

ФГБОУ ВПО «Астраханский государственный университет»

На правах рукописи

Шацков Денис Олегович

**О СВОЙСТВАХ ФУНКЦИИ МЕРЫ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ
ВЕЩЕСТВЕННОГО ЧИСЛА**

специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель –
доктор физико–математических
наук Н.Г. Мощевитин

Астрахань, 2017

Оглавление

	Стр.
Введение	3
0.1. Общая характеристика работы	3
0.2. Функция меры иррациональности: краткий обзор результатов . . .	6
0.3. Основные результаты диссертации	14
Глава 1. Осцилляция функции меры иррациональности в случаях $m = 1$ и $n = 2$ или $m \geq 2$ и $n = 1$	16
1.1. Изучение функции $\psi_{\Theta}(t)$ в случае $m = 1$ и $n = 2$	17
1.2. Изучение функции $\psi_{\Theta}(t)$ в случае $m \geq 2$ и $n = 1$	23
1.3. Последовательности Бореля-Кантелли.	36
1.4. Доказательство теоремы I.	38
Глава 2. О среднем значении меры иррациональности вещественных чи- сел.	39
2.1. Формулы с подходящими дробями.	40
2.2. Доказательство пункта 2) теоремы III.	42
2.3. Доказательство теоремы IV.	48
2.4. Эргодические свойства преобразования Гаусса.	54
2.5. Доказательства теоремы II.	56
2.6. Доказательство теоремы V.	58
2.7. Вычисление интеграла для некоторого класса чисел	59
Список литературы	67

Введение

0.1. Общая характеристика работы

Объект исследования и актуальность темы. Настоящая диссертация посвящена вопросам связанным с поведением функции меры иррациональности одного числа и нескольких чисел. Изучением свойств таких функций занимались А.Я. Хинчин, В. Ярник, Дж.В.С. Касселс и другие математики.

Классические результаты, касающиеся приближения вещественных чисел рациональными дробями принадлежат А. Лежандру, Ж. Лагранжу, К. Гауссу, Л. Дирихле, А. Гурвицу, Э. Борелю и др. В основном, все классические результаты, связанные с одномерными приближениями, получены с помощью аппарата цепных дробей.

Одно из направлений теории диофантовых приближений связано с приближением произвольного вещественного вектора $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ целочисленным вектором $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. В такого рода задачах плодотворным является изучение поведения наилучших приближений к вектору $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ в различных нормах. Основы этой теории восходят к трудам Ш. Эрмита, Г. Минковского, Г. Вороного и др.

Функция меры иррациональности естественным образом появилась в теории диофантовых приближений в вопросах, связанных с приближениями иррациональных чисел рациональными. Это связано с тем, что точки разрыва данной функции соответствуют наилучшим приближениям.

Рассматриваемая в настоящей диссертации функция меры иррациональности, по-видимому, впервые встречается работах В. Ярника [24]–[26].

Приведем определение функции меры иррациональности в наиболее общем случае. Обозначим через $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ – целочисленный вектор. Рас-

смотрим матрицу

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1^1 & \dots & \theta_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_m^1 & \dots & \theta_m^n \end{pmatrix},$$

где θ_j^i – вещественные числа из интервала $[0; 1)$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq n$, и соответствующую ей систему линейных форм

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_\Theta(\mathbf{x}) = \{L_j(\mathbf{x}), 1 \leq j \leq m\}, \quad L_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \theta_j^i x_i.$$

Тогда функцию меры иррациональности можно определить следующим образом

$$\begin{aligned} \psi_\Theta(t) &= \min_{\substack{x_i \in \mathbb{Z} \\ 1 \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq t}} \max_{1 \leq j \leq m} \|L_j(\mathbf{x})\| = \\ &= \min_{\substack{x_i \in \mathbb{Z} \\ 1 \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq t}} \max_{1 \leq j \leq m} \|\theta_j^1 x_1 + \dots + \theta_j^n x_n\|, \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|$ обозначает расстояние до ближайшего целого. Похожая функция

$$\eta(\rho) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}: 0 < |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 \leq \rho^2} \max_{1 \leq j \leq m} \|L_j(\mathbf{x})\|$$

используется в ряде доказательств у Дж.В.С. Касселса [6].

Некоторую информацию о поведении этой функции можно получить из работ А.Я. Хинчина [29], связанных с изучением сингулярных матриц. В работах А.Я. Хинчина в явном виде эта функция не присутствует.

В одномерном случае, когда $n = m = 1$, вместо матрицы Θ будем писать просто α и функцию меры иррациональности можно записать таким образом

$$\psi_\alpha(t) = \min_{1 \leq q \leq t} \|q\alpha\|$$

(здесь минимум берется по целым q).

В первой главе диссертации мы докажем метрический результат о поведении разности $\psi_\Theta(t) - \psi_{\Theta'}(t)$ при $t \rightarrow \infty$ в случаях $m = 1$ и $n = 2$ или $m \geq 2$ и $n = 1$ для почти всех (в смысле меры Лебега) пар матриц (Θ, Θ') .

Во второй главе мы изучим поведение интеграла

$$I_\alpha(t) = \int_1^t \psi_\alpha(\xi) d\xi$$

и разности $I_\alpha(t) - I_\beta(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Цели работы. Изучение интеграла $I_\alpha(t)$, разности $I_\alpha(t) - I_\beta(t)$ при $t \rightarrow +\infty$. Изучение разности $\psi_\Theta(t) - \psi_{\Theta'}(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ в случаях $m = 1$ и $n = 2$ или $m \geq 2$ и $n = 1$.

Методы исследования. В работе использованы элементарные методы теории чисел, методы математического анализа, методы функционального анализа, эргодическая теория.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Основными результатами данной работы можно считать следующие:

- найдены точные границы для значения предела $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)}$, где $N(\alpha, t)$ – количество знаменателей подходящих дробей для числа α на отрезке $[1; t]$;
- найдено значение предела $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)}$ для почти всех (в смысле меры Лебега) значений α ;
- найдено значение предела $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t}$ для почти всех (в смысле меры Лебега) значений α ;
- доказано, что существуют алгебраически независимые числа α и β , такие что $I_\alpha(t) - I_\beta(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$;
- доказано, что разность $\psi_\Theta(t) - \psi_{\Theta'}(t)$ меняет знак бесконечное количество раз для почти всех пар матриц при $m = 1$ и $n = 2$ или $m \geq 2$ и $n = 1$ при $t \rightarrow \infty$.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, и разработанные в

ней методы могут быть применены в задачах теории диофантовых приближений, касающихся нахождению наилучших приближений к многомерному вектору. Кроме того, полученные результаты могут использоваться в учебном процессе в рамках специальных курсов и специальных семинаров.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались автором на следующих конференциях:

- «Diophantine Analysis» – Астрахань, Россия (30 июля – 3 августа 2012);
- «Moscow Workshop on Combinatorics and Number Theory» – Москва (Долгопрудный), Россия (27 января – 2 февраля 2014);
- «Diophantine Approximation and Related Topics» – Орхус, Дания (12 июля – 17 июля 2015);

и научно-исследовательских семинарах:

- «Московский семинар по теории чисел» (рук. Ю.В. Нестеренко, Н.Г. Моцевитин), МГУ;
- Семинар кафедры математики и методики её преподавания Астраханского государственного университета (рук. А.Г. Князев, С.З. Кенжалиева), АГУ.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 2 статьи в ведущих российских и зарубежных рецензируемых изданиях [13], [14].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав и библиографии. Общий объем диссертации составляет 69 страниц. Библиография включает 34 наименований.

0.2. Функция меры иррациональности: краткий обзор результатов

В настоящем пункте мы приводим формулировки известных результатов о функции меры иррациональности.

Из теоремы Минковского о выпуклом теле следует, что $\psi_{\Theta}(t) < t^{-n/m}$. Эта функция кусочно постоянная, невозрастающая и убывает к нулю, когда

t стремится к бесконечности. Точки разрыва данной функции определяют наилучшие приближения для матрицы Θ в $\sup$ -норме.

Напомним определение наилучшего приближения для матрицы Θ . Для целочисленного вектора $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ рассмотрим величины

$$M(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad \zeta(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq j \leq m} \|L_j(\mathbf{x})\|.$$

Определение 1. Будем называть целочисленную точку $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ *наилучшим приближением* для матрицы Θ , если

$$\zeta(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}'} \zeta(\mathbf{x}'),$$

где минимум берется по всем ненулевым целым точкам $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n) \in \mathbb{Z}^n$, подчиненным условию

$$0 < M(\mathbf{x}') \leq M(\mathbf{x}).$$

В одномерном случае, когда $n = m = 1$, функция принимает вид

$$\psi_\alpha(t) = \min_{1 \leq q \leq t} \|q\alpha\|.$$

Используя аппарат цепных дробей, можно полностью ответить на вопрос о поведении функции $\psi_\alpha(t)$. Выпишем основные определения и формулы с цепными дробями, см. [12].

Если рассмотреть разложение числа α в обыкновенную цепную дробь

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_\nu + \dots}}},$$

где $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_\nu \in \mathbb{N}$, $\nu = 1, 2, 3, \dots$ (конечную или бесконечную, в зависимости от того, является ли α рациональным числом или нет), то подходящими дробями к α называются рациональные дроби вида

$$\frac{p_\nu}{q_\nu} = [a_0; , a_1, a_2, \dots, a_\nu] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_\nu}}}.$$

Подходящие дроби для α будут являться наилучшими приближениями к числу α , см. [12].

Если $\alpha \neq \frac{p_\nu}{q_\nu}$ (в частности, если α есть число иррациональное), то для его приближения подходящей дробью имеет место неравенство

$$\frac{1}{q_\nu(q_\nu + q_{\nu+1})} < \left| \alpha - \frac{p_\nu}{q_\nu} \right| < \frac{1}{q_\nu q_{\nu+1}}. \quad (1)$$

В частности,

$$\|q_\nu \alpha\| > \frac{1}{2q_{\nu+1}}.$$

Более того для разности (1) имеется точное равенство

$$\left| \alpha - \frac{p_\nu}{q_\nu} \right| = \frac{1}{q_\nu^2(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)}, \quad (2)$$

где

$$\alpha_{\nu+1} = [a_{\nu+1}; a_{\nu+2}, \dots], \quad \alpha_\nu^* = [0; a_\nu, a_{\nu-1}, \dots, a_1] = \frac{q_{\nu-1}}{q_\nu}.$$

Перейдем к функции $\psi_\alpha(t)$. При $q_\nu \leq t < q_{\nu+1}$ будет иметь место равенство

$$\psi_\alpha(t) = \|q_\nu \alpha\| = |q_\nu \alpha - p_\nu|. \quad (3)$$

Применив формулу (2), получим формулу для погрешности приближения числа α его подходящей дробью $\frac{p_n}{q_n}$, которая имеет вид

$$\|q_\nu \alpha\| = \frac{1}{q_\nu(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)} \quad (4)$$

или

$$q_\nu \|q_\nu \alpha\| = \frac{1}{\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*}. \quad (5)$$

В терминах функции меры иррациональности можно дать определение *спектра Лагранжа*

$$\mathbb{L} = \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists \alpha \liminf_{t \rightarrow +\infty} t\psi_\alpha(t) = \lambda\}$$

и *спектра Дирихле*

$$\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists \alpha \limsup_{t \rightarrow +\infty} t\psi_\alpha(t) = \lambda\}.$$

Используя формулу (3), определения спектра Лагранжа и спектра Дирихле можно записать по другому

$$\mathbb{L} = \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists \alpha \liminf_{n \rightarrow +\infty} q_n \|q_n \alpha\| = \lambda\}$$

и

$$\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists \alpha \limsup_{n \rightarrow +\infty} q_{n+1} \|q_n \alpha\| = \lambda\}.$$

Подробнее о спектре Лагранжа можно прочитать в книге [18] и в статье [8].

Результаты о спектре Лагранжа в одномерном случае получены при помощи теории цепных дробей с применением формулы (2), а для исследования спектра Дирихле можно использовать похожее равенство, см. [20]

$$q_{\nu+1} \|q_{\nu} \alpha\| = \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha_{\nu+2} \alpha_{\nu+1}^{**}}}.$$

Подробнее о спектре Дирихле можно прочесть в работе [4].

Информацию о спектрах Лагранжа и Дирихле в бóльших размерностях можно найти в статьях [1] и [17].

Также многомерная функция меры иррациональности использовалась в работах В. Ярника, А.Я Хинчина, которые посвящены изучению сингулярных систем и диофантовых экспонент.

Сингулярные вектора и матрицы нам понадобятся для описания результатов, связанных с отсутствием феномена осциляции в многомерных случаях. Дадим несколько определений сингулярности. Сначала сформулируем определение в том виде, в каком его давал А.Я. Хинчин, см. [11].

Определение 2. Матрица Θ представляет собой *сингулярную систему*, если при любом вещественном $t > 0$ найдется некоторое $t_0 = t_0(\varepsilon)$ такое, что при всяком $t > t_0$ система диофантовых неравенств

$$\max_{1 \leq j \leq m} \|L_j(\mathbf{x})\| \leq \frac{1}{t}, \quad 0 < \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| < \varepsilon t^{n/m}$$

имеет целочисленное решение $x \in \mathbb{Z}^n$.

Матрицу Θ , не являющуюся сингулярной, А.Я. Хинчин называл регулярной (он использовал терминологию регулярная система чисел Θ_j^i).

Дадим еще одно определение сингулярности, см. [9].

Определение 3. Пусть непрерывная функция $\psi(t)$ монотонно убывает к нулю и $\psi(t) = o(t^{-n/m})$ при $t \rightarrow +\infty$. Матрицу Θ (или набор nm вещественных чисел) мы будем называть ψ -сингулярным, если при всяком достаточно большом t система диофантовых неравенств

$$\max_{1 \leq j \leq m} \|L_j(\mathbf{x})\| \leq \psi(t), \quad 0 < \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| < t$$

имеет целочисленное решение $x \in \mathbb{Z}^n$.

Эти определения можно дать терминах функции меры иррациональности.

Определение 4. Матрица Θ называется невырожденной, если функция $\psi_\Theta(t)$ никогда не обращается в нуль при $t \geq 1$.

Определение 5. Пусть непрерывная функция $\psi(t)$ монотонно убывает к нулю при $t \rightarrow +\infty$ и $\psi(t) = o(t^{-n/m})$. Невырожденная матрица Θ является ψ -сингулярной, если при всех достаточно больших значениях t для функции меры иррациональности выполнено

$$\psi_\Theta(t) \leq \psi(t).$$

При $n = m = 1$ сингулярными системами в смысле определения 5 являются только рациональные числа, см. [9]. Впервые существование сингулярных систем было доказано А.Я. Хинчиным в 1926 г. при $n = 2, m = 1$ и при $n = 1, m = 2$ в работе [29]. Он доказал следующие две теоремы.

Теорема 1. Пусть $\psi(t)$ – положительная, непрерывная и убывающая к нулю при $t \rightarrow +\infty$ функция вещественного переменного t . Тогда существуют два линейно независимых вместе с единицей над $\mathbb{Z}$ вещественных числа α и β такие, что для всех достаточно больших t система диофантовых неравенств

$$\|x_1\alpha + x_2\beta\| \leq \psi(t), \quad 0 < \max_{j=1,2} |x_j| < t$$

имеет целочисленное решение $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$.

Теорема 2. Пусть $\psi(t)$ – положительная, непрерывная и убывающая к нулю при $t \rightarrow +\infty$ функция вещественного переменного t и при этом функция $t\psi(t)$ монотонно возрастает к бесконечности при $t \rightarrow +\infty$. Тогда существуют два линейно независимых вместе с единицей над $\mathbb{Z}$ вещественных числа α и β такие, что для всех достаточно больших t система диофантовых неравенств

$$\max(\|x\alpha\|, \|x\beta\|) \leq \psi(t), \quad 1 \leq x \leq t$$

разрешима в целых числах x .

С помощью функции $\psi_\Theta(t)$ удобно определять многомерный спектр Дирихле:

$$\mathbb{D}_{m \times n} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \exists \Theta : \limsup_{t \rightarrow \infty} t \cdot \psi_\Theta^{m/n}(t) = \lambda \right\}.$$

Наиболее прост для анализа спектр Дирихле, связанный с евклидовой нормой. В случае совместных приближений к двум вещественным числам функция меры иррациональности с евклидовой нормой определяется следующим образом

$$\psi \left(\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \right) (t) = \min_{1 \leq x \leq t, x \in \mathbb{Z}} \sqrt{\|x\alpha\|^2 + \|x\beta\|^2}.$$

В этом случае спектр Дирихле определяется так:

$$\mathbb{D}_{2 \times 1} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \exists (\alpha, \beta) \in [0; 1)^2 : \limsup_{t \rightarrow \infty} t \cdot \psi \left(\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \right) (t) = \lambda \right\}.$$

Отметим, что структуры спектра $\mathbb{D}_{2 \times 1}$ полностью описана в работе Р.К. Ахунжанова и Д.О. Шацкова [17]. Оказывается, что $\mathbb{D}_{2 \times 1} = \left[0; \frac{2}{\sqrt{3}} \right]$.

Первый вопрос, который исследуется в данной диссертации это изучение знака разности $\psi_\Theta(t) - \psi_{\Theta'}(t)$ при $t \rightarrow +\infty$.

В одномерном случае Н.Г. Мощевитин и И.Д. Кан в совместной работе [27] доказали следующий результат.

Теорема 3. Для двух вещественных чисел α и β , таких что $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$ разность

$$\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t)$$

бесконечно много раз меняет знак при $t \rightarrow +\infty$.

Результат теоремы 3 не может быть перенесен на случай бóльших размерностей, это следует из теорем 1 и 2.

Возьмем в теореме 1 функцию $\psi(t) = o(t^{-2})$, $t \rightarrow \infty$. Пусть α, β – те числа, существование которых утверждает теорема 1. Возьмем другие числа α_1, β_1 – плохо приближаемые (в смысле линейной формы):

$$\inf_{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} (\|x_1\alpha_1 + x_2\beta_1\| (\max\{|x_1|, |x_2|\})^2) > 0.$$

При достаточно больших t выполняется неравенство

$$\psi_{(\alpha, \beta)}(t) < \psi_{(\alpha_1, \beta_1)}(t),$$

что обеспечивает отсутствие осцилляции.

Ситуация для совместных приближений аналогична. Надо взять в теореме 2 функцию $\psi_1(t) = o(t^{-1/2})$, $t \rightarrow +\infty$, числа α, β из теоремы 2, а также совместно плохо приближаемые числа α_1, β_1 :

$$\inf_{x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (\max\{\|x\alpha_1\|, \|x\beta_1\|\} \cdot |x|^{1/2}) > 0.$$

Тогда

$$\psi \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} (t) < \psi \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} (t)$$

для всех достаточно больших t .

В остальных случаях отсутствие осцилляции в общем виде для всех матриц получается из следующих теорем, см. [26], [?]

Теорема 4. Пусть n – произвольное натуральное число, m – натуральное число, не меньшее, чем 2. Предположим также, что $\psi(t)$ – положительная, непрерывная и убывающая к нулю при $t \rightarrow +\infty$ функция веще-

ственного переменного t . Рассмотрим множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{mn}$, состоящее из матриц Θ таких, что

- числа θ_j^i с $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ линейно независимы вместе с единицей над $\mathbb{Z}$;
- матрица Θ является ψ - сингулярной.

Тогда для любого открытого множества $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{mn}$ пересечение $\mathcal{M} \cap \mathcal{G}$ имеет мощность континуума.

