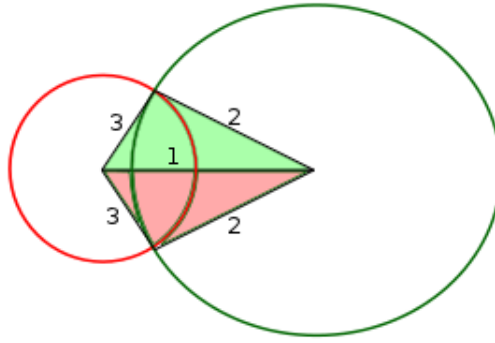


Рис. 2.6. Пересечению двух малых выпуклых дисков на римановой поверхности соответствуют две точки, соответствующие двум вершинам треугольников со сторонами длин l_1, l_2, l_3 .

φ (формально говоря, соответствующий касательный вектор к геодезической пропорционален вектору, определенному $\varphi \in \mathbb{S}^1$)

Это в точности то самое свойство, что мы используем в доказательстве Теорем 2 и 4. В случае геометрий Евклида и Лобачевского углы α_1, α_2 и α_3 в треугольниках, формирующих воздушного змея, не меняются при изменении $\varphi \in \mathbb{S}^1$.

Для случая произвольной поверхности свойство воздушных змеев может не выполняться. Также соответствующие углы (если они существуют) $\alpha_1(\varphi)$, $\alpha_2(\varphi)$, $\alpha_3(\varphi)$ являются функциями направления φ первого отрезка.

Однако заметим, что несмотря на то, что свойство воздушных змеев не выполнено в общем, оно выполнено для достаточно малых длин l_1, l_2, l_3 .

Предложение 4. Для любой полной ориентированной римановой поверхности M свойство воздушных змеев выполнено для достаточно малых $l_1, l_2, l_3 < l = l(M)$, где константа $l(M)$ зависит от поверхности.

Доказательство. Это свойство практически очевидно и следует из того факта, что малые диски являются выпуклыми множествами на любой римановой поверхности. Поэтому диск радиуса l_2 с центром в конце отрезка длиной l_1 пересечет диск радиуса l_3 с центром в точке 0 ровно в двух точках, см. Рис. 2.6. Эти две точки будут соответствовать третьим вершинам треугольников, которые

нас интересуют.

Конечно, углы этих треугольников будут зависеть от направления φ . $\square$

Теперь мы можем сформулировать ответ на задачу Лагранжа в случае произвольной римановой поверхности.

2.2.3. Формулировка и доказательство

Теорема 6. *Рассмотрим произвольную ориентированную полную риманову поверхность M и динамику вращающейся цепи типа (l_1, l_2, l_3) на ней под действием векторного поля*

$$X = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \omega_3 \frac{\partial}{\partial \theta_3} \quad (2.12)$$

на трехмерном торе $\mathbb{T}^3$ (см. параграф 2.1.1 с определениями). Предположим, что базовая точка цепи $-0 \in M$. Также предположим, что угловые скорости $\omega_j \in \mathbb{R}$ рационально независимы. Тогда для любой вращающейся цепи с достаточно малыми длинами звеньев l_j (настолько, что выполняется свойство воздушных змеев), асимптотическая угловая скорость существует и равна

$$\omega = \omega_1 \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_2}{\pi} - \frac{\bar{\alpha}_3}{\pi} \right) + \frac{\bar{\alpha}_2}{\pi} \omega_2 + \frac{\bar{\alpha}_3}{\pi} \omega_3,$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} \alpha_2(\varphi) d\varphi, \\ \bar{\alpha}_3 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} \alpha_3(\varphi) d\varphi \end{aligned}$$

суть средние значения углов. Параметр φ приходит из определения свойства воздушных змеев.

Доказательство. Поскольку эта задача а priori не обладает вращательной симметрией (относительно 0), мы не можем перейти к случаю $\omega_1 = 0$, и утверждение Предложения 1 может быть неверно. Поэтому мы будем рассматривать трехмерный тор $\mathbb{T}^3$ с координатами $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$.

Однако в целом, доказательство будет повторять шаг за шагом доказательство параграфа 2.1.4. Аналогичным образом мы определим лагранжеву 1-форму, задающую (вместе с векторным полем (2.12)) динамику вращающейся цепи. Эта форма, как и ранее, имеет регулярную и сингулярную части, $\beta = \beta_{\text{reg}} + \beta_{\text{sing}}$.

Как и ранее, интересующая нас асимптотическая скорость задается значением этой формы на векторном поле X . Значение регулярной части есть интеграл по пространству, а для подсчета значения сингулярной части мы рассмотрим поток сквозь поверхность с границей, состоящей из сингулярностей формы (в доказательстве для евклидова случая, см. параграф 2.1.4, мы имели дело с потоком по пути, однако здесь размерность увеличилась на единицу).

Множество сингулярностей формы β для малых l_j есть объединение двух окружностей. Для каждого значения угла θ_1 (или, иначе говоря, φ , см. свойство воздушных змеев), в множестве сингулярностей находятся две точки на торе $\mathbb{T}^3$, соответствующие треугольникам с углами $\alpha_j(\varphi)$, $j = 1, 2, 3$. Итак, чтобы посчитать значение формы β_{sing} на X , нам требуется посчитать поток векторного поля X через цилиндр, границей которого является объединение окружностей, состоящих из точек, соответствующих положениям вращающейся цепи в те моменты, когда она замыкается в треугольник, см. Рис. 2.7.

Мы представим этот цилиндр как объединение отрезков с фиксированным θ_1 . Эти пути аналогичны путям в доказательстве для случая постоянной кривизны.

Потоки второй и третьей компонент векторного поля вдоль пути с фиксированным $\theta_1 = \varphi$ будет равен тем же значениям, что и раньше: $\frac{\alpha_2(\varphi)}{\pi}\omega_2$ и $-\frac{2\pi-2\alpha_3(\varphi)}{2\pi}\omega_3$.

Поскольку первая (θ_1) компонента векторного поля ортогональна любому из этих путей, мы получим, что вклад этой компоненты будет равен длине пути (с учетом знака): $\omega_1 \left(\frac{2\pi-2\alpha_3(\varphi)}{2\pi} - \frac{2\alpha_2(\varphi)}{2\pi} \right)$.

Теперь, складывая вклады для каждого φ , мы возьмем среднее по φ , когда

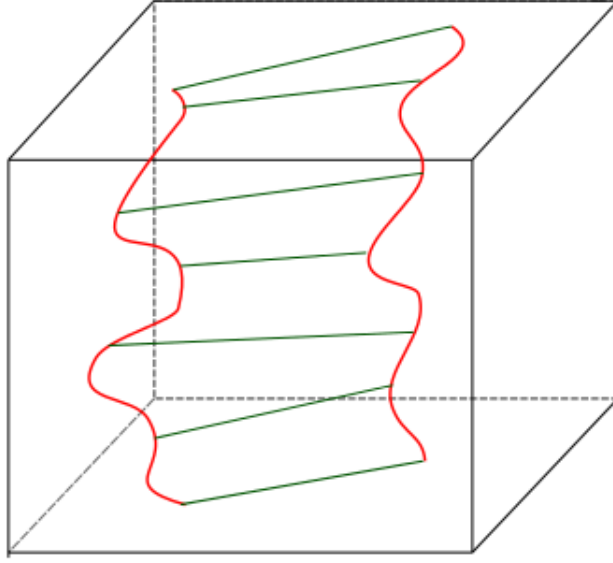


Рис. 2.7. Подсчет асимптотической угловой скорости связан с подсчетом потока векторного поля X через цилиндр, слоеный на отрезки $\theta_1 = \text{const}$, изображенные на этом рисунке. Куб на картинке - фундаментальная область для трехмерного тора $\mathbb{T}^3$: противоположные грани отождествлены.

θ_1 меняется и мы получим значение сингулярной части формы β на X :

$$\beta_{\text{sing}}[X] = \omega_1 \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_2}{\pi} - \frac{\bar{\alpha}_3}{\pi} \right) + \frac{\bar{\alpha}_2}{\pi} \omega_2 + \left(-1 + \frac{\bar{\alpha}_3}{\pi} \right) \omega_3$$

Для регулярной части формы, $\beta_{\text{reg}} = \beta_1 d\theta_1 + \beta_2 d\theta_2 + \beta_3 d\theta_3$, где $\beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}$. Как и ранее, числа β_2, β_3 суть периоды формы β_{reg} . Чтобы их посчитать, мы проинтегрируем эту форму по путям в $\mathbb{T}^3$, соответствующим образующим в ко-гомологиях $H^1(\mathbb{T}^3, \mathbb{Z})$. Здесь важно то, что эти пути не пересекают выбранный нами цилиндр с границей на сингулярном множестве.

Для фиксированного θ_1 , пути для определения β_2 и β_3 могут быть выбраны как и ранее и мы получим $\beta_2 = 0, \beta_3 = 1$. Для подсчета β_1 мы выберем путь, на котором $\theta_2 = \theta_3 = 0$ и θ_1 меняется линейным образом: очевидно, он не пересекает выбранный цилиндр. Этот путь даст нулевое приращение аргумента. Это следует из неравенства треугольника: сумма $l_2 + l_3$ больше l_1 , таким образом $\beta_{\text{reg}}[\omega_1, \omega_2, \omega_3] = \omega_3$.

Складывая значения для регулярной и сингулярной части, мы получим ответ в общем случае. $\square$

Глава 3

Марковские цепи и эргодическая теория для действий свободной группы

В данной Главе мы доказываем эргодическую теорему для действий свободной конечно-порожденной группы на вероятностном пространстве сохраняющими меру преобразованиями. А именно, мы снабжаем множество порождающих этой группы (вместе с обратными к порождающим) обобщенной марковской цепью и доказываем сходимость соответствующих сферических средних при довольно слабых условиях невырожденности на стохастическую матрицу Π , определяющую нашу марковскую цепь. Другими словами, мы доказываем тривиальность хвостовой сигма-алгебры соответствующего марковского оператора. Эта сходимость ранее была известна только для симметричных марковских цепей в то время как условия в установленной нами теореме являются неравенствами, а не равенствами как в предыдущих работах. Таким образом, сходимость сферических средних доказана для намного более широкого класса марковских цепей. Перейдем теперь к основным определениям.

3.1. Введение

Рассмотрим конечно порождённую свободную группу $\mathbb{F}$ и вероятностное пространство (X, μ) .

Пусть $T : \mathbb{F} \rightarrow \text{Aut}(X, \mu)$ — гомоморфизм группы $\mathbb{F}$ в группу сохраняющих меру преобразований пространства (X, μ) . Мы рассматриваем конечный алфавит V с отображением кодирования $\mathcal{L} : V \rightarrow \mathbb{F}$.

Мы будем изучать произвольную марковскую цепь с пространством состояний V . А именно, возьмём стохастическую матрицу $\Pi = (\Pi_{v,w})_{v,w \in V}$, строки и столбцы которой пронумерованы элементами алфавита V (то есть, $\sum_w \Pi_{v,w} = 1$

для каждого v). Мы предполагаем, что у Π есть стационарное распределение $\nu : V \rightarrow [0, 1]$, причём $\nu(v) > 0$ для всех $v \in V$. Стационарность означает, что $\sum_{v \in V} \Pi_{w,v} \nu(v) = \nu(w)$ для каждого w .

Пусть $G = (V, E)$ — ориентированный граф, множество вершин которого совпадает с V , а множество рёбер определено так:

$$E := \{(w, v) : \Pi_{vw} > 0\}.$$

Порядок в паре (w, v) намеренно сделан обратным к порядку в паре (v, w) , которая встречалась выше.

Под *ориентированным путём* в графе G мы подразумеваем такую последовательность $s = (s_1, \dots, s_n) \in V^n$ вершин, что $(s_i, s_{i+1}) \in E$ для всех i . Длина такого пути равна $|s| := n$. Для каждого из таких путей мы обозначаем

$$\mathcal{L}(s) = \mathcal{L}(s_1) \cdots \mathcal{L}(s_n) \in \mathbb{F}, \quad T_s = T_{\mathcal{L}(s)} \in \text{Aut}(X, \mu), \quad \Pi_s = \Pi_{s_n s_{n-1}} \cdots \Pi_{s_2 s_1}.$$

Определим сферические средние $S_n : L^1(X, \mu) \rightarrow L^1(X, \mu)$ по формуле

$$S_n(\phi)(x) := \sum_{s=(s_1, \dots, s_n)} \nu(s_n) \Pi_s \phi(T_s x) \quad (3.1)$$

Цель данной работы — доказать, что при слабых дополнительных условиях на Π существует такая константа k , что средние $\frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{2^k-1} S_{n+i}$ эргодичны в среднем в L^1 . Для того, чтобы чётко сформулировать эти условия, нам потребуется ещё несколько обозначений.

Обозначение 1. Если $p \in V^k$ и $q \in V^l$, то пусть $pq \in V^{k+l}$ — их конкатенация. То есть, если $p = (p_1, \dots, p_k)$ и $q = (q_1, \dots, q_l)$, то $pq = (p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l)$. Через $\mathcal{L}(p) = \mathcal{L}(p_1) \cdots \mathcal{L}(p_k) \in \mathbb{F}$ обозначим произведение соответствующих меток.

Определение 1. Подграф $H \subset G$ — *хороший* порядка k , если он состоит из вершин u, w и ориентированных путей p, q, p^*, q^* длины k , таких, что

- urw, uqw, pq^*p, qp^*q — ориентированные пути в G
- $\mathcal{L}(p^*) = \mathcal{L}(p)^{-1}, \mathcal{L}(q^*) = \mathcal{L}(q)^{-1}$

Рисунок 3.1 иллюстрирует структуру хорошего подграфа. Мы не требуем, чтобы хороший подграф обязательно был индуцированным.

Определение 2. Для каждого символа $v \in V$ обозначим через $\Gamma_v \leq \mathbb{F}$ подгруппу, порождённую всеми элементами вида $\mathcal{L}(p)$, где pv — ориентированный путь в G , который начинается и заканчивается в вершине v . Более точно, условие на p следующее: p — ориентированный путь вида $p = (p_1, \dots, p_n) \in V^n$, такой, что $p_1 = v$ и $(p_n, v) \in E$ — ребро в G .

Определение 3. Будем говорить, что рассмотренная выше матрица — *Π допустимая* порядка k , если для неё выполнены следующие условия:

- Соответствующий граф G содержит хороший подграф порядка k ,
- Граф G сильно связан и
- Существует такой символ $v \in V$, что $\Gamma_v = \mathbb{F}$.

Теорема 1. Пусть матрица Π — допустимая порядка k . Тогда для любого сохраняющего вероятностную меру действия $\mathbb{F} \curvearrowright (X, \mu)$ и любой функции $f \in L^1(X, \mu)$ выражение

$$\frac{1}{2k} \sum_{i=0}^{2k-1} S_{n+i} f$$

при $n \rightarrow \infty$ сходится в L^1 к $\mathbb{E}[f|\mathbb{F}]$, то есть, к условному математическому ожиданию относительно сигма-алгебры $\mathbb{F}$ -инвариантных измеримых подмножеств.

Замечание 3. Заметим, что условия на Π зависят только от того, какие элементы этой матрицы больше нуля, а какие равны нулю. В частности, мы не предполагаем, что между элементами марковской цепи есть какие-либо соотношения.

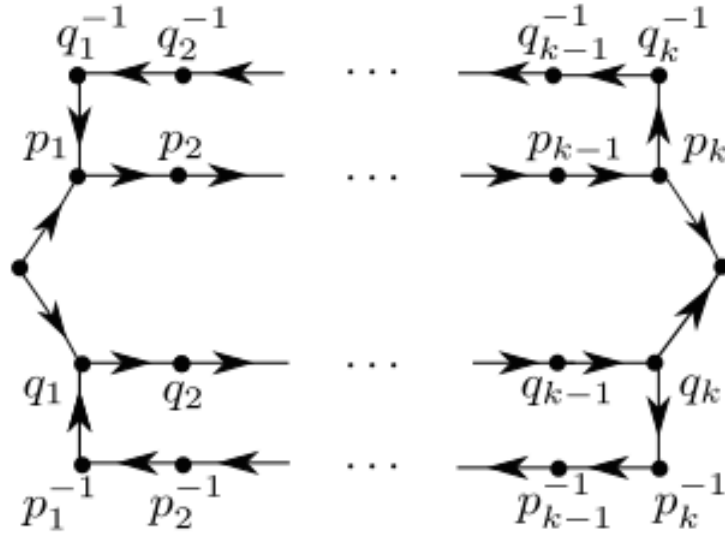


Рис. 3.1. Хороший подграф с путями $p = (p_1, \dots, p_k)$ и $q = (q_1, \dots, q_k)$ из определения 1. Здесь использованы такие обозначения: $p^* = (p_k^{-1}, \dots, p_1^{-1})$, $q^* = (q_k^{-1}, \dots, q_1^{-1})$.

Проверить, является ли матрица Π допустимой – это несложная задача. Например, рассмотрим такой случай:

Предложение 1. Пусть множество V конечно и отображение $\mathcal{L} : V \rightarrow \mathbb{F}$ инъективно, тогда мы можем отождествить V с подмножеством $\mathbb{F}$. Кроме этого, пусть G сильно связан и обладает следующим свойством: если $(a, b) \in E$, то и $(b^{-1}, a^{-1}) \in E$ (обратный элемент здесь берётся в группе $\mathbb{F}$). Тогда, если существуют такие три вершины $v, w, u \in V$, что $(v, w), (u, w), (u, v^{-1}) \in E$ (см. Рис. 3.2), то G содержит хороший подграф. То есть, если есть такая вершина $v \in V$, что $\Gamma_v = \mathbb{F}$, то выполнено утверждение теоремы 1.

Доказательство. Заметим, что $(v, u^{-1}), (w^{-1}, v^{-1}) \in E$. Поскольку G сильно связан и конечен, существует такое число k , что для любой упорядоченной пары вершин графа G между этими вершинами есть ориентированный путь длины k . В частности, существуют пути $p := (p_1, \dots, p_k)$ из $p_1 := w$ в $p_k := v$ и $q := (q_1, \dots, q_k)$ из $q_1 := v^{-1}$ в $q_k := u$. Теперь несложно проверить, что upw, uqw, pq^*p, qr^*q , где p^* — единственный ориентированный путь в G , для которого $\mathcal{L}(p^*) = \mathcal{L}(p)^{-1}$, являются ориентированными путями в графе G $\square$

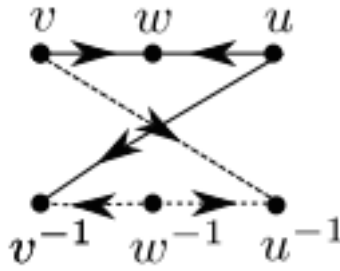


Рис. 3.2. Достаточное условие для того, чтобы граф G содержал хороший подграф, см. предложение 1

3.1.1. Обзор литературы

Сходимость сферических средних для двух поворотов сферы была установлена Арнольдом и Крыловым [38], а общая теорема об эргодичности в среднем для действий свободной группы была доказана Гиваршем [39].

Первая общая поточечная эргодическая теорема для свёрточных средних на счётной группе принадлежит Оселедцу [40], который использовал теорему о сходимости мартингалов.

Первые общие поточечные эргодические теоремы для свободных полугрупп и групп были сформулированы Р.И.Григорчуком в 1986 г. в работе [41], главный результат которой — сходимость по Чезаро сферических средних для сохраняющих меру действий на свободной полугруппе или группе. Сходимость самих сферических средних была доказана Нево [42] для функций из L_2 , и Нево и Стейном [43] для функций из L_p , $p > 1$ с использованием глубоких методов спектральной теории.

До сих пор остаётся открытым вопрос о том, сходятся ли почти наверное равномерные сферические средние интегрируемой функции относительно действия свободной группы (было бы очень интересно поискать возможный контрпример, следуя примеру Орнштейна [44]). Метод марковских операторов в доказательстве эргодических теорем для действий свободных групп и полугрупп был предложен Р.И.Григорчуком [45], Ж.-П. Тувено (в устной беседе) и в рабо-

те [46]. В работе [47] поточечная сходимость для марковских сферических средних доказана при дополнительном предположении об обратимости марковской цепи. Ключевой шаг работы [47] — это тривиальность хвостовой сигма-алгебры для соответствующего марковского оператора; она доказана с помощью «Alternierende Verfahren» Роты [48], то есть, с помощью сходимости мартингалов. Редукция степеней марковского оператора к «Alternierende Verfahren» Роты в работе in [47] в основном опирается на обратимость марковской цепи. В этой работе мы показываем, что тривиальность хвостовой сигма-алгебры верна и при намного более слабых предположениях относительно свойств марковской цепи.

Изучение марковских средних мотивировано проблемой эргодических теорем для счётных групп вообще, а особенно — для групп, допускающих марковское кодирование, например, для гиперболических по Громову групп [49] (см., например работу Жиса и де ля Арпа [50], где марковское кодирование для гиперболических по Громову групп подробно рассмотрено). Первые результаты, связанные со сходимостью сферических средних для гиперболических по Громову групп, полученные в предположении о сильном экспоненциальном перемешивании действия, принадлежат Фудживаре и Нево [51]. Эргодическая теорема для действий гиперболических групп на конечных пространствах была получена Боуэном в работе [52].

Сходимость по Чезаро сферических средних для всех сохраняющих меру действий марковских полугрупп и, в частности, гиперболических по Громову групп, была получена Буфетовым, Клименко и Христофоровым в работе [53]. Для гиперболических групп короткое и очень элегантное доказательство этой теоремы, которое использовало метод Калегари и Фудживары [54], было дано позднее Полликоттом и Шарпом [55]. Используя метод так называемых аменабельных отношений эквивалентности (amenable equivalence relations), Боуэн и Нево [56], [57], [58], [59] получили эргодические теоремы для так называемых сферических оболочек («spherical shells») в гиперболических по Громову групп

пах. В этой работе предположений о перемешивании уже не требуется.

