ОТЗЫВ

официального оппонента

на диссертационную работу Эстерова Александра Исааковича «Тропическая теория особенностей и геометрия многочленов с неопределенными коэффициентами», представленную на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 /математическая логика, алгебра и теория чисел/

Согласно довольно широко распространённому мнению, тропическая математика (включающая в себя тропическую алгебру, геометрию и т.д.) возникла в 1990-х годах в работах, связанных с решением практических задач в экономике, технике, информатике, управлении, теории оптимизации и других прикладных областях. В последнее время новая наука бурно развивается и приобретает всё большую популярность, отчасти благодаря своему необычному названию, а также большому количеству публикаций в связи с возможным использованием в самых разных отраслях науки и техники. Это напоминает историю возникновения современной теории катастроф, которая в 1970-х годах сделалась очень модной наукой, претендующей на универсальность и всеобщую применимость.

На самом деле, в том или ином виде элементы современной тропической математики нетрудно распознать уже в трудах некоторых классиков и их ближайших последователей. Однако, в наше время, по-видимому, наиболее мощный импульс в развитии содержательной части новой области математической науки придали основополагающие работы И.М. Гельфанда, М.И. Граева, А.В. Зелевинского и М.М. Капранова. Среди прочего, изучая многогранник Ньютона дискриминанта D многочлена, они вводят очень полезное для этих исследований понятие амёбы – это образ дискриминанта $\mathrm{Log}(D)$ при отображении $\mathrm{Log}\colon (\mathbb{C}^*)^m \to \mathbb{R}^m$, которое задаётся формулой $\mathrm{Log}(z_1, \ldots, z_m) = (\log|z_1|, \ldots, \log|z_m|)$.

Диссертационную работу А.И. Эстерова можно рассматривать как весьма существенное продвижение в развитии новой теории, которую можно условно назвать кусочно-линейной или комбинаторной версией вычислительной алгебраической геометрии и которая тесно связана с изучением многочленов, соответствующих диаграмм и многогранников Ньютона, смешанных объемов, торических многообразий, вееров, графов и их обобщений. Один из наиболее важных аспектов работы – это разработка эффективных методов исследования геометрии многочленов с неопределенными коэффициентами в рамках исчислительной теории особенностей.

Заявленная цель работы – создание математического аппарата, который дает возможность построить теорию многочленов Тома для аффинной теории особенностей, с тем, чтобы затем применить его для анализа стратов мультиособенностей малых коразмерностей, для исследования взаимосвязей сингулярных стратов классического дискриминантного множества с A-дискриминантами и пр. Вот почему тема диссертационной работы А.И. Эстерова представляется актуальной.

Остановимся кратко на содержании диссертации А.И. Эстерова, изложенной на 332 страницах. Работа состоит из введения, пяти глав и списка литературы, в котором перечислены 176 наименований, а также списка из 10 работ автора по теме диссертации. Одна из них выполнена в соавторстве, две работы опубликованы на русском языке, а остальные – на английском. Причем, одна статья относятся к кандидатской диссертации А.И. Эстерова, защищённой в 2005 г., а ещё одна статья принята к печати в 2017 г.

Во введении автор обсуждает постановку основных задач и их предысторию, включая обзор известных результатов, в том числе полученных ещё до возникновения самого понятия тропической математики. Кроме того, он формулирует основные цели своей диссертационной работы и приводит краткую сводку основных результатов.

В первой главе излагаются основные понятия и конструкции из теории диаграмм и многогранников Ньютона, дискриминантов многочленов и результантов, торической и тропической геометрии и т.д.

Во второй главе изучается геометрия целочисленных многогранников и выпуклых тел, вводится понятие относительного смешанного объема и соответствующий вариант формулы Кушниренко–Бернштейна–Хованского, которая ведет к определению новых инвариантов таких многогранников. Среди них – числа Милнора, эйлеровы препятствия и др. Кроме того, автор анализирует свойства смешанных расслоенных тел, смешанных объемов некоторых специальных многогранников (призм, или конфигураций Кэли), и т.д.

Третья глава посвящена исследованию геометрии тропических вееров. В частности, автор вводит понятия смешанной грани и смешанного числа Милнора для набора многогранников, а также дифференциальное кольцо тропических вееров с полиномиальными весами.