Теорема 5. Пусть $n = 1$ и $m \geq 2$. Пусть $\psi(t)$ – положительная, непрерывная и убывающая к нулю при $t \rightarrow +\infty$ функция вещественного переменного t , для которой

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \psi(t)t = +\infty.$$

Тогда множество ψ – сингулярных наборов $\Theta = \{\theta_j, 1 \leq j \leq m\}$, состоящее из алгебраически независимых вещественных чисел, в пересечении с произвольным открытым множеством $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^m$ имеет мощность континуума.

Так же наличие сингулярности позволяет сформулировать несколько общих утверждений при любых n и m .

Утверждение 1. При любых m и n , для любой матрицы Θ существует такая матрица Θ' , что разность

$$\psi_{\Theta}(t) - \psi_{\Theta'}(t)$$

начиная с некоторого момента не осциллирует.

Утверждение 2. При любых m и n , существует матрица Θ , такая что для почти всех (в смысле меры Лебега) матриц Θ' , разность

$$\psi_{\Theta}(t) - \psi_{\Theta'}(t)$$

начиная с некоторого момента не осциллирует.

Справедливость утверждения 2 следует из теоремы Хинчина-Грошева.

Итак, в размерности n и m отличных от 1 общих результатов об осцилляции быть не может. Тем не менее можно получить результаты метрического характера.

Во второй главе мы изучим интеграл $I_\alpha(t)$ от функции меры иррациональности в одномерном случае

$$I_\alpha(t) = \int_1^t \psi_\alpha(\xi) d\xi.$$

0.3. Основные результаты диссертации

В **первой главе** мы докажем следующий результат.

Теорема I. Пусть $m = 1$ и $n = 2$ или $m \geq 2$ и $n = 1$, тогда для почти всех (в смысле меры Лебега) матриц Θ и Θ' размера $m \times n$ разность

$$\psi_\Theta(t) - \psi_{\Theta'}(t)$$

осциллирует бесконечное число раз при $t \rightarrow +\infty$.

Во **второй главе** мы докажем асимптотические равенства для интеграла $I_\alpha(t)$ при $t \rightarrow +\infty$. Поскольку $0 < t\psi_\alpha(t) < 1$ для любого $t \geq 1$, то сразу видим, что $I_\alpha(t) < \ln t$.

Перечислим основные результаты II главы.

Через $N = N(\alpha, t)$ мы обозначим величину, задаваемую условием

$$q_N \leq t < q_{N+1},$$

т.е. количество знаменателей подходящих дробей для числа α на отрезке $[1; t]$.

Ясно, что $N \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

Теорема II. Для почти всех (в смысле меры Лебега) чисел α выполняются равенства

$$\begin{aligned} 1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} &= \frac{1}{2}, \\ 2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} &= \frac{6 \ln 2}{\pi^2}. \end{aligned}$$

Помимо метрического результата, мы докажем утверждение об экстремальных значениях величины $\frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)}$ при $t \rightarrow +\infty$.

Теорема III. Для любого иррационального $\alpha \in (0; 1)$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} 1) \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} &\leq 1, \\ 2) \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} &\geq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}. \end{aligned}$$

Близкий метрический результат имеется в работе И.Д. Кана, Н.Г. Мощевитина и Д. Чайка [28].

Оценки, приводимые в теореме III точны. Более того, имеет место следующая теорема.

Теорема IV. Для любого $d \in \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}; 1\right]$ существует α , такое что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} = d.$$

Для золотого сечения $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ значение предела можно непосредственно вычислить. Получается

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\tau(t)}{\ln t} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right) : \ln \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right).$$

По теореме II п.2 можно выбрать число β , алгебраически независимое с τ , такое, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\beta(t)}{\ln t} = \frac{6 \ln 2}{\pi^2},$$

и следовательно разность $I_\tau(t) - I_\beta(t)$ стремится к бесконечности при $t \rightarrow +\infty$. Таким образом, аналог теоремы 3 об осцилляции разности $\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t)$ для разности интегралов $I_\alpha(t) - I_\beta(t)$ не имеет места. В настоящей работе мы докажем следующий результат для рассматриваемых нами интегралов.

Теорема V. Пусть $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ и $r_0, r_1, \dots, r_n, \dots$ — суть знаменатели подходящих дробей для α и β соответственно. Тогда для почти всех (в смысле меры Лебега) пар $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$ верно неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |I_\alpha(q_n) - I_\beta(r_n)| < +\infty.$$

Глава 1

Осцилляция функции меры иррациональности в случаях $m = 1$ и $n = 2$ или $m \geq 2$ и $n = 1$

Эта глава посвящена доказательству следующей теоремы.

Теорема I. Пусть $m = 1$ и $n = 2$ или $m \geq 2$ и $n = 1$, тогда для почти всех (в смысле меры Лебега) матриц Θ и Θ' размера $m \times n$ разность

$$\psi_{\Theta}(t) - \psi_{\Theta'}(t)$$

осциллирует бесконечное число раз при $t \rightarrow +\infty$.

В обоих случаях, $m = 1$ и $n = 2$ или $m \geq 2$ и $n = 1$, для доказательства мы построим две последовательности множеств $\{\underline{M}_k\}$ и $\{\overline{M}_k\}$. Для каждого случая, определения этих множеств записываются похожим образом с учетом размерности. После мы воспользуемся леммами 1.3, 1.4, 1.5, 1.14, 1.15 и 1.16 и покажем, что в каждом случае последовательности $\{\underline{M}_k\}$ и $\{\overline{M}_k\}$, а также последовательности $\{\underline{M}_k \times \overline{M}_k\}$ и $\{\overline{M}_k \times \underline{M}_k\}$ являются последовательностями Бореля-Кантелли. Здесь и далее $\times$ – обозначает декартово (прямое) произведение множеств. Определение последовательности типа Бореля – Кантелли будет дано в пункте 1.3.

В этой главе будем использовать параметры:

- $0 < \lambda < \lambda_0$, (λ_0 эффективно вычисляется из лемм 1.3, 1.4, 1.5, 1.13 и 1.14);
- $0 < \varepsilon < 1$, (ε эффективно вычисляется из лемм 1.3, 1.14, 1.5, 1.12 и 1.14);
- $0 < \delta < 1$, (δ эффективно вычисляется из леммы 1.14);
- $k > K_0 = K_0(\lambda)$, (K_0 эффективно вычисляется из лемм 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.8, 1.9, 1.11, 1.13, 1.14 и 1.15).

1.1. Изучение функции $\psi_\Theta(t)$ в случае $m = 1$ и $n = 2$.

В случае $m = 1$ и $n = 2$ функция $\psi_\Theta(t)$ имеет вид

$$\psi_{(\alpha \beta)}(t) = \min_{1 \leq \max(|x_1|, |x_2|) \leq t} \|x_1\alpha + x_2\beta\|.$$

На квадрате $[0; 1]^2$ рассмотрим два множества:

$$\begin{aligned} \underline{M}_k &= \left\{ (\alpha, \beta) \in [0; 1]^2 : \psi_{(\alpha \beta)}(k) > \frac{\varepsilon}{k^2} \right\} = \\ &= \left\{ (\alpha, \beta) \in [0; 1]^2 : \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2, \ 1 \leq \max(|x_1|, |x_2|) \leq k, \ \|x_1\alpha + x_2\beta\| > \frac{\varepsilon}{k^2} \right\} = \\ &= \left\{ (\alpha, \beta) \in [0; 1]^2 : \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2, \ 1 \leq \max(|x_1|, |x_2|) \leq k \right. \\ &\quad \left. \forall q \in \mathbb{Z} \ |x_1\alpha + x_2\beta - q| > \frac{\varepsilon}{k^2} \right\}; \\ \overline{M}_k &= \left\{ (\alpha, \beta) \in [0; 1]^2 : \psi_{(\alpha \beta)}(k) \leq \frac{\varepsilon}{k^2} \right\} = \\ &= \left\{ (\alpha, \beta) \in [0; 1]^2 : \exists (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2, \ 1 \leq \max(|x_1|, |x_2|) \leq k, \ \|x_1\alpha + x_2\beta\| \leq \frac{\varepsilon}{k^2} \right\} = \\ &= \left\{ (\alpha, \beta) \in [0; 1]^2 : \exists (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2, \ 1 \leq \max(|x_1|, |x_2|) \leq k \right. \\ &\quad \left. \exists q \in \mathbb{Z} \ |x_1\alpha + x_2\beta - q| \leq \frac{\varepsilon}{k^2} \right\}. \end{aligned}$$

Верно равенство

$$\mu(\underline{M}_k) = 1 - \mu(\overline{M}_k), \quad (1.1)$$

где $\mu(\cdot)$ - мера Лебега.

Рассмотрим плоскость $O\alpha\beta$. Для любых целых чисел x_1, x_2 и q зададим множество

$$A(x_1, x_2, q) = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : |x_1\alpha + x_2\beta - q| \leq \frac{\varepsilon}{k^2} \right\}.$$

Обозначим

$$A(x_1, x_2) = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \exists q \in \mathbb{Z} \ |x_1\alpha + x_2\beta - q| \leq \frac{\varepsilon}{k^2} \right\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Z}} A(x_1, x_2, q).$$

Выпишем свойства множества $A(x_1, x_2)$:

$$A(x_1, x_2) + \left(\frac{1}{x_1} \mathbb{Z} \right) \times \left(\frac{1}{x_2} \mathbb{Z} \right) = A(x_1, x_2);$$

$$A(x_1, x_2) = A(-x_1, -x_2);$$

$$\mu(A(x_1, x_2) \cap [0; 1]^2) = \frac{2\varepsilon}{k^2}.$$

Для любых двух линейно независимых пар (x_1, x_2) и (y_1, y_2) и любых q_1 и q_2 пересечением множеств $A(x_1, x_2, q_1)$ и $A(y_1, y_2, q_2)$ будет параллелограмм с площадью

$$\mu(A(x_1, x_2, q_1) \cap A(y_1, y_2, q_2)) = \frac{1}{\left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right|} \frac{4\varepsilon^2}{k^4}. \quad (1.2)$$

Замечание 1. Диаметр этого параллелограмма не более $\frac{4\varepsilon}{k}$.

Обозначим через Λ - решетку, построенную на векторах $(\frac{y_2}{\Delta}, \frac{-x_2}{\Delta})$ и $(\frac{-y_1}{\Delta}, \frac{x_1}{\Delta})$.

Замечание 2. Центры параллелограммов, получаемых при переборе всевозможных целочисленных значений q_1, q_2 лежат в узлах решетки Λ .

Верно равенство

$$\overline{M}_k = \bigcup_{\substack{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \\ 1 \leq \max(|x_1|, |x_2|) \leq k}} (A(x_1, x_2) \cap [0; 1]^2). \quad (1.3)$$

Для удобства здесь и далее в работе через S будем обозначать параллелепипеды, соответствующей размерности, со сторонами параллельными координатным гиперплоскостям.

Для дальнейшего доказательства нам понадобится неравенство Ярника.

Теорема Ярника. Пусть G — выпуклая область на плоскости, N — число целых точек в области G , P — площадь области G , L — периметр области G , $L \geq 1$, тогда выполнены неравенства

$$P - L < N < L + P.$$

Лемма 1.1. Пусть S — квадрат со стороной λ , $\Delta = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right|$, $\Delta \neq 0$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ и $x_1, x_2, y_1, y_2 > \frac{1}{\lambda}$, N — число точек решетки Λ в

квадрате S , тогда выполняется неравенство

$$N < \lambda^2 \Delta + 2\lambda\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + 2\lambda\sqrt{x_2^2 + y_2^2}.$$

Доказательство. Подействуем на решетку Λ справа линейным преобразованием $T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$, которое переводит решетку Λ в ортонормированную решетку $\mathbb{Z}^2$. Квадрат S при этом преобразовании перейдет в параллелограмм с площадью $\lambda^2 \Delta$, длины сторон этого параллелограмма будут равны $\lambda\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ и $\lambda\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$. Применим теорему Ярника и получим неравенство.

Лемма 1.1 доказана.

Обозначим $E_k = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 : (x_1, x_2) = 1, \frac{k}{2} \leq x_1, x_2 \leq k\}$.

Лемма 1.2. Пусть $\Delta = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right|$, тогда выполняется неравенство

$$\sum_{\substack{(x_1, x_2) \in E_k \\ (y_1, y_2) \in E_k \\ (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)}} \frac{1}{\Delta} \leq 9k^2 \ln k.$$

Доказательство. Рассмотрим плоскость Oy_1y_2 . Для точки $(x_1, x_2) \in E_k$ построим семейство прямых $x_1y_2 - x_2y_1 = q$, где $q \in \mathbb{Z}$. Уравнение прямой из этого семейства можно переписать в таком виде $\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = q$. Все точки решетки $\mathbb{Z}^2$ лежат на этих прямых. Расстояние между соседними прямыми из этого семейства равно $\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$. Расстояние между соседними целыми точками на каждой прямой из этого семейства равно $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq \frac{k}{\sqrt{2}}$. На каждой прямой будет не более 2 точек $(y_1, y_2) \in E_k$. Так как мы рассматриваем пары $(x_1, x_2) \in E_k$ и $(y_1, y_2) \in E_k$, то $\Delta \leq k^2$. Оценим интересующую нас сумму

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{(x_1, x_2) \in E_k \\ (y_1, y_2) \in E_k \\ (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)}} \frac{1}{\Delta} &= \sum_{(x_1, x_2) \in E_k} \sum_{n=1}^{k^2} \sum_{\substack{\Delta=n \\ (y_1, y_2) \in E_k}} \frac{1}{\Delta} \leq \sum_{(x_1, x_2) \in E_k} \sum_{n=1}^{k^2} \frac{4}{n} \leq \\ &\leq \sum_{(x_1, x_2) \in E_k} (4 + 8 \ln k) \leq 9k^2 \ln k. \end{aligned}$$

Лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. Для любого квадрата S со стороной λ , верны неравенства

$$\lambda^2 \left(\frac{\varepsilon}{3\zeta(2)} - 37 \frac{\varepsilon^2}{\zeta^2(2)} \right) \leq \mu(\overline{M}_k \cap S) \leq 5\varepsilon\lambda^2.$$

Доказательство. Через $S(x_1, x_2, k_1, k_2)$ прямоугольник со сторонами $\frac{k_1}{x_1}$ и $\frac{k_2}{x_2}$, где $x_1, x_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$. В случае $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$ под S понимается бесконечная полоса параллельная оси $O\alpha$ или оси $O\beta$ соответственно.

Для любого квадрата S и любой пары чисел (x_1, x_2) , если положить $k_1 = [\lambda x_1]$ и $k_2 = [\lambda x_2]$, то можно указать два прямоугольника, центры которых совпадают с центром квадрата S и выполняется условие $S(x_1, x_2, k_1, k_2) \subset S \subset S(x_1, x_2, k_1 + 1, k_2 + 1)$.

Запишем ограничение снизу на меру пересечения $\overline{M}_k$ и S

$$\mu(\overline{M}_k \cap S) \geq \sum_{(x_1, x_2) \in E_k} \mu(A(x_1, x_2) \cap S) - \sum_{\substack{(x_1, x_2) \in E_k \\ (y_1, y_2) \in E_k \\ (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)}} \mu(A(x_1, x_2) \cap A(y_1, y_2) \cap S). \quad (1.4)$$

Для доказательства этого неравенства воспользуемся формулой (1.3) и формулой включения-исключения

$$\begin{aligned} \mu(\overline{M}_k \cap S) &= \mu \left(\bigcup_{\substack{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \\ 1 \leq \max(|x_1|, |x_2|) \leq k}} (A(x_1, x_2) \cap S) \right) \geq \mu \left(\bigcup_{(x_1, x_2) \in E_k} (A(x_1, x_2) \cap S) \right) \geq \\ &\geq \sum_{(x_1, x_2) \in E_k} \mu(A(x_1, x_2) \cap S) - \sum_{\substack{(x_1, x_2) \in E_k \\ (y_1, y_2) \in E_k \\ (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)}} \mu(A(x_1, x_2) \cap A(y_1, y_2) \cap S). \end{aligned}$$

Применив свойства множества $A(x_1, x_2)$, можно показать, что выполняются

равенства

$$\mu(A(x_1, x_2) \cap S(x_1, x_2, k_1, k_2)) = \begin{cases} \frac{2\varepsilon}{k^2} \frac{k_1 k_2}{x_1 x_2}, & x_1, x_2 \neq 0; \\ \frac{2\varepsilon}{k^2} \frac{k_2}{x_2}, & x_1 = 0, x_2 \neq 0; \\ \frac{2\varepsilon}{k^2} \frac{k_1}{x_1}, & x_2 = 0, x_1 \neq 0. \end{cases}$$

Оценим снизу первую сумму из неравенства (1.4).

$$\begin{aligned} \sum_{(x_1, x_2) \in E_k} \mu(A(x_1, x_2) \cap S) &\geq \sum_{(x_1, x_2) \in E_k} \mu(A(x_1, x_2) \cap S(x_1, x_2, k_1, k_2)) = \\ &= \frac{2\varepsilon}{k^2} \sum_{(x_1, x_2) \in E_k} \frac{k_1 k_2}{x_1 x_2} \geq \frac{2\varepsilon}{k^2} \sum_{(x_1, x_2) \in E_k} \frac{(\lambda x_1 - 1)(\lambda x_2 - 1)}{x_1 x_2} = \\ &= \frac{2\varepsilon}{k^2} \sum_{(x_1, x_2) \in E_k} \left(\lambda^2 - \frac{\lambda}{x_1} - \frac{\lambda}{x_2} + \frac{1}{x_1 x_2} \right) = \frac{2\varepsilon}{k^2} \left(\lambda^2 \frac{k^2}{4\zeta(2)} + O(k \ln k) \right) = \\ &= \frac{\lambda^2 \varepsilon}{2\zeta(2)} + O\left(\frac{\ln k}{k}\right) \geq \frac{\lambda^2 \varepsilon}{3\zeta(2)}. \end{aligned}$$

Оценим сверху меру множества $A(x_1, x_2) \cap A(y_1, y_2) \cap S$. Квадрат S и параллелограмм могут пересекаться, если расстояние между их центрами меньше, чем $\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + \frac{2\varepsilon}{k} \leq \lambda$. Если взять квадрат $3S$, у которого центр совпадает с центром квадрата S и сторона равна 3λ , то центры тех параллелограммов, которые задевают квадрат S будут лежать внутри квадрата $3S$. По лемме 1.1 будет

$$\#(3S \cap \Lambda) \leq 9\lambda^2 \Delta + 6\lambda \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + 6\lambda \sqrt{x_2^2 + y_2^2},$$

где $\Delta = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right|$.

Символ $\#(\cdot)$, здесь и далее, обозначает количество элементов в множестве.