3.1.2. Примеры

Равномерные сферические средние

Рассмотрим специальный случай, когда $\mathbb{F} = \langle a_1, \dots, a_r \rangle$ и $V = \{a_1, \dots, a_r\} \cup \{a_1^{-1}, \dots, a_r^{-1}\} \subset \mathbb{F}$. Пусть $\mathcal{L} : V \rightarrow \mathbb{F}$ — отображение вложения, а

$$\Pi_{a,b} = \begin{cases} \frac{1}{2r-1}, & \text{если } a \neq b^{-1}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть ν — стационарное распределение, равномерно распределённое на V . В этом случае матрица Π — допустимая порядка 1, и S_n — равномерное среднее на сфере радиуса n с центром в единице группы $\mathbb{F}$. То есть,

$$S_n(\phi)(x) = |\{g \in \mathbb{F} : |g| = n\}|^{-1} \sum_{|g|=n} \phi(T_g x)$$

для $\phi \in L^1(X, \mu)$ и $x \in X$, и из теоремы 1 следует теорема об эргодичности в среднем для средних $\frac{S_n + S_{n+1}}{2}$. Этот результат был впервые получен Гиваршем [39].

Пример: фундаментальная группа поверхности

Обозначим через $\Lambda = \langle a, b, c, d | [a, b][c, d] = 1 \rangle$ фундаментальную группу замкнутой поверхности рода 2. Существует естественное марковское кодирование этой группы, исследованное Боуэном и Сириес [60], которое используется в работе [61] для доказательства поточечной эргодической теоремы для средних по Чезаро сферических средних (относительно словарной метрики на этой группе). Используя это кодирование и теорему 1, мы покажем:

Следствие 1. Существует такая последовательность π_n вероятностных мер на Λ , что

- носитель π_n — это объединение сфер радиуса n и $n+1$ с центром в единице группы Λ (относительно словарной метрики);
- π_n эргодична в среднем в L^1 в следующем смысле: если $\Lambda \curvearrowright (X, \mu)$ — это действие, сохраняющее вероятностную меру, и $f \in L^1(X, \mu)$, то средние $\pi_n(f) \in L^1(X, \mu)$, определённые следующим образом:

$$\pi_n(f)(x) = \sum_{g \in \Lambda} \pi_n(g) f(g^{-1}x)$$

сходятся в $L^1(X, \mu)$ к $\mathbb{E}[f|\Lambda]$, то есть, к условному математическому ожиданию f относительно сигма-алгебры Λ -инвариантных подмножеств.

Объясним, как устроено это кодирование. Обозначим через $\mathcal{R}$ правильный восьмиугольник на гиперболической плоскости (которую мы отождествляем с единичным диском $\mathbb{D}$ в комплексной плоскости), все внутренние углы которого равны $\pi/4$. Это — фундаментальная область действия группы Λ на диске $\mathbb{D}$ изометриями. Можно добиться, что бы если $S = \{a, b, c, d, a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, d^{-1}\}$, то для любого элемента $s \in S$ множество $\mathcal{R} \cap s\mathcal{R}$ было бы ребром $\mathcal{R}$.

Пусть $\mathcal{T} = \cup_{g \in \Lambda} g\partial\mathcal{R}$ — это объединение границ образов $\mathcal{R}$ при действии Λ . Можно представлять себе $\mathcal{T}$ как объединение бесконечных в обе стороны геодезических. Обозначим через $\mathcal{P} \subset \partial\mathbb{D}$ набор концов тех геодезических из множества $\mathcal{T}$, которые пересекают $\mathcal{R}$ (очень важно, что в этот набор входят прямые, которые пересекают $\partial\mathcal{R}$ только в вершине многоугольника $\mathcal{R}$). Точки $\mathcal{P}$ разбивают $\partial\mathbb{D} - \mathcal{P}$ на связные открытые интервалы; обозначим набор всех этих интервалов через $\mathcal{I}$, см. рис.3.3.

Рассмотрим ребро $\mathcal{R} \cap s\mathcal{R}$ для элемента $s \in S$. Это ребро содержится в бесконечной в обе стороны геодезической, которая разделяет гиперболическую плоскость на два полупространства. Через $L(s)$ обозначим открытую дугу окружности $\partial\mathbb{D}$, которая ограничивает полупространство, содержащее $s\mathcal{R}$. Для каждого интервала $I \in \mathcal{I}$ обозначим через $s_I \in S$ такой элемент, что $I \subset L(s_I)$. Для каждого I есть либо один, либо два способа выбрать s_I . Опре-

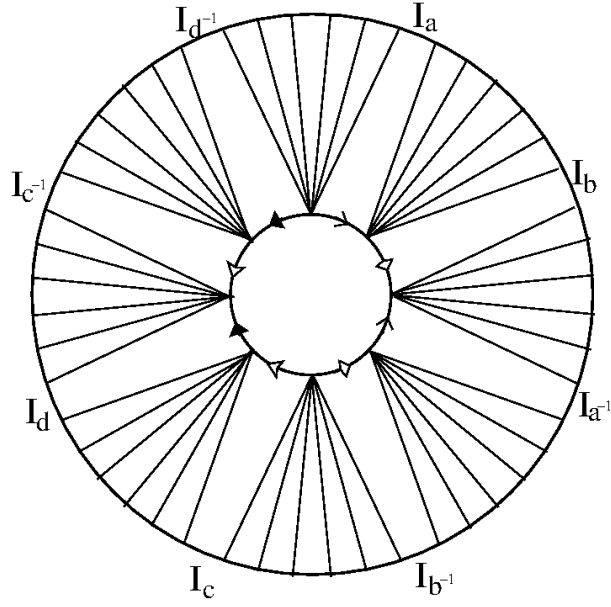


Рис. 3.3. Область $\mathcal{R}$ на гиперболической плоскости (в искажённом виде) и все геодезические разбиения $\mathcal{T}$, пересекающие $\mathcal{R}$. Каждый внутренний угол, вершина которого лежит на меньшей окружности, равен $\pi/4$. Всего в $\mathcal{I}$ 48 интервалов, и только 8 специальных интервалов помечены.

делим $f : \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\mathbb{D}$ так: $f(x) = s_I^{-1}x$ для $x \in I$. Как было замечено в работах [60, 62], отображение f — марковское в том смысле, что если J — интервал из набора $\mathcal{I}$ и $f(I) \cap J \neq \emptyset$, то $f(I) \supset J$.

Пусть $V = \mathcal{I}$, $E = \{(I, J) \in V \times V : f(I) \supset J\}$, $G = (V, E)$ — соответствующий ориентированный граф, $\mathbb{F} = \langle a, b, c, d \rangle$ — свободная группа ранга 4 и $\mathcal{L} : V \rightarrow \mathbb{F}$ — отображение, для которого $\mathcal{L}(I) = s_I$. Мы распространяем отображение $\mathcal{L}$ на множество всех конечных ориентированных путей в G способом, который был описан во введении. В работе [62, Теорема 5.10, Следствие 5.11] (см. также [63, Теорема 2.8]), доказано следующее:

Лемма 1. Пусть $\pi : \mathbb{F} \rightarrow \Lambda$ — каноническая сюръекция $\pi(s) = s$, где $s \in S$. Тогда для каждого элемента $g \in \Lambda - \{e\}$ есть единственный такой элемент $w \in \mathbb{F}$, что

1. $\pi(w) = g$;
2. существует такой ориентированный путь p в графе G , что $\mathcal{L}(p) = w$.

Более того, длина слова w равна длине слова g .

Теорема 2. Если $\Pi = (\Pi_{v,w})_{v,w \in V}$ — стохастическая матрица и $\Pi_{v,w} > 0$ для всех $(w, v) \in E$, то эта матрица — допустимая порядка 1.

Доказательство. В работе [61] показано, что матрица смежности графа G неприводима, или, что эквивалентно, граф G строго связан.

Для $s \in S$, пусть $I_s \subset \mathcal{I} = V$ — единственный интервал, который содержится в $\mathcal{L}(s) \setminus \cup_{t \neq s} \mathcal{L}(t)$. Прямая проверка показывает, что для любых $s, t \in S$ $(I_s, I_t) \in E$ тогда и только тогда, когда $t \neq s^{-1}$ и вершины I_t и $I_{s^{-1}}$ — не соседние. Пусть, например, из I_a в $I_c, I_{c^{-1}}, I_d$ и $I_{d^{-1}}$ направлены ориентированные рёбра, но ориентированных рёбер из I_a в $I_{a^{-1}}, I_b$ или $I_{b^{-1}}$ нет. Кроме этого, есть петля из I_a в себя. В этом случае если $v = a$, то группа Γ_v содержит $\mathcal{L}(I_a) = a$, $\mathcal{L}(I_a, I_c) = ac$, $\mathcal{L}(I_a, I_d, I_c) = adc$, $\mathcal{L}(I_a, I_d, I_b) = adb$. Так как a, ac, adc, adb порождают группу $\mathbb{F}_4$, то $\Gamma_v = \mathbb{F}_4$.

Пусть $u = w = I_a$, $p = (I_a)$, $q = (I_c)$, $p^* = (I_{a^{-1}})$, $q^* = (I_{c^{-1}})$. Тогда

- upw, uqw, pq^*p, qr^*q — ориентированные пути в графе G ;
- $\mathcal{L}(p^*) = \mathcal{L}(p)^{-1}$, $\mathcal{L}(q^*) = \mathcal{L}(q)^{-1}$.

Значит, G содержит хороший подграф порядка 1. □

Следствие 1 сразу следует из леммы 1 и теорем 2 и 1.

3.1.3. Схема доказательства

Мы рассматриваем *отношение эквивалентности синхронных хвостов* $\mathcal{R}_{sync}$ на множестве $V^{\mathbb{N}}$, заданное так:

$$\mathcal{R}_{sync} = \{(s, t) \in V^{\mathbb{N}} \times V^{\mathbb{N}} : \exists N (s_i = t_i \ \forall i \geq N)\}.$$

Для натурального числа $k > 0$ мы рассматриваем также *отношение эквивалентности асинхронных хвостов со сдвигом на k* на $V^{\mathbb{N}}$, которое задано так:

$$\mathcal{R}_k = \{(s, t) \in V^{\mathbb{N}} \times V^{\mathbb{N}} : \exists p \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N} (s_{pk+i} = t_i \ \forall i \geq N)\}.$$

Обозначим через $\sigma : V^{\mathbb{N}} \rightarrow V^{\mathbb{N}}$ отображение сдвига $\sigma(s)_i = s_{i+1}$. Заметим, что отношение $\mathcal{R}_k$ порождено $\mathcal{R}_{sync}$ и отношением эквивалентности орбит σ^k , поэтому существует следующее естественное вложение:

$$\mathcal{R}_{sync} \subset \mathcal{R}_k \subset \mathcal{R}_1.$$

Более обще, $\mathcal{R}_k \subset \mathcal{R}_d$, если $d \mid k$. Кроме этого, существует коцикл $\alpha : \mathcal{R}_1 \rightarrow \mathbb{F}$, определённый так:

$$\alpha(s, t) = \mathcal{L}(s_1) \cdots \mathcal{L}(s_{N+p}) \cdot (\mathcal{L}(t_1) \cdots \mathcal{L}(t_N))^{-1},$$

где числа N, p — такие, что $s_{p+i} = t_i \ \forall i \geq N$.

Для сохраняющего меру действия $\mathbb{F} \curvearrowright (X, \mu)$ на вероятностном пространстве и подотношения эквивалентности $\mathcal{S}$ (которое является подотношением $\mathcal{R}_1$), мы обозначаем через $\mathcal{S}^X$ отношение эквивалентности на $V^{\mathbb{N}} \times X$:

$$\mathcal{S}^X = \left\{ ((s, x), (t, y)) : s\mathcal{S}t, \alpha(t, s)x = y \right\}.$$

Для подотношения эквивалентности $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}_1$ обозначим через $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}^X$ сигма-алгебру измеримых подмножеств множества $V^{\mathbb{N}} \times X$, которые являются объединениями классов эквивалентности по отношению $\mathcal{S}^X$. Другими словами, $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}^X$ — $\mathcal{S}^X$ -инвариантная сигма-алгебра.

Для удобства мы обозначим через $\mathcal{F}_{sync}^X$ и $\mathcal{F}_k^X$ соответственно $\mathcal{R}_{sync}^X$ и $\mathcal{R}_k^X$ -инвариантные сигма алгебры. Основным техничеким шаг в доказательстве теоремы 1 следующий:

Теорема 3. Если ориентированный граф G содержит хороший подграф (как в определении 1), то $\mathcal{F}_{2k}^X = \mathcal{F}_{sync}^X$ (с точностью до множеств меры нуль).

Мы докажем эту теорему в следующем параграфе, а в §3.3 выведем из неё теорему 1.

3.2. Доказательство теоремы 3

Пусть $u, w \in V$, а p, q, p^*, q^* — ориентированные пути в G , удовлетворяющие условиям из определения 1. Нам потребуется ещё несколько обозначений:

Обозначение 2. Пусть $s_{[n,m]} = (s_n, s_{n+1}, \dots, s_m) \in V^{m-n+1}$, где $s \in V^{\mathbb{N}}$ и $n < m$ — натуральные числа. Пусть, кроме того, $s_{[n,\infty)} = (s_n, s_{n+1}, \dots) \in V^{\mathbb{N}}$.

Введём следующие обозначения:

- $\tau_n : V^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$ — время n -го появления upq или uqw . Другими словами, $\tau_n(s)$ — наименьшее такое натуральное число, что существуют $i_1 < i_2 < \dots < i_n$, где $i_n = \tau_n(s)$, такие, что для каждого j

$$s_{[i_j, i_j+k+1]} \in \{upw, uqw\}.$$

- $\omega_n : V^{\mathbb{N}} \rightarrow V^{\mathbb{N}}$ — отображение, определённое так:

$$\omega_n(s) = \begin{cases} s_{[1, \tau_n(s)]} q s_{[\tau_n(s)+k+1, \infty)} & \text{if } s_{[\tau_n(s), \tau_n(s)+k+1]} = upw \\ s_{[1, \tau_n(s)]} p s_{[\tau_n(s)+k+1, \infty)} & \text{if } s_{[\tau_n(s), \tau_n(s)+k+1]} = uqw \end{cases}$$

- Заметим, что отображение ω_n обратимо. Поэтому можно определить $\psi_n : V^{\mathbb{N}} \rightarrow V^{\mathbb{N}}$ так:

$$\begin{aligned} (\psi_n \omega_n(s)) &= \begin{cases} \omega_n(s)_{[2k+1, \tau_n(s)+k]} p^* \omega_n(s)_{[\tau_n(s)+1, \infty)}, & \text{если } s_{[\tau_n(s), \tau_n(s)+k+1]} = upw \\ \omega_n(s)_{[2k+1, \tau_n(s)+k]} q^* \omega_n(s)_{[\tau_n(s)+1, \infty)}, & \text{если } s_{[\tau_n(s), \tau_n(s)+k+1]} = uqw \end{cases} \\ &= \begin{cases} s_{[2k+1, \tau_n(s)]} q p^* q s_{[\tau_n(s)+k+1, \infty)}, & \text{если } s_{[\tau_n(s), \tau_n(s)+k+1]} = upw \\ s_{[2k+1, \tau_n(s)]} p q^* p s_{[\tau_n(s)+k+1, \infty)}, & \text{если } s_{[\tau_n(s), \tau_n(s)+k+1]} = uqw \end{cases} \end{aligned}$$

- Напомним, что ν — это Π -стационарная мера на V . Пусть $\tilde{\nu}$ — соответствующая мера на $V^{\mathbb{N}}$. Более точно, для любых $t_1, \dots, t_n \in V$,

$$\tilde{\nu}(\{s \in V^{\mathbb{N}} : s_i = t_i \ \forall 1 \leq i \leq n\}) = \nu(t_n) \Pi_t = \nu(t_n) \Pi_{t_n, t_{n-1}} \cdots \Pi_{t_2, t_1}.$$

- Пусть $C > 0$ — такая константа, что почти всюду

$$C^{-1} \leq \frac{d(\omega_n^{-1})_* \tilde{\nu}}{d\tilde{\nu}}(s) \leq C, \quad C^{-1} \leq \frac{d((\psi_n \omega_n)^{-1})_* \tilde{\nu}}{d\tilde{\nu}}(s) \leq C$$

Существование такой константы следует из того, что V конечно (поэтому отношение двух элементов матрицы Π равномерно ограничено сверху) и из явных вычислений с использованием приведённых выше формул.

Напомним, что отображение $\sigma : V^{\mathbb{N}} \rightarrow V^{\mathbb{N}}$ определено по формуле $\sigma(s)_i = s_{i+1}$. Обозначим через $d_{V^{\mathbb{N}}}$ функцию расстояния на $V^{\mathbb{N}}$, определённую так: $d_{V^{\mathbb{N}}}((s_1, s_2), (t_1, t_2)) = \frac{1}{n}$, где n — наибольшее такое натуральное число, что $s_i = t_i$ для всех $i < n$.

Предложение 2. Для каждого $n > 2k + 1$,

1. $\forall s \in V^{\mathbb{N}}, d_{V^{\mathbb{N}}}(\psi_n \omega_n(s), \sigma^{2k} \omega_n(s)) \leq \frac{1}{\tau_n(s) - k}$;
2. $\forall s \in V^{\mathbb{N}}, d_{V^{\mathbb{N}}}(s, \omega_n s) \leq \frac{1}{\tau_n(s)}$;
3. графы ω_n и ψ_n содержатся в $\mathcal{R}_{sync}$;
4. $\forall s \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \alpha(\psi_n \omega_n s, \omega_n s) = \alpha(\sigma^{2k} \omega_n s, s)$.
5. $\forall f \in L^1(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}), \|f \circ \omega_n\|_1 \leq C \|f\|_1$ and $\|f \circ \psi_n\|_1 \leq C^2 \|f\|_1$.

Доказательство. Утверждения пунктов 1 и 2 очевидны. Ясно, что график отображения ω_n содержится в множестве $\mathcal{R}_{sync}$. Отсюда следует, что график $\psi_n \omega_n$ содержится в $\mathcal{R}_{sync}$ и, следовательно, так как отображение ω_n обратимо, график ψ_n содержится в $\mathcal{R}_{sync}$.

В следующих вычислениях индекс n опущены для простоты. То есть, $\psi = \psi_n, \omega = \omega_n, \tau = \tau_n$.

Предположим, что для $s \in V^{\mathbb{N}}$ выполнено $s_{[\tau(s), \tau(s)+k+1]} = urw$. Пусть $N = \tau(s)$. Так как $(\psi \omega(s))_i = \omega(s)_i$ для всех $i > N$, из определения α следует,

что

$$\begin{aligned}\alpha(\psi\omega s, \omega s) &= \mathcal{L}(\psi\omega(s)_1) \cdots \mathcal{L}(\psi\omega(s)_N) \left(\mathcal{L}(\omega(s)_1) \cdots \mathcal{L}(\omega(s)_N) \right)^{-1} \\ &= \mathcal{L}(s_{1+2k}) \cdots \mathcal{L}(s_N) \mathcal{L}(q_1) \cdots \mathcal{L}(q_k) \mathcal{L}(p_k)^{-1} \cdots \mathcal{L}(p_1)^{-1} \left(\mathcal{L}(s_1) \cdots \mathcal{L}(s_N) \right)^{-1}\end{aligned}$$

Так как $(\sigma^{2k}\omega s)_{i-2k} = (\omega s)_i = s_i$ для всех $i > N + k$, из определения α следует, что

$$\begin{aligned}\alpha(\sigma^{2k}\omega s, s) &= \mathcal{L}(\sigma^{2k}\omega(s)_1) \cdots \mathcal{L}(\sigma^{2k}\omega(s)_{N-k}) \left(\mathcal{L}(s_1) \cdots \mathcal{L}(s_{N+k}) \right)^{-1} \\ &= \mathcal{L}((\omega s)_{1+2k}) \cdots \mathcal{L}((\omega s)_{N+k}) \left(\mathcal{L}(s_1) \cdots \mathcal{L}(s_{N+k}) \right)^{-1} \\ &= \mathcal{L}(s_{1+2k}) \cdots \mathcal{L}(s_N) \mathcal{L}(q_1) \cdots \mathcal{L}(q_k) \left(\mathcal{L}(s_1) \cdots \mathcal{L}(s_N) \mathcal{L}(p_1) \cdots \mathcal{L}(p_k) \right)^{-1} \\ &= \alpha(\psi\omega s, \omega s).\end{aligned}$$

Случай, когда $s_{[\tau(s), \tau(s)+k+1]} = uq\omega$, аналогичен рассмотренному. Утверждение из пункта 4 доказано.

Константа $C > 0$ была выбрана таким образом (см. сразу перед этим предложением), что для каждой $f \in L^1(V^{\mathbb{N}})$

$$\|f \circ \omega\|_1 \leq C\|f\|_1, \quad \|f \circ \psi\omega\|_1 \leq C\|f\|_1.$$

Так как отображение ω обратимо, из этого следует, что

$$\|f \circ \psi\|_1 = \|f \circ \psi\omega \circ \omega^{-1}\|_1 \leq C\|f \circ \psi\omega\|_1 \leq C^2\|f\|_1.$$

Здесь был использован тот факт, что $\omega = \omega^{-1}$. Это доказывает последнее утверждение. $\square$

Определение 4. Определим отображение $\sigma_X : V^{\mathbb{N}} \times X \rightarrow V^{\mathbb{N}} \times X$ так: $\sigma_X(s, x) = (\sigma s, \alpha(\sigma s, s)x)$. Заметим, что $\alpha(\sigma s, s) = s_1^{-1}$. Поэтому можно написать и так: $\sigma_X(s, x) = (\sigma s, s_1^{-1}x)$.