В четвёртой главе изучается тропическая аффинная теория особенностей, начиная со стратов минимальной положительной коразмерности, которые соответствуют результантам и дискриминантам. Среди прочего, автор описывает классификацию проективных торических многообразий минимальной степени, у которых проективно двойственные многообразия являются гиперповерхностями, вводит понятие бифуркационного дискриминанта системы уравнений и изучает его основные свойства. В качестве приложений получены новые результаты о топологии полиномиальных отображений и наглядная классификация систем полиномиальных уравнений с неопределенными коэффициентами, которые разрешимы в радикалах.

Пятая глава посвящена изучению стратов коразмерности два. В частности, в ней излагается конструкция характеристических классов подмногообразий комплексного тора со значениями в кольце условий и описывает аффинные аналоги формул Плюккера.

Наконец, в Заключении намечены перспективы дальнейшего развития тропической аффинной теории особенностей, а также дается обширный обзор недавних публикаций, в которых используются результаты настоящей диссертации.

Среди новых и оригинальных результатов, полученных в диссертационной работе А.И. Эстерова, можно выделить следующие.

Разработан аппарат для решения задачи описания тропикализации множества полиномов с заданным носителем и данными особенностями малой коразмерности. В частности, построена теория тропических характеристических классов алгебраических подмногообразий комплексного тора. При этом, k-мерный тропический характеристический класс многообразия является k-мерным тропическим веером, и эти тропические вееры удовлетворяют естественным свойствам аддитивности и мультипликативности в кольце тропических вееров относительно операций объединения и пересечения подмногообразий комплексного тора. Также построено расширение кольца тропических вееров (так называемые тропические веера с полиномиальными весами), содержащее кольцо непрерывных кусочно-полиномиальных функций, и дифференцирование на нём, обобщающее взятие множества точек излома кусочно-линейной функции.

С помощью этих понятий описан тропический веер множества многочленов с данным носителем и одной особенностью типа A_2, а также множества многочленов с данным носителем и двумя особенностями типа A_1. Получен также ряд новых результатов о размерности и кратности множества многочленов с данным носителем и одной особенностью типа A_1 (т.е. дискриминанта). Для дискриминанта многочлена в явном виде выписаны условия на носитель многочлена, при которых дискриминант имеет коразмерность 1 (для многочленов многих переменных коразмерность дискриминанта может превосходить 1).

Для дискриминанта системы полиномиальных уравнений доказано, что если к нему относить не только системы, множество нулей которых имеет особенность, но и системы, множество нулей которых имеет особенность на бесконечности в подходящем смысле, то коразмерность дискриминанта равна 1. Для этой гиперповерхности описаны размерности и степени всех её неприводимых компонент. В качестве следствия получено описание монодромии системы полиномиальных уравнений с независимыми коэффициентами. Ползуясь этим описанием и методами топологической теории Галуа, автор доказывает многомерный вариант знаменитой теоремы Абеля о том, что система полиномиальных уравнений с заданным носителем и независимыми коэффициентами разрешима в радикалах тогда и только тогда, когда объём выпуклой оболочки носителя не превосходит четырёх.

Полученные результаты представляют интерес для самого широкого круга специалистов в области комбинаторики, вычислительной алгебраической геометрии, компьютерной алгебры и теории особенностей.

Все основные результаты диссертационной работы новы и своевременно опубликованы. Сама работа написана на высоком математическом уровне, все утверждения снабжены полными доказательствами, следует также особо отметить хорошее оформление и подбор материала для наглядной иллюстрации основных утверждений.

Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Таким образом, диссертация А.И. Эстерова «Тропическая теория особенностей и геометрия многочленов с неопределенными коэффициентами» полностью соответствует п.п. 9-11 “Положения о порядке присуждения учёных степеней” от 24 сентября 2013 г. за № 842 и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК Минобрнауки к диссертациям на соискание учёной степени доктора физико-математических наук, а её автор – Эстеров Александр Исаакович – заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – “Математическая логика, алгебра и теория чисел”.

Александров Александр Григорьевич
117997, Москва, ГСП-7, Профсоюзная ул. д. 65,
тел. 495-334-8980, e-mail: alexandr@ipu.rssi.ru
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Главный научный сотрудник ИПУ РАН, д-р физ.-матем. наук
по специальности 01.01.01 – “Математический анализ”

/А.Г.Александров/

16.06.17

Подпись А.Г. Александрова заверяю
Вед. инженер
Афанасьева Н.С.