Для ограничения сверху второй суммы из неравенства (1.4) воспользуемся формулой (1.2) и леммой 1.2

$$\sum_{\substack{(x_1, x_2) \in E_k \\ (y_1, y_2) \in E_k \\ (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)}} \mu(A(x_1, x_2) \cap A(y_1, y_2) \cap S) \leq \sum_{\substack{(x_1, x_2) \in E_k \\ (y_1, y_2) \in E_k \\ (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)}} \#(3S \cap \Lambda) \frac{4\varepsilon^2}{\Delta k^4} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{\substack{(x_1, x_2) \in E_k \\ (y_1, y_2) \in E_k \\ (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)}} \left(9\lambda^2 \Delta + 6\lambda \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + 6\lambda \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \right) \frac{4\varepsilon^2}{\Delta k^4} \leq \\
&\leq \frac{12\varepsilon^2}{k^4} \sum_{\substack{(x_1, x_2) \in E_k \\ (y_1, y_2) \in E_k \\ (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)}} \left(3\lambda^2 + \lambda \frac{2\sqrt{2}k}{\Delta} + \lambda \frac{2\sqrt{2}k}{\Delta} \right) = \frac{36\lambda^2 \varepsilon^2}{k^4} \sum_{\substack{(x_1, x_2) \in E_k \\ (y_1, y_2) \in E_k \\ (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)}} 1 + \\
&+ \frac{48\sqrt{2}\lambda \varepsilon^2}{k^3} \sum_{\substack{(x_1, x_2) \in E_k \\ (y_1, y_2) \in E_k \\ (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)}} \frac{1}{\Delta} \leq \frac{36\lambda^2 \varepsilon^2}{k^4} \sum_{\substack{(x_1, x_2) \in E_k \\ (y_1, y_2) \in E_k}} 1 + \frac{432\sqrt{2}\lambda \varepsilon^2 \ln k}{k} \leq \frac{37\lambda^2 \varepsilon^2}{\zeta^2(2)}.
\end{aligned}$$

Ограничение снизу для $\mu(\overline{M}_k \cap S)$ доказано.

Обозначим

$$E_k^* = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \leq x_1 \leq k, 1 \leq |x_2| \leq k\}$$

и

$$S^* = S(x_1, x_2, k_1 + 1, k_2 + 1).$$

Воспользуемся формулой (1.3), свойством $A(x_1, x_2) = A(-x_1, -x_2)$ и получим ограничение сверху на $\mu(\overline{M}_k \cap S)$

$$\begin{aligned}
\mu(\overline{M}_k \cap S) &= \mu \left(\bigcup_{\substack{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \\ 1 \leq \max(|x_1|, |x_2|) \leq k}} (A(x_1, x_2) \cap S) \right) \leq \mu \left(\bigcup_{\substack{x_1=0 \\ 1 \leq x_2 \leq k}} (A(x_1, x_2) \cap S) \right) + \\
&+ \mu \left(\bigcup_{\substack{x_2=0 \\ 1 \leq x_1 \leq k}} (A(x_1, x_2) \cap S) \right) + \mu \left(\bigcup_{(x_1, x_2) \in E_k^*} (A(x_1, x_2) \cap S) \right) \leq \\
&\leq 2 \sum_{\substack{x_1=0 \\ 1 \leq x_2 \leq k}} \mu(A(x_1, x_2) \cap S^*) + \sum_{(x_1, x_2) \in E_k^*} \mu(A(x_1, x_2) \cap S^*) = \frac{4\varepsilon}{k^2} \sum_{x_2=1}^k \frac{k_2 + 1}{x_2} + \\
&+ \frac{2\varepsilon}{k^2} \sum_{(x_1, x_2) \in E_k^*} \frac{(k_1 + 1)(k_2 + 1)}{x_1 x_2} \leq \frac{4\varepsilon}{k^2} \sum_{x_2=1}^k \frac{\lambda x_2 + 1}{x_2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\varepsilon}{k^2} \sum_{(x_1, x_2) \in E_k^*} \frac{(\lambda x_1 + 1)(\lambda x_2 + 1)}{x_1 x_2} = \\
& = \frac{4\varepsilon}{k^2} \sum_{x_2=1}^k \left(\lambda + \frac{1}{x_2} \right) + \frac{2\varepsilon}{k^2} \sum_{(x_1, x_2) \in E_k^*} \left(\lambda^2 + \frac{\lambda}{x_1} + \frac{\lambda}{x_2} + \frac{1}{x_1 x_2} \right) = \\
& = \frac{2\varepsilon}{k^2} (2\lambda^2 k^2 + O(k \ln k)) = 4\varepsilon \lambda^2 + O\left(\frac{\ln k}{k}\right) \leq 5\varepsilon \lambda^2.
\end{aligned}$$

Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4. Для любого квадрата S со стороной λ верно неравенство

$$\lambda^2 - 5\lambda^2 \varepsilon \leq \mu(S \cap \underline{M}_k).$$

Доказательство. Воспользуемся равенством (1.1) и леммой 1.3

$$\mu(S \cap \underline{M}_k) = \mu(S) - \mu(S \cap \overline{M}_k) \geq \lambda^2 - 5\varepsilon \lambda^2.$$

Лемма 1.4 доказана.

1.2. Изучение функции $\psi_\Theta(t)$ в случае $m \geq 2$ и $n = 1$.

В этом случае функция $\psi_\Theta(t)$ имеет вид

$$\psi \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{array} \right) (t) = \min_{1 \leq x \leq t} \max_{j=1, \dots, m} \|x \alpha_j\|.$$

В этом определении обозначим $\mathbf{p}_m = (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{Z}^m$. На кубе $[0; 1]^m$ рассмотрим два множества:

$$\begin{aligned}
\underline{M}_k &= \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in [0; 1]^m : \psi \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{array} \right) (k) > \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} \right\} = \\
&= \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in [0; 1]^m : \forall q \in [1; k] \max_{1 \leq i \leq m} \{\|\alpha_i q\|\} > \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in [0; 1]^m : \forall q \in [1; k] \forall \mathbf{p}_m \max_{1 \leq i \leq m} \{|\alpha_i q - p_i|\} > \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} \right\} = \\
&= \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in [0; 1]^m : \forall q \in [1; k] \forall \mathbf{p}_m \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \left| \alpha_i - \frac{p_i}{q} \right| \right\} > \frac{\varepsilon}{q \sqrt[m]{k}} \right\}; \\
&\quad \overline{M}_k = \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in [0; 1]^m : \psi \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \right) (k) \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} \right\} = \\
&= \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in [0; 1]^m : \exists q \in [1; k] \max_{1 \leq i \leq m} \{|\alpha_i q|\} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} \right\} = \\
&= \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in [0; 1]^m : \exists q \in [1; k] \exists \mathbf{p}_m \max_{1 \leq i \leq m} \{|\alpha_i q - p_i|\} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} \right\} = \\
&= \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in [0; 1]^m : \exists q \in [1; k] \exists \mathbf{p}_m \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \left| \alpha_i - \frac{p_i}{q} \right| \right\} \leq \frac{\varepsilon}{q \sqrt[m]{k}} \right\}.
\end{aligned}$$

Верно равенство

$$\mu(\underline{M}_k) = 1 - \mu(\overline{M}_k). \quad (1.5)$$

Для числа q определим множество $A(q)$, как объединение кубов с центрами в точках $\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \dots, \frac{p_m}{q}\right)$ при $p_i = 0, 1, \dots, q$ и со стороной $\frac{2\varepsilon}{q \sqrt[m]{k}}$.

Верно равенство

$$\overline{M}_k = \bigcup_{q=1}^k (A(q) \cap [0, 1]^m). \quad (1.6)$$

Символ $\lceil \cdot \rceil$ обозначает целую часть сверху.

Лемма 1.5. Для любого куба S со стороной λ выполняется неравенство

$$\lambda^m - 2(4\lambda\varepsilon)^m \leq \mu(S \cap \underline{M}_k).$$

Доказательство. Проекция множества $A(q)$ на каждую координатную ось это объединение отрезков вида $\left[\frac{p}{q} - \frac{\varepsilon}{q \sqrt[m]{k}}, \frac{p}{q} + \frac{\varepsilon}{q \sqrt[m]{k}}\right]$ при $p = 0, 1, \dots, q$. Очевидно отрезок длины λ заденет не более $\left\lceil \left(\lambda + \frac{2\varepsilon}{q \sqrt[m]{k}}\right) : \frac{1}{q} \right\rceil \leq \left(\lambda + \frac{2\varepsilon}{q \sqrt[m]{k}}\right) q + 1 \leq \lambda q + 2$ отрезков из проекции множества $A(q)$ по каждой оси. Получаем неравенство

$$\mu(S \cap A(q)) \leq (\lambda q + 2)^m \frac{(2\varepsilon)^m}{k q^m}.$$

Применим формулу (1.6) и найдем ограничение сверху на меру пересечения

$$\begin{aligned}\mu(S \cap \overline{M}_k) &= \mu\left(\bigcup_{q=1}^k (S \cap A(q))\right) \leq \sum_{q=1}^k \mu(S \cap A(q)) \leq \sum_{q=1}^k (\lambda q + 2)^m \frac{(2\varepsilon)^m}{k q^m} \leq \\ &\leq \sum_{q=1}^k ((2\lambda q)^m + 4^m) \frac{(2\varepsilon)^m}{k q^m} = \frac{(4\lambda\varepsilon)^m}{k} \sum_{q=1}^k 1 + \frac{8^m \varepsilon^m}{k} \sum_{q=1}^k \frac{1}{q^m} \leq \\ &\leq (4\lambda\varepsilon)^m + \frac{8^m \varepsilon^m}{k} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^2} \leq 2(4\lambda\varepsilon)^m.\end{aligned}$$

Применим полученное неравенство и формулу (1.5)

$$\mu(S \cap \underline{M}_k) = \mu(S) - \mu(S \cap \overline{M}_k) \geq \lambda^m - 2(4\lambda\varepsilon)^m.$$

Лемма 1.5 доказана.

Лемма 1.6. Для $m \geq 2$ верно неравенство

$$\sum_{\lceil k/2 \rceil \leq q_1 < q_2 \leq k} \frac{(q_1, q_2)^m}{q_2^m} \leq \frac{2k}{5}.$$

Доказательство. Пусть $(q_1, q_2) = d$, $q_1 = dl$ ($l \geq \lceil \frac{k}{2d} \rceil$) и $q_2 = dp$ ($p \geq l+1 \geq \lceil \frac{k}{2d} \rceil + 1$) с условием $(l, p) = 1$, тогда

$$\begin{aligned}\sum_{\lceil k/2 \rceil \leq q_1 < q_2 \leq k} \frac{(q_1, q_2)^m}{q_2^m} &= \sum_{q_2 = \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1}^k \sum_{q_1 = \lceil \frac{k}{2} \rceil}^{q_2 - 1} \frac{(q_1, q_2)^m}{q_2^m} = \sum_{d=1}^{\lceil k/2 \rceil} \sum_{p = \lceil \frac{k}{2d} \rceil + 1}^{\lceil k/d \rceil} \sum_{\substack{l = \lceil \frac{k}{2d} \rceil \\ (l, p) = 1}}^{p-1} \frac{1}{p^m} \leq \\ &\leq \sum_{d=1}^{\lceil k/2 \rceil} \sum_{p = \lceil \frac{k}{2d} \rceil + 1}^{\lceil k/d \rceil} \sum_{\substack{l=1 \\ (l, p) = 1}}^{p-1} \frac{1}{p^m} = \sum_{d=1}^{\lceil k/2 \rceil} \sum_{p = \lceil \frac{k}{2d} \rceil + 1}^{\lceil k/d \rceil} \frac{\varphi(p)}{p^m} \leq \sum_{p=2}^k \sum_{d=1}^{\lceil k/p \rceil} \frac{\varphi(p)}{p^m} = \\ &= \sum_{p=2}^k \left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor \frac{\varphi(p)}{p^m} \leq k \sum_{p=2}^k \frac{\varphi(p)}{p^{m+1}} \leq k \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi(p)}{p^{m+1}} - 1 \right) = \\ &= k \left(\frac{\zeta(m)}{\zeta(m+1)} - 1 \right) \leq k \left(\frac{\zeta(2)}{\zeta(3)} - 1 \right) \leq \frac{2k}{5}.\end{aligned}$$

Доказательство равенства

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi(p)}{p^m} = \frac{\zeta(m-1)}{\zeta(m)}$$

можно найти в [22] на стр. 250.

Лемма 1.6 доказана.

Лемма 1.7. Пусть W - выпуклая область на плоскости, N - число целых точек в области W . Если найдутся 3 целые точки внутри области не лежащие на одной прямой, то

$$N \leq 2\mu(W) + 2.$$

Доказательство. Рассмотрим все целые точки, лежащие в области W , для них построим выпуклую оболочку. Получим выпуклый многоугольник. Применяя формулу Пика, получим неравенство

$$B + \frac{\Gamma}{2} - 1 \leq \mu(W).$$

где B есть количество целочисленных точек внутри многоугольника, а Γ — количество точек на границе многоугольника. Из соотношения $N = B + \Gamma$ получаем

$$N - 2 \leq 2\mu(W).$$

Лемма 1.7 доказана.

Рассмотрим плоскость Op_1p_2 . Для пары $(q_1, q_2) \in \mathbb{N}^2$ и числа $\delta > 0$ введем обозначения:

- C — прямоугольник со сторонами $(1+\delta)\lambda q_1$ и $(1+\delta)\lambda q_2$, параллельными осям;
- $C_0 = \left[0, \frac{(1+\delta)}{2}\lambda q_1\right] \times \left[0, \frac{(1+\delta)}{2}\lambda q_2\right]$;
- $D = \left\{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2: |q_2p_1 - q_1p_2| \leq d \left[\frac{\varepsilon(q_1+q_2)}{d \sqrt[m]{k}}\right]\right\}$, где d — наибольший общий делитель чисел q_1 и q_2 ;
- l_q — прямая $q_2p_1 - q_1p_2 = q$.

Запишем несколько свойств прямых вида l_q :

1. Расстояние между двумя соседними прямыми вида l_q равно $\frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}$.
2. Все целые точки $(p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2$ лежат на прямых вида l_q , расстояние между двумя соседними точками на одной прямой равно $\sqrt{q_1^2 + q_2^2}$.

Запишем некоторые свойства области D :

1. Количество прямых l_q в области D равно $2d \left\lceil \frac{\varepsilon(q_1 + q_2)}{d \sqrt[m]{k}} \right\rceil + 1$;
2. Ширина полосы D равна $h = 2 \left\lceil \frac{\varepsilon(q_1 + q_2)}{d \sqrt[m]{k}} \right\rceil \frac{d}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \leq \frac{2\sqrt{2}\varepsilon}{\sqrt[m]{k}}$.
3. Если $d > 2\varepsilon k^{1-1/m}$, то $D = l_0$.

Определим множества:

- $Tr_k = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2: \lceil k/2 \rceil \leq q_1 < q_2 \leq k\}$;
- $J = \{(q_1, q_2) \in Tr_k: \exists C = C_1 \#(D \cap C_1 \cap \mathbb{Z}^2) \geq N_0\}$,
где $N_0 = 8(1 + \delta)\varepsilon \lambda k^{1-1/m} + 6$;
- $J_0 = \{(q_1, q_2) \in Tr_k: (q_1, q_2) = d > d_0\}$, где $d_0 = 9\varepsilon k^{1-1/m}$;
- $J_1 = \{(q_1, q_2) \in Tr_k: \#(D \cap C_0 \cap \mathbb{Z}^2) \geq \frac{N_0}{2}\}$;
- $Pr_k = \left\{ (p_1, p_2) \in \left[0, \frac{\sqrt[m]{k}}{4\varepsilon}\right]^2 \cap \mathbb{N}^2: (p_1, p_2) = 1, 1 \leq \frac{p_2}{p_1} \leq 2 \right\}$.

Лемма 1.8. Для каждой пары $(q_1, q_2) \in J$ все целые точки в $D \cap C_1$ лежат на одной прямой l с шагом γ , где

$$1 \leq \gamma \leq \frac{\sqrt[m]{k}}{4\varepsilon}.$$

Доказательство. Область $D \cap C_1$ можно вложить в параллелограмм с высотой h и стороной $\sqrt{2}(1+\delta)\lambda k$. Таким образом мера $\mu(D \cap C_1) \leq 4(1+\delta)\varepsilon \lambda k^{1-1/m}$.

Пусть точки не лежат на одной прямой, тогда по лемме 1.7, количество целых точек N в области $\mu(D \cap C_1)$ будет

$$N \leq 2\mu(D \cap C_1) + 2 \leq 8(1 + \delta)\varepsilon \lambda k^{1-1/m} + 2,$$

получаем противоречие с тем, что $(q_1, q_2) \in J$.

Максимальный отрезок в $D \cap C_1$ это диагональ прямоугольника C_1 . Длина диагонали равна $\sqrt{2}(1 + \delta)\lambda k$, минимальное количество точек на отрезке такой длины должно быть не менее N_0 , поэтому шаг γ не может превышать величины

$$\frac{\sqrt{2}(1 + \delta)\lambda k}{N_0 - 1} \leq \frac{\sqrt{2}(1 + \delta)\lambda k}{N_0 - 6} = \frac{\sqrt{2} \sqrt[m]{k}}{8\varepsilon} \leq \frac{\sqrt[m]{k}}{4\varepsilon}.$$

Лемма 1.8 доказана.

Лемма 1.9. Пусть l - прямая из леммы 1.8, γ - расстояние между двумя соседними целыми точками на этой прямой, ω - угол между прямыми l и l_0 , тогда

$$\sin \omega \leq \frac{1}{2k\lambda\gamma}.$$

Доказательство. Определим число $a = d \left[\frac{\varepsilon}{d \sqrt[m]{k}} (q_1 + q_2) \right]$. Построим прямоугольный треугольник $A_1A_2A_3$ с гипотенузой A_1A_2 , где

$$A_1 = l \cap l_a;$$

$$A_2 = l \cap l_{-a};$$

$$A_3 \in l_a;$$

$$A_1A_3 \perp l.$$

Длины сторон $|A_1A_2| \geq (N_0 - 1)\gamma$ и $|A_1A_3| = h$. Оценим синус угла между прямыми l и l_0

$$\sin \omega = \frac{|A_1A_3|}{|A_1A_2|} \leq \frac{h}{(N_0 - 1)\gamma} \leq \frac{2\sqrt{2}\varepsilon}{\sqrt[m]{k}(N_0 - 6)\gamma} \leq \frac{1}{2k\lambda\gamma}.$$

Если $D = l_0$, то $l = l_0$ и $\sin \omega = 0$.

Лемма 1.9 доказана.

Лемма 1.10. Если $(q_1, q_2) \in J$, то

$$\#(D \cap C_0 \cap \mathbb{Z}^2) \geq \frac{N_0}{2}.$$

Доказательство. Пусть $(q_1, q_2) \in J$, тогда существует квадрат C_1 , такой что в области $D \cap C_1$ будет лежать $N \geq N_0$ целых точек. Из всех целых точек в $D \cap C_1$ выделим две точки p_s и p_d - самая левая и самая правая соответственно по оси Or_1 . Возьмем точку $p_c = \frac{p_s + p_d}{2}$. Рассмотрим 2 случая.

1-ый случай. Если N - нечетное, то p_c - целая точка. Обозначим через ϕ сдвиг на вектор $-\mathbf{p}_c$, где вектор $\mathbf{p}_c$ - радиус-вектор точки p_c .

Точки $\phi(p_c) = (0, 0) \in D \cap C_0$ и $\phi(p_d) \in D \cap C_0$, а значит и образы всех целых точек между p_c и p_d тоже лежат в области $D \cap C_0$. Количество целых точек в области $D \cap C_0$ будет

$$\#(D \cap C_0 \cap \mathbb{Z}^2) \geq \frac{N+1}{2} \geq \frac{N_0+1}{2} > \frac{N_0}{2}.$$

2-ой случай. Если N - четное, то точка p_c лежит посередине двух целых точек с прямой l , возьмем правую точку, обозначим её p_{cd} . И сделаем сдвиг на вектор $-\mathbf{p}_{cd}$, где вектор $\mathbf{p}_{cd}$ - радиус-вектор точки p_{cd} . Точки $\phi(p_{cd}) = (0, 0) \in D \cap C_0$ и $\phi(p_d) \in D \cap C_0$, а значит и образы всех целых точек между p_{cd} и p_d тоже лежат в области $D \cap C_0$.