Лемма 2. Существуют такие измеримые отображения $\Phi_n, \Psi_n, \Omega_n : V^{\mathbb{N}} \times X \rightarrow V^{\mathbb{N}} \times X$ (для $n > 2k + 1$), что

1. для всех $f \in L^1(V^{\mathbb{N}} \times X)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f \circ \Psi_n \circ \Omega_n - f \circ \sigma_X^{2k} \circ \Phi_n\|_1 = 0$;
2. для всех $f \in L^1(V^{\mathbb{N}} \times X)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f \circ \Omega_n - f\|_1 = 0$;
3. графики отображений Φ and Ψ содержатся в множестве $\mathcal{R}_{sync}^X$.

Доказательство. Для целого $n > 2k + 1$, пусть ψ_n и ω_n — такие, как в предложении 2. Определим

$$\begin{aligned}\Omega_n(s, x) &:= (\omega_n s, x) \\ \Phi_n(s, x) &:= (\omega_n s, \alpha(\omega_n s, s)x) \\ \Psi_n(s, x) &:= (\psi_n s, \alpha(\psi_n s, s)x).\end{aligned}$$

Поскольку графики отображений ψ_n и ω_n содержатся в $\mathcal{R}_{sync}$, графики отображений Φ_n и Ψ_n содержатся в $\mathcal{R}_{sync}^X$. Пусть d_X — метрика на X , которая индуцирует борелевскую структуру на X и в которой это пространство компактно. Пусть $(s, x), (s', x') \in V^{\mathbb{N}} \times X$, определим $d_*((s, x), (s', x')) = d_X(x, x') + d_{V^{\mathbb{N}}}(s, s')$. Из предыдущего предложения следует, что, $d_*(\Omega_n(s, x), (s, x)) = d_{V^{\mathbb{N}}}(\omega_n(s), s) \leq 1/\tau_n(s) \leq 1/n$. Кроме этого, из него следует, что:

$$\begin{aligned}\Psi_n \Omega_n(s, x) &= (\psi_n \omega_n s, \alpha(\psi_n \omega_n s, \omega_n s)x) \\ \sigma_X^{2k} \Phi_n(s, x) &= \sigma_X^{2k}(\omega_n s, \alpha(\omega_n s, s)x) = (\sigma^{2k} \omega_n s, \alpha(\sigma^{2k} \omega_n s, \omega_n s) \alpha(\omega_n s, s)x) \\ &= (\sigma^{2k} \omega_n s, \alpha(\sigma^{2k} \omega_n s, s)x) = (\sigma^{2k} \omega_n s, \alpha(\psi_n \omega_n s, \omega_n s)x).\end{aligned}$$

Значит, из предыдущего предложения следует, что $d_*(\Psi_n \circ \Omega_n(s, x), \sigma_X^{2k} \circ \Phi_n(s, x)) \leq 1/(n - k)$. Значит, если f — непрерывная функция на $V^{\mathbb{N}} \times X$, то по теореме об ограниченной сходимости

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \|f \circ \Psi_n \circ \Omega_n - f \circ \sigma_X^{2k} \circ \Phi_n\|_1 &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|f \circ \Omega_n - f\|_1 &= 0.\end{aligned}$$

Из предыдущего предложения следует, что операторы $f \mapsto f \circ \Omega_n$, $f \mapsto f \circ \Phi_n$ и $f \mapsto f \circ \Psi_n$ ограничены, если $f \in L^1(V^{\mathbb{N}} \times X)$, и граница не зависит от n . Легко

видеть, что $f \mapsto f \circ \sigma_X^{2k}$ — тоже ограниченный оператор на $L^1(V^{\mathbb{N}} \times X)$ (поскольку множество V конечно, и $\tilde{\nu}$ — марковская мера). Так как ограниченные функции плотны в $L^1(V^{\mathbb{N}} \times X)$, лемма доказана. $\square$

Теперь мы можем доказать теорему 3.

Доказательство теоремы 3. Заметим, что $\mathcal{F}_{2k}^X \supset \mathcal{F}_{sync}^X$. Поэтому достаточно показать, что, если функция $f \in L^1(V^{\mathbb{N}} \times X)$ $\mathcal{R}_{sync}^X$ -инвариантна, то она и $\mathcal{R}_{2k}^X$ -инвариантна. Поскольку отображение σ_X^{2k} и отношение $\mathcal{R}_{sync}^X$ порождают отношение $\mathcal{R}_{2k}^X$, достаточно показать, что если $f \in L^1(V^{\mathbb{N}} \times X)$ $\mathcal{R}_{sync}^X$ -инвариантна, то $f \circ \sigma_X^{2k} = f$.

Пусть Φ_n, Ψ_n, Ω_n ($n > 2k + 1$) те же, что в предыдущей лемме. Так как f $\mathcal{R}_{sync}^X$ -инвариантна, и график Ψ_n содержится в множестве $\mathcal{R}_{sync}^X$, то $f \circ \Psi_n = f$ для всех n . Показать, что σ_X сохраняет отношение эквивалентности в том смысле, что

$$\left((s, x), (t, y) \right) \in \mathcal{R}_{sync} \Rightarrow \left(\sigma_X(s, x), \sigma_X(t, y) \right) \in \mathcal{R}_{sync}.$$

— это несложное упражнение. Отсюда следует, что отображение $f \circ \sigma_X^{2k}$ $\mathcal{R}_{sync}^X$ -инвариантно. Поскольку график Φ_n содержится в $\mathcal{R}_{sync}^X$, $f \circ \sigma_X^{2k} \circ \Phi_n = f \circ \sigma_X^{2k}$ для всех n . Имеем теперь

$$\begin{aligned} \|f - f \circ \sigma_X^{2k}\|_1 &= \|f - f \circ \sigma_X^{2k} \circ \Phi_n\|_1 \\ &\leq \|f - f \circ \Psi_n \circ \Omega_n\|_1 + \|f \circ \Psi_n \circ \Omega_n - f \circ \sigma_X^{2k} \circ \Phi_n\|_1 \\ &= \|f - f \circ \Omega_n\|_1 + \|f \circ \Psi_n \circ \Omega_n - f \circ \sigma_X^{2k} \circ \Phi_n\|_1. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ и воспользовавшись при этом предыдущей леммой, получаем, что $f = f \circ \sigma_X^{2k}$, что и требовалось. $\square$

3.3. Доказательство теоремы 1

Предложение 3. Пусть $\Pi, V, \mathcal{L}$ — те же, что и выше. Для каждого $v \in V$ обозначим через $\Gamma_v \leq \mathbb{F}$ подгруппу, порождённую всеми элементами вида $\mathcal{L}(p)$, где pv — ориентированный путь из вершины v в себя в графе G . Если $\Gamma_v = \mathbb{F}$ для некоторой вершины $v \in V$ и граф G строго связан, то $\mathcal{F}_1^X$ — σ -алгебра, порождённая всеми множествами вида $V^{\mathbb{N}} \times A$, где $A \subset X$ — это измеримое $\mathbb{F}$ -инвариантное множество. В частности, если $\mathbb{F} \curvearrowright (X, \mu)$ эргодично, то $\mathcal{F}_1^X$ тривиальна.

Доказательство. Переходя к разложению на эргодические компоненты, мы можем предположить, что $\mathbb{F} \curvearrowright (X, \mu)$ эргодично. Поскольку $\mathcal{R}_1^X$ порождено отображением σ_X , достаточно доказать, что σ_X эргодично.

Пусть $Y \subset V^{\mathbb{N}} \times X$ — это множество всех таких пар (s, x) , что $s_1 = v$ и $v \in V$ выбрана так, что $\Gamma_v = \mathbb{F}$. Пусть $T : Y \rightarrow Y$ — индуцированное преобразование:

$$T(s, v) = \sigma_X^n(s, v),$$

где $n \geq 1$ — наименьшее такое натуральное число, что $\sigma_X^n(s, v) \in Y$. По теореме Какутани [64, теорема 3 (a) $\Rightarrow$ (f)], из эргодичности $\mathbb{F} \curvearrowright (X, \mu)$ следует, что T эргодично.

Предположим теперь, что $Z \subset V^{\mathbb{N}} \times X$ измеримо, σ_X -инвариантно и имеет положительную меру. Тогда $Y \cap Z$ T -инвариантно. Так как G строго связан, $\tilde{\nu} \times \mu(Y \cap Z) > 0$. Поскольку T эргодично, из этого следует, что $Y \cap Z = Y$ с точностью до множеств меры нуль. С другой стороны, $\bigcup_{i=0}^{\infty} \sigma_X^i Y = V^{\mathbb{N}} \times X$ (с точностью до множеств меры нуль), потому что G строго связан. Отсюда следует, что Z — множество полной меры, и, следовательно, σ_X эргодично, что и требовалось. $\square$

Лемма 3. Для любой функции $f \in L^1(V^{\mathbb{N}} \times X)$ и любого $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}[f \circ \sigma_X^i | \mathcal{F}_k^X] = \mathbb{E}[f | \mathcal{F}_1^X].$$

Доказательство. Так как $\mathcal{F}_1^X$ — сигма-алгебра σ_X -инвариантных измеримых множеств, из теоремы фон Неймана об эргодичности в среднем следует, что

$$\frac{1}{nk} \sum_{i=0}^{nk-1} f \circ \sigma_X^i \rightarrow \mathbb{E}[f | \mathcal{F}_1^X]$$

в L^1 при $n \rightarrow \infty$. Возьмём условное математическое ожидание выражений, стоящих в обеих частях. Учитывая, что $\mathcal{F}_1^X \subset \mathcal{F}_k^X$, мы получаем:

$$\frac{1}{nk} \sum_{i=0}^{nk-1} \mathbb{E}[f \circ \sigma_X^i | \mathcal{F}_k^X] \rightarrow \mathbb{E}[f | \mathcal{F}_1^X].$$

Поскольку $\mathcal{F}_k^X$ σ_X^k -инвариантна, мы получаем равенство $\mathbb{E}[f \circ \sigma_X^{k+i} | \mathcal{F}_k^X] = \mathbb{E}[f \circ \sigma_X^i | \mathcal{F}_k^X]$ для любого i . Поэтому для любого n

$$\frac{1}{nk} \sum_{i=0}^{nk-1} \mathbb{E}[f \circ \sigma_X^i | \mathcal{F}_k^X] = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}[f \circ \sigma_X^i | \mathcal{F}_k^X].$$

Это доказывает лемму. □

Вывод теоремы 1 из теоремы 3. Не теряя общности, мы можем предположить, что действие $\mathbb{F} \curvearrowright (X, \mu)$ эргодично. Обозначим через $\pi : V^{\mathbb{N}} \times X \rightarrow V \times X$ отображение проекции $\pi(s, x) = (s_1, x)$.

Обозначим через $\mathcal{B}_{V \times X}$ борелевскую сигма-алгебру на $V \times X$. Пусть $\mathcal{F}_{\geq n}^X$ — наименьшая сигма-алгебра на $V^{\mathbb{N}} \times X$, содержащая $(\pi \circ \sigma_X^m)^{-1}(\mathcal{B}_{V \times X})$ для каждого $m \geq n$.

Рассмотрим индуцированный марковский оператор $\Pi_X : L^1(V \times X) \rightarrow L^1(V \times X)$, заданный формулой

$$\Pi_X(\varphi)(x, v) = \sum_{w \in V} \Pi_{w, v} \varphi(w, T_v x).$$

Заметим, что для $n \geq 2$

$$\Pi_X^n(\varphi)(x, v) = \sum_{t_1, \dots, t_n \in V} \Pi_{(t_1, \dots, t_n, v)} \varphi(t_1, T_{(t_2, \dots, t_n, v)} x).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
(\Pi_X^n \varphi) \circ \pi \circ \sigma_X^n(s, x) &= (\Pi_X^n \varphi)(s_{n+1}, T_{(s_1, \dots, s_n)}^{-1} x) \\
&= \sum_{t_1, \dots, t_n \in V} \Pi_{(t_1, \dots, t_n, s_{n+1})} \varphi(t_1, T_{(t_2, \dots, t_n, s_{n+1})} T_{(s_1, \dots, s_n)}^{-1} x) \\
&= \mathbb{E}[\varphi \pi | \mathcal{F}_{\geq n+1}^X](s, x).
\end{aligned}$$

Из обратной теоремы о сходимости мартингалов следует, что

$$\mathbb{E}[\varphi \pi | \mathcal{F}_{\geq n+1}^X] \rightarrow \mathbb{E}[\varphi \pi | \mathcal{F}_{sync}^X]$$

в $L^1(V^{\mathbb{N}} \times X)$ при $n \rightarrow \infty$. По теореме 3, $\mathcal{F}_{sync}^X = \mathcal{F}_{2k}^X$. Следовательно,

$$(\Pi_X^n \varphi) \circ \pi \circ \sigma_X^n \rightarrow \mathbb{E}[\varphi \pi | \mathcal{F}_{2k}^X]$$

в $L^1(V^{\mathbb{N}} \times X)$ при $n \rightarrow \infty$. Так как взятие условного математического ожидания относительно $\mathcal{F}_{2k}^X$ коммутирует с σ_X , для любого $i \geq 0$

$$(\Pi_X^n \varphi) \circ \pi \circ \sigma_X^{n+i} \rightarrow \mathbb{E}[\varphi \pi \circ \sigma_X^i | \mathcal{F}_{2k}^X]$$

в $L^1(V^{\mathbb{N}} \times X)$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку $\mathbb{E}[\varphi \pi \circ \sigma_X^i | \mathcal{F}_{2k}^X] = \mathbb{E}[\varphi \pi \circ \sigma_X^{2k+i} | \mathcal{F}_{2k}^X]$, это можно переписать так: для любого $0 \leq i < 2k$,

$$(\Pi_X^n \varphi) \circ \pi \circ \sigma_X^{n-i} \rightarrow \mathbb{E}[\varphi \pi \circ \sigma_X^{2k-i} | \mathcal{F}_{2k}^X]$$

в $L^1(V^{\mathbb{N}} \times X)$ при $n \rightarrow \infty$. Теперь из леммы 3 и предложения 3 следует, что

$$\frac{1}{2k} \sum_{i=0}^{2k-1} (\Pi_X^n \varphi) \circ \pi \circ \sigma_X^{n-i} \rightarrow \frac{1}{2k} \sum_{i=0}^{2k-1} \mathbb{E}[\varphi \pi \circ \sigma_X^i | \mathcal{F}_{2k}^X] = \mathbb{E}[\varphi \pi | \mathcal{F}_1^X] = \int \varphi \, d\nu \times \mu$$

в L^1 при $n \rightarrow \infty$. В то же время,

$$(\Pi_X^n \varphi) \circ \pi \circ \sigma_X^{n-i} = (\Pi_X^{n-i} \Pi_X^i \varphi) \circ \pi \circ \sigma_X^{n-i} \rightarrow \mathbb{E}[\Pi_X^i \varphi \pi | \mathcal{F}_{2k}^X]$$

в $L^1(V^{\mathbb{N}} \times X)$ при $n \rightarrow \infty$. Аналогично,

$$(\Pi_X^{n+i} \varphi) \circ \pi \circ \sigma_X^n \rightarrow \Pi_X^i \left(\mathbb{E}[\varphi \pi | \mathcal{F}_{2k}^X] \right) = \mathbb{E}[\Pi_X^i \varphi \pi | \mathcal{F}_{2k}^X]$$

в $L^1(V^{\mathbb{N}} \times X)$ при $n \rightarrow \infty$. Значит,

$$\frac{1}{2k} \sum_{i=0}^{2k-1} (\Pi_X^{n+i} \varphi) \circ \pi \circ \sigma_X^n \rightarrow \int \varphi \, d\nu \times \mu$$

в L^1 при $n \rightarrow \infty$.

Без потери общности мы можем предположить, что $\int \varphi \, d\nu \times \mu = 0$, и в этом случае из вышесказанного следует, что

$$\left\| \frac{1}{2k} \sum_{i=0}^{2k-1} (\Pi_X^{n+i} \varphi) \circ \pi \circ \sigma_X^n \right\| \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. С другой стороны,

$$\left\| \frac{1}{2k} \sum_{i=0}^{2k-1} (\Pi_X^{n+i} \varphi) \circ \pi \circ \sigma_X^n \right\| = \left\| \frac{1}{2k} \sum_{i=0}^{2k-1} \Pi_X^{n+i} \varphi \right\|.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2k} \sum_{i=0}^{2k-1} \Pi_X^{n+i} \varphi \rightarrow 0$$

в L^1 при $n \rightarrow \infty$. Далее, заметим, что если $\varphi(v, x) = \phi(x)$ для некоторого $\phi \in L^1(X)$, то, заменяя переменные, получаем:

$$\begin{aligned} (S_n \phi)(x) &= \sum_{s_1, \dots, s_n \in V} \nu(s_n) \Pi_{(s_1, \dots, s_n)} \phi(T_{(s_1, \dots, s_n)} x) \\ &= \sum_{v \in V} \sum_{s_1, \dots, s_{n-1} \in V} \nu(v) \Pi_{(s_1, \dots, s_{n-1}, v)} \phi(T_{(s_1, \dots, s_{n-1}, v)} x) \\ &= \sum_{v \in V} \nu(v) (\Pi_X^{n-1} \varphi)(v, x). \end{aligned}$$

Таким образом, $S_n \phi$ стремится к 0 в L^1 при $n \rightarrow \infty$.

□

Глава 4

Эллиптический бильярд и комплексный закон отражения

4.1. Введение

Сформулируем геометрический факт, который будет интересен нам в этой главе.

Теорема 4.1. Рассмотрим множество орбит периода три в эллиптическом бильярде. Тогда геометрическое место точек центров вписанных (в соотв. треугольники) окружностей является эллипсом, см. Рис 4.1 в качестве иллюстрации.

Этот факт был экспериментально замечен Дэном Резником [65].

В Части 4.2 этой Главы мы докажем эту теорему в каком-то смысле неожиданным способом – методами комплексной алгебраической геометрии. В Части 4.3 этой Главы мы дадим планиметрическое доказательство этой теоремы, которое нам кажется более сложным. Оба доказательства используют теорему Понселе и интегрируемость эллиптического бильярда, а именно нам понадобится следующее предложение:

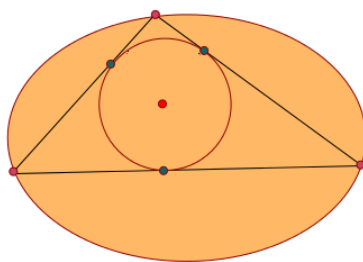


Рис. 4.1. Иллюстрация к основной теореме: исходный эллипс, одна из орбит эллиптического бильярда периода 3. Геометрическое место точек центров вписанных окружностей – эллипс.

Предложение 4.2. Все орбиты периода 3 в эллиптическом бильяре касаются некоторого эллипса, софокусного исходному эллипсу.

4.2. Доказательство теоремы: алгебраическая геометрия

Эллиптические бильярды – это одновременно классический и популярный современный сюжет (см., например, [66], [67], [68] and [69]). Рассмотрим эллипс и соответствующий бильярд, в котором точечная частица перемещается вдоль прямых внутри эллипса и отражается от границы, подчиняясь стандартному закону отражения: угол падения равен углу отражения. Предположим, что траектория частицы повторяется после двух последовательных отражений: это значит, что нами был получен треугольник, представляющий траекторию периода 3 в эллиптическом бильярде. Знаменитая теорема Понселе [70] вместе со свойством интегрируемости потока эллиптического бильярда дает существование эллипса, вписанного во все эти треугольники, конфокального исходному.

Доказательство использует классические идеи комплексификации и проективизации. А именно, мы заменим евклидово пространство комплексной проективной плоскостью. Этот подход был использован Гриффитсом и Харрисом в [71] а также, недавно Р. Шварцом в [72]. Основным инструментом доказательства является комплексное отражение: мы рассматриваем эллипс как комплексную кривую и определяем закон комплексного отражения по отношению к этой кривой. Геометрическое место центров вписанных окружностей будет также комплексной алгебраической (и даже рациональной) кривой. Мы докажем, что эта кривая – коника в $\mathbb{CP}^2$. Ее вещественной частью будет, очевидно, ограниченная коника, то есть эллипс.

Причины на использование комплексных методов в данном случае следующие: доказательство комплексными методами заметно проще планиметрического. Мы думаем, что эти методы могут быть использованы и в дальнейшем при изучении бильярдов. Идеологически наша работа связана с работами А.

Глуцюка, см. например [73] и совместную работу с Ю. Кудряшовым [74].

В Разделе 4.2.1 мы определяем комплексный закон отражения и напомним его основные свойства. Раздел 4.2.2 содержит доказательство основной Теоремы 4.1.

4.2.1. Комплексный закон отражения

Нам будет удобно перейти от евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ к комплексной проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$: евклидова метрика соответственно заменяется (в локальных комплексных координатах (z, w)), квадратичной формой $ds^2 = dz^2 + dw^2$. В дальнейшем мы будем заниматься геометрией в этом новом пространстве $\mathbb{CP}^2$ с квадратичной формой ds^2 . Мы могли бы заменить исходную евклидову метрику псевдоевклидовой: геометрия бильярдов в такой метрике также интересна и близка нашему случаю, см. [75] и [76].

Определение 5. Прямые с направляющими векторами нулевой длины называются *изотропными*. Все остальные прямые, соответственно, *неизотропные*.

Фиксируем точку $x \in \mathbb{CP}^2$ и определим *комплексное отражение относительно прямой, проходящей через x* как отображение, действующее на пространстве $\mathcal{L}_x$ прямых, проходящих через точку x . Заметим, что есть две изотропные прямые $L_x^{v_1}$ и $L_x^{v_2}$ в $\mathcal{L}_x$ с направляющими векторами $v_1 = (1, i)$ и $v_2 = (1, -i)$.

Определение 6 (Закон комплексного отражения). Для точки $x \in \mathbb{CP}^2$, *комплексное отражение (симметрия)* относительно неизотропной прямой $L_x \in \mathcal{L}_x$ это отображение, задаваемое той же формулой, что и отображение в вещественном случае. Это линейное отображение, в базисе из векторов определенных прямой L_x и ортогональной ей прямой $L_x^\perp$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Образ любой прямой L под действием отражения относительно изотропной прямой $L_x^{v_1}$ (или $L_x^{v_2}$) определяется как предел ее образов под действием отражений относительно неизотропных прямых, сходящихся к $L_x^{v_1}$ (или $L_x^{v_2}$).

Также, комплексным отражением относительно кривой мы называем комплексное отражение относительно соответствующей касательной.

Теорема 4.3 ([73], Лемма 2.3). а. Комплексная симметрия по отношению к изотропной прямой L в некоторой точке $x \in L$ корректно определена для всех неизотропных прямых (иначе говоря, соответствующий предел образов последовательности неизотропных прямых существует и не зависит от аппроксимирующей последовательности). Образом любой неизотропной прямой, проходящей через x , является прямая L .

б. Под действием отражения в точке x относительно изотропной прямой $L \in \mathcal{L}_x$, сама прямая L может перейти в любую прямую, проходящую через x (то есть отображение в этом случае многозначное). Например, прямая может перейти в саму себя.

Изотропные направления, порожденные векторами v_1 и v_2 представлены точками $I_1 = (1 : i : 0) \in \mathbb{CP}^2$ и $I_2 = (1 : -i : 0) \in \mathbb{CP}^2$, соответственно. Все прямые, проходящие через одну или обе (бесконечно удаленная прямая) – изотропные. Выберем аффинную координату z на проективной прямой $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \infty$ на бесконечности таким образом, что для этой прямой, проходящей через точки I_1 и I_2 выполнялось $I_1 = 0$ и $I_2 = \infty$.

Представленная ниже лемма влечет Теорему 4.3 и несложно следует из определений. Эта лемма описывает отражение в прямой, близкой к изотропной.

Лемма 4.4 ([73], Proposition 2.4). Для любого $\varepsilon \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$, пусть L_ε – прямая, проходящая через начало координат $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ и имеющая направление ε (в координате z , определенной выше). Пусть $\tau_\varepsilon : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ – отражение относительно прямой L_ε , действующее на пространстве $\mathbb{CP}^1$ прямых, проходящих через начало координат. Тогда $\tau_\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon^2}{z}$, в введенной выше координате z .

Доказательство. Отображение τ_ε есть проективное преобразование, сохраняющее L_ε , а также множество изотропных прямых. Поэтому $\tau_\varepsilon(\varepsilon) = \varepsilon$ и $\tau_\varepsilon\{0, \infty\} =$

$\{0, \infty\}$. Покажем, что τ_ε переставляет 0 и ∞ . Иначе оно бы имело три неподвижных точки на бесконечно удаленной прямой $\mathbb{CP}^2 \setminus \mathbb{C}^2$ и было бы тождественным преобразованием бесконечно удаленной прямой. А также, точки на прямой L_ε неподвижны для τ_ε . Поэтому τ_ε должно было бы быть тождественным преобразованием, однако оно является нетривиальной инволюцией.

Заметим, что ограничение τ_ε – нетождественная конформная инволюция $\mathbb{CP}^\# \setminus \mathbb{C}^2$ оставляющая на месте ε и переставляющая 0 и ∞ . Поэтому она должна отображать z в $\frac{\varepsilon}{z^2}$. $\square$

4.2.2. Доказательство

В этом разделе мы доказываем исходную Теорему 4.1. Рассмотрим треугольные орбиты комплексифицированного эллиптического бильярда: это треугольники, вписанные в комплексифицированный эллипс и удовлетворяющие комплексному закону отражения. Обозначим исходный эллипс Γ , и эллипс Понселе (касательный всем орбитам) γ . Мы будем использовать те же обозначения для комплексификаций коник.

Следующий классический факт комплексной проективной геометрии будет использован нами в дальнейшем для Γ и γ , а также для вписанных окружностей.

Лемма 4.5 ([77], стр. 179, [78], стр. 334). а. Два эллипса Γ и γ на вещественной плоскости являются софокусными тогда и только тогда их комплексификации имеют 4 общие изотропные касательные. В этом случае их фокусы лежат на пересечениях этих прямых (два вещественных и два комплексных "фокуса").

б. Две касательные прямые к комплексифицированной окружности, проходящие через ее центр, являются изотропными.

Определение 7 (Стороны и вырожденные стороны треугольника). *Стороной* треугольника в $\mathbb{CP}^2$ с различными вершинами является комплексная прямая че-

рез пару вершин треугольника. Треугольник *вырожден*, если все его вершины лежат на одной прямой. Априори, треугольная орбита эллиптического бильярда может иметь совпадающие вершины. Мы назовем A *вырожденной стороной* через совпадающие вершины, если A получено как предел сторон A_ε , $\varepsilon \rightarrow 0$ невырожденных треугольных орбит. Для такой стороны A ее образ при отражении определен как предел (который существует как предел Опр. 6) образов A_ε .

Рассматривая семейство прямых A_ε , касательных к γ и сходящихся к A , и вычисляя их образы (применяя Лемму 4.6 ниже), мы можем получить представления о том, как выглядят вырожденные треугольные орбиты эллиптического бильярда, см. Лемму 4.7.

Лемма 4.6. Пусть A – общая изотропная касательная к двум аналитическим (алгебраическим) кривым γ и Γ и пусть точки касания – квадратичны и различны. Если A деформируется в семействе A_ε ($A = A_0$) касательных кривых к γ тогда образ A_ε относительно отражения по отношению к Γ стремится к некоторой неизотропной кривой при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доказательство. Более менее эквивалентное этой Лемме (и даже более общее) утверждение содержится в [73], см. Предложение 2.7. Теперь формально независимая, формулировка этой Леммы вдохновляется этой статьей.

Изотропная прямая A деформируется в семействе A_ε : предположим, что это семейство выбрано таким образом, что угол между A и A_ε равен в точности ε . Предположим, что A_ε пересекает Γ в некоторой точке a_ε , стремящейся к точке a_0 изотропного касания. Несложное вычисление показывает, что поскольку точки касания квадратичны, касательная прямая T_ε к Γ в точке a_ε образует угол порядка $\sqrt{\varepsilon}$ с A . Вместе с Леммой 4.4 это рассуждение показывает, что предел отраженных прямых – неизотропная прямая. $\square$

Теперь мы можем вырожденные треугольники, появляющиеся в нашей задаче.

Лемма 4.7. Если треугольная орбита в комплексифицированном эллипсе Γ вырождена, тогда она имеет две совпадающие неизотропные стороны B и одну вырожденную изотропную сторону A .

Доказательство. Поскольку $\deg \Gamma = 2$, две вершины вырожденного треугольника должны совпасть, поэтому вырожденная сторона A через них должна касаться и Γ и γ , и поэтому она изотропна, см. 4.5. Другие стороны, по Лемме 4.6, неизотропны, и они должны совпадать. $\square$

Лемма 4.8 (Основная лемма). Комплексная кривая центров вписанных окружностей $\mathcal{C}$ пересекает комплексную прямую F , проходящую через вещественные фокусы эллипса Γ в ровно двух точках с кратностью один.

Доказательство. Пусть $s \in \mathcal{C} \cap F$ и предположим сначала, что соответствующий треугольник вырожден, см. Рис. 4.2. По Лемме 4.7 одна из сторон этого треугольника изотропна, а две другие неизотропны и совпадают. Мы обозначим изотропную сторону A , а неизотропную сторону B . Прямая A касается вписанной окружности, и поэтому, по Лемме 4.5, $s \in F \cap A$. Также точка s является точкой пересечения биссектрис, поэтому или $s \in B$, или $s \in B^\perp$. Заметим, что B касается вписанной окружности, поэтому если $s \in B$, то B должна быть изотропной, противоречие. Поэтому $s \in B^\perp$, но тогда по Лемме 4.5 s будет фокусом. Прямая $B^\perp$ касается Γ и проходит через фокус, поэтому она должна быть изотропной, что невозможно поскольку B неизотропна.

Теперь рассмотрим случай невырожденного треугольника, соответствующего $s \in \mathcal{C} \cap F$. Рассмотрим отражение относительно F : вписанная окружность, а также ее центр s , переходят сами в себя. Если множество сторон треугольника и их образов под отражением относительно F состоит из *шести* прямых, тогда вписанная окружность и эллипс γ должны касаться всех этих прямых. Однако пять касательных прямых уже определяют конику, поэтому γ должна быть окружностью (а поэтому и Γ). В этом случае Теорема 4.1 тривиальна и

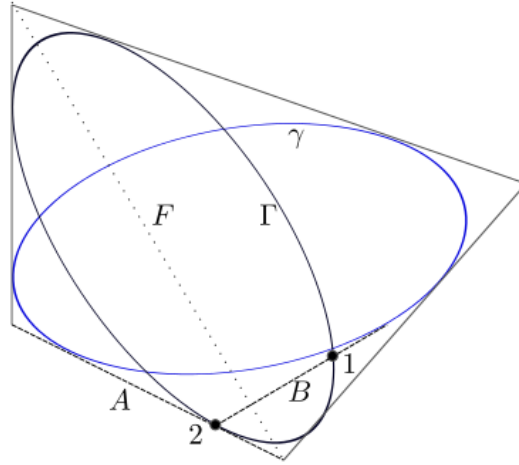


Рис. 4.2. Два комплексных софокусных эллипса Γ и γ , имеющие четыре общие изотропные касательные. Прямая F вещественных фокусов проходит через пересечения изотропных прямых. Вырожденная траектория эллиптического бильярда в Γ с каустикой γ : вырожденный треугольник – это отрезок между точками 1 и 2, и его стороны A и B . Прямая A изотропна, а прямая B – нет.

рассматриваемое геометрическое место центров – это центр исходной окружности.

Поэтому некоторые стороны треугольника должны отображаться в некоторые другие стороны, или сами в себя. Рассмотрим два случая: в первом есть сторона, отображающаяся в себя, и во втором есть две стороны, которые отображаются друг в друга. Но второй случай сводится к первому, поскольку точки пересечения двух переставляющихся прямых с Γ (не лежащие на F) переходят в друг друга, поэтому прямая, их соединяющая, отображается сама в себя.

Поэтому, в невырожденном случае, соответствующий треугольник имеет сторону, симметричную относительно F и касательную к γ . Таких прямых две, и они дают две точки пересечения с F (два центра вписанных окружностей) c_1 и c_2 , обе вещественные, см. Рис. 4.3), и по одному соответствующему треугольнику для каждой c_i , $i = 1, 2$.

Теперь докажем, что пересечения $\mathcal{C} \cap F$ имеют кратность 1. Для этого параметризуем эллипс γ параметром ε , и рассмотрим соответствующий центр

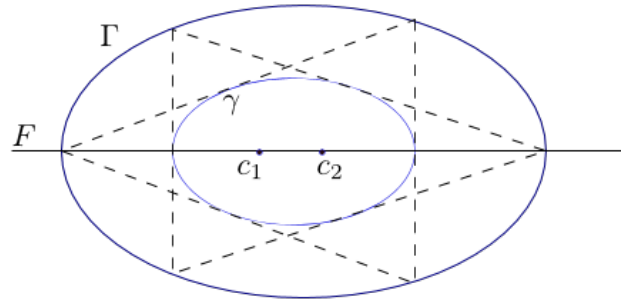


Рис. 4.3. Две треугольные орбиты в Γ , соответствующие центрам вписанных окружностей c_1, c_2 , лежащим на линии фокусов F

$c(\varepsilon) \in \mathcal{C}$, предполагая, что $c(0) \in F$. Достаточно показать, что $\frac{\partial c}{\partial \varepsilon}(0) \neq 0$. Предположим обратное: пусть центры окружностей не меняются в линейном приближении, $c(\varepsilon) = c(0) + O(\varepsilon^2)$. Тогда радиус вписанной окружности $r(\varepsilon)$ имеет ненулевую производную в $\varepsilon = 0$, кроме случая если для $\varepsilon = 0$ и вписанная окружности, и эллипс γ касаются сторон треугольника в одних и тех же точках. Это невозможно, поскольку γ не является окружностью и две различные коники не могут касаться друг друга в больше чем двух точках. Поэтому мы получаем, что радиусы вписанных окружностей меняются линейно: $r(\varepsilon) = r(0) + \alpha\varepsilon(1 + o(1))$ for $\alpha \neq 0$. Но это невозможно из-за симметрии: действительно, радиус есть четная функция ε . $\square$

Теперь Теорема 4.1 следует из основной Леммы 4.8 поскольку комплексная алгебраическая кривая, пересекающая некоторую прямую в ровно двух точках (с кратностями) является коникой.

4.3. Доказательство теоремы: планиметрия

Зададимся в этой части целью доказать Теорему 4.1, используя *только* методы планиметрии. Доказательство, которое мы приведем здесь совсем нетриви-

ально, но это самое простое доказательство, которое нам удалось найти. Доказательство использует базовые идеи проективной геометрии, а также свойства точки Жергонна и изогонального сопряжения.

Напомним несколько базовых (и менее) определений и свойств.

4.3.1. Полюс и поляр

Определение 8. *Поляр*ой точки P по отношению к невырожденной кривой γ второго порядка называется множество точек N , гармонически сопряженных точке P по отношению к точкам M_1 и M_2 пересечения кривой γ прямыми, проходящими через P . Это значит, что двойное отношение четырех точек фиксировано и равно -1 :

$$(M_2, M_1, P, N) = \frac{M_2P}{M_2N} \cdot \frac{M_1N}{M_1P} = -1, \quad (4.1)$$

если отрезки рассматриваются с соответствующими ориентациями, см. Рис. 4.4.

Можно доказать, что поляр – это прямая. Для этой прямой точка P называется полюсом. Заметим, что если провести две касательные прямые к квадрике из точки P , то поляр есть прямая, проходящая через эти точки, см. Рис. 4.4.

Мы можем также определить *полярное преобразование* относительно невырожденной квадрики в проективном пространстве, отображение точек в пространство прямых (которое находится во взаимно-однозначном отображении с самим пространством): каждая точка отображается в соответствующую полярную прямую. Таким образом, можно определить образ квадрики под действием полярного преобразования (по отношению к некоторой квадрике), рассматривая образы касательных прямых. Несложно показать, что образ квадрики под действием полярного преобразования – снова квадратика, см. например [79]. Для подробной информации о полярном преобразовании см. [79–82].

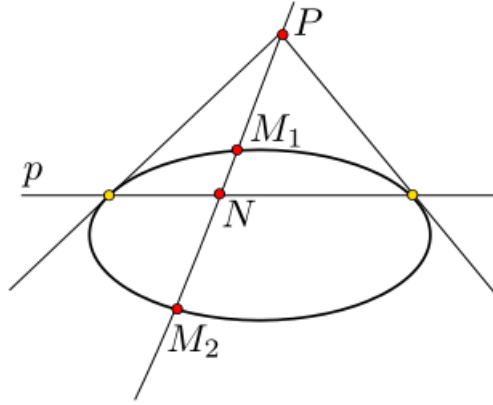


Рис. 4.4. Для любой точки P можно определить соответствующую ей полярную прямую p . Для любой прямой, пересекающей конику в точках M_1, M_2 , точка $N \in p$ определяется как точка, для которой выполнено (4.1). Если точка P находится вне эллипса, поляра - это точка, соединяющая точки касания двух касательных из P к конике.

4.3.2. Точка Жергонна и изогональное сопряжение

Наше доказательство будет также использовать понятие точки Жергонна. Она была открыта Джозефом Диазом Жергонном в начале XIX века. Определение этой точки проистекает из теоремы:

Теорема 4.9. Для любого треугольника ABC и для соответствующей вписанной окружности обозначим A_1, B_1, C_1 соответственно точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника. Тогда прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке G , которая называется *точкой Жергонна*, см. Рис. 4.5.

Точка Жергонна обладает огромным количеством чудесных свойств, для двадцати из них, открытых с помощью компьютера, см. статью Деко Декова [83]. Другое интересное определение, которое нам понадобится – *изогональное сопряжение*. Оно также приходит с теоремой:

Теорема 4.10. Зафиксируем произвольный треугольник ABC . Для любой точки P плоскости рассмотрим прямые AP, BP, CP . Тогда, при рассмотрении их

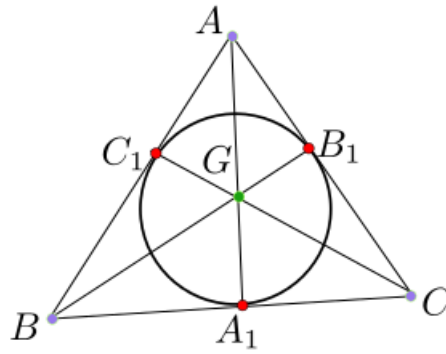


Рис. 4.5. Точка Жергонна в треугольнике ABC : точка пересечения прямых, соединяющих вершины треугольника с точками касания вписанной окружности.

образов относительно симметрии по отношению к соответствующим биссектрисам исходного треугольника ABC , новые прямые пересекутся в одной точке. Точка P_1 полученная таким образом называется изогонально сопряженной P относительно ABC , см. Рис. 4.6.

Среди замечательных свойств изогонального сопряжения нас интересует

Предложение 4.11. Точка Жергонна изогонально сопряжена центру отрицательной гомотетии вписанной окружности и описанной окружности.

Для более общей информации о точке Жергонна и изогональном сопряжении, см [79]. После этих напоминаний, мы готовы к доказательству.

4.3.3. Доказательство Теоремы 4.1

Назовем наш исходный эллипс Γ и соответствующий эллипс Понселе γ (см. Предложение 4.2), как и в предыдущей части 4.2. Рассмотрим некоторую фиксированную орбиту периода три и соответствующий треугольник ABC . Тогда доказательство будет следовать следующим этапам:

1. Проведем три касательные прямые к эллипсу Γ в точках A, B, C . Эти касательные прямые пересекутся в точках, которые мы назовем соответ-

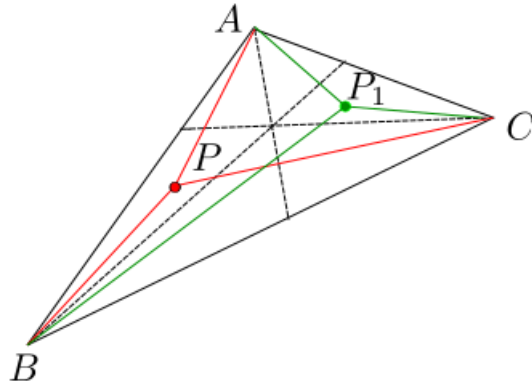


Рис. 4.6. Построение изогонально сопряженной точки P_1 точке P в треугольнике ABC : пунктирные линии – биссектрисы, красные линии отражаются в зеленые при симметрии относительно биссектрис.

ственно A^*, B^*, C^* . Заметим, что эти точки являются центрами вневписанных окружностей треугольника ABC . Это практически очевидно: действительно, прямая BA^* является биссектрисой соответствующего угла (это следует из того факта, что отражение в точке B сохраняет углы), см. Рис. 4.7.

2. Заметим, что прямая AB – поляра точки C^* , BC поляра A^* и AC поляра B^* относительно Γ . Это следует из замечаний в 4.3.1.
3. Прямые AB , BC и AC касаются эллипса γ . Рассмотрим теперь полярное преобразование эллипса γ по отношению к большему эллипсу Γ : оно отправит γ в некоторую конику, проходящую через A^*, B^* и C^* . Обозначим её $\bar{\Gamma}$. Таким образом, $\bar{\Gamma}$ сопряжена γ относительно Γ .
4. Теперь мы можем по-новому посмотреть на задачу. До этого мы рассматривали треугольник ABC , который двигался внутри эллипса Γ и вне эллипса γ (вне значит, что его стороны касались γ). Теперь мы будем думать о треугольнике $A^*B^*C^*$, который двигается внутри $\bar{\Gamma}$ и, в тот же момент, вне Γ . См. 4.8.

5. Определим центр вписанной окружности ABC в терминах $A^*B^*C^*$. Это пересечение AA^* , BB^* и CC^* . Иначе говоря, точка пересечения прямых соединяющих вершины треугольника $A^*B^*C^*$ с его точками касания с эллипсом Γ . Это следует из того, что точка A^* равноудалена от сторон AB и AC .
6. Задача, таким образом, реформулируется так: для двух коник и треугольника,двигающегося "между ними" так, что его вершины находятся на одной конике, а его стороны касаются другой, доказать, что точка пересечения прямых, соединяющих вершины и точки касания существует и лежит на эллипсе. Существование этой точки это фактически Теорема 4.9.
7. Проективным преобразованием отправим Γ в окружность. На самом деле, достаточно смотреть на эту задачу когда Γ и $\bar{\Gamma}$ являются окружностями: проективным преобразованием две коники переходят в две окружности. Поэтому о Γ и $\bar{\Gamma}$ можно думать как об окружностях.
8. Доказательство того, что точка двигается по эллипсу, следует из Теоремы Скутина, [84]:

Теорема 4.12. Рассмотрим семейство треугольников с фиксированными вписанной и описанной окружностями. Есть изогональные преобразования относительно каждого из них. Тогда, для любой фиксированной точки на плоскости, образы при изогональных преобразованиях относительно всех треугольников, формируют конику.

У этой теоремы есть свободный параметр – позиция точки на плоскости. Применяя ее для центра отрицательной гомотетии Γ и $\bar{\Gamma}$, мы докажем теорему.