Количество целых точек в области $D \cap C_0$ будет

$$\#(D \cap C_0 \cap \mathbb{Z}^2) \geq \frac{N}{2} \geq \frac{N_0}{2}.$$

Лемма 1.10 доказана.

Лемма 1.11. Для любого $(q_1, q_2) \in Tr_k$ выполняется неравенство

$$\#(D \cap C \cap \mathbb{Z}^2) \leq \left(\left(32\varepsilon \lambda k^{1-1/m} \right)^m + \left(\frac{16\varepsilon k^{1-1/m}}{d} \right)^m + (8\lambda d)^m + 4^m \right)^{1/m}.$$

Доказательство. Количество прямых l_q в области D , на которых лежат целые точки равно

$$2 \left\lfloor \frac{\varepsilon}{d \sqrt[m]{k}} (q_1 + q_2) \right\rfloor + 1 \leq \frac{4\varepsilon k^{1-1/m}}{d} + 1.$$

Количество точек на каждой прямой не превосходит количества точек на диагонали прямоугольника C . На каждой прямой расстояние между точками $\frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}{d}$. Длина диагонали $\sqrt{((1+\delta)\lambda q_1)^2 + ((1+\delta)\lambda q_2)^2} = (1+\delta)\lambda \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$. Значит наибольшее количество точек на каждой прямой не превосходит величины

$$\frac{(1+\delta)\lambda \sqrt{q_1^2 + q_2^2}}{\frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}{d}} + 1 = (1+\delta)\lambda d + 1. \quad (1.7)$$

Таким образом всё количество целых точек в области $D \cap C$ оценим так

$$\begin{aligned}
\#(D \cap C \cap \mathbb{Z}^2) &\leq \left(\frac{4\epsilon k^{1-1/m}}{d} + 1 \right) (2\lambda d + 1) = \\
&= \left(\left(\frac{4\epsilon k^{1-1/m}}{d} + 1 \right)^m (2\lambda d + 1)^m \right)^{1/m} \leq \\
&\leq \left(\left(\left(\frac{8\epsilon k^{1-1/m}}{d} \right)^m + 2^m \right) ((4\lambda d)^m + 2^m) \right)^{1/m} = \\
&= \left(\left(32\epsilon \lambda k^{1-1/m} \right)^m + \left(\frac{16\epsilon k^{1-1/m}}{d} \right)^m + (8\lambda d)^m + 4^m \right)^{1/m}.
\end{aligned}$$

Лемма 1.11 доказана.

Вокруг каждой точки $(p_1, p_2) \in Pr_k$ построим сектор $V(p_1, p_2)$ с углом ϕ , для которого верно неравенство $\sin \phi = \frac{1}{k\lambda\gamma}$, где $\gamma = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$ и точка (p_1, p_2) лежит на биссектрисе угла ϕ . Под сектором будем понимать область между двумя прямыми вида $y = k_1 x$ и $y = k_2 x$. Объединение всех получившихся секторов обозначим через V .

Лемма 1.12. *Верны включения $J_0 \subset J \subset J_1 \subset (V \cap Tr_k)$.*

Доказательство. Докажем включение $J_0 \subset J$. Если пара $(q_1, q_2) \in J_0$, то $D = l_0$. Возьмем прямоугольник $C = [0, (1 + \delta)\lambda q_1] \times [0, (1 + \delta)\lambda q_2]$. Оценим количество целых точек в $D \cap C$

$$\begin{aligned}
\#(D \cap C \cap \mathbb{Z}^2) &= \#(l_0 \cap C \cap \mathbb{Z}^2) = \left\lfloor \frac{(1 + \delta)\lambda \sqrt{q_1^2 + q_2^2}}{\frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}{d}} \right\rfloor + 1 > \\
&> \frac{(1 + \delta)\lambda \sqrt{q_1^2 + q_2^2}}{\frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}{d}} = (1 + \delta)\lambda d > 9(1 + \delta)\epsilon \lambda k^{1-1/m} > 8(1 + \delta)\epsilon \lambda k^{1-1/m} + 6.
\end{aligned}$$

Включение $J_0 \subset J$ доказано.

Включение $J \subset J_1$ доказано в лемме 1.10.

Если $(q_1, q_2) \in J_1$, то в области $D \cap C_0$ все целые точки лежат на одной прямой l , так как $\mu(D \cap C_0) \leq 2(1 + \delta)\epsilon \lambda k^{1-1/m}$.

Пусть точки не лежат на одной прямой, тогда по лемме 1.7, количество целых точек в области $\mu(D \cap C_0)$ будет

$$2\mu(D \cap C_0) + 2 \leq 4(1 + \delta)\varepsilon\lambda k^{1-1/m} + 2 < \frac{N_0}{2},$$

получаем противоречие с тем, что $(q_1, q_2) \in J_1$. Прямые l и l_0 пересекаются в начале координат и синус угла между прямыми l и l_0 не превосходит величины $\frac{1}{2k\lambda\gamma}$. Для доказательства надо повторить рассуждения, аналогичные рассуждениям в лемме 1.9.

Докажем включение $J_1 \subset (V \cap Tr_k)$.

Если точка $(q_1, q_2) \notin V$, то $(q_1, q_2) \notin J_1$, потому как синус угла между прямой l_0 и любым радиус-вектором (p_1, p_2) , где $(p_1, p_2) \in Pr_k$ больше чем $\sin \frac{\phi}{2} > \frac{\sin \phi}{2} = \frac{1}{2k\lambda\gamma}$, что противоречит тому что синус угла между прямыми l и l_0 не превосходит величины $\frac{1}{2k\lambda\gamma}$.

Лемма 1.12 доказана.

Лемма 1.13. *Количество пар $(q_1, q_2) \in J$ не более $\frac{2k^{1+\frac{3}{2m}}}{\lambda\varepsilon^2}$.*

Доказательство. Оценим сколько точек $(q_1, q_2) \in Tr_k$ попадают в каждый сектор $V(p_1, p_2)$. Возможны 2 случая.

Первый случай. Все целые точки лежат на прямой l_0 , тогда их количество не больше чем $\frac{\sqrt{2}k}{\gamma} + 1$.

Второй случай. Для области $V(p_1, p_2) \cap [1, k]^2$ выполняются условия леммы 1.7, тогда количество точек не больше чем

$$2\mu(V(p_1, p_2) \cap [1, k]^2) + 2 \leq 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\sqrt{2}k \right)^2 \sin \phi + 2 \leq \frac{2k}{\lambda\gamma} + 2.$$

Оценим общее количество точек

$$\begin{aligned} \#J &\leq \#(V \cap Tr_k) = \# \left(\bigcup_{(p_1, p_2) \in Pr_k} (V(p_1, p_2) \cap Tr_k) \right) \leq \\ &\leq \sum_{(p_1, p_2) \in Pr_k} \#(V(p_1, p_2) \cap Tr_k) \leq \sum_{(p_1, p_2) \in Pr_k} \left(\frac{\sqrt{2}k}{\gamma} + 1 + \frac{2k}{\lambda\gamma} + 2 \right) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{(p_1, p_2) \in Pr_k} \left(\frac{2k}{\lambda\gamma} + \frac{2k}{\lambda\gamma} + 3 \right) \leq \sum_{(p_1, p_2) \in Pr_k} \frac{4k}{\lambda\gamma} + \frac{3k^{2/m}}{16\varepsilon^2} = \\
&= \sum_{\substack{(p_1, p_2) \in Pr \\ 1 \leq \gamma \leq \frac{2m\sqrt[k]{k}}{4\varepsilon}}} \frac{4k}{\lambda\gamma} + \sum_{\substack{(p_1, p_2) \in Pr_k \\ \frac{2m\sqrt[k]{k}}{4\varepsilon} < \gamma \leq \frac{m\sqrt[k]{k}}{4\varepsilon}}} \frac{4k}{\lambda\gamma} + \frac{3k^{2/m}}{16\varepsilon^2} \leq \sum_{\substack{(p_1, p_2) \in Pr \\ 1 \leq \gamma \leq \frac{2m\sqrt[k]{k}}{4\varepsilon}}} \frac{4k}{\lambda} + \sum_{\substack{(p_1, p_2) \in Pr \\ \frac{2m\sqrt[k]{k}}{4\varepsilon} < \gamma \leq \frac{m\sqrt[k]{k}}{4\varepsilon}}} \frac{16k\varepsilon}{\lambda^{2m\sqrt[k]{k}}} + \frac{3k^{2/m}}{16\varepsilon^2} \leq \\
&\leq \frac{4k}{\lambda} \frac{k^{1/m}}{16\varepsilon^2} + \frac{16k\varepsilon}{\lambda^{2m\sqrt[k]{k}}} \frac{k^{2/m}}{16\varepsilon^2} + \frac{3k^{2/m}}{16\varepsilon^2} = \frac{k^{1+\frac{1}{m}}}{4\lambda\varepsilon^2} + \frac{k^{1+\frac{3}{2m}}}{\lambda\varepsilon} + \frac{3k^{\frac{2}{m}}}{16\varepsilon^2} \leq \frac{2k^{1+\frac{3}{2m}}}{\lambda\varepsilon^2}.
\end{aligned}$$

Лемма 1.13 доказана.

Лемма 1.14. Для любого куба S со стороной λ выполняется неравенство

$$\frac{(2\lambda\varepsilon)^m}{6} - \frac{(68\lambda\varepsilon^2)^m}{4} \leq \mu(S \cap \overline{M}_k).$$

Доказательство. Ограничение снизу на меру пересечения множества $\overline{M}_k$ с кубом S записывается неравенством

$$\mu(S \cap \overline{M}_k) \geq \sum_{q=\lceil k/2 \rceil}^k \mu(S \cap A(q)) - \sum_{\lceil k/2 \rceil \leq q_1 < q_2 \leq k} \mu(S \cap A(q_1) \cap A(q_2)). \quad (1.8)$$

Применим формулу (1.6) и докажем это неравенство

$$\begin{aligned}
\mu(S \cap \overline{M}_k) &= \mu\left(\bigcup_{q=1}^k (S \cap A(q))\right) \geq \mu\left(\bigcup_{q=\lceil k/2 \rceil}^k (S \cap A(q))\right) \geq \\
&\geq \sum_{q=\lceil k/2 \rceil}^k \mu(S \cap A(q)) - \sum_{\lceil k/2 \rceil \leq q_1 < q_2 \leq k} \mu\left((S \cap A(q_1)) \cap (S \cap A(q_2))\right) = \\
&= \sum_{q=\lceil k/2 \rceil}^k \mu(S \cap A(q)) - \sum_{\lceil k/2 \rceil \leq q_1 < q_2 \leq k} \mu(S \cap A(q_1) \cap A(q_2)).
\end{aligned}$$

Первую сумму из (1.8) снизу можно оценить таким образом

$$\sum_{q=\lceil k/2 \rceil}^k \mu(S \cap A(q)) \geq \frac{(1-\delta)^m (2\lambda\varepsilon)^m}{2}. \quad (1.9)$$

Докажем это неравенство. Проекция множества $A(q)$ на каждую координатную ось это объединение отрезков вида $\left[\frac{p}{q} - \frac{\varepsilon}{q^{m\sqrt[k]{k}}}, \frac{p}{q} + \frac{\varepsilon}{q^{m\sqrt[k]{k}}}\right]$ при $p =$

$0, 1, \dots, q$. Минимальное количество проекций множества $A(q)$, которые полностью попадут в отрезок длины λ равно $\left[\left(\lambda - \frac{2\varepsilon}{\sqrt[m]{k}q} \right) : \frac{1}{q} \right] \geq \lambda q - \frac{2\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} - 1 > \lambda q - 2$. Получаем неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{q=\lceil k/2 \rceil}^k \mu(S \cap A(q)) &\geq \sum_{q=\lceil k/2 \rceil}^k (\lambda q - 2)^m \frac{2^m \varepsilon^m}{k q^m} \geq \sum_{q=\lceil k/2 \rceil}^k ((1 - \delta) \lambda q)^m \frac{2^m \varepsilon^m}{k q^m} = \\ &= \sum_{q=\lceil k/2 \rceil}^k \frac{(1 - \delta)^m (2 \lambda \varepsilon)^m}{k} \geq \frac{(1 - \delta)^m (2 \lambda \varepsilon)^m}{2}. \end{aligned}$$

В сумме $\sum_{\lceil k/2 \rceil \leq q_1 < q_2 \leq k} \mu(S \cap A(q_1) \cap A(q_2))$ найдем ограничение сверху на каждое слагаемое. Сначала найдем ограничение на количество пересечений. Выпишем условия на попарное пересечение множеств. Рассмотрим проекцию на первую ось.

Проекция множеств $A(q_1)$ и S пересекаются, если

$$\alpha_1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k} q_1} \leq \frac{p_1}{q_1} < \alpha_1 + \lambda + \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k} q_1}.$$

Проекция множеств $A(q_2)$ и S пересекаются, если

$$\alpha_1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k} q_2} \leq \frac{p_2}{q_2} < \alpha_1 + \lambda + \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k} q_2}.$$

Проекция множеств $A(q_1)$ и $A(q_2)$ пересекаются, если существуют p_1 и p_2 , такие что

$$\left| \frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} \left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \right).$$

Если пара (p_1, p_2) удовлетворяет всем трем неравенствам, то проекции множеств S , $A(q_1)$ и $A(q_2)$ пересекаются. Перепишем эти неравенства по другому

$$\begin{cases} 0 \leq p_1 - \alpha_1 q_1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} < \lambda q_1 + \frac{2\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} \\ 0 \leq p_2 - \alpha_1 q_2 + \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} < \lambda q_2 + \frac{2\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} \\ |p_1 q_2 - p_2 q_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} (q_1 + q_2) \end{cases}$$

Рассмотрим плоскость Op_1p_2 . Первые два неравенства задают прямоугольник со сторонами $\lambda q_1 + \frac{2\varepsilon}{\sqrt[m]{k}}$ и $\lambda q_2 + \frac{2\varepsilon}{\sqrt[m]{k}}$, который содержится в прямоугольнике C . Третье неравенство задает прямые вида $p_1q_2 - p_2q_1 = q$, где $q = 0, \pm d, \dots, \pm d \left\lceil \frac{\varepsilon}{d \sqrt[m]{k}} (q_1 + q_2) \right\rceil$, то есть в точности прямые из области D . Отсюда следует, что количество решений системы будет не более, чем $\#(D \cap C \cap \mathbb{Z}^2)$.

Всё множество пар (q_1, q_2) разобьем на три случая:

пара $(q_1, q_2) \in J_0$, тогда $D = l_0$ и по формуле (1.7)

$$\#(D \cap C \cap \mathbb{Z}^2) \leq (1 + \delta)\lambda d + 1;$$

пара $(q_1, q_2) \in J \setminus J_0$, воспользуемся оценкой из леммы 1.11

$$\#(D \cap C \cap \mathbb{Z}^2) \leq \left(\left(32\varepsilon \lambda k^{1-1/m} \right)^m + \left(\frac{16\varepsilon k^{1-1/m}}{d} \right)^m + (8\lambda d)^m + 4^m \right)^{1/m};$$

пара $(q_1, q_2) \in Tr_k \setminus J$, тогда

$$\#(D \cap C \cap \mathbb{Z}^2) < N_0 = 8(1 + \delta)\varepsilon \lambda k^{1-1/m} + 6 \leq 17\varepsilon \lambda k^{1-1/m}.$$

Сумму можно записать

$$\sum_{\lceil k/2 \rceil \leq q_1 < q_2 \leq k} \mu(S \cap A(q_1) \cap A(q_2)) = \left(\sum_{J_0} + \sum_{J \setminus J_0} + \sum_{Tr_k \setminus J} \right) \mu(S \cap A(q_1) \cap A(q_2)).$$

Для удобства вместо $\sum_{(q_1, q_2) \in J}$, $\sum_{(q_1, q_2) \in J \setminus J_0}$ и $\sum_{(q_1, q_2) \in Tr_k}$ будем писать $\sum_J$, $\sum_{J \setminus J_0}$ и $\sum_{Tr_k}$ соответственно.

Применим лемму 1.6 и получим ограничение на сумму по $(q_1, q_2) \in J_0$

$$\begin{aligned} \sum_{J_0} \mu(S \cap A(q_1) \cap A(q_2)) &\leq \sum_{J_0} (\#(D \cap C \cap \mathbb{Z}^2))^m \frac{(2\varepsilon)^m}{k q_2^m} \leq \\ &\leq \sum_{J_0} ((1 + \delta)\lambda d + 1)^m \frac{(2\varepsilon)^m}{k q_2^m} \leq \sum_{J_0} ((1 + 2\delta)\lambda d)^m \frac{(2\varepsilon)^m}{k q_2^m} \leq \\ &\leq \frac{(1 + 2\delta)^m \lambda^m (2\varepsilon)^m}{k} \sum_{Tr_k} \frac{d^m}{q_2^m} \leq \frac{2(1 + 2\delta)^m \lambda^m (2\varepsilon)^m}{5}. \end{aligned}$$

Оценим сумму по $(q_1, q_2) \in J \setminus J_0$

$$\begin{aligned}
& \sum_{J \setminus J_0} \mu(S \cap A(q_1) \cap A(q_2)) \leq \sum_{J_0} (\#(D \cap C \cap \mathbb{Z}^2))^m \frac{(2\varepsilon)^m}{k q_2^m} \leq \\
& \leq \sum_{J \setminus J_0} \left(\left(32\varepsilon \lambda k^{1-1/m} \right)^m + \left(\frac{16\varepsilon k^{1-1/m}}{d} \right)^m + (8\lambda d)^m + 4^m \right) \frac{(4\varepsilon)^m}{k^{m+1}} = \\
& = \frac{(128\varepsilon^2 \lambda)^m}{k^2} \sum_{J \setminus J_0} 1 + \frac{(64\varepsilon^2)^m}{k^2} \sum_{J \setminus J_0} \frac{1}{d^m} + \frac{(32\varepsilon \lambda)^m}{k^{m+1}} \sum_{J \setminus J_0} d^m + \frac{(16\varepsilon)^m}{k^{m+1}} \sum_{J \setminus J_0} 1 \leq \\
& \leq \frac{(128\varepsilon^2 \lambda)^m}{k^2} \sum_J 1 + \frac{(64\varepsilon^2)^m}{k^2} \sum_J 1 + \frac{(32\varepsilon \lambda)^m}{k^{m+1}} \sum_{J \setminus J_0} (9\varepsilon k^{1-1/m})^m + \frac{(16\varepsilon)^m}{k^{m+1}} \sum_{Tr_k} 1 \leq \\
& \leq \frac{(128\varepsilon^2 \lambda)^m}{k^2} \frac{2k^{1+\frac{3}{2m}}}{\lambda \varepsilon^2} + \frac{(64\varepsilon^2)^m}{k^2} \frac{2k^{1+\frac{3}{2m}}}{\lambda \varepsilon^2} + \frac{(288\varepsilon^2 \lambda)^m}{k^2} \sum_J 1 + \frac{(16\varepsilon)^m}{k^{m+1}} k^2 \leq \\
& \leq \frac{(128\varepsilon^2 \lambda)^m}{k^2} \frac{2k^{1,75}}{\lambda \varepsilon^2} + \frac{(64\varepsilon^2)^m}{k^2} \frac{2k^{1,75}}{\lambda \varepsilon^2} + \frac{(288\varepsilon^2 \lambda)^m k^{1,75}}{k^2} + \frac{(16\varepsilon)^m}{k} \leq \frac{1}{\lambda k^{0,25}} \leq \frac{1}{k^{0,2}}.
\end{aligned}$$

Найдем ограничение на сумму по $(q_1, q_2) \in Tr_k \setminus J$

$$\begin{aligned}
& \sum_{Tr_k \setminus J} \mu(S \cap A(q_1) \cap A(q_2)) \leq \sum_{J_0} \#(D \cap C \cap \mathbb{Z}^2)^m \frac{(2\varepsilon)^m}{k q_2^m} \leq \\
& \leq \sum_{Tr_k \setminus J} \left(17\varepsilon \lambda k^{1-1/m} \right)^m \frac{(2\varepsilon)^m}{k \left(\frac{k}{2} \right)^m} = \\
& = \sum_{Tr_k \setminus J} \frac{(68\varepsilon^2 \lambda)^m}{k^2} \leq \frac{(68\varepsilon^2 \lambda)^m}{k^2} \sum_{Tr_k} 1 \leq \frac{(68\varepsilon^2 \lambda)^m}{4}.
\end{aligned}$$

Подставим в неравенство (1.8) неравенство (1.9) и неравенства, полученные выше

$$\begin{aligned}
& \mu(S \cap \overline{M}_k) \geq \frac{2^m(1-\delta)^m(\lambda\varepsilon)^m}{2} - \frac{2(1+2\delta)^m(2\lambda\varepsilon)^m}{5} - \frac{1}{k^{0,2}} - \frac{(68\varepsilon^2 \lambda)^m}{4} \geq \\
& \geq \frac{2^m(1-\delta)^m(\lambda\varepsilon)^m}{2} - \frac{2(1+3\delta)^m(2\lambda\varepsilon)^m}{5} - \frac{(68\varepsilon^2 \lambda)^m}{4} \geq \\
& = 2^m(\lambda\varepsilon)^m \left(\frac{(1-\delta)^m}{2} - \frac{2(1+3\delta)^m}{5} \right) - \frac{(68\lambda\varepsilon^2)^m}{4} \geq \frac{2^m(\lambda\varepsilon)^m}{6} - \frac{(68\lambda\varepsilon^2)^m}{4}.
\end{aligned}$$

Лемма 1.14 доказана.