□

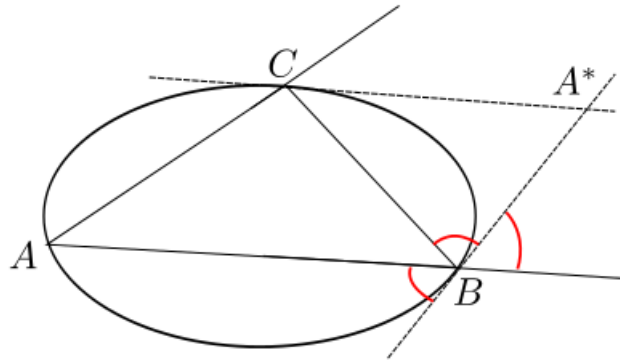


Рис. 4.7. Пересечение касательных к эллипсу в точках, соответствующим траектории бильярда, дают центры внеписанных окружностей (пересечения внешних биссектрис)

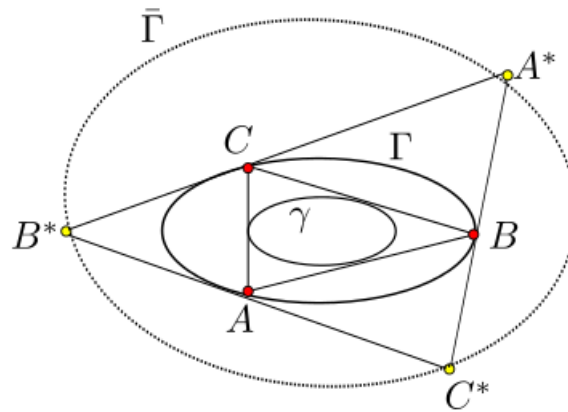


Рис. 4.8. Исходная периодическая траектория $A - B - C$ и соответствующий треугольник $A^*B^*C^*$ с вершинами – центрами внеписанных окружностей. Вместо того, чтобы смотреть на ABC между γ и Γ мы смотрим на $A^*B^*C^*$ между Γ и $\bar{\Gamma}$.

Глава 5

Теорема Стернберга о нормализации в косых произведениях

5.1. Постановка задачи и утверждения

5.1.1. Мотивировка

Эта Глава посвящена теореме нормализации косых гёльдеровых произведений. Мы начнём с мотивировки выбора этого класса отображений.

Согласно эвристическому принципу, восходящему к [85], типичные эффекты, наблюдаемые в случайных динамических системах на компактном многообразии, также могут быть наблюдаемы для диффеоморфизмов многообразий старших размерностей. Случайные динамические системы эквивалентны гомеоморфизмам косых произведений над сдвигом Бернулли. Некоторые новые эффекты, найденные для этих гомеоморфизмов, были позже перенесены на косые произведения над гиперболическими отображениями с компактными слоями. Эти диффеоморфизмы ни в каком смысле не являются типичными. Их малые возмущения снова являются косыми произведениями, слои которых не являются гладкими, а являются только непрерывными относительно точки базы [86].

Недавно было доказано, что их послойные отображения на самом деле гёльдеровы относительно точки базы [87–89].

Новые найденные эффекты в пространстве диффеоморфизмов косых произведений таким образом переносятся на гёльдеровы косые произведения, и тем самым доказывається типичность этих эффектов. Эта программа выполнена в [90–95].

Это мотивирует изучение гёльдеровых косых произведений. Перейдём теперь к формулировкам наших основных результатов.

5.1.2. Основные утверждения

Рассмотрим диффеоморфизм косого произведения над отображением Аносова базы и с отрезком в слое. Точнее, пусть $M = \mathbb{T}^d \times I$, $\mathbb{T}^d$ — d -мерный тор, $I = [0, 1]$. Рассмотрим сохраняющее границу косое произведение

$$F : M \rightarrow M, (b, x) \mapsto (Ab, f_b(x)), \quad (5.1)$$

где $f_b(0) = 0, f_b(1) = 1$, отображение слоёв f_b является сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом $I \rightarrow I$, и отображение базы A является линейным гиперболическим автоморфизмом тора.

Допустим также, что f является гёльдеровым при фиксированном x относительно C^k -нормы, то есть существуют константы $C_k, \beta > 0$, такие что для любых $b, b' \in \mathbb{T}^d$ выполнено неравенство

$$\|f_b - f_{b'}\|_{C^k} \leq C_k \|b - b'\|^\beta \quad (5.2)$$

Это предположение возникает в слегка другой постановке задачи в ряде статей о частичной гиперболичности: например, в [89] оценка (5.2) верна для $k = 0$, в [96] для $k = 1$, а в [87] для любого k . Теперь сформулируем основные результаты, которые мы доказываем в надежде применить их к изучению косых произведений, например, чтобы коренным образом упростить доказательства в [92].

Теорема 5.1. Рассмотрим отображение F вида (5.1), обладающее свойством (5.2) для некоторого фиксированного k и гладкой по x переменной C^k , $k \geq 2$. Пусть $O \in \mathbb{T}^d \times \{0\}$ — его гиперболическая фиксированная точка. Тогда существует окрестность U точки O и сохраняющий слои гомеоморфизм

$$H : (U, O) \rightarrow U, (b, x) \mapsto (b, x + h_b(x)) \quad h_b(0) = \frac{\partial h_b}{\partial x}(0) = 0 \quad (5.3)$$

такой, что

1. H сопрягает F в (U, O) с его «послойной линеаризацией»

$$F_0 : (b, x) \mapsto (Ab, \lambda_b x), \quad (5.4)$$

где

$$\lambda_b = f'_b(0). \quad (5.5)$$

Это означает, что

$$F \circ H = H \circ F_0. \quad (5.6)$$

Предположим также, что

$$\lambda_b \leq q < 1 \quad \forall b \in \mathbb{T}^d \quad (5.7)$$

2. H гладкий по x при фиксированном b : степень гладкости равна $k - 2$.
3. H послойно гёльдеров: существуют константы $\tilde{C}_l, \alpha > 0$, для которых при любых $l, 0 \leq l \leq k - 2$ верно неравенство

$$\|h_b - h_{b'}\|_{C^l} \leq \tilde{C}_l \|b - b'\|^\alpha, \quad (5.8)$$

такое что

$$\alpha \leq \min(\beta, \log_\mu q), \quad (5.9)$$

где μ — максимальная абсолютная величина собственных значений A , а q определяется уравнением (5.7).

Эта теорема локальна: соотношение сопряжения $F \circ H = H \circ F_0$ выполнено только в окрестности точки O . Мы выведем эту теорему из следующих двух результатов.

Теорема 5.2. Рассмотрим такое же F , как в теореме 5.1, в случае $k = 2$.

Отображение H со свойствами 1, 2, 3 из теоремы 5.1 определено на множестве

$$M_\varepsilon = \{(b, x) \in \mathbb{T}^d \times [0, 1] \mid x \in [0, \varepsilon]\}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$ и непрерывно на этом множестве. Более того, в случае $l = 0$ неравенство (5.8) выполнено для любого α , удовлетворяющего (5.9).

Теорема 5.3. Предположим, что выполнены все предположения теоремы 5.2, кроме $k = 2$. Пусть $k \geq 2$. Тогда существует отображение H , обладающее свойствами, указанными в теореме 5.2. Более того, H является послойно гладким степени C^{k-2} и удовлетворяет условию Гёльдера (5.8) для $l = k - 2$.

Теоремы 5.2 и 5.3 являются основными результатами данной Главы. Первая теорема утверждает, что послойное сопряжение H непрерывно в C -норме относительно точки слоя, а вторая теорема продолжает этот результат, уменьшая окрестность в слое и заменяя C -норму на C^l -норму. Основная часть данной главы представляет собой доказательство теоремы 5.2. В конце приводится часть доказательства теоремы 5.3. А именно, мы доказываем, что отображения h_b являются $(k - 2)$ -гладкими, но не доказываем, что частные производные $\frac{\partial^j h_b}{\partial x^j}$, $1 \leq j \leq k - 2$ гёльдеровы в b . Это может быть доказано таким же образом, как гёльдеровость h_b , но требует большего количества технических деталей, поэтому соответствующие выкладки мы опускаем.

В начале следующего параграфа мы выведем теорему 5.1 из теорем 5.2, 5.3.

5.1.3. Сравнение с теорией “нестационарных нормальных форм”

Эта теория была развита в [74] и [97]. Ближе всего к нашим результатам находится теорема 1.2 работы [74], доказанная во всех подробностях как теорема 1 работы [97]. В дальнейшем мы будем называть её GK-теоремой. В этой теореме рассматривается широкий класс отображений, включающий отображение (5.1) – отображения, удовлетворяющие так называемому условию *narrow band spectrum condition* (условию узости спектра). В предположениях теоремы 5.1 это свойство имеет следующий вид:

$$(\max_{b \in \mathbb{T}^d} \lambda_b)^2 < \min_{b \in \mathbb{T}^d} \lambda_b. \quad (5.10)$$

Это ограничительное условие не требуется в теореме 5.2. Более того, GK-

теорема утверждает, что выполнены свойства 1 и 2 отображения H , то есть H является послойно гладким топологическим сопряжением, но не утверждает, что отображение H послойно гёльдерово, см. (5.9). Подведём итог: теоремы 5.2, 5.3 развивают GK-теорему в частном случае отображений (5.1), опуская условие узости спектра и добавляя свойство 3 — гёльдеровость.

Утверждения 1 и 2 теоремы 5.1 могут быть выведены из GK-теоремы. Действительно, любая непрерывная функция $\lambda < 1$ удовлетворяет условию (5.10) в подходящей окрестности точки. С другой стороны, теорема 5.1 может быть в полной мере просто выведена из теорем 5.2, 5.3.

5.2. План доказательства

5.2.1. Глобализация

Теорема 5.1 доказывается с помощью стандартной техники глобализации (см., например, [98]). Без потери общности гиперболичность косого произведения F влечёт, что $\lambda_b < 1$ в окрестности $U \in \mathbb{T}^d$ фиксированной точки O . Иначе мы переходим к обратному отображению F^{-1} . Пусть K — компактное подмножество U , содержащее фиксированную точку O строго внутри. Рассмотрим гладкую функцию $\varphi : \mathbb{T}^d \rightarrow [0, 1]$, для которой

$$\varphi|_K \equiv 0, \varphi|_{\mathbb{T}^d \setminus U} \equiv 1$$

Вместо начальной функции $f_b(x)$ на слоях рассмотрим функцию

$$\tilde{f}_b(x) = f_b(x)(1 - \varphi) + \frac{x(1 + x)}{2}\varphi$$

Мы поставили квадратичный многочлен во втором слагаемом, чтобы было выполнено свойство $\tilde{f}_b(1) = 1$. Тогда отображение

$$\tilde{F} : M_\varepsilon \rightarrow M, (b, x) \mapsto (Ab, \tilde{f}_b(x))$$

обладает следующим списком свойств:

1. $\tilde{F}$ совпадает с F в окрестности фиксированной точки O
2. $\tilde{F}$ является притягивающим около нулевого уровня: если $\tilde{\lambda}_b := \tilde{f}'_b(0)$ то

$$\tilde{\lambda}_b < 1 \quad \forall b \in \mathbb{T}^d \quad (5.11)$$

Поэтому мы можем без потери общности с самого начала предположить, что $\lambda_b \in (0, 1)$ в каждой точке базы $\mathbb{T}^d$. Более того, сопряжение H может быть найдено во всём M_ε : другими словами, равенство $F \circ H = H \circ F_0$ будет выполнено во всей окрестности M_ε базы.

В оставшейся части этой главы мы доказываем глобальные результаты, то есть теорему 5.2 и теорему 5.3.

Теперь докажем теорему 5.2: основная идея состоит в том, чтобы использовать теорему о неподвижной точке для доказательства существования сопряжения H : нам нужно лишь правильно определить функциональное пространство и сжимающий оператор на нём. В последующих параграфах мы выполним это, вынося некоторые вычисления, а также доказательство теоремы 5.3 в приложение (параграф 5.6).

5.2.2. Гомологические и функциональные уравнения

Предположим, что

$$f_b(x) = \lambda_b x + R_b(x), \quad R_b(x) = O(x^2), \quad x \rightarrow 0. \quad (5.12)$$

Тогда задача поиска сопряжения $H : M_\varepsilon \rightarrow M_\varepsilon$ вида (5.3), удовлетворяющего (5.6), равносильна задаче поиска решения $\bar{h}_b(x)$ так называемом *функционального уравнения*

$$\bar{h}_{Ab}(\lambda_b x) - \lambda_b \bar{h}_b(x) = R_b(x + \bar{h}_b(x)) \quad (5.13)$$

Для краткости перепишем это уравнение в *форме композиции*:

$$\bar{h} \circ F_0 - \lambda \bar{h} = R \circ H \quad (5.14)$$

Здесь через λ мы обозначаем оператор умножения на λ_b , где b является аргументом рассматриваемой функции.

Ниже мы будем работать не с самой квадратичной частью сопряжения, а с ней же, разделённой на x^2 . По этому причине мы изменим обозначения следующим образом: мы будем обозначать функциями с чертой функции в пространстве квадратичных частей возможных отображений сопряжения и будем обозначать функциями без черты те же самые функции, делённые на x^2 , например, $h_b(x) := \frac{\bar{h}_b(x)}{x^2}$. В аналогичной манере $Q_b(x) := \frac{R_b(x)}{x^2}$.

Функциональное уравнение трудно решить, так как функция $\bar{h}_b(x)$ присутствует в обеих частях уравнения. Это уравнение можно упростить, рассматривая более лёгкую форму уравнения на $\bar{h}_b(x)$ — *гомологическое уравнение*:

$$\bar{h} \circ F_0 - \lambda \bar{h} = R \quad (5.15)$$

Решения гомологического уравнения сами по себе не дают сопряжений, однако являются полезным инструментом исследования. Гомологическое уравнение можно эквивалентно переписать через h и Q :

$$\lambda^2 h \circ F_0 - \lambda h = Q \quad (5.16)$$

5.2.3. Операторный подход

Рассмотрим пространство $\mathcal{M}$ вещественнозначных функций, определённых на M , непрерывных по $b \in \mathbb{T}^d$ и гладких по $x \in [0, 1]$:

$$\mathcal{M} := \{ \bar{h}_b(x) \in M \mid \bar{h}_\cdot(x) \in C(\mathbb{T}^d), \bar{h}_b(\cdot) \in C^k[0, 1] \}$$

Определим оператор $\bar{\Psi} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, сопоставляющий функции $h_b(x)$ левую часть гомологического уравнения (5.15). Используя этот оператор, можно переписать уравнение (5.15) в виде $\bar{\Psi} \bar{h} = R$.

Обозначим через $\bar{L}$ оператор, обратный к $\bar{\Psi}$. Далее мы докажем, что он существует. Оператор $\bar{L}$ *решает* гомологическое уравнение: если правая часть

уравнения равна R , то $\bar{L}R = \bar{h}$ and $\bar{L}\bar{\Psi} = \tau$. С этого момента мы будем называть оператор $\bar{L}$ *гомологическим оператором*. Факт его существования является следствием леммы 4, однако сейчас мы будем использовать символ $\bar{L}$ лишь формально, чтобы объяснить основную идею.

Определим *оператор сдвига* $\bar{\Phi} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, действующий следующим образом:

$$\bar{\Phi}\bar{h}(b, x) = R_b(x + \bar{h}_b(x)) \quad (5.17)$$

Таким образом, функциональное уравнение на функцию $\bar{h}$ можно переписать в виде $\bar{\Psi}\bar{h} = \bar{\Phi}\bar{h}$ или, эквивалентно, $\bar{h} = \bar{L}\bar{\Phi}\bar{h}$. Таким образом, задача поиска сопряжения **эквивалентна** задаче поиска фиксированной точки оператора $\bar{L}\bar{\Phi}$ в пространстве $\mathcal{M}$.

Сделаем полезное для последующего изложения замечание: оператор $\bar{\Psi}$ (как и ему обратный $\bar{L}$) являются линейными на пространстве формальных рядов, хотя оператор $\bar{\Phi}$ линейным не является: например, он отправляет в ноль в функцию $R_b(x)$.

5.2.4. Выбор функционального пространства для теоремы Банаха о неподвижной точке

Мы будем использовать простейшую форму принципа сжимающих отображений, рассматривая сжимающее отображение, определённое на метрическом пространстве $\mathcal{N}$ и сохраняющее его замкнутое подмножество N .

Введём обозначения для символов $\mathcal{N}$, d и N . Сжимающее отображение f окажется некоторой небольшой модификацией композиции операторов $\bar{L}\bar{\Phi}$, рассмотренной в параграфе 5.2.3. Обратим внимание, что оператор $\bar{L}$, как и оператор $\bar{\Phi}$, сохраняет подпространство $\mathcal{M}$ функций, начинающихся со второй степени переменной x , которое мы обозначим через $\mathcal{M}^2$:

$$\mathcal{M}^2 = \{\bar{h}_b(x) \in \mathcal{M} \mid \bar{h}_b(x) = x^2 h_b(x), h_b(x) \in \mathcal{M}\} \quad (5.18)$$

Поэтому определим для удобства операторы L и Φ , действующие на $\mathcal{M}$ следующим образом:

$$Lh := \frac{\bar{L}[x^2 h]}{x^2} \quad \Phi h := \frac{\bar{\Phi}[x^2 h]}{x^2} \quad (5.19)$$

Эти операторы соответствуют решению гомологического уравнения и оператору сдвига, некоторым образом нормализованным.

Доказываемые нами теоремы линеаризации применимы только в окрестности базы, то есть в $\mathbb{T}^d \times [0, \varepsilon]$. Условия на малую константу ε будут сформулированы позже. Теорема о сжимающем отображении будет применена к оператору $L\Phi$, действующему на полном метрическом пространстве $\mathcal{M}_\varepsilon$ функций на $\mathcal{M}$, ограниченных на малую окрестность тора $\mathbb{T}^d \times [0, \varepsilon]$. Норма на этом пространстве просто является непрерывной нормой, определяемой для $h_b(x) \in \mathcal{M}_\varepsilon$ как

$$\|h\|_{C,\varepsilon} = \sup_{(b,x) \in \mathbb{T}^d \times [0,\varepsilon]} |h_b(x)|.$$

Чтобы использовать принцип сжимающих отображений, определим пространство

$$\mathcal{N} := \{h \in \mathcal{M}_\varepsilon, \|h\|_{C,\varepsilon} \leq A\}, \rho(h_1, h_2) := \|h_1 - h_2\|_{C,\varepsilon}. \quad (5.20)$$

с непрерывной нормой на нём.

Константа A будет выбрана позднее. Теперь перейдём к определению множества $\mathcal{N}$.

5.2.5. Гёльдерово свойство подпространства $\mathcal{N}$

Чтобы доказать теорему 5.2, нам потребуется работать с тремя нормами. Первая норма - непрерывная $\|\cdot\|_{C,\varepsilon}$, была определена выше. Теперь мы определим липшицеву норму $\text{Lip}_{x,\varepsilon}$, а также как гёльдерову норму $\|\cdot\|_{[\alpha],\varepsilon}$. Индекс ε отражает, что эти нормы рассматриваются на подпространстве функций в $\mathcal{M}_\varepsilon^2$, однако мы будем опускать этот индекс в очевидных случаях.

Определение 5. Для функции $h \in \mathcal{M}$ определим её *гёльдерову норму* $||h||_{[\alpha]}$ как

$$||h||_{[\alpha]} := \sup_{b_1, b_2 \in \mathbb{T}^d, x \in [0, 1]} \frac{|h_{b_1}(x) - h_{b_2}(x)|}{||b_1 - b_2||^\alpha}$$

Гёльдерова норма функции иногда называется её гёльдеровой константой.

Подпространство функций $h \in \mathcal{M}$, для которых эта норма конечна, мы будем называть пространством *гёльдеровых функций показателя α* и обозначать через $\mathcal{H}^\alpha$. Ровно таким же образом пространство $\mathcal{H}_\varepsilon^\alpha$ состоит из функций h в $\mathcal{M}_\varepsilon$, для которых $||h||_{[\alpha], \varepsilon} < \infty$, где

$$||h||_{[\alpha], \varepsilon} := \sup_{b_1, b_2 \in \mathbb{T}^d, x \in [0, \varepsilon]} \frac{|h_{b_1}(x) - h_{b_2}(x)|}{||b_1 - b_2||^\alpha}$$

Определение 6. Для функции $h \in \mathcal{M}$ определим её *послойную липшицеву норму* $\text{Lip}_x h$ по формуле

$$\text{Lip}_x h := \sup_{b \in \mathbb{T}^d, x, y \in [0, 1]} \frac{|h_b(x) - h_b(y)|}{|x - y|}$$

Аналогично для $h \in \mathcal{M}_\varepsilon$ положим

$$\text{Lip}_{x, \varepsilon} h := \sup_{b \in \mathbb{T}^d, x, y \in [0, \varepsilon]} \frac{|h_b(x) - h_b(y)|}{|x - y|}$$

Как только даны эти определения, мы можем определить замкнутое подпространство N функционального пространства $\mathcal{N}$ (см. (5.20)) для применения принципа сжимающих отображений. Ниже мы покажем, что существуют константы $\varepsilon > 0$, а также A_C , A_{Lip} и A_α , такие что пространство

$$N = \{h \in \mathcal{M}_\varepsilon, h \in \mathcal{H}_\varepsilon^\alpha \mid ||h||_{C, \varepsilon} \leq A_C, \text{Lip}_{x, \varepsilon} h \leq A_{\text{Lip}}, ||h||_{[\alpha], \varepsilon} \leq A_\alpha\} \quad (5.21)$$

замкнуто в $(\mathcal{N}, \rho)$ и сохраняется под действием $L\Phi$. Замкнутость N почти очевидна: нам требуется доказать, что если последовательность непрерывных функций $h_n \in N$ сходится в C -норме к некоторой непрерывной функции h при $n \rightarrow \infty$, то $h \in N$. Таким образом, нам нужно доказать некоторые оценки для

липшицевой и гёльдеровой норм функции h . Очевидным образом эти оценки выполнены для непрерывной нормы (обратим внимание, что здесь нам требуется $A \geq A_C$). Например, в случае липшицевой нормы нам требуется лишь перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$ в неравенстве:

$$\forall x, y \in [0, 1] \quad |h_n(x) - h_n(y)| \leq A_{\text{Lip}}|x - y|.$$

Аналогичные аргументы работают для гёльдеровой нормы (требуется рассмотреть $b_1, b_2 \in \mathbb{T}^2$ вместо $x, y \in [0, 1]$, что по существу ничего не меняет).