1.3. Последовательности Бореля-Кантелли.

Пусть здесь и далее $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ - вероятностное пространство с $\Omega = [0; 1]^m$.

Назовем последовательность измеримых множеств $\{M_k\}$ - последовательностью Бореля-Кантелли если

$$\mu \left(\bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{k=r}^{\infty} M_k \right) = 1.$$

То есть почти все точки множества Ω попадают в бесконечное количество множеств последовательности $\{M_k\}$.

Теорема Шустера [34].

Пусть $\{M_k\}$ - последовательность измеримых множеств. Если для любого измеримого множества E , такого что $\mu(E) > 0$, выполняется

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E \cap M_k) = +\infty,$$

то последовательность $\{M_k\}$ является последовательностью Бореля-Кантелли.

Теорема о плотности. Пусть E - измеримое множество с $\mu(E) > 0$, тогда для любого $\delta > 0$ существует куб S , такой что

$$\frac{\mu(E \cap S)}{\mu(S)} > 1 - \delta.$$

Лемма 1.15. Пусть $\{M_k\}$ - последовательность измеримых множеств, для любого куба S со стороной λ начиная с некоторого номера $k_0(\lambda)$ для всех $k > k_0$ выполняется неравенство $\mu(S \cap M_k) > c\mu(S)$, где c - некоторая положительная постоянная.

Тогда последовательность $\{M_k\}$ является последовательностью Бореля-Кантелли.

Доказательство. В этом доказательстве $\overline{M}_k$ и $\overline{E}$ обозначают дополнения для множеств M_k и E . Для любых множеств E , S и M_k выполняется

неравенство

$$\mu(E \cap M_k) \geq \mu(S \cap E \cap M_k) \geq \mu(S) - \mu(S \cap \overline{M_k}) - \mu(S \cap \overline{E}). \quad (1.10)$$

Из условия леммы для всех $k > k_0(\lambda)$ будет

$$\mu(S \cap \overline{M_k}) = \mu(S) - \mu(S \cap M_k) \leq \mu(S) - c\mu(S). \quad (1.11)$$

По теореме о плотности для $\delta = \frac{c}{2}$ можно выбрать куб S так, что

$$\mu(S \cap E) \geq \frac{c}{2}\mu(S),$$

откуда получаем неравенство

$$\mu(S \cap \overline{E}) = \mu(S) - \mu(S \cap E) \leq \frac{c}{2}\mu(S). \quad (1.12)$$

Подставим (1.11) и (1.12) в неравенство (1.10)

$$\mu(E \cap M_k) \geq \mu(S) - \mu(S) + c\mu(S) - \frac{c}{2}\mu(S) = \frac{c}{2}\mu(S).$$

Видим, что для последовательности $\{M_k\}$ выполняются условия теоремы Шустера, таким образом последовательность $\{M_k\}$ является последовательностью Бореля-Кантелли.

Лемма 1.15 доказана.

Напомним некоторые свойства прямого произведения, см. [10].

Пусть $A, A' \subset X$, $B, B' \subset Y$. Тогда

$$1) (A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B');$$

$$2) \mu_{X \times Y}(A \times B) = \mu_X(A) \cdot \mu_Y(B).$$

Лемма 1.16. Пусть $\{M_k^1\}$ и $\{M_k^2\}$ последовательности в Ω и для любых кубов S_1 и S_2 начиная с некоторого номера k_0 для всех $k > k_0$ выполняются неравенства $\mu(M_k^1 \cap S_1) > c\mu(S_1)$ и $\mu(M_k^2 \cap S_2) > c\mu(S_2)$, где c - некоторая положительная постоянная.

Тогда последовательность $\{M_k^1 \times M_k^2\}$ является последовательностью Бореля-Кантелли.

Доказательство. Построим последовательность множеств $\{\Psi_k\} = \{M_k^1 \times M_k^2\}$. Покажем, что для этой последовательности выполняются условия леммы 1.15. Возьмем куб $S = S_1 \times S_2$. Найдем меру пересечения

$$\begin{aligned}\mu(S \cap \Psi_k) &= \mu((S_1 \times S_2) \cap (M_k^1 \times M_k^2)) = \\ &= \mu((S_1 \cap M_k^1) \times (S_2 \cap M_k^2)) = \mu(S_1 \cap M_k^1) \cdot \mu(S_2 \cap M_k^2).\end{aligned}$$

По условию леммы для всех $k > k_0$ выполняется неравенство

$$\mu(S_1 \cap M_k^1) \cdot \mu(S_2 \cap M_k^2) \geq c\mu(S_1) \cdot c\mu(S_2) = c^2\mu(S).$$

Видим, что для последовательности $\{\Psi_k\}$ выполняются условия леммы 1.15, значит последовательность $\{\Psi_k\}$ является последовательностью Бореля-Кантелли.

Лемма 1.16 доказана.

1.4. Доказательство теоремы I.

Построим последовательность множеств $\{\Psi_k\} = \{\underline{M}_k \times \overline{M}_k\}$ и $\{\Phi_k\} = \{\overline{M}_k \times \underline{M}_k\}$. По леммам 1.3, 1.4, 1.5, 1.14 и 1.16 обе последовательности $\{\Psi_k\}$ и $\{\Phi_k\}$ являются последовательностями Бореля-Кантелли. Установим взаимнооднозначно соответствие между точками из Ω и матрицами Θ .

В случае $n=2$ и $m=1$, точке $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$ сопоставим матрицу $\Theta = (\theta_1^1 \theta_1^2) = (\alpha \beta)$. В случае $n = 1$ и $m \geq 2$ точке $(\alpha_1, \dots, \alpha_j) \in [0, 1]^m$ сопоставим матрицу $\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1^1 \\ \vdots \\ \theta_m^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \vdots \\ \alpha_m^1 \end{pmatrix}$.

В обоих случаях почти все пары точек, а значит и почти все пары матриц попадают в последовательности $\{\Psi_k\}$ и $\{\Phi_k\}$ бесконечное количество раз. Если $(\Theta, \Theta') \in \Psi_k$, то разность $\psi_\Theta(t) - \psi_{\Theta'}(t) > 0$ и если $(\Theta, \Theta') \in \Phi_k$, то разность $\psi_\Theta(t) - \psi_{\Theta'}(t) < 0$, а значит для почти всех пар матриц осцилляция происходит бесконечное количество раз.

Теорема I доказана.

Глава 2

О среднем значении меры иррациональности вещественных чисел.

Напомним, что в этой главе мы рассматриваем интеграл

$$I_\alpha(t) = \int_1^t \psi_\alpha(\xi) d\xi$$

для функции

$$\psi_\alpha(t) = \min_{1 \leq q \leq t} \|q\alpha\|.$$

Величина $N = N(\alpha, t)$ определяется условием

$$q_N \leq t < q_{N+1}, \quad (2.1)$$

т.е. количество знаменателей подходящих дробей для числа α на отрезке $[1; t]$.

В данной главе будут доказаны следующие теоремы.

Теорема II. *Для почти всех (в смысле меры Лебега) чисел α выполняются равенства*

$$\begin{aligned} 1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} &= \frac{1}{2}, \\ 2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} &= \frac{6 \ln 2}{\pi^2}. \end{aligned}$$

Теорема III. *Для любого иррационального $\alpha \in (0; 1)$ выполнены неравенства*

$$\begin{aligned} 1) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} &\leq 1, \\ 2) \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} &\geq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}. \end{aligned}$$

Теорема IV. *Для любого $d \in \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}; 1\right]$ существует α , такое что*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} = d.$$

Теорема V. *Пусть $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ и $r_0, r_1, \dots, r_n, \dots$ — суть знаменатели подходящих дробей для α и β соответственно. Тогда для почти всех (в смысле меры Лебега) пар $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$ верно неравенство*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |I_\alpha(q_n) - I_\beta(r_n)| < +\infty.$$

2.1. Формулы с подходящими дробями.

Если рассмотреть разложение числа α в обыкновенную цепную дробь

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_\nu + \dots}}},$$

где $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_\nu \in \mathbb{N}$, $t = 1, 2, 3, \dots$ (конечной или бесконечной, в зависимости от того, является ли α рациональным числом или нет), то подходящими дробями к α называются рациональные дроби вида

$$\frac{p_\nu}{q_\nu} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_\nu] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_\nu}}}.$$

Имеет место равенство

$$\left| \alpha - \frac{p_\nu}{q_\nu} \right| = \frac{1}{q_\nu^2(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)}, \quad (2.2)$$

где

$$\alpha_{\nu+1} = [a_{\nu+1}; a_{\nu+2}, \dots], \quad \alpha_\nu^* = [0; a_\nu, a_{\nu-1}, \dots, a_1] = \frac{q_{\nu-1}}{q_\nu}.$$

Перейдем к функции $\psi_\alpha(t)$. При $q_\nu \leq t < q_{\nu+1}$ будет иметь место равенство

$$\psi_\alpha(t) = ||q_\nu \alpha|| = |q_\nu \alpha - p_\nu|. \quad (2.3)$$

Применив формулу (2.2), получим формулу для погрешности приближения числа α его подходящей дробью $\frac{p_n}{q_n}$, которая имеет вид

$$||q_\nu \alpha|| = \frac{1}{q_\nu(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)}, \quad (2.4)$$

или

$$q_\nu ||q_\nu \alpha|| = \frac{1}{\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*}. \quad (2.5)$$

Формулы (2.3) и (2.4) позволяют записать интеграл $I_\alpha(t)$ в виде

$$I_\alpha(t) = \sum_{\nu=1}^N \frac{q_\nu - q_{\nu-1}}{q_{\nu-1}\alpha_\nu + q_{\nu-2}} + \frac{t - q_N}{q_N\alpha_{N+1} + q_{N-1}}, \quad (2.6)$$

где N определено в (2.1). Эту же формулу можно записать по-другому. Введем новое обозначение для слагаемых из формулы (2.6) и преобразуем их:

$$S_\nu(\alpha) = \frac{q_\nu - q_{\nu-1}}{q_{\nu-1} \left(a_\nu + \frac{1}{\alpha_{\nu+1}} \right) + q_{\nu-2}} = \frac{q_\nu - q_{\nu-1}}{q_\nu + \frac{q_{\nu-1}}{\alpha_{\nu+1}}} = \frac{(q_\nu - q_{\nu-1})\alpha_{\nu+1}}{q_\nu\alpha_{\nu+1} + q_{\nu-1}} = \frac{(1 - \alpha_\nu^*)\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*}. \quad (2.7)$$

Для последнего слагаемого в формуле (2.6) аналогично получаем

$$A_{N+1}(\alpha, t) = \frac{t - q_N}{q_N\alpha_{N+1} + q_{N-1}} = \frac{\left(\frac{t}{q_{N+1}} - \alpha_{N+1}^* \right) \alpha_{N+2}}{\alpha_{N+2} + \alpha_{N+1}^*}.$$

Теперь формулу (2.6) можно записать

$$I_\alpha(t) = G_N(\alpha) + A_{N+1}(\alpha, t), \quad (2.8)$$

где

$$G_N(\alpha) = \sum_{\nu=1}^N S_\nu(\alpha). \quad (2.9)$$

Поскольку $\alpha_\nu > 1$, $\alpha_\nu^* \in [0, 1]$ получаем неравенство

$$0 \leq S_\nu(\alpha) < 1. \quad (2.10)$$

Ясно что

$$0 \leq A_{N+1}(\alpha, t) < S_{N+1}(\alpha). \quad (2.11)$$

Используя (2.9) и (2.10) выводим оценку сверху

$$G_N(\alpha) < N. \quad (2.12)$$

Из (2.8), (2.10) и (2.11) получаем ограничение на интеграл

$$G_N(\alpha) \leq I_\alpha(t) < G_{N+1}(\alpha), \quad (2.13)$$

и

$$I_\alpha(t) = G_N(\alpha) + O(1). \quad (2.14)$$

Неравенство (2.13) дает оценку сверху $I_\alpha(t) < N + 1$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, из чего непосредственно следует пункт 1) теоремы III.

2.2. Доказательство пункта 2) теоремы III.

Для доказательства пункта 2) теоремы III нам понадобятся непрерывные дроби с *вещественными* неполными частными. В этом пункте и далее для записи бесконечного множества аргументов будем пользоваться обозначением $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots)$, где $x_i \in [1; +\infty)$, $i \in \mathbb{N}$. Определим функцию $\alpha(\bar{x}) = [0; x_1, x_2, \dots]$. Также определим функции $q_\nu(\bar{x})$ и $p_\nu(\bar{x})$ как континуанту (см. определение 2.6 на стр. 60)

$$q_\nu(\bar{x}) = \begin{cases} \langle x_1, \dots, x_\nu \rangle, & \nu \geq 1; \\ 1, & \nu = 0; \\ 0, & \nu = -1, \end{cases} \quad p_\nu(\bar{x}) = \begin{cases} \langle x_1, \dots, x_{\nu-1} \rangle, & \nu \geq 1; \\ 0, & \nu = 0; \\ 1, & \nu = -1. \end{cases}$$

Для всех $\nu \geq 0$ выполняется [12] неравенство

$$q_\nu(\bar{x}) \geq 2^{\frac{\nu-1}{2}}. \quad (2.15)$$

Рассмотрим функцию $\psi_{\alpha(\bar{x})}(t) = |q_N(\bar{x})\alpha(\bar{x}) - p_N(\bar{x})|$, где N определяется аналогично (2.1). Рассмотрим интеграл $I_{\alpha(\bar{x})}(t) = \int_1^t \psi_{\alpha(\bar{x})}(\xi) d\xi$ и функции

$$\alpha_\nu(\bar{x}) = \begin{cases} [x_\nu; x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \dots], & \nu \geq 1; \\ [0; x_1, x_2, \dots], & \nu = 0, \end{cases}$$

$$\alpha_\nu^*(\bar{x}) = \begin{cases} [0; x_\nu, x_{\nu-1}, x_{\nu-2}, \dots, x_1], & \nu \geq 1; \\ 0, & \nu = 0. \end{cases}$$

При каждом $\bar{x}$ выполняются следующие свойства:

$$\alpha_\nu(\bar{x}) > 1, \quad \nu \geq 1, \quad (2.16)$$

$$0 \leq \alpha_\nu^*(\bar{x}) \leq 1, \quad (2.17)$$

$$\alpha_\nu^*(\bar{x}) = \frac{q_{\nu-1}(\bar{x})}{q_\nu(\bar{x})}, \quad (2.18)$$

$$\alpha_\nu(\bar{x}) = x_\nu + \frac{1}{\alpha_{\nu+1}(\bar{x})}, \quad (2.19)$$

$$\alpha_\nu^*(\bar{x}) = \frac{1}{x_\nu + \alpha_{\nu-1}^*(\bar{x})}, \quad (2.20)$$

$$\alpha(\bar{x}) - \frac{p_\nu(\bar{x})}{q_\nu(\bar{x})} = \frac{(-1)^\nu}{q^2(\bar{x})(\alpha_{\nu+1}(\bar{x}) + \alpha_\nu^*(\bar{x}))}. \quad (2.21)$$

По аналогии с (2.7) и (2.9) рассмотрим функции

$$S_\nu(\bar{x}) = \frac{(1 - \alpha_\nu^*(\bar{x}))\alpha_{\nu+1}(\bar{x})}{\alpha_{\nu+1}(\bar{x}) + \alpha_\nu^*(\bar{x})}, \quad G_n(\bar{x}) = \sum_{\nu=1}^n S_\nu(\bar{x}).$$

Аналогично формуле (2.14) можно получить равенство

$$I_\alpha(t) = G_N(\bar{x}) + O(1), \quad (2.22)$$

где N определено аналогично (2.1).

Найдем частные производные от функций $\alpha_\nu(\bar{x})$ и $\alpha_\nu^*(\bar{x})$ по переменной x_k . Для этого уточним зависимость от k -ого аргумента:

$$\alpha_\nu(\bar{x}) = \begin{cases} x_\nu + \frac{1}{\alpha_{\nu+1}(\bar{x})} & \nu \leq k-1; \\ x_k + \frac{1}{\alpha_{\nu+1}(\bar{x})}, & \nu = k; \\ x_\nu + \frac{1}{\alpha_{\nu+1}(\bar{x})}, & \nu \geq k+1, \end{cases} \quad \alpha_\nu^*(\bar{x}) = \begin{cases} \frac{1}{x_\nu + \alpha_{\nu-1}^*(\bar{x})}, & \nu < k; \\ \frac{1}{x_k + \alpha_{\nu-1}^*(\bar{x})}, & \nu = k; \\ \frac{1}{x_\nu + \alpha_{\nu-1}^*(\bar{x})}, & \nu \geq k+1. \end{cases}$$

Теперь для производных легко получить следующие соотношения:

$$(\alpha_\nu(\bar{x}))'_{x_k} = \begin{cases} -\frac{(\alpha_{\nu+1}(\bar{x}))'_{x_k}}{(\alpha_{\nu+1}(\bar{x}))^2}, & \nu \leq k-1; \\ 1, & \nu = k; \\ 0, & \nu \geq k+1, \end{cases} \quad (2.23)$$

$$(\alpha_\nu^*(\bar{x}))'_{x_k} = \begin{cases} 0, & \nu < k; \\ -\frac{1}{(x_k + \alpha_{\nu-1}^*(\bar{x}))^2}, & \nu = k; \\ -\frac{(\alpha_{\nu-1}^*(\bar{x}))'_{x_k}}{(x_\nu + \alpha_{\nu-1}^*(\bar{x}))^2}, & \nu \geq k+1. \end{cases} \quad (2.24)$$

Пусть $l \in \mathbb{N}_0$. Из (2.23) получаем

$$\text{sign}(\alpha_\nu(\bar{x}))'_{x_k} = \begin{cases} 1, & \nu = k - 2l; \\ -1, & \nu = k - 1 - 2l. \end{cases} \quad (2.25)$$

Аналогично и для $(\alpha_\nu^*(\bar{x}))'_{x_k}$ из (2.24) видно, что

$$\text{sign}(\alpha_\nu^*(\bar{x}))'_{x_k} = \begin{cases} -1, & \nu = k + 2l; \\ 1, & \nu = k + 1 + 2l. \end{cases} \quad (2.26)$$

Лемма 2.1. *Функция $G_n(\bar{x})$ возрастает по каждому из первых $n+1$ аргументу.*

Доказательство. Покажем, что $(G_n(\bar{x}))'_{x_k} > 0$, для $k \leq n+1$. Найдем производную по k -ому аргументу. В этом доказательстве не будем писать аргумент $\bar{x}$.

$$(G_n(\bar{x}))'_{x_k} = \sum_{\nu=1}^n \frac{(\alpha_{\nu+1})'_{x_k} (1 - \alpha_\nu^*) \alpha_\nu^*}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)^2} + \sum_{\nu=1}^n \frac{(-\alpha_\nu^*)'_{x_k} \alpha_{\nu+1} (\alpha_{\nu+1} + 1)}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)^2}. \quad (2.27)$$

Исследуем первую сумму из (2.27) и покажем, что она неотрицательная.

Воспользовавшись соотношением (2.23), отбросим нулевые слагаемые

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{(\alpha_{\nu+1})'_{x_k} (1 - \alpha_\nu^*) \alpha_\nu^*}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)^2} = \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{(\alpha_{\nu+1})'_{x_k} (1 - \alpha_\nu^*) \alpha_\nu^*}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)^2}.$$

В новой сумме, используя условие $\alpha_0^* = 0$, можно при необходимости сделать четное количество слагаемых, добавив слагаемое с $\nu = 0$. Сгруппируем слагаемые по два, начиная с последнего, и преобразуем сумму, воспользовавшись (2.19) и (2.23):

$$\begin{aligned}
& \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{(\alpha_{\nu+1})'_{x_k} (1 - \alpha_{\nu}^*) \alpha_{\nu}^*}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_{\nu}^*)^2} = \\
& = \sum_{l=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]} \left(\frac{(1 - \alpha_{k-1-2l}^*) \alpha_{k-1-2l}^* (\alpha_{k-2l})'_{x_k}}{(\alpha_{k-2l} + \alpha_{k-1-2l}^*)^2} + \frac{(1 - \alpha_{k-2-2l}^*) \alpha_{k-2-2l}^* (\alpha_{k-1-2l})'_{x_k}}{(\alpha_{k-1-2l} + \alpha_{k-2-2l}^*)^2} \right) = \\
& = \sum_{l=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]} \left(\frac{\left(1 - \frac{1}{x_{k-1-2l} + \alpha_{k-2-2l}^*}\right) \frac{1}{x_{k-1-2l} + \alpha_{k-2-2l}^*}}{\left(\alpha_{k-2l} + \frac{1}{x_{k-1-2l} + \alpha_{k-2-2l}^*}\right)^2} (\alpha_{k-2l})'_{x_k} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{(1 - \alpha_{k-2-2l}^*) \alpha_{k-2-2l}^*}{\left(x_{k-1-2l} + \frac{1}{\alpha_{k-2l}} + \alpha_{k-2-2l}^*\right)^2} \frac{(\alpha_{k-2l})'_{x_k}}{(\alpha_{k-2l})^2} \right) = \\
& = \sum_{l=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]} (\alpha_{k-2l})'_{x_k} \left(\frac{x_{k-1-2l} - 1 + (\alpha_{k-2-2l}^*)^2}{(\alpha_{k-2l}(x_{k-1-2l} + \alpha_{k-2-2l}^*) + 1)^2} \right).
\end{aligned}$$

Из (2.25), следует что $(\alpha_{k-2l})'_{x_k} > 0$, для всех l , а значит и вся сумма тоже положительна.

Покажем, что вторая сумма из (2.27) всегда не отрицательна.

Из (2.24) и (2.26) получаем, что сумма знакопередающаяся и начинается с положительного слагаемого при $\nu = k$. Сгруппируем слагаемые по два. Если в сумме нечетное количество слагаемых, то последнее слагаемое можно отбросить, ибо оно положительно, от этого сумма только уменьшится. Воспользуемся (2.19), (2.24), (2.26) и оценим сумму снизу

$$\begin{aligned}
& \sum_{\nu=1}^n \frac{(1 + \alpha_{\nu+1}) \alpha_{\nu+1} (-\alpha_{\nu}^*)'_{x_k}}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_{\nu}^*)^2} = \sum_{\nu=k}^n \frac{(1 + \alpha_{\nu+1}) \alpha_{\nu+1} (-\alpha_{\nu}^*)'_{x_k}}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_{\nu}^*)^2} \geq \\
& \geq \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-k-1}{2}\right]} \left(-\frac{(1 + \alpha_{k+1+2l}) \alpha_{k+1+2l} (\alpha_{k+2l}^*)'_{x_k}}{(\alpha_{k+1+2l} + \alpha_{k+2l}^*)^2} - \frac{(1 + \alpha_{k+2+2l}) \alpha_{k+2+2l} (\alpha_{k+1+2l}^*)'_{x_k}}{(\alpha_{k+2+2l} + \alpha_{k+1+2l}^*)^2} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-k-1}{2}\right]} \left(-\frac{\left(1 + x_{k+1+2l} + \frac{1}{\alpha_{k+2+2l}}\right) \left(x_{k+1+2l} + \frac{1}{\alpha_{k+2+2l}}\right) (\alpha_{k+2l}^*)'_{x_k}}{\left(x_{k+1+2l} + \frac{1}{\alpha_{k+2+2l}} + \alpha_{k+2l}^*\right)^2} - \right. \\
& \quad \left. -\frac{(1 + \alpha_{k+2+2l})\alpha_{k+2+2l}}{\left(\alpha_{k+2+2l} + \frac{1}{x_{k+1+2l} + \alpha_{k+2l}^*}\right)^2} \frac{(-\alpha_{k+2l}^*)'_{x_k}}{(x_{k+1+2l} + \alpha_{k+2l}^*)^2} \right) = \\
& = \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-k-1}{2}\right]} (-\alpha_{k+2l}^*)'_{x_k} \left(\frac{(\alpha_{k+2+2l} + x_{k+1+2l}\alpha_{k+2+2l} + 1)(x_{k+1+2l}\alpha_{k+2+2l} + 1)}{(\alpha_{k+2+2l}(x_{k+1+2l} + \alpha_{k+2l}^*) + 1)^2} - \right. \\
& \quad \left. -\frac{(1 + \alpha_{k+2+2l})\alpha_{k+2+2l}}{(\alpha_{k+2+2l}(x_{k+1+2l} + \alpha_{k+2l}^*) + 1)^2} \right) > 0
\end{aligned}$$

Получили, что производная положительна при $k \leq n+1$, значит функция $G_n(\bar{x})$ возрастает по первым $n+1$ аргументам. Доказательство леммы 2.1 завершено.

Из леммы 2.1 получаем

Следствие 2.1. Для любого набора $\bar{x}$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$G_n(\bar{x}) \geq G_n(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n+1}, x_{n+2}, \dots). \quad (2.28)$$

Возьмем вещественное число z , для него рассмотрим набор $\bar{z} = (z, z, \dots)$ и определим число

$$S(z) = \frac{(1 - \alpha(\bar{z}))(z + \alpha(\bar{z}))}{z + 2\alpha(\bar{z})}. \quad (2.29)$$

Лемма 2.2. Для любого $z \in [1, +\infty)$ выполняется неравенство

$$|G_n(\bar{z}) - S(z)n| \leq 4.$$

Доказательство. Для $\bar{z} = (z, z, \dots)$ выполняется свойство $\alpha_\nu^*(\bar{z}) = \frac{p_\nu(\bar{z})}{q_\nu(\bar{z})}$, которые позволяют записать разность (2.21) следующим образом

$$\alpha(\bar{z}) - \alpha_\nu^*(\bar{z}) = \frac{(-1)^\nu}{q_\nu^2(\bar{z})(\alpha_{\nu+1}(\bar{z}) + \alpha_\nu^*(\bar{z}))}.$$

Запишем $G_n(\bar{z})$ следующим образом

$$G_n(\bar{z}) = \sum_{\nu=1}^n S(z) + \sum_{\nu=1}^n (S_\nu(\bar{z}) - S(z)).$$

Воспользуемся (2.15) и покажем, что ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} (S_{\nu}(\bar{x}) - S(z))$ сходится абсолютно
но

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} |S_{\nu}(\bar{z}) - S(z)| &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{(1 - \alpha_{\nu}^*(\bar{z}))\alpha_{\nu+1}(\bar{z})}{\alpha_{\nu+1}(\bar{z}) + \alpha_{\nu}^*(\bar{z})} - \frac{(1 - \alpha(\bar{z}))\alpha_{\nu+1}(\bar{z})}{\alpha_{\nu+1}(\bar{z}) + \alpha(\bar{z})} \right| = \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_{\nu+1}(\alpha_{\nu+1} + 1)}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_{\nu}^*)^2(\alpha_{\nu+1} + \alpha)q_{\nu}^2(\bar{z})} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{q_{\nu}^2(\bar{z})} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{4}{2^{\nu}} = 4, \end{aligned}$$

откуда

$$|G_n(\bar{z}) - S(z)n| \leq 4,$$

что и требовалось доказать. Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. Пусть $\bar{x} = (z_1, z_2, \dots, z_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$ и $\bar{y} = (z_1, z_2, \dots, z_{n+1}, y_{n+2}, \dots)$, тогда

$$|G_n(\bar{x}) - G_n(\bar{y})| < 1.$$

Доказательство. При $\nu \leq n+1$ для функций $\alpha_{\nu}^*(\bar{x})$ и $\alpha_{\nu}^*(\bar{y})$ выполняется равенство

$$\alpha_{\nu}^*(\bar{x}) = \alpha_{\nu}^*(\bar{y}).$$

Так как $\alpha_{\nu}(\bar{x}) = [x_{\nu}; x_{\nu+1}, \dots, x_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$ и $\alpha_{\nu}(\bar{y}) = [x_{\nu}; x_{\nu+1}, \dots, x_{n+1}, b_{n+2}, \dots]$, то значения обеих функций лежат между числами $\frac{p_{n-\nu+1}(\bar{x})}{q_{n-\nu+1}(\bar{x})}$ и $\frac{p_{n-\nu+1}(\bar{x})+p_{n-\nu}(\bar{x})}{q_{n-\nu+1}(\bar{x})+q_{n-\nu}(\bar{x})}$ [12]. Неравенство (2.15) позволяет оценить расстояние между ними:

$$|\alpha_{\nu}(\bar{x}) - \alpha_{\nu}(\bar{y})| < \frac{1}{q_{n-\nu+1}(\bar{x})(q_{n-\nu}(\bar{x}) + q_{n-\nu+1}(\bar{x}))} \leq \frac{1}{2^{n-\nu}}.$$

Оценим разность

$$\begin{aligned} |S_{\nu}(\bar{x}) - S_{\nu}(\bar{y})| &= \left| \frac{(1 - \alpha_{\nu}^*(\bar{x}))\alpha_{\nu+1}(\bar{x})}{\alpha_{\nu}^*(\bar{x}) + \alpha_{\nu+1}(\bar{x})} - \frac{(1 - \alpha_{\nu}^*(\bar{y}))\alpha_{\nu+1}(\bar{y})}{\alpha_{\nu}^*(\bar{y}) + \alpha_{\nu+1}(\bar{y})} \right| = \\ &= (1 - \alpha_{\nu}^*(\bar{x})) \left| \frac{\alpha_{\nu+1}(\bar{x})\alpha_{\nu}^*(\bar{x}) - \alpha_{\nu+1}(\bar{y})\alpha_{\nu}^*(\bar{x})}{(\alpha_{\nu}^*(\bar{x}) + \alpha_{\nu+1}(\bar{x}))(\alpha_{\nu}^*(\bar{x}) + \alpha_{\nu+1}(\bar{y}))} \right| \leq \\ &\leq (1 - \alpha_{\nu}^*(\bar{x}))\alpha_{\nu}^*(\bar{x})|\alpha_{\nu+1}(\bar{x}) - \alpha_{\nu+1}(\bar{y})| \leq \frac{1}{4}|\alpha_{\nu+1}(\bar{x}) - \alpha_{\nu+1}(\bar{y})| \leq \frac{1}{2^{n-\nu+1}}. \end{aligned}$$

Далее

$$|G_n(\bar{z}) - G_n(\bar{y})| = \left| \sum_{\nu=1}^n S_\nu(\bar{z}) - \sum_{\nu=1}^n S_\nu(\bar{y}) \right| \leq \sum_{\nu=1}^n |S_\nu(\bar{z}) - S_\nu(\bar{y})| \leq \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{2^{n-\nu+1}} < 1.$$

Доказательство леммы 2.3 завершено.

Следствие 2.2. Для $\bar{y} = (\underbrace{z, \dots, z}_{n+1}, y_{n+2}, \dots)$ из лемм 2.2 и 2.3 получаем что

$$|G_n(\bar{y}) - S(z)n| < 5. \quad (2.30)$$

Теперь мы завершим доказательство пункта 2) теоремы 2. Из (2.14), (2.28), (2.29) и (2.30) получаем, что для любого набора $\bar{x}$ выполняется

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{I_{\alpha(\bar{x})}(t)}{N} &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{G_N(\bar{x})}{N} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(\bar{x})}{n} \geq \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(1, 1, \dots, 1, y_{n+2}, \dots)}{n} = S(1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \right). \end{aligned}$$

Доказательство теоремы III завершено.

2.3. Доказательство теоремы IV.

Лемма 2.4. Пусть $\bar{x} = (0; x, z_2, z_3, \dots)$, $\bar{y} = (0; y, z_2, z_3, \dots)$ и $n \in \mathbb{N}$ тогда

$$|G_n(\bar{x}) - G_n(\bar{y})| < 8.$$

Доказательство. Оба числа $\alpha_\nu^*(\bar{x})$ и $\alpha_\nu^*(\bar{y})$ попадают в интервал между числами $\frac{p_{\nu-1}(\bar{x})}{q_{\nu-1}(\bar{x})}$ и $\frac{p_{\nu-1}(\bar{x}) + p_{\nu-2}(\bar{x})}{q_{\nu-1}(\bar{x}) + q_{\nu-2}(\bar{x})}$ [12], где $\frac{p_\nu(\bar{x})}{q_\nu(\bar{x})}$ - подходящая дробь к $\alpha_\nu^*(\bar{x})$. Это позволяет оценить расстояние между ними:

$$|\alpha_\nu^*(\bar{x}) - \alpha_\nu^*(\bar{y})| < \frac{1}{q_{\nu-1}(\bar{x})(q_{\nu-2}(\bar{x}) + q_{n-1}(\bar{x}))} \leq \frac{1}{2^{\nu-2}}.$$

При $\nu \geq 2$ выполняется равенство

$$\alpha_\nu(\bar{x}) = \alpha_\nu(\bar{y}).$$

Оценим разность

$$\begin{aligned}
|G_n(\bar{x}) - G_n(\bar{y})| &= \left| \sum_{\nu=1}^n S_\nu(\bar{x}) - \sum_{\nu=1}^n S_\nu(\bar{y}) \right| \leq \sum_{\nu=1}^n |S_\nu(\bar{x}) - S_\nu(\bar{y})| = \\
&= \sum_{\nu=1}^n \left| \frac{(1 - \alpha_\nu^*(\bar{x}))\alpha_{\nu+1}(\bar{x})}{\alpha_\nu^*(\bar{x}) + \alpha_{\nu+1}(\bar{x})} - \frac{(1 - \alpha_\nu^*(\bar{y}))\alpha_{\nu+1}(\bar{y})}{\alpha_\nu^*(\bar{y}) + \alpha_{\nu+1}(\bar{y})} \right| = \\
&= \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu+1}(\bar{x}) \left| \frac{\alpha_\nu^*(\bar{y}) - \alpha_\nu^*(\bar{x})\alpha_{\nu+1}(\bar{y}) - \alpha_\nu^*(\bar{x}) + \alpha_\nu^*(\bar{y})\alpha_{\nu+1}(\bar{x})}{(\alpha_\nu^*(\bar{x}) + \alpha_{\nu+1}(\bar{x}))(\alpha_\nu^*(\bar{y}) + \alpha_{\nu+1}(\bar{y}))} \right| \leq \\
&\leq \sum_{\nu=1}^n \frac{\alpha_{\nu+1}(\bar{x})(1 + \alpha_{\nu+1}(\bar{y}))}{\alpha_{\nu+1}(\bar{x})\alpha_{\nu+1}(\bar{y})} |\alpha_\nu^*(\bar{y}) - \alpha_\nu^*(\bar{x})| \leq 2 \sum_{\nu=1}^n |\alpha_\nu^*(\bar{y}) - \alpha_\nu^*(\bar{x})| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{8}{2^\nu} = 8.
\end{aligned}$$

Доказательство леммы 2.4 завершено.

Из следствия 2 и леммы 2.4 получаем, что для набора $\bar{x} = (x_1, \underbrace{z, z, \dots, z}_n, x_{n+2}, \dots)$ выполняется неравенство

$$|G_n(\bar{x}) - S(z)n| < 13. \quad (2.31)$$

Сумма $G_n(\bar{x})$ зависит от $n + 1$ аргумента $(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_{n+1}(\bar{x}))$. В дальнейшем рассуждении нам удобно выделить зависимость от последнего аргумента. Для числа $\alpha = [0; a_1, a_2, \dots]$ через $G_n(\alpha, x)$ будем обозначать сумму для набора $(a_1, a_2, \dots, a_n, x)$, где $a_i \in \mathbb{N}$ и $x \in (1, +\infty)$.

Обозначим $G_n(\alpha, +\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} G_n(\alpha, x)$ и $G_n(\alpha, 1) = \lim_{x \rightarrow 1} G_n(\alpha, x)$.

Лемма 2.5. Для любых $x, y \in (1, +\infty)$ и любого α выполняется неравенство

$$|G_{n-1}(\alpha, x) - G_n(\alpha, y)| < 3. \quad (2.32)$$

Доказательство. Из леммы 2.1 и леммы 2.3 получаем

$$0 < G_n(\alpha, +\infty) - G_n(\alpha, 1) < 1.$$

Из формулы (2.9) можно вывести равенство

$$G_n(\alpha, +\infty) = G_{n-1}(\alpha, a_n) + (1 - \alpha_n^*).$$

Объединив эти формулы, получаем неравенство

$$|G_{n-1}(\alpha, a_n) - G_n(\alpha, 1)| < 1.$$

Применим лемму 2.3 для каждой из сумм и получим утверждение.

Лемма 2.5 доказана.

Для функции $S(z)$ выполняются свойства:

1) она монотонно возрастает;

2) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} = S(1) \leq S(z) \leq S(+\infty) = 1$.

Для любого $d = \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}, 1 \right)$ можно взять натуральные числа a и b , такие что $S(a) \leq d < S(b)$.