В доказательстве мы сначала выбираем константы A_C, A_{Lip} и A_α , A может быть выбрано позже, например, так: $A := A_C$.

5.2.6. Три основных леммы и доказательство теоремы 5.2

Чтобы доказать теорему 5.2, нужно лишь показать, что выполнены условия принципа сжимающих отображений для $\mathcal{N}$, ρ и N , определённых соответственно в (5.20) и (5.21). Здесь мы формулируем три основных леммы, которые дают результат теоремы 5.2.

В лемме 4 мы работаем с гомологическим уравнением и находим явное решение уравнения (5.15) в виде формального ряда. Также эта лемма утверждает, что этот ряд экспоненциально сходится и задаёт непрерывную функцию на M . Более того, для α , выбранного в соответствии с (5.9), оператор L в пространстве $\mathcal{M}$ сохраняет подпространство $\mathcal{H}^\alpha$ гёльдеровых функций с данным фиксированным показателем. Из этого ключевого соображения следует главное утверждение – гёльдеровость сопряжения.

Две оставшихся леммы позволяют нам применить принцип сжимающих отображений. В лемме 5 исследуется композиция $L\Phi$: показывается, что можно выбрать замкнутое подпространство $N \subset \mathcal{N}$ вида (5.21), отображаемое в себя композицией $L\Phi$. Лемма 6 показывает, что $L\Phi$ на самом деле является сжимающим отображением на пространстве $\mathcal{M}_\varepsilon$ в непрерывной норме.

Давайте приведём теперь точные формулировки лемм.

Лемма 4. [Решение гомологического уравнения] Рассмотрим косое произведение (5.1). Определим последовательность функций на $\mathbb{T}^d$ по формуле

$$\Pi_0(b) := 1, \Pi_n(b) := \lambda_b \lambda_{Ab} \dots \lambda_{A^{n-1}b}, n = 1, 2, \dots \quad (5.22)$$

Пусть α задано условием (5.9). Положим

$$\theta = \theta(\alpha) := \mu^\alpha q < 1 \quad (5.23)$$

Предположим, что условия (5.7) и (5.23) выполнены. Пусть $Q \in \mathcal{H}^\alpha$.

Тогда верно следующее:

1. Существует решение $h_b(x)$ гомологического уравнения (5.16). Оно может быть представлено в виде формального ряда

$$h_b(x) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Pi_k(b) Q \circ F_0^k(b, x)}{\lambda_{A^k b}} \quad (5.24)$$

2. Ряд (5.24) сходится равномерно на M , его сумма является непрерывной по b и имеет такую же степень гладкости по x , как Q .

3. Решение h удовлетворяет условию Гёльдера с показателем, равным α : $h \in \mathcal{H}^\alpha$.

4. Оператор $L : Q \mapsto h$ ограничен в C -норме на пространстве $\mathcal{M}$.

Лемма 5. [Замкнутое подпространство, отображаемое на себя] Для косо го произведения вида (5.1) существуют константы $\varepsilon, A_C, A_{\text{Lip}}, A_\alpha > 0$, такие что оператор $L\Phi$, действующий на пространстве $\mathcal{M}$, отображает в себя его замкнутое подпространство N , определённое в (5.21).

Лемма 6. [Свойство сжатия] Существует константа $A > 0$, такая что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ оператор $L\Phi$, действующий на пространстве $\mathcal{N}$, (зависящий от A и ε , см. (5.20)) является сжимающим в непрерывной норме.

Доказательство теоремы 5.2.

Доказательство мы проводим следующим образом. Сначала мы выбираем ε , определённый леммой 5, и фиксируем все константы $A_C, A_{\text{Lip}}, A_\alpha$, задаваемые той же леммой. Далее мы уменьшаем ε таким образом, чтобы была выполнена лемма 6. На множестве $\mathcal{N}$, соответствующем такому ε и константе $A = A_C$ определена C -норма, задающая структуру полного метрического пространства. Оператор $L\Phi$ действует на этом пространстве и по лемме 6 является сжимающим отображением. Обратим внимание, что множество N , определённое в (5.21), является замкнутым подпространством в $\mathcal{N}$, так как $A = A_C$. Это подпространство $N \subset \mathcal{H}_\varepsilon^\alpha$ с фиксированной константой Гёльдера α сохраняется оператором $L\Phi$. Поэтому по принципу сжимающих отображений $L\Phi$ имеет неподвижную точку $h \in N$ (а потому и в $\mathcal{H}_\varepsilon^\alpha$), задающую гёльдерово сопряжение начального косо́го произведения и его линеаризации. Строго говоря, свойство Гёльдера доказано не для сопряжения, а для его квадратичной части, разделённой на x^2 , но отсюда следует свойство Гёльдера и для сопряжения, так как функция x ограничена. $\square$

5.3. Доказательство леммы 4: решение гомологического уравнения

Сейчас мы решим гомологическое уравнение и найдём функцию h , удовлетворяющую (5.16). Сначала мы найдём формулу для h в предположении, что h существует, далее докажем, что функция h , задаваемая этой формулой, удовлетворяет (5.16). Если такая функция h существует, что она может быть задана как

$$h = -\lambda^{-1}Q + \lambda h \circ F_0 \quad (5.25)$$

Теперь попробуем выяснить, какой вид должна иметь h . Возьмём правую композицию этого уравнения с нормализованным отображением F_0 , заданным в (5.4). Далее применим оператор умножения на λ к этому уравнению. Из уравнения

(5.25) следует, что

$$\lambda(h \circ F_0) = -\lambda(\lambda^{-1} \circ A) Q \circ F_0 + \lambda(\lambda \circ A) h \circ F_0^2 \quad (5.26)$$

Обратим внимание, что левая часть уравнения (5.26) равна одному из слагаемых в правой части уравнения (5.25). Продолжим процесс взятия правой композиции с F_0 и умножения на λ . Таким образом мы получаем бесконечную последовательность уравнений, которую можно просуммировать. Сложив первые $N + 1$ из них, получим

$$h_b = \Pi_{N+1}(b) h_b \circ F_0^{N+1} - \sum_{k=0}^N \frac{\Pi_k(b) Q \circ F_0^k}{\lambda_{A^k b}} \quad (5.27)$$

Перейдём к пределу при $N \rightarrow \infty$. Поскольку $h \in \mathcal{N}$, $\|h\|_C \leq A$, и λ ограничено некоторым $q < 1$, первое слагаемое правой части уравнения (5.27) ограничено Aq^{N+1} и потому стремится к 0. Мы хотим показать здесь, что если h существует, и соответствующий ряд сходится, то (5.24) выполнено. Но теперь, получив явное выражение для h , можно просто проверить, что этот сходящийся ряд задаёт функцию h , удовлетворяющую гомологическому уравнению (5.16).

Поскольку F является диффеоморфизмом, $\forall b \in \mathbb{T}^d$ имеем $\lambda_b \neq 0$. Тогда, поскольку λ_b является непрерывной функцией на компактном многообразии $\mathbb{T}^d$, существует нижняя граница $D > 0$, такая что

$$\lambda_b \geq D > 0 \quad \forall b \in \mathbb{T}^d. \quad (5.28)$$

Значит, поскольку, очевидно,

$$|\Pi_k(b)| \leq q^k, \quad (5.29)$$

ряд (5.24) ограничен сходящимся числовым рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{D} \|Q\|_C = \frac{\|Q\|_C}{D(1-q)} \quad (5.30)$$

Следовательно, по признаку сходимости Вейештрасса, его сумма является непрерывной функцией на M , и нормализованный гомологический оператор L ограничен в непрерывной норме. А именно,

$$\|L\|_C \leq \frac{1}{D(1-q)} \quad (5.31)$$

Решение $h_b(x)$ имеет ту же степень гладкости по x , что и Q . Это можно проверить дифференцированием ряда (5.24) и повторным применением признака сходимости Вейерштрасса. Ряд для производной решения h гомологического уравнения будет сходиться ещё быстрее, чем ряд для самой функции: действительно, коэффициенты ряда (5.24) будут умножаться на быстро убывающие множители $\Pi_k(b)$.

Таким образом, предположения 1, 2 и 4 леммы 4 доказаны. Остаётся доказать, что свойство Гёльдера с показателем α сохраняется оператором L . Нам потребуется следующее

Предложение 4. В постановке теоремы 5.1 пусть свойство Гёльдера (5.2) выполнено для f_b и некоторого k . Тогда для λ_b и $Q_b(x)$, заданных $f_b(x) = \lambda_b x + x^2 Q_b(x)$, выполнено свойство Гёльдера для λ_b и того же k , что в (5.2), а также для $Q_b(x)$ и $k - 2$.

Доказательство. Свойство для λ_b очевидно, так как $\lambda_b = \frac{\partial f_b(x)}{\partial x} \big|_{x=0}$. Свойство для $Q_b(x)$ следует из аналога леммы Адамара: для $\varphi \in C^2_{[0,1]}$, $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ и $\psi = \frac{\varphi}{x^2}$ имеем

$$\|\psi\|_C \leq \|\varphi\|_{C^2} \quad (5.32)$$

Это следует из хорошо известной формулы $\varphi(x) = \int_0^x (x-t)\varphi''(t)dt$. Замена координат $t = xs$, $s \in [0, 1]$ приводит к $\varphi(x) = x^2 \int_0^1 (1-s)\varphi''(xs)ds$. Отсюда получаем (5.32). Из этого следует нужное нам свойство, что Q_b гёльдерова и непрерывна в предположении, что f_b гёльдерова как элемент C^2 . $\square$

Чтобы доказать предположение 3 леммы 4, обозначим через $C_Q := \|Q\|_{[\alpha]}$ и $C_\lambda := \|\lambda\|_{[\alpha]}$ константы Гёльдера функций Q и λ соответственно. Нам нужно найти такое $C > 0$, чтобы для любых $b_1, b_2 \in \mathbb{T}^d$ было выполнено

$$|h_{b_1}(x) - h_{b_2}(x)| \leq C \|b_1 - b_2\|^\alpha \quad (5.33)$$

Обратим внимание, что даже если показатели Гёльдера для Q и λ близки к 1, наши методы показывают, что показатель Гёльдера решения h нормализованного гомологического уравнения оказывается близок к нулю.

Для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ Обозначим

$$P_k(b) := \frac{\Pi_k(b)}{\lambda_{A^k b}} \quad (5.34)$$

Очевидно, тогда

$$|P_k(b)| \leq q^k D. \quad (5.35)$$

Пусть $Q_k(b, x) := Q \circ F_0^k(b, x)$. Тогда решение h можно записать в виде

$$h_b(x) = - \sum_{k=0}^{\infty} P_k(b) Q_k(b, x)$$

Возьмём $b_1, b_2 \in \mathbb{T}^d$ и обозначим $Q_{k,j} := Q \circ F_0^k(b_j, x)$, $j = 1, 2$. Тогда

$$|h_{b_1}(x) - h_{b_2}(x)| = \sum_{k=0}^{\infty} [(P_k(b_1) - P_k(b_2))Q_{k,1} + P_k(b_2)(Q_{k,1} - Q_{k,2})]$$

Таким образом, получаем оценку

$$|h_{b_1}(x) - h_{b_2}(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \theta_{1,k}(b_1, b_2) + \theta_{2,k}(b_1, b_2) \quad (5.36)$$

где

$$\theta_{1,k}(b_1, b_2) = |P_k(b_1) - P_k(b_2)| \|Q\|_C, \quad \theta_{2,k}(b_1, b_2) = |P_k(b_2)| \|Q_{k,1} - Q_{k,2}\| \quad (5.37)$$

Сформулируем некоторые нужные нам предложения, доказательства которых мы выносим в приложение (параграф 5.6).

Предложение 5. Функций $\Pi_n(b)$, определённая как произведение функций λ_b в первых n точках орбиты линейного диффеоморфизма A (см. (5.22)) непрерывная гёльдерова с показателем α (см. (5.9)), и

$$\|\Pi_n\|_{[\alpha]} \leq \frac{C_\lambda \theta^n}{(\mu^\alpha - 1)q}$$

где C_λ — константа Гёльдера для λ , θ определено в (5.23), а μ равно максимальной абсолютной величине собственных значений A .

Предложение 6. Функция $P_n(b)$, определённая в (5.34), гёльдерова с показателем α . Имеет место оценка

$$\|P_n\|_{[\alpha]} \leq D^2 C_\lambda B \theta^n, \quad (5.38)$$

где B зависит только от начального отображения. Точная формула для B приводится ниже, см. (5.51).

Теперь с помощью предложения 6 мы можем доказать, что

$$\theta_{1,k}(b_1, b_2) \leq \|Q\|_C D^2 C_\lambda B \theta^k \|b_1 - b_2\|^\alpha \quad (5.39)$$

Оценка величины $\theta_{2,k}$ является несколько более длинной.

Предложение 7. Функций $\theta_{2,k}(b_1, b_2)$, определённая в (5.37), гёльдерова с показателем α , и

$$\|\theta_{2,k}\|_{[\alpha]} \leq \theta^k D \left(C_Q + q^{k-1} \text{Lip}_x Q \frac{C_\lambda}{\mu^\alpha - 1} \right) \quad (5.40)$$

Доказательство этого предложения использует только неравенство треугольника, и мы выносим его в приложение.

Подставляя оценки для $\theta_{1,k}$ и $\theta_{2,k}$ из (5.39) и (5.40) в неравенство (5.36), мы можем наконец использовать наш специальный выбор параметра α . Именно в этом месте мы используем ключевой факт, что $\theta < 1$, чтобы установить сходимость оцениваемых рядов в правой части уравнения (5.36). Из простого вычисления суммы геометрической прогрессии мы получаем, что h гёльдерова, и (5.33) выполнено для некоторого C_h . Явный вид C_h не важен для доказательства этой леммы, но будем использован в доказательстве леммы 5. По этой причине выпишем его явно:

$$C_h = \|Q\|_C L_C + C_Q L_{[\alpha]} + \text{Lip}_x Q L_{\text{Lip}}. \quad (5.41)$$

где

$$L_C = \frac{D^2 C_\lambda B}{1 - \theta}, L_{[\alpha]} = \frac{D}{1 - \theta}, L_{\text{Lip}} = \frac{C_\lambda}{(\mu^\alpha - 1)q} \frac{1}{1 - \theta q}. \quad (5.42)$$

Таким образом, доказательство леммы 4 завершено. $\square$

5.4. Доказательство леммы 5: оператор сдвига

Возьмём некоторое $h \in N$ и оценим непрерывную, липшицеву и гёльдерову нормы его образа при отображении композицией операторов L и Φ .

План доказательства следующий: сначала мы покажем, что существуют такие константы $\varepsilon_C > 0$ и $A = A_C > 0$, что пространство $\mathcal{N}$, определённое в (5.20), переходит в себя при отображении $L\Phi$. Таким образом, оператор $L\Phi$ не слишком увеличивает непрерывную норму, если рассматривать его на подходящем пространстве.

На следующем шаге мы уменьшаем ε -окрестность базы достаточно, чтобы нужные нам функции были там определены, и ищем $\varepsilon_{\text{Lip}} < \varepsilon_C$ и хорошую оценку для A_{Lip} в (5.20). Мы найдём такие ε_{Lip} и A_{Lip} , что $L\Phi$ не увеличит липшицеву норму функции h при условиях $\|h\|_C \leq A_C, \|h\|_{\text{Lip}} \leq A_{\text{Lip}}$ в окрестности базы.

Наконец, на заключительном шаге мы найдём $\varepsilon_\alpha < \varepsilon_{\text{Lip}}$ и A_α , для которых пространство N , определённое в (5.21), сохраняется оператором $L\Phi$.

Из определения (5.17) оператора сдвига $\bar{\Phi}$ имеем

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}\bar{h}(b, x) &= R_b(x + \bar{h}_b(x)) = (x + \bar{h}_b(x))^2 Q(b, x + x^2 \bar{h}_b(x)) = \\ &= x^2 (1 + x \bar{h}_b(x))^2 Q(b, x + x^2 \bar{h}_b(x)), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\Phi h = (1 + xh)^2 Q(b, x + x^2 h) \quad (5.43)$$

Используя определение (5.21) подпространства N , а также оценку (5.30) и выражение (5.43) для любого $h \in N$, имеем

$$\|L\Phi h\|_{C,\varepsilon} \leq \frac{1}{D(1-q)} \|\Phi h\|_{C,\varepsilon} \leq \frac{\|Q\|_C}{D(1-q)} (1 + \varepsilon A_C)^2 \quad (5.44)$$

Фиксируем сначала любое

$$A_C > \frac{\|Q\|_C}{D(1-q)} \quad (5.45)$$

и затем выберем $\varepsilon = \varepsilon_C$ таким образом, чтобы

$$\frac{\|Q\|_C}{D(1-q)} (1 + \varepsilon A_C)^2 < A_C$$

Обратим внимание, что в определении пространства $\mathcal{N}$ константа A , ограничивающая норму, должна быть больше константы A_C , определённой в (5.45).

Чтобы ограничить липшицеву норму, нам потребуется предположение, касающееся гомологического оператора, сохраняющего пространство функций, гладких на слоях. Поскольку мы будем работать с производными функций вдоль слоя, примем следующее обозначение: обозначим l -ю производную функции $h(b, x)$ относительно координаты слоя x через $h^{(l)}$, $l \in \mathbb{N}$.

Предложение 8. Оператор L ограничен относительно липшицевой нормы, то есть существует такая константа $\text{Lip}_x L$, что для любой $h \in \mathcal{M}$ верно неравенство

$$\text{Lip}_x (Lh) \leq \text{Lip}_x L \cdot \text{Lip}_x h.$$

Более того, для любой функции $b \in \mathbb{T}^d$, если функция $h(b, \cdot) \in C^l$, то Lh имеет такую же гладкость, и

$$\left\| (Lh)^{(l)} \right\|_C \leq C_k(L) \left\| h^{(l)} \right\|_C \quad (5.46)$$

Доказательство этого предложения является простым следствием явной формы (5.24) решения нормализованного гомологического уравнения, И мы приводим его в приложении, параграф 5.6.

Перейдём к липшицевой норме $\text{Lip}_{x,\varepsilon}[L\Phi h] \leq \text{Lip}_x L \times \text{Lip}_{x,\varepsilon} \Phi h$. Пользуясь простыми аргументами, можно доказать следующее

Предложение 9. Существуют многочлены $T_3(\varepsilon)$ и $T_4^0(\varepsilon)$ степеней 3 и 4 соответственно, такие что $T_4^0(0) = 0$, и для любой функции $h \in N$ верно неравенство

$$\text{Lip}_{x,\varepsilon}[\Phi h] \leq T_3(\varepsilon) + T_4^0(\varepsilon)A_{\text{Lip}} \quad (5.47)$$

Доказательство этого предложения мы выносим в приложение.

Отсюда мы видим, что существует такая константа A_{Lip} , что для любого достаточно малого ε , скажем, $\varepsilon < \varepsilon_{\text{Lip}}$, константа Липшица образа любой функции $h \in N$ ограничена этой константой A_{Lip} :

$$\text{Lip}_{x,\varepsilon}[L\Phi h] \leq A_{\text{Lip}}.$$

Мы можем считать, что $\varepsilon_{\text{Lip}} < \varepsilon_C$.

Нам остаётся оценить $\|L\Phi h\|_{[\alpha],\varepsilon}$. Для этого нам потребуется отдельно оценить, как операторы L и Φ ведут себя на пространстве α -гёльдеровых функций.

Следующее предложение для оператора сдвига мы докажем в приложении (параграф 5.6).