Лемма 2.6. *Существует t_{min} такое, что для любого набора $(a_1, \dots, a_k)$ и любого $x \in (1, +\infty)$ при всех $t > t_{min}$ выполняются неравенства:*

$$1) \frac{G_{k+t}(\alpha, x)}{k+t} < d,$$

для всех чисел вида $\alpha = [0; a_1, \dots, a_k, \underbrace{a, \dots, a}_t, x];$

$$2) \frac{G_{k+t}(\beta, x)}{k+t} > d,$$

для всех чисел вида $\beta = [0; a_1, \dots, a_k, \underbrace{b, \dots, b}_t, x].$

Доказательство. Возьмем $\alpha = [0; a_1, \dots, a_k, a, a, \dots]$ и запишем сумму $G_{k+t}(\alpha, \alpha_{k+t+1})$ следующим образом

$$G_{k+t}(\alpha, \alpha_{k+t+1}) = G_k(\alpha, \alpha_{k+1}) + \sum_{\nu=k+1}^{k+t} S_\nu(\alpha).$$

Сумма $\sum_{\nu=k+1}^{k+t} S_\nu(\alpha)$ есть ни что иное как $G_t(\frac{1}{\alpha_{k+1}^*}, \underbrace{a, \dots, a}_{t-1}, \alpha_{k+1})$. Применим лемму 2.4 и получим равенство

$$G_{k+t}(\alpha, \alpha_{k+t+1}) = G_k(\alpha, \alpha_{k+1}) + G_t \left(\frac{1}{\alpha_{k+1}^*}, \underbrace{a, \dots, a}_{t-1}, x \right) =$$

$$= G_k(\alpha, \alpha_{k+1}) + S(a)(t-1) + R, \quad (2.33)$$

где $R < 13$. Найдем предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{G_{k+t}(\alpha, \alpha_{k+t+1})}{k+t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{G_k(\alpha, \alpha_{k+1}) + S(a)(t-1) + R}{k+t} = S(a).$$

По лемме 2.1 и лемме 2.3

$$0 < G_n(\alpha, +\infty) - G_n(\alpha, 1) < 1,$$

поэтому для любого x и любого t выполняется неравенство

$$|G_{k+t}(\alpha, \alpha_{k+t+1}) - G_{k+t}(\alpha, x)| < 1.$$

Получаем, что для любого x предел равен

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{G_{k+t}(\alpha, x)}{k+t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{G_{k+t}(\alpha, \alpha_{k+t+1})}{k+t} = S(a) < d.$$

Откуда следует утверждение леммы. Пункт 2 доказывается аналогично.

Лемма 2.6 доказана.

Для последовательности натуральных чисел $\{n_\nu\}$ будем обозначать частичную сумму через $W_t = \sum_{\nu=1}^t n_\nu$.

Следствие 2.3. *Существует последовательность натуральных чисел $\{n_\nu\}$, такая что для числа*

$\alpha = [0; \underbrace{a, \dots, a}_{n_1}, \underbrace{b, \dots, b}_{n_2}, \underbrace{a, \dots, a}_{n_3}, \dots]$ *выполняются неравенства:*

$$\frac{G_{n_1}(\alpha, +\infty)}{n_1} < d;$$

для четного t выполняется

$$\frac{G_{W_t-1}(\alpha, 1)}{W_t-1} < d < \frac{G_{W_t}(\alpha, 1)}{W_t},$$

а для нечетного $t > 1$ выполняется

$$\frac{G_{W_t}(\alpha, +\infty)}{W_t} < d < \frac{G_{W_t-1}(\alpha, +\infty)}{W_t-1}.$$

Замечание. При доказательстве следствия 2.3 в качестве n_ν надо брать t_{min} из леммы 2.6.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы IV. Для произвольного d построим число α , такое что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} = d.$$

На роль такого числа подойдет α из следствия 2.3. Покажем, что все n_{t+1} ограничены. Пусть t нечетно, тогда

$$\frac{G_{W_t}(\alpha, 1)}{W_t} < \frac{G_{W_t}(\alpha, +\infty)}{W_t} < d,$$

$$\frac{G_{W_{t+1}-1}(\alpha, 1)}{W_{t+1} - 1} < d.$$

Обозначим $\tilde{b} = \underbrace{[b; b, \dots, b, 1]}_{n_{t+1}-1}$. По лемме 2.3 получаем

$$G_{W_t}(\alpha, \tilde{b}) = G_{W_t}(\alpha, 1) + R_1,$$

где $|R_1| < 1$. Воспользуемся (2.33) и распишем сумму $G_{W_{t+1}-1}(\alpha, 1)$.

$$\begin{aligned} G_{W_{t+1}-1}(\alpha, 1) &= G_{W_t}(\alpha, \tilde{b}) + S(b)(n_{t+1} - 1) + R = \\ &= G_{W_t}(\alpha, 1) + S(b)n_{t+1} + R + R_1 - S(b), \end{aligned}$$

где $|R| < 13$.

Получаем неравенство

$$\frac{G_{W_t}(\alpha, 1) + S(b)n_{t+1} + R + R_1 - S(b)}{W_t + n_{t+1} - 1} < d.$$

Находим ограничение

$$n_{t+1} < \frac{dW_t - G_{W_t}(\alpha, 1) - d - R - R_1 + S(b)}{S(b) - d} \leq \frac{dW_t - G_{W_t}(\alpha, 1) + 15}{S(b) - d}.$$

Из леммы 2.5 и следствия 2.3 находим ограничение на разность

$$0 < dW_t - G_{W_t}(\alpha, 1) < 3.$$

Обозначим

$$M_1 = \left\lceil \frac{18}{S(b) - d} \right\rceil,$$

где символ $\lceil \cdot \rceil$ означает целая часть сверху.

Пусть t чётно, тогда

$$d < \frac{G_{W_t}(\alpha, 1)}{W_t} < \frac{G_{W_t}(\alpha, +\infty)}{W_t},$$

$$d < \frac{G_{W_{t+1}-1}(\alpha, +\infty)}{W_{t+1} - 1}.$$

Обозначим $\tilde{a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [a; \underbrace{a, \dots, a}_{n_{t+1}-1}, x] = [a; \underbrace{a, \dots, a}_{n_{t+1}-1}]$. По лемме 2.3 и (9) для $\tilde{a}$ получаем

$$G_{W_t}(\tilde{a}) = G_{W_t}(\alpha, 1) + R_2,$$

где $|R_2| < 1$. Подставим

$$\begin{aligned} G_{W_{t+1}-1}(\alpha, +\infty) &= G_{W_t}(\alpha, \tilde{a}) + S(a)(n_{t+1} - 1) + R = \\ &= G_{W_t}(\alpha, 1) + S(a)n_{t+1} + R + R_2 - S(a), \\ d < \frac{G_{W_{t+1}-1}(\alpha, +\infty)}{W_{t+1} - 1} &= \frac{G_{W_t}(\alpha, 1) + S(a)n_{t+1} + R + R_2 - S(a)}{W_t + n_{t+1} - 1}, \\ n_{t+1} < \frac{d + R + R_2 + S(a) + G_{W_t}(\alpha, 1) - dW_t}{d - S(a)} &\leq \frac{16 + G_{W_t}(\alpha, 1) - dW_t}{d - S(a)}. \end{aligned}$$

Из леммы 2.5 и следствия 3 находим ограничение на разность

$$0 < G_{W_t}(\alpha, 1) - dW_t < 3.$$

Обозначим

$$M_2 = \left\lceil \frac{19}{d - S(a)} \right\rceil.$$

В обоих случаях все n_{t+1} ограничены константой $M = \max\{M_1, M_2\}$.

Для $\frac{G_n(\alpha)}{n}$ и $\frac{G_{n+k}(\alpha)}{n+k}$ из (2.9), (2.10) и (2.12) распишем разность

$$\left| \frac{G_{n+k}}{n+k} - \frac{G_n}{n} \right| = \left| \frac{G_n + \sum_{\nu=n+1}^{n+k} S_\nu}{n+k} - \frac{G_n}{n} \right| = \left| \frac{\sum_{\nu=n+1}^{n+k} S_\nu - k \frac{G_n}{n}}{n+k} \right|.$$

Так как $0 < \sum_{\nu=n+1}^{n+k} S_\nu < k$ и $0 < k \frac{G_n}{n} < k$, то $\left| \sum_{\nu=n+1}^{n+k} S_\nu - k \frac{G_n}{n} \right| < k$ и можно записать неравенство

$$\left| \frac{G_{n+k}}{n+k} - \frac{G_n}{n} \right| < \frac{k}{n+k}. \quad (2.34)$$

Для последовательности $\frac{G_n(\alpha)}{n}$ выполняются свойства:

- 1) $\left| \frac{G_n}{n} - \frac{G_{n+1}}{n+1} \right| < \frac{1}{n}$ из (2.34);
- 2) $\left| \frac{G_{W_t}}{W_t} - d \right| < \frac{3}{W_t}$ из леммы 2.5 и следствия 2.3;
- 3) $W_{t+1} - W_t < M$ из ограниченности n_t .

Пусть $n \in [W_t; W_{t+1})$, тогда из свойств 1, 2 и 3 получаем $\left| \frac{G_n}{n} - d \right| < \frac{M+3}{W_t}$.

Для $n > M$ получим, что $n - M < W_t$ и $\left| \frac{G_n}{n} - d \right| < \frac{M+3}{n-M}$.

Возьмем предел от правой и левой частей

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{G_n}{n} - d \right| < \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M+3}{n-M} = 0,$$

или

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{G_n}{n} = d.$$

Случай $d = 1$ получается для числа, у которого неполные частные образуют возрастающую последовательность. Теорема IV доказана.

2.4. Эргодические свойства преобразования Гаусса.

Нам понадобятся некоторые сведения из эргодической теории. Основные нужные нам понятия и утверждения имеются в книге [7], также [32], [33].

Рассмотрим преобразование Гаусса $T : [0; 1) \rightarrow [0; 1)$, которое есть перемешивающий эндоморфизм, см. [7], задаваемый формулой

$$Tx = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{x} \right\}, & \text{при } x \neq 0; \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Если для x известно его разложение в цепную дробь $x = [0; a_1, a_2, a_3, \dots]$, то

$$Tx = [0, a_2, a_3, \dots].$$

Инвариантная мера для преобразования Гаусса задается формулой

$$\mu(A) = \frac{1}{\ln 2} \int_A \frac{1}{1+x} dx.$$

Естественным расширением для преобразования Гаусса будет автоморфизм $\widehat{T} : [0; 1)^2 \rightarrow [0; 1)^2$, определяемый как

$$\widehat{T}(x, y) = \begin{cases} \left(\left\{ \frac{1}{x} \right\}, \frac{1}{\left[\frac{1}{x} \right] + y} \right), & \text{при } x \neq 0; \\ (0, y), & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

У естественного расширения $\widehat{T}$ инвариантная мера есть

$$\mu_2(A) = \frac{1}{\ln 2} \int \int_A \frac{1}{(1+xy)^2} dx dy.$$

Преобразование $\widehat{T}$ обладает свойством перемешивания, см. [7]. В частности, преобразование $\widehat{T}$ эргодично [32], [33], и, согласно теореме Биркгофа-Хинчина, для любой абсолютно интегрируемой функции $f(x, y)$ асимптотическое равенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n f(\widehat{T}^\nu(x, y)) = \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(x, y) dx dy}{(1+xy)^2} \quad (2.35)$$

будет выполнено для почти всех $(x, y) \in [0, 1)^2$.

Если на точку (x, y) подействовать преобразованием $\widehat{T}^\nu$, то

$$\widehat{T}^\nu(x, y) = \left(T^\nu(x), \frac{q_{\nu-1} + yp_{\nu-1}}{q_\nu + yp_\nu} \right). \quad (2.36)$$

где $\frac{p_\nu}{q_\nu}$ - подходящие дроби для x .

Рассмотрим преобразование $\widehat{\widehat{T}} : [0, 1)^2 \rightarrow [0, 1)^2$, которое определим так

$$\widehat{\widehat{T}} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{T}(z_1) \\ \widehat{T}(z_2) \end{pmatrix}, \quad z_1, z_2 \in [0, 1)^2.$$

Его инвариантная мера есть $\mu_2(z_1) \times \mu_2(z_2)$. Преобразование $\widehat{\widehat{T}}$ эргодично, это следует из того, что $\widehat{T}$ обладает свойством перемешивания, см. [7].

Следующая теорема доказана Халасом, см [23].

Теорема Халаса. Для любой интегрируемой функции $\varphi(p)$ и любого эргодического преобразования T пространства R конечной меры выражение

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \varphi(T^\nu p) - n \int_R \varphi(p) d\mu$$

для почти всех p , меняет знак бесконечное число раз в слабом смысле, т.е. эта разность не может быть постоянно положительной или отрицательной.

Применяя эту теорему к эргодическому преобразованию $\widehat{T}$, получим

Следствие 2.4. Для почти всех $(z_1, z_2) = (x_1, y_1, x_2, y_2) \in [0, 1)^2 \times [0, 1)^2$ и для любой μ_2 -интегрируемой функции $f(z) = f(x, y)$ разностная функция

$$\sum_{\nu=1}^n f(\widehat{T}^\nu z_1) - \sum_{\nu=1}^n f(\widehat{T}^\nu z_2)$$

меняет знак бесконечное число раз в слабом смысле.

2.5. Доказательства теоремы II.

Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \frac{1 - y}{1 + xy}. \quad (2.37)$$

Поскольку

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1 - y}{(1 + xy)^3} dx dy = \frac{\ln 2}{2},$$

то применяя теорему Биркгофа-Хинчина (2.35), приходим к равенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n f(\widehat{T}^\nu(x, y)) = \frac{1}{2}. \quad (2.38)$$

Отметим, что если $(x, y) = \left(\frac{1}{\alpha_1}, 0\right)$, то $f(\widehat{T}^\nu(x, 0)) = \frac{(1 - \alpha_\nu^*)}{1 + \frac{\alpha_\nu^*}{\alpha_{\nu+1}}}$, и $G_n(\alpha) = \sum_{\nu=1}^n f(\widehat{T}^\nu(x, 0))$. Следующее утверждение, близко к использовавшемуся в работе [19].

Лемма 2.7. Для любого $(x, y) \in [0; 1]^2$ и любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\sum_{\nu=1}^n \left| f(\widehat{T}^\nu(x, y)) - f(\widehat{T}^\nu(x, 0)) \right| < 4.$$

Доказательство. Покажем, что ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(f(\widehat{T}^\nu(x, 0)) - f(\widehat{T}^\nu(x, y)) \right)$$

сходится абсолютно. Обозначим $\tilde{\alpha}_\nu = \frac{q_{\nu-1} + yp_{\nu-1}}{q_\nu + yp_\nu}$. Далее

$$\sum_{\nu=1}^n f(\widehat{T}^\nu(x, 0)) = \sum_{\nu}^n \frac{(1 - \alpha_\nu^*)\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*},$$

$$\sum_{\nu=1}^n f(\widehat{T}^\nu(x, y)) = \sum_{\nu}^n \frac{(1 - \tilde{\alpha}_\nu)\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1} + \tilde{\alpha}_\nu}.$$

Рассмотрим ряд

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} |f(\widehat{T}^\nu(x, y)) - f(\widehat{T}^\nu(x, 0))| &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{(1 - \tilde{\alpha}_\nu)\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1} + \tilde{\alpha}_\nu} - \frac{(1 - \alpha_\nu^*)\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*} \right| = \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu+1} \left| \frac{\tilde{\alpha}_\nu - \alpha_\nu^* + \tilde{\alpha}_\nu \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu^* \alpha_{\nu+1}}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)(\alpha_{\nu+1} + \tilde{\alpha}_\nu)} \right| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 + \alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1}} |\tilde{\alpha}_\nu - \alpha_\nu^*| \leq \\ &\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2y}{q_\nu(q_\nu + yp_\nu)} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{q_\nu(q_\nu + p_\nu)} < 4. \end{aligned}$$

Лемма 2.7 доказана.

Следствие 2.5. Для любого $y \in [0; 1]$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n f(\widehat{T}^\nu(x, y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n f(\widehat{T}^\nu(x, 0)).$$

Обозначим через R множество тех точек $(x, y) \in [0, 1]^2$, для которых выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n f(\widehat{T}^\nu(x, y)) = \frac{1}{2}.$$

Мера множества R равна 1. Рассмотрим проекцию

$$\tilde{R} = \{x \in [0, 1) | \exists y : (x, y) \in R\}.$$

Мера множества $\tilde{R}$ тоже будет равна 1. Согласно формуле (2.14) и следствию 5 выполняется равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(\alpha)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu(x, 0)) = \frac{1}{2}.$$

Пункт 1) теоремы II доказан.

Для доказательства пункта 2) теоремы II нам понадобится теорема Леви [30].

Теорема Леви. *Для почти всех $\alpha \in (0; 1)$ имеет место следующее равенство*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln q_n}{n} = \frac{\pi^2}{12 \ln 2}.$$

Из теоремы Леви получаем, что для почти всех α выполнено равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{N(\alpha, t)} = \frac{\pi^2}{12 \ln 2}.$$

Пункт 2) теоремы 1 получается из пункта 1) теоремы 1 и последнего равенства. Теорема 2 полностью доказана.

2.6. Доказательство теоремы V.

Снова рассматриваем функцию f определенную в (2.37). Пусть $R_1 \subset [0, 1)^2 \times [0, 1)^2$ это множество для тех точек $(z_1, z_2) = ((x_1, y_1), (x_2, y_2))$, для которых выполняется следствие 2.4. Его мера равняется 1. Для $(z_1, z_2) \in R_1$ рассмотрим только те значения n для которых суммы

$$\sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu z_1) - \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu z_2), \quad \sum_{\nu=1}^{n+1} f(\hat{T}^\nu z_1) - \sum_{\nu=1}^{n+1} f(\hat{T}^\nu z_2)$$

имеют различные знаки. Тогда, поскольку каждое слагаемое в суммах не превосходит единицы, видим, что

$$\left| \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu z_1) - \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu z_2) \right| \leq 2.$$

Рассмотрим проекцию

$$\tilde{R}_1 = \{(x_1, x_2) \in [0, 1)^2 \mid \exists y_1 \exists y_2 : (x_1, y_1, x_2, y_2) \in R_1\}.$$

Мера множества $\tilde{R}_1$ тоже равна 1. Для $(\alpha, \beta) \in \tilde{R}_1$ и рассматриваемых значений n с учетом леммы 2.7 получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_1^{q_n} \psi_\alpha(t) dt - \int_1^{r_n} \psi_\beta(t) dt \right| &= |G_n(\alpha) - G_n(\beta)| = \\ &= \left| \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu(\alpha, 0)) - \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu(\beta, 0)) \right| \leq 10. \end{aligned}$$

Теорема V доказана.

2.7. Вычисление интеграла для некоторого класса чисел

В данном параграфе мы выведем формулы для вычисления пределов

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)}$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t}$ в тех случаях когда α есть квадратичная иррацио-

нальность. И докажем в каких случаях

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = 0.$$

Запишем несколько определений.

Определение 2.1 Комплексное число α называется алгебраическим, если существует многочлен $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $P(x) \not\equiv 0$, с условием $P(\alpha) = 0$. Среди всех таких многочленов выберем многочлен наименьшей степени и со старшим коэффициентом 1. Такой многочлен определяется по α единственным способом и называется минимальным многочленом α .

Определение 2.2 Степенью алгебраического числа α называется степень его минимального многочлена.

Определение 2.3 Квадратичная иррациональность это алгебраическое число второй степени.

Определение 2.4 Бесконечная непрерывная дробь $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ называется периодической, если существуют целые числа $k \geq 0$, $m \geq 0$, такие

что

$$a_{m+n} = a_n \quad \text{при всех } n \geq k.$$

Будем обозначать такую дробь следующим образом

$$[a_0; a_1, \dots, a_k - 1, \overline{a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m-1}}].$$

Известна теорема, см. [15]

Теорема 2.1 Число α разлагается в периодическую цепную дробь тогда и только тогда, когда α - квадратичная иррациональность.