Предложение 10. Если $h \in \mathcal{H}_\varepsilon^\alpha$, то также $\Phi h \in \mathcal{H}_\varepsilon^\alpha$. И, более того, для $h \in N$ существуют многочлены $\tilde{T}_2(\varepsilon)$ и $\tilde{T}_4^0(\varepsilon)$ степеней 2 и 4 соответственно, что $\tilde{T}_4^0(\varepsilon)(0) = 0$ и

$$\|\Phi h\|_{[\alpha],\varepsilon} \leq \tilde{T}_4^0(\varepsilon)A_\alpha + \tilde{T}_2(\varepsilon) \quad (5.48)$$

В доказательстве леммы 4 мы вывели оценки (5.41) на гёльдерову норму нормализованного гомологического оператора с помощью некоторых фиксированных констант $L_C, L_{[\alpha]}, L_{\text{Lip}}$, определяемых в (5.42):

$$\|Lh\|_{[\alpha],\varepsilon} \leq L_C\|h\|_{C,\varepsilon} + L_{[\alpha]}\|h\|_{[\alpha],\varepsilon} + L_{\text{Lip}}\text{Lip}_{x,\varepsilon}h \quad (5.49)$$

Теперь объединим (5.48) и (5.49) для $h := \Phi h$, чтобы получить оценку для $\|L\Phi h\|_{[\alpha],\varepsilon}$. Здесь мы воспользуемся предложениями 9 и 10, а также неравенством (5.44), чтобы получить оценки различных норм функции Φh в пространстве $\mathcal{M}_\varepsilon$.

$$\begin{aligned}
\|L\Phi h\|_{[\alpha],\varepsilon} &\leq L_C \|\Phi h\|_{C,\varepsilon} + L_{[\alpha]} \|\Phi h\|_{[\alpha],\varepsilon} + L_{\text{Lip}} \text{Lip}_{x,\varepsilon} \Phi h \leq \\
&\leq L_C \|Q\|_C (1 + \varepsilon A_C)^2 + L_{[\alpha]} \left(\tilde{T}_2^0(\varepsilon) A_\alpha + \tilde{T}_2(\varepsilon) \right) + L_{\text{Lip}} (T_2(\varepsilon) + T_4^0(\varepsilon) A_{\text{Lip}})
\end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что существуют многочлены $Q_2^0(\varepsilon)$, $Q_4(\varepsilon)$, такие что $\deg Q_2^0 = 2$, $Q_2^0(0) = 0$, $\deg Q_4(\varepsilon) = 4$, и

$$\|L\Phi h\|_{[\alpha],\varepsilon} \leq A_\alpha Q_2^0(\varepsilon) + Q_4(\varepsilon) \quad (5.50)$$

Для достаточно малого ε , $\varepsilon < \varepsilon_{[\alpha]}$, и для некоторого $A_\alpha > 0$ правую часть неравенство (5.50) можно сделать меньше, чем A_α . Мы можем взять $\varepsilon_{[\alpha]} < \varepsilon_{\text{Lip}}$. Выбором $\varepsilon = \varepsilon_{[\alpha]}$ мы можем добиться того, чтобы пространство N сохранялось оператором $L\Phi$. Очевидно, это пространство является замкнутым в $\mathcal{N}$.

□

5.5. Доказательство леммы 6: свойство сжатия

Поскольку оператор L линеен и равномерно ограничен из (5.30) в непрерывной норме, единственным, что требуется доказать, является утверждение, что нормализованный оператор сдвига Φ является строго сжимающим, то есть что для любого достаточно малого ε существует константа $\nu = \nu(\varepsilon) \in (0, 1)$, такая что для любых $h, g \in \mathcal{N}$ верно

$$\|\Phi h - \Phi g\|_{C,\varepsilon} \leq \nu \|h - g\|_{C,\varepsilon}$$

Доказательство.

Предположим, что $h, g \in \mathcal{M}$, и определим $\bar{h}, \bar{g} \in \mathcal{M}^2$ через

$$\bar{h}_b(x) = x^2 h(b, x), \bar{g}_b(x) = x^2 g_b(x).$$

Обозначим также $Q_h = Q(b, x + \bar{h}_b(x))$.

$$\begin{aligned}
\|\Phi h - \Phi g\|_{C,\varepsilon} &= \|(1 + xh_b(x))^2 Q_h - (1 + xg_b(x))^2 Q_g\| \leq \\
&\leq \|Q_h - Q_g\|_{C,\varepsilon} + \|2xh_b(x)Q_h - 2xg_b(x)Q_g\|_{C,\varepsilon} + \\
&+ \|x^2 h_b^2(x)Q_h - x^2 g_b^2(x)Q_g\|_{C,\varepsilon} \leq \text{Lip}_x Q \|\bar{h} - \bar{g}\|_{C,\varepsilon} + 2\varepsilon \|h - g\|_{C,\varepsilon} \|Q\|_C + \\
&+ 2\varepsilon A \|Q_h - Q_g\|_{C,\varepsilon} + \varepsilon^2 \|(h^2 - g^2)Q_h + g^2(Q_h - Q_g)\|_{C,\varepsilon} \leq \\
&\|h - g\|_{C,\varepsilon} (\varepsilon^2 \text{Lip}_x Q + 2\varepsilon \|Q\|_C + 2\varepsilon^2 \text{Lip}_x Q A) + \\
&+ \varepsilon^2 (2A \|h - g\|_{C,\varepsilon} \|Q\|_C + A^2 \text{Lip}_x Q \varepsilon^2 \|h - g\|_{C,\varepsilon}) = \\
&= \|h - g\|_{C,\varepsilon} o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Значит, оператор Φ является строго сжимающим. Поскольку из (5.31) для любой функции $h \in \mathcal{N}$ норма $\|Lh\|_{C,\varepsilon} \leq \frac{D}{1-q} \|h\|_{C,\varepsilon}$, применяя эту оценку к Φh вместе с фактом, что оператор Φ является строго сжимающим, мы получаем, что оператор $L\Phi$ является строго сжимающим. $\square$

5.6. Приложение: доказательство теоремы 5.3 и прочие вычисления

В приложении мы докажем технические приложения, сформулированные выше.

5.6.1. Свойства Гёльдера для некоторых вспомогательных функций

Сначала докажем

Предложение 2. *Функция $\Pi_n(b)$, определённая как произведение функций λ_b в первых n точках орбиты линейного диффеоморфизма A , см. (5.22), является гёльдеровой с показателем α , и*

$$\|\Pi_n\|_{[\alpha]} \leq \frac{C_\lambda \theta^n}{(\mu^\alpha - 1)q}$$

где C_λ является константой Гёльдера для λ , θ определено в (5.23). Отсюда и далее будем считать, что α задано в (5.9), а μ является максимальной абсолютной величиной собственных значений оператора A .

Доказательство предложения 2:

$$\begin{aligned} |\Pi_n(b_1) - \Pi_n(b_2)| &= \left| \prod_{k=0}^{n-1} \lambda_{A^k b_1} - \prod_{k=0}^{n-1} \lambda_{A^k b_2} \right| = \\ &= |\lambda_{b_1} - \lambda_{b_2}| \times \left| \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_{A^k b_1} \right| + |\lambda_{b_2}| |\Pi_{n-1}(Ab_1) - \Pi_{n-1}(Ab_2)| \leq \\ &\leq q^{n-1} C_\lambda \sum_{k=0}^{n-1} \|A^k b_1 - A^k b_2\|^\alpha \leq q^{n-1} C_\lambda \frac{\mu^{n\alpha} - 1}{\mu^\alpha - 1} \|b_1 - b_2\|^\alpha \leq \frac{C_\lambda \theta^n}{(\mu^\alpha - 1)q} \|b_1 - b_2\|^\alpha \end{aligned}$$

□

Предложение 3. Функция $P_n(b)$, определяемая как $P_n(b) := \frac{\Pi_n(b)}{\lambda_{A^n b}}$, гёльдерова с показателем α , и

$$\|P_n\|_{[\alpha]} \leq D^2 C_\lambda B \theta^n$$

где B зависит только от начального отображения. Явная формула для B приводится ниже, см. (5.51).

Доказательство.

$$\begin{aligned} |P_n(b_1) - P_n(b_2)| &= \left| \frac{\Pi_n(b_1) \lambda_{A^n b_2} - \Pi_n(b_2) \lambda_{A^n b_1}}{\lambda_{A^n b_1} \lambda_{A^n b_2}} \right| \leq \\ &\leq D^2 \left| \lambda_{A^n b_2} \prod_{k=0}^{n-1} \lambda_{A^k b_1} - \lambda_{A^n b_1} \prod_{k=0}^{n-1} \lambda_{A^k b_2} \right| = \\ &= D^2 |(\lambda_{A^n b_2} - \lambda_{A^n b_1}) \Pi_n(b_1) + \Pi_{n+1}(b_1) - (\lambda_{A^n b_1} - \lambda_{A^n b_2}) \Pi_n(b_2) - \Pi_{n+1}(b_2)| \leq \\ &\leq |\Pi_{n+1}(b_1) - \Pi_{n+1}(b_2)| + |\lambda_{A^n b_1} - \lambda_{A^n b_2}| |\Pi_n(b_1) - \Pi_n(b_2)| \leq \\ &\leq D^2 \left[\frac{C_\lambda \theta^{n+1}}{(\mu^\alpha - 1)q} + 2q^n C_\lambda \mu^{n\alpha} \right] \|b_1 - b_2\|^\alpha \leq D^2 C_\lambda B \theta^n \|b_1 - b_2\|^\alpha \end{aligned}$$

где B не зависит ни от чего, кроме начального косога произведения:

$$B(\theta, \mu, \alpha, q) = \frac{\theta}{(\mu^\alpha - 1)q} + 2 \quad (5.51)$$

□

Предложение 4. Функция $\theta_{2,k}(b_1, b_2)$, определённая как

$$\theta_{2,k}(b_1, b_2) = |P_k(b_2)| |Q_{k,1} - Q_{k,2}|,$$

гёльдера с показателем α , и

$$\|\theta_{2,k}\|_{[\alpha]} \leq \theta^k D \left(C_Q + q^{k-1} \text{Lip}_x Q \frac{C_\lambda}{\mu^\alpha - 1} \right)$$

Здесь $Q_{k,1} = Q \circ F_0^k(b_1, x)$ и $Q_{k,2} = Q \circ F_0^k(b_2, x)$, а определение функций $P_k(b)$ дано в предложении 2 выше.

Доказательство. Воспользуемся результатами предложения 5 в следующей цепочке неравенств:

$$\begin{aligned} \theta_{2,k} &\leq q^k D |Q_{A^k b_1}(\Pi_k(b_1)x) - Q_{A^k b_2}(\Pi_k(b_2)x)| \leq \\ &\leq q^k D |Q_{A^k b_1}(\Pi_k(b_1)x) - Q_{A^k b_2}(\Pi_k(b_1)x)| + \\ &+ q^k D |Q_{A^k b_2}(\Pi_k(b_2)x) - Q_{A^k b_2}(\Pi_k(b_1)x)| \leq \\ &\leq q^k D C_Q \mu^{k\alpha} \|b_1 - b_2\|^\alpha + q^k D \text{Lip}_x Q \|\Pi_k\|_{\mathcal{H}^\alpha} \|b_1 - b_2\|^\alpha \leq \\ &\theta^k D \left(C_Q + q^{k-1} \text{Lip}_x Q \frac{C_\lambda}{\mu^\alpha - 1} \right) \|b_1 - b_2\|^\alpha \quad (5.52) \end{aligned}$$

□

Предложение 5. Оператор L ограничен в липшицевой норме: существует такая константа $\text{Lip}_x L$, что для любой $h \in \mathcal{M}$ верно

$$\text{Lip}_x(Lh) \leq \text{Lip}_x L \times \text{Lip}_x h.$$

Более того, если $h(b, \cdot) \in C^l$ для любой $b \in \mathbb{T}^d$, то Lh имеет такую же степень гладкости, и

$$\left\| (Lh)^{(l)} \right\|_C \leq C_k(L) \left\| h^{(l)} \right\|_C.$$

Доказательство. Используя явную формулу решения (5.24), а также оценки (5.29) и (5.35), имеем:

$$\begin{aligned} \sup_{x,y \in [0,1]} \left| \frac{Lh(b, x) - Lh(b, y)}{x - y} \right| &= \sup_{x,y \in [0,1]} \left| \sum_{k=0}^{\infty} P_k(b) \frac{h \circ F_0^k(b, x) - h \circ F_0^k(b, y)}{x - y} \right| \leq \\ &\leq \sup_{x,y \in [0,1]} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(b) \frac{\text{Lip}_x h |\Pi_k(b)x - \Pi_k(b)y|}{|x - y|} = \text{Lip}_x h \frac{D}{1 - q^2}. \end{aligned}$$

Оценки производных получаются аналогично почленным дифференцированием ряда (5.24):

$$(Lh)^{(l)} = - \sum_{k=0}^{\infty} P_k(b) \Pi_k^l(b) h^{(l)} \circ F_0^k.$$

Следовательно,

$$\left\| (Lh)^{(l)} \right\|_C \leq \frac{D}{1 - q^{l+1}} \left\| h^{(l)} \right\|_C.$$

□

Предложение 6. *Существуют многочлены $T_3(\varepsilon)$ и $T_4^0(\varepsilon)$ степеней 3 и 4 соответственно, такие что $T_4^0(0) = 0$, и для любого $h \in N$ верно*

$$\text{Lip}_{x,\varepsilon}[\Phi h] \leq T_3(\varepsilon) + T_4^0(\varepsilon) A_{\text{Lip}} \quad (5.53)$$

Доказательство предложения 9. В доказательстве этого предложения мы имеем дело с выражением для $\text{Lip}_{x,\varepsilon} \Phi h$, задаваемым формулой

$$\sup_{x,y \in [0,\varepsilon]} \frac{1}{|x - y|} \left| (1 + xh_b(x))^2 Q(b, x + \bar{h}_b(x)) - (1 + yh_b(y))^2 Q(b, y + \bar{h}_b(y)) \right|$$

Поскольку в этом предложении координата базы b постоянна, а меняется только координата x , мы позволим себе опускать индекс b и предполагать, что $Q(x) = Q(b, x + \bar{h}_b(x))$, а также $h(x) = h_b(x)$. Оценка получается из неравенства

треугольника:

$$\begin{aligned}
\text{Lip}_{x,\varepsilon} \Phi h &\leq \sup_{x,y \in [0,\varepsilon]} \left| \frac{Q(x) - Q(y)}{x - y} \right| + 2 \sup_{x,y \in [0,\varepsilon]} \left| \frac{xh(x)Q(x) - yh(y)Q(y)}{x - y} \right| + \\
&+ \sup_{x,y \in [0,\varepsilon]} \left| \frac{x^2h(x)Q(x) - y^2h(y)Q(y)}{x - y} \right| \leq \text{Lip}_x Q(1 + \text{Lip}_{x,\varepsilon} \bar{h}) + \\
&+ 2 \sup_{x,y \in [0,\varepsilon]} \left| \frac{xh(x)(Q(x) - Q(y))}{x - y} \right| + 2 \sup_{x,y \in [0,\varepsilon]} \left| \frac{xQ(y)(h(x) - h(y))}{x - y} \right| + \\
&+ 2 \sup_{y \in [0,\varepsilon]} |Q(y)h(y)| + \sup_{x,y \in [0,\varepsilon]} \left| \frac{x^2h(x)(Q(x) - Q(y))}{x - y} \right| + \\
&+ \sup_{x,y \in [0,\varepsilon]} \left| \frac{Q(y) [x^2(h(x) - h(y)) + (x^2 - y^2)h(y)]}{x - y} \right| \leq \\
&\leq \text{Lip}_x Q(1 + \text{Lip}_{x,\varepsilon} \bar{h}) + 2\varepsilon A_C \text{Lip}_x Q \text{Lip}_{x,\varepsilon} \bar{h} + 2\varepsilon \|Q\|_C A_{\text{Lip}} + \\
&+ 2\|Q\|_C A_C + \varepsilon^2 A_C \text{Lip}_x Q \text{Lip}_{x,\varepsilon} \bar{h} + \|Q\|_C (\varepsilon^2 A_{\text{Lip}} + 2\varepsilon A_C) \quad (5.54)
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
\text{Lip}_{x,\varepsilon} \bar{h} &= \sup_{x,y \in [0,\varepsilon]} \left| \frac{x^2h(x) - y^2h(y)}{x - y} \right| \leq \\
&\leq \sup_{x,y \in [0,\varepsilon]} \left| \frac{x^2(h(x) - h(y))}{x - y} \right| + \sup_{x,y \in [0,\varepsilon]} \left| \frac{h(y)(x^2 - y^2)}{x - y} \right| \leq \\
&\leq A_{\text{Lip}} \varepsilon^2 + A_C 2\varepsilon \quad (5.55)
\end{aligned}$$

После подстановки $\text{Lip}_{x,\varepsilon} \bar{h}$ в (5.54) при помощи (5.55) в результате имеем

$$\begin{aligned}
T_3(\varepsilon) &= 2A_C^2 \text{Lip}_x Q \varepsilon^3 + 4A_C^2 \text{Lip}_x Q \varepsilon^2 + 2A_C (\text{Lip}_x Q + \|Q\|_C) \varepsilon + \\
&+ \text{Lip}_x Q + 2\|Q\|_C A_C \\
T_4^0(\varepsilon) &= \text{Lip}_x Q A_C \varepsilon^4 + 2A_C \text{Lip}_x Q \varepsilon^3 + \text{Lip}_x Q \varepsilon^2 + 2\|Q\|_C \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Теперь докажем аналогичные результаты для гёльдеровской нормы оператора Φ .

Предложение 7. Если $h \in \mathcal{H}^\alpha_\varepsilon$, то также $\Phi h \in \mathcal{H}^\alpha_\varepsilon$. Более того, для $h \in N$, существуют многочлены $\tilde{T}_2(\varepsilon)$ и $\tilde{T}_4^0(\varepsilon)$, $\tilde{T}_4^0(\varepsilon)(0) = 0$ степеней 2 и 4

соответственно, такие что

$$\| \Phi h \|_{[\alpha], \varepsilon} \leq \tilde{T}_4^0(\varepsilon) A_\alpha + \tilde{T}_2(\varepsilon)$$

Доказательство. Чтобы оценить норму Гёльдера оператора сдвига, нам потребуются ещё несколько неравенств треугольника:

$$\begin{aligned} |\Phi h(b_1, x) - \Phi h(b_2, x)| &= |(1 + xh_{b_1})^2 Q_{b_1} - (1 + xh_{b_2})^2 Q_{b_2}| \leq \\ &\leq |Q_{b_1} - Q_{b_2}| + 2x |h_{b_1} Q_{b_1} - h_{b_2} Q_{b_2}| + x^2 |h_{b_1}^2 Q_{b_1} - h_{b_2}^2 Q_{b_2}| \leq \\ &\leq |Q(b_1, x + \bar{h}_{b_1}) - Q(b_1, x + \bar{h}_{b_2})| + |Q(b_1, x + \bar{h}_{b_2}) - Q(b_2, x + \bar{h}_{b_2})| + \\ &\quad + 2\varepsilon |h_{b_1} (Q(b_1, x + \bar{h}_{b_1}) - Q(b_1, x + \bar{h}_{b_2}))| + 2\varepsilon |h_{b_1} (Q(b_1, x + \bar{h}_{b_2}) - \\ &\quad - Q(b_2, x + \bar{h}_{b_2}))| + 2\varepsilon |Q_{b_2} (h_{b_1} - h_{b_2})| + \varepsilon^2 h_{b_1}^2 |Q(b_1, x + \bar{h}_{b_1}) - Q(b_1, x + \bar{h}_{b_2})| + \\ &\quad + \varepsilon^2 h_{b_1}^2 |Q(b_1, x + \bar{h}_{b_2}) - Q(b_2, x + \bar{h}_{b_2})| + \varepsilon^2 |Q_{b_2}| |h_{b_1}^2 - h_{b_2}^2| \leq \\ &\leq \|b_1 - b_2\|^\alpha \left(\tilde{T}_4^0(\varepsilon) A_\alpha + \tilde{T}_2(\varepsilon) \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{T}_4^0(\varepsilon) &= \text{Lip}_x Q \varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 A \text{Lip}_x Q + 2\varepsilon \|Q\|_C + \varepsilon^4 A^2 \text{Lip}_Q + 2\|Q\|_C A \varepsilon^2 \\ \tilde{T}_2(\varepsilon) &= C_Q + 2\varepsilon A C_Q + \varepsilon^2 A^2 C_Q. \end{aligned}$$

□

Все сформулированные выше предложения доказаны. Это завершает доказательство нашего основного результата — теоремы 5.2.

Теперь мы готовы доказать, что сопряжение гладко по переменной слоя и гёльдерово вместе со своими производными по переменным базы.

Доказательство теоремы 5.3.

Доказательство гладкой версии теоремы 5.2 аналогично доказательству последней теоремы. Здесь мы дадим набросок доказательства: мы покажем только, что сопряжение H является $(k-2)$ -гладким относительно переменной слоя. Доказательство факта, что производные по переменной слоя гёльдеровы по b ,

аналогично доказательству гёльдеровости для самой функции H , и здесь мы его не приводим.

Идея состоит в подходящей замене пространства $\mathcal{N}$. Для некоторых констант $A_0, \dots, A_l > 0$ и $\varkappa_0, \dots, \varkappa_l > 0$ определим пространство

$$\mathcal{N}_l := \left\{ h(\cdot, b) \in C^l([0, \varepsilon]) : \|h\|_C \leq A_0, \dots, \|h^{(l)}\|_C \leq A_l \right\}$$

с нормой

$$\|h\|_* = \varkappa_0 \|h\|_C + \dots + \varkappa_l \|h^{(l)}\|_C. \quad (5.56)$$

Теперь нам нужно доказать аналоги лемм 4, 6 и 5 выше, а далее применить аргументы теоремы 5.2. Гомологический оператор и оператор сдвига останутся прежними, хотя функциональное пространство, на котором они действуют, уменьшится, и в этой метрике они будут не непрерывными, а гладкими.

Лемма 1 (гладкий случай) Оператор L ограничен в норме (5.56).

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|Lh\|_* &= \sum_{j=0}^l \varkappa_j \|(Lh)^{(j)}\|_C \leq \sum_{j=0}^l \frac{D \varkappa_j}{1 - q^{j+1}} \|h^{(j)}\|_C \leq \\ &\leq \frac{D}{1 - q} \sum_{j=0}^{\infty} \varkappa_j \|h^{(j)}\|_C = \frac{D}{1 - q} \|h\|_*. \end{aligned} \quad (5.57)$$

□

Чтобы пространство $\mathcal{N}_l$ отображалось в себя оператором $L\Phi$, нам нужно подходящим образом выбрать константы $A_0, A_1, \dots, A_l$. Чтобы оператор $L\Phi$ был сжимающим на этом пространстве, нам нужно подходящим образом выбрать $\varkappa_0, \dots, \varkappa_l$. Покажем, что эти два выбора можно сделать без затруднений, и верны аналоги лемм 6 и 5.