Для чисто периодической цепной дроби, т.е. $[0; \overline{a_1, \dots, a_k}]$ число $\alpha = [0; \overline{a_1, \dots, a_k}]$ находится из уравнения

$$\alpha = \frac{p_k \alpha + p_{k-1}}{q_k \alpha + q_{k-1}}. \quad (2.39)$$

Дадим еще определение эквивалентности двух вещественных чисел.

Определение 2.5 Два иррациональных числа α и β называются эквивалентными, если существуют целые числа a, b, c, d связанные равенством $ad - bc = \pm 1$, для которых

$$\beta = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}.$$

Теорема 2.2. Пусть $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ и $\beta = [b_0; b_1, b_2, \dots]$ - иррациональные числа. Они эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют целые числа u и v , такие что $a_{u+n} = b_{v+n} (n = 1, 2, \dots)$.

Нам еще понадобятся некоторые формулы из теории о континуантах, см. [3]

Определение 2.6 Континуанта $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ содержит n переменных и определяется рекуррентно следующим образом:

$$\langle \rangle = 1,$$

$$\langle a_1 \rangle = a_1,$$

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = a_n \langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle + \langle a_1, \dots, a_{n-2} \rangle.$$

Континуанты связаны с цепными дробями

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{\langle a_0, \dots, a_n \rangle}{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}.$$

Для континуанта верно более общее правило

$$\begin{aligned} \langle a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_{m+n} \rangle &= \langle a_1, \dots, a_m \rangle \langle a_{m+1}, \dots, a_{m+n} \rangle + \\ &+ \langle a_1, \dots, a_{m-1} \rangle \langle a_{m+2}, \dots, a_{m+n} \rangle \end{aligned} \quad (2.40)$$

Применив эту формулу к цепным дробям $[0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ получим

$$[0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{\langle a_2, \dots, a_n \rangle}{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}. \quad (2.41)$$

В дальнейшем $\alpha \in (0; 1)$, поэтому вместо записи $\alpha = [0; a_1, a_2, \dots]$ будем использовать более краткое $\alpha = [a_1, a_2, \dots]$. Обозначим через A и A^- последовательности натуральных чисел произвольной длины $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ и $(a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$ соответственно. Отношение $a_n \sim b_n$ означает, что предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Доказательство следующей леммы можно найти в статье [2].

Лемма 2.8.

$$\underbrace{\langle A, \dots, A \rangle}_n \sim c(\langle A \rangle + \langle A^- \rangle \alpha)^n,$$

где $\alpha = [\overline{A}]$ – квадратичная иррациональность и вычисляется по формуле (2.39), c – некоторая, зависящая от A , но не зависящая от n константа.

Следствием леммы 2.8 и формулы (2.40) будет

Утверждение 2.1. Для

$$\langle b_1, b_2, \dots, b_k, \underbrace{A, \dots, A}_n \rangle \sim c_1(\langle A \rangle + \langle A^- \rangle \alpha)^n$$

где c_1 зависит от набора $(b_1, \dots, b_k)$ и A .

Доказательство. Применим формулу (2.40) к континуанту

$$\begin{aligned} \langle b_1, b_2, \dots, b_k, \underbrace{A, \dots, A}_n \rangle &= \langle b_1, b_2, \dots, b_k \rangle \underbrace{\langle A, \dots, A \rangle}_n + \\ &+ \langle b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \rangle \underbrace{\langle a_2, \dots, a_k, A, \dots, A \rangle}_{n-1}. \end{aligned}$$

Разделим обе части на континуант $\underbrace{\langle A, \dots, A \rangle}_n$ и получим равенство

$$\frac{\langle b_1, b_2, \dots, b_k, \underbrace{A, \dots, A}_n \rangle}{\underbrace{\langle A, \dots, A \rangle}_n} = \langle b_1, b_2, \dots, b_k \rangle + \langle b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \rangle \frac{\langle a_2, \dots, a_k \underbrace{A, \dots, A}_{n-1} \rangle}{\underbrace{\langle A, \dots, A \rangle}_n}.$$

По формуле (2.41) при $n \rightarrow +\infty$ дробь $\frac{\langle a_2, \dots, a_k \underbrace{A, \dots, A}_{n-1} \rangle}{\underbrace{\langle A, \dots, A \rangle}_n} \rightarrow \alpha$. Отсюда видим, что

$$\frac{\langle b_1, b_2, \dots, b_k, \underbrace{A, \dots, A}_n \rangle}{\underbrace{\langle A, \dots, A \rangle}_n} \rightarrow \langle b_1, b_2, \dots, b_k \rangle + \langle b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \rangle \alpha,$$

где $\alpha = \overline{[A]}$. Можно записать таким образом

$$\langle b_1, b_2, \dots, b_k, \underbrace{A, \dots, A}_n \rangle \sim (\langle b_1, b_2, \dots, b_k \rangle + \langle b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \rangle \alpha) \underbrace{\langle A, \dots, A \rangle}_n.$$

Применим лемму 2.8 и получим, что

$$\langle b_1, b_2, \dots, b_k, \underbrace{A, \dots, A}_n \rangle \sim c_1 (\langle A \rangle + \langle A^- \rangle \alpha)^n,$$

где $c_1 = c(\langle b_1, b_2, \dots, b_k \rangle + \langle b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \rangle \alpha)$.

Утверждение 2.1 доказано.

Аналогично доказывается, что если α эквивалентно β , то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q_n}{q'_n} = C,$$

где q_n и q'_n знаменатели подходящих дробей для α и β соответственно, а константа C вычисляется по α и β .

Следствием этого будет равенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln q_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln q'_n}{n}. \quad (2.42)$$

Лемма 2.9. Для двух эквивалентных чисел α и β верны равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\beta(t)}{N(\beta, t)} \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\beta(t)}{\ln t}.$$

Доказательство. Пусть $v \leq u \leq N$. Возьмем два эквивалент числа $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_v, r_1, r_2, \dots]$ и $\beta = [b_0; b_1, b_2, \dots, b_u, r_1, r_2, \dots]$.

Распишем разность $G_N(\alpha) - G_N(\beta)$ следующим образом

$$\begin{aligned} G_N(\alpha) - G_N(\beta) &= \sum_{\nu=1}^N S_\nu(\alpha) - \sum_{\nu=1}^N S_\nu(\beta) = \\ &= \sum_{\nu=1}^v S_\nu(\alpha) + \sum_{\nu=v+1}^N S_\nu(\alpha) - \sum_{\nu=1}^u S_\nu(\beta) - \sum_{\nu=u+1}^N S_\nu(\beta) = \\ &= \sum_{\nu=1}^v S_\nu(\alpha) - \sum_{\nu=1}^u S_\nu(\beta) + \sum_{\nu=N-u+v+1}^N S_\nu(\alpha) + \sum_{\nu=v+1}^{N-u+v} S_\nu(\alpha) - \sum_{\nu=u+1}^N S_\nu(\beta). \end{aligned}$$

Так как $0 \leq S_\nu(\alpha) < 1$, то

$$\left| \sum_{\nu=1}^v S_\nu(\alpha) - \sum_{\nu=1}^u S_\nu(\beta) + \sum_{\nu=N-u+v+1}^N S_\nu(\alpha) \right| \leq 2u - 1$$

По лемме 2.4

$$\left| \sum_{\nu=v+1}^{N-u+v} S_\nu(\alpha) - \sum_{\nu=u+1}^N S_\nu(\beta) \right| \leq 8.$$

Таким образом

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{G_N(\alpha) - G_N(\beta)}{N} = 0,$$

а значит и

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{G_N(\alpha)}{N} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{G_N(\beta)}{N} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{I_\beta(t)}{N}.$$

Первое равенство доказано.

Для доказательства второго равенства запишем предел таким образом

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N} \frac{N}{\ln t}.$$

Как видно выше для эквивалентных чисел оба отношения равны.

Лемма 2.9 доказана.

Перейдем к вычислению пределов $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N}$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t}$ для квадратичных иррациональностей.

Будем рассматривать числа вида $\alpha = [\overline{a_1, a_2, \dots, a_k}]$. Обозначим $\overleftarrow{\alpha} = [\overline{a_k, a_{k-1}, \dots, a_1}]$. Как известно $\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle = \langle a_k, a_{k-1}, \dots, a_1 \rangle$. Обозначим набор из $k+2$ чисел $X = (\frac{1}{\alpha}, a_1, a_2, \dots, a_k, \alpha) = (\frac{1}{\alpha}, A, \alpha)$.

Лемма 2.10. Для чисел $\alpha = [\overline{a_1, a_2, \dots, a_k}]$ верны равенства

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N} = \frac{G_k(X)}{k},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = \frac{G_k(X)}{\ln(\langle A \rangle + \langle A^- \rangle \alpha)}.$$

Доказательство. Для любого N и $n = \lfloor \frac{N}{k} \rfloor$ запишем равенство $G_N(\alpha) = G_{nk}(\alpha) + G_{N-nk}(\frac{1}{\alpha_{nk}^*}, A, \alpha)$. Конечный набор X можно записать в виде бесконечного набора, тогда имеет место равенство $G_N(X) = G_{nk}(X) + G_{N-nk}(\frac{1}{\alpha}, A, \alpha)$. По лемме 2.4

$$|G_{nk}(\alpha) - G_N(X)| < 8 \text{ и } \left| G_{N-nk}(\frac{1}{\alpha_{nk}^*}, A, \alpha) - G_{N-nk}(X) \right| < 8.$$

Значит

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{G_N(X)}{N}.$$

Заметим, что $G_N(X) = \lfloor \frac{N}{k} \rfloor G_k(X) + G_{N-nk}(X)$. Подставим

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{G_N(X)}{N} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor \frac{N}{k} \rfloor G_k(X) + G_{N-nk}(X)}{N} = \frac{G_k(X)}{k}.$$

Первое равенство доказано. Для доказательства второго равенства воспользуемся утверждением 2.1.

Пусть выполняется неравенство $q_{nk} \leq t < q_{(n+1)k}$, тогда

$$\frac{\ln q_{nk}}{n} \leq \frac{\ln t}{n} < \frac{\ln q_{(n+1)k}}{n}.$$

Применим утверждение 2.1 и получим равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln q_{Nk}}{N} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{N} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln q_{(N+1)k}}{N} = \frac{1}{k} \ln(\langle A \rangle + \langle A^- \rangle \alpha),$$

которое вместе с равенством из первой части леммы надо подставить в

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N} \frac{N}{\ln t}.$$

Лемма 2.10 доказана.

Например, если $\alpha = [\bar{a}]$, то

$$\alpha = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln q_n}{n} = \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} \right) = \ln(a + \alpha)$$

и

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha^2}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = \frac{1 - \alpha}{(1 + \alpha^2) \ln(a + \alpha)}.$$

Для золотого сечения $\tau = [1; 1, 1, \dots]$ эти пределы равны

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \right) : \ln \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right).$$

Лемма 2.11. Пусть $\alpha = [a_1, a_2, \dots]$. Если для всех i выполняется неравенство $a_i \leq M$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} > \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \right) : \ln(M + 1).$$

Доказательство. Обозначим через r_n знаменатели подходящих дробей для числа $\beta = [\overline{M}]$ и q_n — знаменатели подходящих дробей для числа α . Так как для всех i выполняется неравенство $a_i \leq M$, то $q_n \leq r_n$ для всех n . Таким образом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln q_n}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln r_n}{n} = \ln(M + \beta) < \ln(M + 1).$$

Применим неравенство из теоремы III п. 2 и неравенство, полученное выше

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N} \frac{N}{\ln t} > \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \right) : \ln(M + 1).$$

Лемма 2.11 доказана.

Следствие 2.6. Если $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = 0$, то неполные частные в разложении числа α в непрерывную дробь неограничены.

Лемма 2.12. Пусть $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \gamma$ (γ может равняться $+\infty$), тогда

$$\frac{1}{\ln 2 + \ln \gamma} < \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N}{\ln t} < \frac{1}{\ln \gamma}.$$

Доказательство. Для доказательства леммы воспользуемся неравенством, см. [12]

$$a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n < q_n < 2^n a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n.$$

Применив его, можно записать такие неравенства

$$a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_N < q_N \leq t < q_{N+1} < 2^{N+1} a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_{N+1}.$$

Проведем цепочку преобразований

$$\ln(a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_N)^{1/N} < \frac{\ln q_N}{N} \leq \frac{\ln t}{N} < \frac{q_{N+1}}{N} < \ln(2^{N+1})^{1/N} + \ln(a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_{N+1})^{1/N}.$$

Устремим t в бесконечность и воспользуемся условием леммы

$$\ln \gamma \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln q_N}{N} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{N} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{q_{N+1}}{N} \leq \ln 2 + \ln \gamma.$$

Получаем неравенство

$$\ln \gamma \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{N} \leq \ln 2 + \ln \gamma.$$

Лемма 2.12 доказана.

Следствие 2.7 Если $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = +\infty$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = 0$.

Вычислим значение пределов для числа e . Разложение числа e в цепную дробь выглядит так $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots, 1, 1, 2n - 2, 1, 1, 2n, \dots]$. Для вычисления предела $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{I_e(t)}{N}$ разложение числа e в цепную дробь можно рассматривать, как периодическое $[1, 1, +\infty]$ и считать, что $X = (\frac{1}{\infty}, 1, 1, \infty)$.

Тогда $G_1(X) = 1$, $G_2(X) = 0$ и $G_3(X) = 0,5$ и получаем, что

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{I_e(t)}{N} = \frac{1}{2}.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3n]{2^n n!} = +\infty$, то по следствию 2.7 предел $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_e(t)}{\ln t} = 0$.

Список литературы

1. Ахунжанов, Р.К. О векторах заданного диофантова типа II/ Р.К.Ахунжанов// Математический сборник. 2013. №204:4. С.3–24.
2. Гайфулин, Д.Р. Производные двух функций семейства Денжуа–Тихого–Уитца/ Д.Р.Гайфулин// Алгебра и анализ. 2015. №27:1. С.74–124.
3. Грэхем, Р. Конкретная математика. Основание информатики/ Р.Грэхем, Д.Кнут, О.Паташник; пер. с англ. М.:Мир, 1998. 703 с., ил.
4. Иванов, В.А. О начале луча в спектре Дирихле одной задачи теории диофантовых приближений/ В.А.Иванов// Записки науч. сем. ЛОМИ. 1980. №93. С.164–185.
5. Иванов, В.А. О рациональных приближениях действительных чисел/ В.А.Иванов// Математические заметки. 1978. т. 23, №1. С.3-26.
6. Касселс, Дж.В.С. Введение в теорию диофантовых приближений/Дж.В.С.Касселс. ИЛБ М.:1961. 213 с.
7. Корнфельд, И.П. Эргодическая теория/ И.П.Корнфельд, Я.Г.Синай, С.В.Фомин. М.:Наука, 1980. 384 с.
8. Малышев, А.В. Спектры Маркова и Лагранжа (обзор литературы)/ А.В.Малышев// Записки науч. сем. ЛОМИ. Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л. 1977. №67. С. 5–38.
9. Мощевитин, Н.Г. Сингулярные диофантовы системы А.Я. Хинчина и их применение/ Н.Г.Мощевитин// УМН, том 65.2010. №3(393). С.43-126.
10. Халмош, П. Теория меры/ П.Халмош. М.:Издательство иностранной литературы, 1953. 291 с.
11. Хинчин, А. Я. Регулярные системы линейных уравнений и общая задача Чебышева/ А.Я.Хинчин// Изв. АН СССР. Сер. матем. 1948. №12:3. С.249–258.

12. Хинчин, А.Я. Цепные дроби / А.Я.Хинчин. М.:Физматлит, 1960. 112 с.
13. Шацков, Д.О. О среднем значении меры иррациональности вещественных чисел / Д.О. Шацков // Математические заметки. 2015. №98:2. С.271–287.
14. Шацко, Д.О. Осцилляция функции меры иррациональности в многомерном случае / Д.О. Шацков // Математические заметки. 2016. №99:1. С.102–120
15. Шмидт, В. Диофантовы приближения: Пер. с англ. / В.Шмидт. М.:Мир, 1983. 232 с., ил.
16. Ярник, В. К теории однородных линейных диофантовых приближений / В.Ярник // Чехослов. матем. журнал. 1954. №4(79). С.330–353.
17. Akhunzhanov, R.K. On Dirichlet spectrum for two-dimensional simultaneous Diophantine approximation / R.K. Akhunzhanov, D.O.Shatskov // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. 2013. vol.3, iss. 3-4. pp. 5-23, [pp. 241-259].
18. Cusick, Thomas W. The Markoff and Lagrange spectra / T.W.Cusick, M.E.Flahive. Mathematica surveys and monographs. 1943. p.93.
19. Dajani, K A Note on the Approximation by Continued Fractions under an Extra Condition / K.Dajani, C.Kraaikamp // New York Journal of Mathematics. 1998. №3A. p. 69-80.
20. Davenport, H. Dirichlet's theorem on Diophantine approximation / H.Davenport, W.M.Schmidt // Symposia Mathematica, v. IV (INDAM, Rome, 1968/69), Academic Press, London. 1970. p.113-132.
21. Fürstenberg, H. The ergodic theoretical proof of Szemerédi's theorem / H.Fürstenberg, Y.Katznelson, D.Ornstein // Bulletin (New series) of the American Mathematical Society. 1982 №7:3. p. 527-552.
22. Hardy, G. H. An Introduction to the Theory of Numbers -fourth edition / G.H.Hardy, E.M.Wright. Oxford, Oxford University Press. 1975. 421 p.

23. Halasz, G. Remarks on the remainder in Birkhoff's ergodic theorem/
G.Halasz// *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*. 1976. vol
28 (3-4). p.389-395.
24. Jarník, V. Zum Khintchineschen "Übertragungssatz"/ V.Jarník// *Acad. Sci.*
URSS, 3, *Trav. Inst. math.*, Tbilissi. 1938. p. 193-216.
25. Jarník, V. On linear inhomogeneous Diophantine approximations/
V.Jarník// *Rozprawy II. Třidy České Akad.* 1941. №51:29. p.1-21.
26. Jarník, V. Eine Bemerkung Über diophantische Approximationen/
V.Jarník// *Math. Z.* 1959. 72:1. p.187-191.
27. Kan, I.D. Approximations to two real numbers/ I.D.Kan,
N.G.Moshchevitin// *Uniform Distribution Theory* 5. 2010. no.2. p.79-
86.
28. Kan, I.D. On Minkowski diagonal functions for two real numbers/ I.D. Kan,
N.G. Moshchevitin, J. Chaika// *American Institute of Physics Conference*
Series No. 1385. 2011. p.42-48.
29. Khintchine, A. Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen/
A.Khintchine// *Rendiconti Circ. Math. Palermo*. 1926. №50;2. p.170-195.
30. Levy, P. Théorie de l'addition des variables aléatoires/ P.Levy.
Paris:Gauthier-Villars. 1937. 320p.
31. Leska, J. Sur un résultat de Jarník/J. Leska// *Acta Arith.* 1966. 11. p. 359-
364.
32. Nakada, H. Metrical Theory for a Class of Continued Fraction
Transformations and Their Natural Extensions/ H.Nakada// *Tokyo J. Math.*
1981. vol 4, no. 2. p.399-426.
33. Nakada, H. On the invariant measure for the transformation associated with
some real continued fraction/ H.Nakada, Sh.Ito, S.Tanaka// *Keio Engrg.*
Rep. 1977. vol 30, no. 13. p.159-175.
34. Shuster, J. On the Borel-Cantelli problem/ J.Shuster// *Canadian Math.Bull.*
1970. v.13, 2. p.273-275.