Что касается оператора Φ , мы используем его представление (5.43) и вычислим производные для $k = 0, \dots, l$: при помощи правила Лейбница:

$$(\Phi h)^{(k)} = \sum_{j=0}^k C_k^j ((1 + xh(b, x))^2)^{(j)} Q^{(k-j)}(b, x + \bar{h}).$$

Явный вид правой части не так важен, как факт, что она может быть записана в виде суммы многочленов от производных функций $h, \bar{h}$ и Q . В самом деле, существуют многочлены $\tau_0, \dots, \tau_l$ и $\sigma_0, \dots, \sigma_l$, такие что

$$(\Phi h)^{(k)} = \sum_{j=0}^k C_k^j \tau_j(x, h, \dots, h^{(j)}) \times \quad (5.58)$$

$$\times \sigma_j \left(x, \bar{h}, \dots, \bar{h}^{(k-j)}, Q(b, x + \bar{h}), \dots, Q^{(k-j)}(b, x + \bar{h}) \right) \quad (5.59)$$

Мы оценим непрерывную норму правой части равенства (5.58) в $\mathbb{T}^d \times [0, \varepsilon]$. Таким образом, мы получим, что для некоторых многочленов T_j и S_j верна оценка

$$\|L\Phi h^{(k)}\|_{C, \varepsilon} \leq \sum_{j=0}^k C_k^j T_j(\varepsilon, A_0, \dots, A_j) S_j(\varepsilon, A_0, \dots, A_{k-j}, \|Q\|_C, \dots, \|Q^{(k-j)}\|_C). \quad (5.60)$$

Обратим внимание, что коэффициент при A_k в этом выражении является многочленом без свободного члена. Действительно, A_k приходит только из T_k и S_0 , обоих случаях A_k умножается хотя бы на один ε . Значит, нам нужно найти такие $A_0, \dots, A_l$, что выполнено следующее $l+1$ уравнение на многочлены $P_k, P_k^0, P_k^0(0) = 0$:

$$P_k^0(\varepsilon)A_k + P_k(\varepsilon)C(A_0, \dots, A_{k-1}) \leq A_k, k = 0, \dots, l \quad (5.61)$$

Сначала выберем ε таким образом, чтобы $P_k^0(\varepsilon) < 1$ для всех многочленов. Затем мы последовательно подберём решения уравнений (5.61), начиная с $k = 0$, последовательно выбирая A_k , начиная с A_0 и последовательно увеличивая индекс.

Теперь нам нужно доказать, что оператор $L\Phi$ является сжимающим на пространстве $\mathcal{N}$ при подходящем выборе $\varkappa_0, \dots, \varkappa_l$.

Можно показать, что

$$\begin{aligned} & \|L\Phi h - L\Phi g\|_* \leq \\ & \frac{D}{1-q} \sum_{j=0}^l \varkappa_j \left\| \sum_{k=0}^j C_j^k \left(\tau_k(x, h, \dots, h^{(k)}) \sigma_k \left(x, \bar{h}, \dots, \bar{h}^{(j-k)}, Q(b, x+h), \dots, \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. Q^{(j-k)}(b, x+h) \right) - \tau_k(x, g, \dots, g^{(k)}) \sigma_k(x, \bar{g}, \dots, \bar{g}^{(j-k)}, Q(b, x+g), \dots, \right. \right. \\ & \left. \left. \left. Q^{(j-k)}(b, x+g) \right) \right) \right\|_{C, \varepsilon} \leq \sum_{j=0}^l \|h^{(k)} - g^{(k)}\|_{C, \varepsilon} \left(\varkappa_k U_k^0(\varepsilon) + \sum_{j=k+1}^l U_j(\varepsilon) \varkappa_j \right) \end{aligned}$$

Для некоторых многочленов U_j, U_j^0 . Чтобы правая часть оказалась меньше, чем $\xi \|h - g\|_*$ для некоторого $\xi < 1$, должна быть выполнена следующая система неравенств:

$$\begin{aligned} U_0^0(\varepsilon) + \frac{\varkappa_1}{\varkappa_0} U_0(\varepsilon) + \dots + \frac{\varkappa_l}{\varkappa_0} U_0(\varepsilon) &\leq \xi \\ U_1^0(\varepsilon) + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} U_0(\varepsilon) + \dots + \frac{\varkappa_l}{\varkappa_1} U_0(\varepsilon) &\leq \xi \\ &\dots \\ U_{l-1}^0(\varepsilon) + \frac{\varkappa_l}{\varkappa_{l-1}} U_{l-1}(\varepsilon) &\leq \xi \\ U_l^0(\varepsilon) &\leq \xi \end{aligned}$$

Можно выбрать ε таким образом, чтобы $U_k^0(\varepsilon) < \xi$. Тогда последнее неравенство в списке выполнено, и, выбирая любые достаточно большие $\varkappa_l$ и $\varkappa_{l-1}$, мы делаем верным предпоследнее неравенство; далее продолжаем аналогичным образом выполнять неравенства от последнего к первому.

Таким образом мы получаем сжимающий оператор. Мы доказали, что на пространстве $\mathcal{N}_l$ функций, определённых в окрестности базы с подходящим образом выбранной метрикой, оператор $L\Phi$ является сжимающим. Его неподвиж-

ная точка и является требуемым сопряжением, которое является достаточно гладким по переменной слоя x .

□

Заключение

Я хочу в первую очередь поблагодарить моих научных руководителей. Спасибо Юлию Сергеевичу за то, что он поделился со мной своим видением математики, за его умение объяснить и понять. Спасибо Вам за возможность быть частью нашего семинара (однокоренное с *семья*). Спасибо Этьену за всю чудесную математику, которой он меня научил и за дружескую поддержку в моменты сомнений. Я хочу также поблагодарить моих соавторов и наш московский семинар за счастье обсуждать и решать сложные задачи вместе.

И спасибо моим друзьям, за всё.

Литература

1. Ilyashenko Yu. , Romaskevich O. Sternberg linearization theorem for skew products // Journal of Dynamical and Control systems. URL: <http://arxiv.org/abs/1505.05776> (дата обращения: 25.04.2016).
2. Bowen L., Bufetov A., Romaskevich O. On convergence of spherical averages for Markov operators // Geometriae Dedicata. 2016. Vol. 181 (1). P. 293–306.
3. Romaskevich O. On the incenters of triangular orbits on elliptic billiards // L'Enseignement Mathématique. 2014. Vol. 60 (2). P. 247–255.
4. Klimenko A., Romaskevich O. Asymptotic properties of Arnold tongues and Josephson effect // Moscow Mathematical Journal. 2014. Vol. 14:2. P. 367–384.
5. Клепцын В., Ромаскевич О., Щуров И. Эффект Джозефсона и быстро-медленные системы // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование. 2013. Vol. 8:1. P. 31–46.
6. Katok A., Hasselblatt B. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. Cambridge Uni.Press, 1994.
7. Лихарев К. К., Ульрих Б. Т. Системы с джозефсоновскими контактами: основы теории. Москва: Издательство МГУ, 1978.
8. Шмидт В. В. Введение в физику сверхпроводников. МЦНМО, 2000.
9. Karpov O. V., Buchstaber V. M., Tertychniy S. I. et al. Modeling of rf-biased overdamped Josephson junctions // J. Appl. Phys. 2008. Vol. 104:9.
10. Buchstaber V. M., Karpov O. V., Tertychnyi S. I. Features of the dynamics of a Josephson junction biased by a sinusoidal microwave current // Journal of Communications Technology and Electronics. 2006. Vol. 51:6. P. 713–718.

11. Бухштабер В. М. , Карпов О. В. , Тертычный С. И. Математические модели динамики сильношунтированного перехода Джозефсона // УМН. 2008. Т. 63:3(381). С. 155–156.
12. Бухштабер В. М. , Карпов О. В. , Тертычный С. И. Эффект квантования числа вращения // ТМФ. 2010. Т. 162:2. С. 254–265.
13. Бухштабер В. М., Карпов О. В. , Тертычный С. И. Система на торе, моделирующая динамику перехода Джозефсона // УМН. 2012. Т. 67:1(403). С. 181–182.
14. Бухштабер В. М. , Тертычный С. И. Семейство явных решений уравнения резистивной модели перехода Джозефсона // ТМФ. 2013. Т. 176 (2). С. 163–188.
15. Глуцюк А. А., Клепцын В. А., Филимонов Д. А., Щуров И. В. О квантовании перемычек в уравнении, моделирующем эффект Джозефсона // Функц. анализ и его прил. 2014. Т. 48:4. С. 47–64.
16. Ильяшенко Ю.С., Филимонов Д.А., Рыжов Д.А. Захват фазы для уравнений, описывающих резистивную модель джозефсоновского перехода, и их возмущений // Функц. анализ и его прил. 2011. Vol. 45:3. P. 41–54.
17. Marvel S. A., Mirollo R. E., Strogatz S. H. Identical phase oscillators with global sinusoidal coupling evolve by M?bius group action // Chaos. 2009. Vol. 19
18. Тертычный С. И. Об асимптотических свойствах решений уравнения $\dot{\varphi} + \sin \varphi = f$ при периодическом f // Успехи Мат. Наук. 2000. Т. 55(1):186.
19. Foote R.L. Geometry of the Prytz planimeter // Reports on mathematical physics. 1998. Vol. 42. P. 249–271.
20. Finn D. Can a bicycle create a unicycle track? // The Mathematical Association of America. 2002. P. 283–292.

21. Levi M., Tabachnikov S. On bicycle tire tracks geometry, hatchet planimeter, Menzin's conjecture and oscillation of unicycle tracks // *Experimental Mathematics*. 2009. Vol. 18(2). P. 173–186.
22. Guckenheimer J., Ilyashenko Yu.S. The duck and the devil: canards on the staircase // *Moscow Mathematical Journal*. 2001. Vol. 1:1. P. 27–47.
23. Newrock R. What are Josephson junctions? How do they work? // *Scientific American*. 1997.
24. Drozdov A. P., Erements M. I., and Ksenofontov V. T., Shylin S. I. Conventional superconductivity at 203 K at high pressures. 2015.
25. Лихарев К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. Наука, 1985.
26. Tinkham M. *Introduction to Superconductivity*. Dover, 1996.
27. Shapiro S. Josephson Currents in Superconducting Tunneling: The Effect of Microwaves and Other Observations // *Phys. Rev. Lett.* 1963. Vol. 11:80.
28. Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Издательство МЦНМО, 2012.
29. Ильяшенко Ю.С. Лекции по динамическим системам, Летняя школа – 2009 // *манускрипт*.
30. Егоров А.И. Уравнения Риккати. Москва: Физматлит, 2001.
31. Glutsyuk A., Rybnikov L. On families of differential equations on two-torus with all Arnold tongues.
32. Holly S. and Janus A., Shapiro S. Effect of Microwaves on Josephson Currents in Superconducting Tunneling // *Rev. Mod. Phys.* 1964. Vol. 36. P. 223–225.
33. Barone A. , Paterno G. *Physics and Applications of the Josephson Effect*. John Wiley and Sons, 1982.

34. Watson G. N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge University Press, 1995.
35. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. Москва: Наука, 1975.
36. Schurov I. V. Canard cycles in generic fast-slow systems on the torus // Transactions of the Moscow Mathematical Society. 2010. P. 175–207.
37. Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П. Динамические системы 5. Москва: Издательство ВИНТИ, Современные проблемы математики, Фундаментальные науки, 1986.
38. Арнольд В. И., Крылов А. Л. Равномерное распределение точек на сфере и некоторые эргодические свойства решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148 (1). С. 9–12.
39. Guivarc'h Y. Généralisation d'un théorème de von Neumann // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B. 1969. Vol. 268. P. 1020–1023.
40. Oseledets V. I. Markov chains, skew-products, and ergodic theorems for general dynamical systems // Th. Prob. App. 1965. Vol. 10. P. 551–557.
41. Grigorchuk R. I. Pointwise ergodic theorems for actions of free groups // Proc. Tambov Workshop in the Theory of Functions. 1986.
42. Nevo A. Harmonic analysis and pointwise ergodic theorems for noncommuting transformations // J. Amer. Math. Soc. 1994. Vol. 7:4. P. 875–902.
43. Nevo A., Stein E. M. A generalization of Birkhoff's pointwise ergodic theorem // Acta Math. 1994. Vol. 173. P. 135–154.
44. Ornstein D. On the pointwise behavior of iterates of a self-adjoint operator // J. Math. Mech. 1968/1969. Vol. 18. P. 473–477.

45. Grigorchuk R. I. Ergodic theorems for actions of free semigroups // Math. Notes. 1999. Vol. 65. P. 654–657.
46. Буфетов А. И. Операторные эргодические теоремы для действий свободных полугрупп и групп // Функц. анализ и его прил. 2000. Т. 34:4. С. 1–17.
47. Bufetov A. I. Convergence of spherical averages for actions of free groups // Ann. Math. 2002. Vol. 155. P. 929–944.
48. Rota G.-C. An “Alternierende Verfahren” for general positive operators // Bull. A. M. S. 1962. Vol. 68. P. 95–102.
49. Gromov M. Hyperbolic groups // Essays in Group Theory. 1987. Vol. 8. P. 75–263.
50. Edited by Ghys É. and de la Harpe P. Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA: Progress in Mathematics, 1990.
51. Fujiwara K., Nevo A. Maximal and pointwise ergodic theorems for word-hyperbolic groups // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1998. Vol. 18. P. 843–858.
52. Bowen L. Invariant measures on the space of horofunctions of a word hyperbolic group // Ergodic Theory Dynam. Systems. 2010. Vol. 30. P. 97–129.
53. Bufetov A.I., Khristoforov M., Klimenko A. Cesàro convergence of spherical averages for measure-preserving actions of Markov semigroups and groups // Int. Math. Res. Not. IMRN. 2012. Vol. 21. P. 4794–4829.
54. Calegari D., Fujiwara K. Combable functions, quasimorphisms, and the central limit theorem // Ergodic Theory Dynam. Systems. 2010. Vol. 30:5. P. 1343–1369.
55. Pollicott M., Sharp R. Ergodic theorems for actions of hyperbolic groups // Proc. Amer. Math. Soc. 2013. Vol. 141. P. 1749–1757.

56. Bowen L., Nevo A. Geometric covering arguments and ergodic theorems for free groups // *L'Enseignement Mathématique*. 2013. Vol. 59. P. 133–164.
57. Bowen L., Nevo A. Amenable equivalence relations and the construction of ergodic averages for group actions // *Journal d'Analyse Mathématique*.
58. Bowen L., Nevo A. Von-Neumann and Birkhoff ergodic theorems for negatively curved groups // *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*.
59. Bowen L., Nevo A. A horospherical ratio ergodic theorem for actions of free groups // *Groups Geom. Dyn.* 2014. Vol. 8(2). P. 331–353.
60. Bowen R., Series C. Markov maps associated with Fuchsian groups // *IHES Publications*. 1979. Vol. 50. P. 153–170.
61. Bufetov A.I., Series C. A pointwise ergodic theorem for Fuchsian groups. URL: <http://arxiv.org/abs/1010.3362v1> (дата обращения: 25.04.2016).
62. Series C. Geometrical methods of symbolic coding (*Ergodic Theory and Symbolic Dynamics in Hyperbolic Spaces*). Oxford Univ. Press, 1991.
63. Birman J., Series C. Dehn's algorithm revisited, with application to simple curves on surfaces // *Combinatorial Group Theory and Topology*, S. Gersten and J. Stallings eds., Ann. of Math. Studies III, Princeton U.P. 1987. P. 451–478.
64. Kakutani S. Random ergodic theorems and Markoff processes with a stable distribution // *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1950. 1951. P. 247–261.
65. Reznik D. URL: <http://www.youtube.com/watch?v=BBsyM7RnswA> (дата обращения: 20.12.2012).
66. Kozlov V., Treshev D. Billiards. Transl. of Math. Monographs, American Mathematical Society, Providence, 1991.

67. Chernov N. , Markarian R. Chaotic Billiards. American Mathematical Society, Providence, 2006.
68. Tabachnikov S. Geometry and Billiards. American Mathematical Society, 2005.
69. Tabachnikov S. Billiards. Société Mathématique de France, Panoramas et Synthèses, 1995.
70. Poncelet J. V. Traité des propriétés projectives des figures. Paris: Gauthier-Villars, 1865.
71. Griffiths Ph. and Harris J. Cayley's explicit solution to Poncelet's porism // L'Enseign.Math. 1978. Vol. 24. P. 31–40.
72. Schwartz R. The Poncelet grid // Adv. Geom. 2007. Vol. 7. P. 157–175.
73. Glutsyuk A. On quadrilateral orbits in complex algebraic planar billiards // Mosc. Math. J. 2014. Vol. 14:2. P. 239–289.
74. Glutsyuk A., Kudryashov Yu. No planar billiard possesses an open set of quadrilateral trajectories // J. Mod. Dyn. 2012. Vol. 6. P. 287–326.
75. Khesin B., Tabachnikov S. Pseudo-Riemannian geodesics and billiards // Adv. Math. 2009. Vol. 221. P. 1364–1396.
76. Dragovic V. and Radnovic M. Ellipsoidal billiards in pseudo-Euclidean spaces and relativistic quadrics // Adv. Math. 2012. Vol. 231. P. 1173–1201.
77. Klein F. Vorlesungen über höhere Geometrie. Springer, 1926.
78. Berger M. Géométrie. Paris: Nathan, 1990.
79. Акопян А. В. , Заславский А. А. Геометрические свойства кривых второго порядка. Москва: Издательство МЦНМО, 2007.

80. Johnson R. A. Advanced Euclidean Geometry: An Elementary treatise on the geometry of the Triangle and the Circle. New York: Dover Publications, 1960.
81. Yaglom I. M. Geometric transformations. Random House, New York, 1962.
82. Заславский А.А. Геометрические преобразования. МЦНМО, 2003.
83. Dekov Deko. Computer-generated Mathematics : The Gergonne Point // Journal of Computer-generated Euclidean Geometry. 2009. Vol. 1. P. 1–14.
84. Skutin A. On rotation of an isogonal point // Jour. of Classical Geom. 2013. Vol. 2. P. 66–67.
85. Ильяшенко Ю. С., Городецкий А. С. Некоторые новые грубые свойства инвариантных множеств и аттракторов динамических систем // Функц. анализ и его прил. 1999. Т. 33. С. 16–30.
86. Hirsch C., Pugh C., Shub M. Invariant Manifolds. Lecture Notes in Mathematics, 1977.
87. Городецкий А. С. Регулярность центральных слоев частично гиперболических множеств и приложения // Изв. РАН. Сер. матем. 2006. Т. 70:6. С. 19–44.
88. Ilyashenko Yu. S., Negut A. Hölder properties of perturbed skew products and Fubini regained // Nonlinearity. 2012. Vol. 25. P. 2377–2399.
89. Pugh C., Shub M., Wilkinson A. Hölder foliations, revisited // Journal of Modern Dynamics. 2012. Vol. 6. P. 835–908.
90. Ильяшенко Ю. С., Городецкий А. С., Клепцын В. А., Нальский М. Б. Неустранимость нулевых показателей Ляпунова // Функц. анализ и его прил. 2005. Т. 39:1. С. 27–38.

91. Ilyashenko Yu. S. Thick attractors of step skew products // Regular Chaotic Dyn. 2010. Vol. 15. P. 328-334.
92. Ilyashenko Yu. S. Thick attractors of boundary preserving diffeomorphisms // Indagationes Mathematicae. **2011**. Vol. **22**, 3-4. P. **257-314**.
93. Ильяшенко Ю.С. Диффеоморфизмы с перемежающимися бассейнами притяжения // Функц. анализ и его прил. 2008. Т. 42:4. С. 60–71.
94. Kleptsyn V., Volk D. Nonwandering sets of interval skew products // Nonlinearity. 2014. Vol. 27. P. 1595–1601.
95. Кудряшов Ю. Г. Костистые аттракторы // Функц. анализ и его прил. 2010. Т. 44:3. С. 73–76.
96. Ильяшенко Ю. С., Городецкий А. С. Некоторые свойства косых произведений над подковой и соленоидом // Динамические системы, автоматы и бесконечные группы, Сборник статей, Тр. МИАН. 2000. Т. 231. С. 96–118.
97. Guysinsky M. The theory of non-stationary normal forms // Ergodic Theory Dynam. Systems. 2002. Vol. 22:3. P. 845–862.
98. Ilyashenko Yu.S., Weigu Li. Nonlocal Bifuractions. American Mathematical Society, 1998.
99. Hausmann J.–C. Sur la topologie des bras articulés // Algebraic Topology Poznań, Lecture Notes in Mathematics. 1989. Т. 1474. P. 146–159.
100. Hausmann J.–C, Contrôle des bras articulés et transformations de Möbius // L'Enseignement Mathématique. 2005. Т. 51. P. 87–115.
101. Lagrange J. L. Théorie des variations séculaires des éléments des planètes, I, II // Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin (1781, 1782). Oeuvres de Lagrange. Т. 5, Gauthier-Villars, Paris. 1870. P. 123–344.

- 102. Hartman P., Van Kampen E. R., Wintner A. Mean Motions and Distribution Functions // Amer. J. Math. 1937. T. 59:2. P. 261–269.
- 103. Weyl H. Mean Motion // Amer. J. Math. 1938. T. 60. P. 889–896
- 104. Bohl P. Über ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem. // J. reine angew. Math. 1909. T. 135. P. 189–283.
- 105. Jessen B. and Tornehave H. Mean motions and zeros of almost periodic functions // Acta Math. 1945. T. 77. P. 137–279.
- 106. Jessen B. Some Aspects of the theory of almost periodic functions //ICM. 1954
- 107. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. Москва. Наука, 1980.
- 108. Фаворов С. Ю. Проблема Лагранжа о среднем движении // Алгебра и анализ 2008. Т.20:2. P. 218–225