Национальный Исследовательский Университет “Высшая Школа Экономики”

На правах рукописи

УДК 512.761, 512.734, 512.627.4, 514.172.4

Эстеров Александр Исаакович

Тропическая теория особенностей и геометрия многочленов с неопределенными коэффициентами

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва – 2017

Оглавление

Введение 4

1. Многогранники Ньютона и дискриминанты многочленов, торическая и тропическая геометрия: обзор 42
   - 1.1. Смешанный объем. 42
   - 1.2. Многогранники Ньютона. 46
   - 1.3. Торические многообразия. 50
   - 1.4. Торические разрешения и компактификации. 58
   - 1.5. Тропическая геометрия. 60
   - 1.6. Тропическая теорема соответствия. 63
   - 1.7. Вторичный многогранник. 65
   - 1.8. Результанты. 68
   - 1.9. Дискриминанты. 70
   - 1.10. Доказательство теоремы соответствия в простейшем случае. 72
2. Целочисленная и выпуклая геометрия 74
   - 2.1. Смешанные объемы и эйлеровы препятствия. 74
   - 2.2. Смешанные расслоенные многогранники 85
   - 2.3. Смешанные объемы конфигураций Кэли 102
3. Тропическая геометрия 117
   - 3.1. Чистота размерности тропических пересечений, смешанные грани и числа Милнора многогранников 117
   - 3.2. Тропические вееры с полиномиальными весами. 138
4. Геометрия многочленов с неопределенными коэффициентами . . 172
   - 4.1. Результант и дискриминант многочленов с неопределенными коэффициентами 174

4.2. Бифуркационный дискриминант системы уравнений: свойства . . . 191
4.3. Бифуркационный дискриминант системы уравнений: доказательство основных теорем . . . 207
4.4. Многомерная теорема Абеля о неразрешимости . . . 231
5. Тропическая теория особенностей . . . 254
5.1. Введение . . . 255
5.2. Аффинные характеристические классы . . . 264
5.3. Аффинные формулы Плюккера . . . 289

Заключение . . . 317

Список литературы . . . 319

Введение

Актуальность темы исследования.

Одна из основных задач исчислительной теории особенностей формулируется следующим образом: как перечислить все элементы некоторого семейства геометрических объектов с заданным типом особенностей. Например, как подсчитать количество кубических кривых, проходящих через восемь точек общего положения на проективной плоскости, которые имеют особенность.

К самым первым достижениям в этом направлении относятся классические формулы Плюккера (1835), которые дают число самопересечений и полукубических особенностей для проективно двойственной к комплексной плоской алгебраической кривой общего положения фиксированной степени. Сравнительно большой, но не систематизированный запас результатов такого рода был накоплен к середине XX века усилиями многих исследователей, в частности, представителей итальянской школы алгебраической геометрии. Наконец, в 1955 г. Рене Том [139] разработал универсальный подход к решению таких задач. Среди прочего, он показал, что исчислительная теория особенностей в определенном смысле сводится к своей инфинитезимальной версии – теории характеристических классов.

Всюду далее мы будем называть особенностью класс ростков аналитических или алгебраических многообразий относительно естественного отношения эквивалентности, индуцированного действием подходящей группы (например, группы аналитической замены координат). Изучаемое семейство геометрических объектов над базой T будем обозначать через M_t, $t \in T$.

В частности, пусть $f : M \to T$ – отображение общего положения гладких многообразий, и $M_t = f^{-1}(t)$ – семейство его слоев. Выделим в T страт, состоящий из всех точек t, для которых слой M_t имеет особенность данного типа S. Том доказал, что фундаментальный класс этого страта в когомологиях базы T равен образу значения некоторого универсального многочлена (зави-

сящего только от типа особенности S), в который подставлены характеристические классы M и прообразы характеристических классов T. В частности, для случая, когда страт нульмерен, значение универсального многочлена Тома дает количество слоев с особенностью данного типа. Оказывается, что многие важнейшие задачи исчислительной геометрии сводятся к вычислению универсальных многочленов Тома и их обобщений – см., например, обзор в [165].

Однако существуют важные классы задач исчислительной теории особенностей, к которым техника полиномов Тома не применима. В частности, она не применима для изучения особенностей многочленов с неопределенными коэффициентами в следующем смысле. Для конечного подмножества A_i решетки мономов от n переменных $\mathbb{Z}^n$, рассмотрим пространство $\mathbb{C}^{A_i}$ всех линейных комбинаций мономов из A_i с комплексными коэффициентами: например, если A_i – множество целых точек в некоторой гомотетии стандартного симплекса, то $\mathbb{C}^{A_i}$ – пространство многочленов данной степени. Пространство наборов многочленов

$$T = \mathbb{C}^{A_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_k}$$

допускает естественную стратификацию: каждый *страт мультиособенности* состоит из всех наборов многочленов $\varphi \in T$ таких, что множество нулевого уровня $\varphi = 0$ имеет заданный набор особенностей.

Пример. При $k = 1$ страт минимальной ненулевой коразмерности называется A-дискриминантом и состоит из всех $\varphi \in T$, у которых 0 является критическим значением При $k = n + 1$ этот страт называется A-результантом и состоит из всех совместимых систем уравнений $\varphi = 0$ (оба понятия введены в этой общности Гельфандом, Зелевинским и Капрановым в монографии [60]). Заметим, однако, что дискриминант в настоящей диссертации рассматривается только как первый из стратов мультиособенностей, имеющих различную коразмерность, а потому богатая геометрия классического дискриминанта, специфичная для коразмерности 1 (в частности, тот факт, что дискриминант является

свободным дивизором в смысле Саито) остается за рамками данной работы.

Задача исчислительной теории особенностей в рассматриваемом случае "многочленов с неопределенными коэффициентами" состоит в изучении указанной стратификации: глобальной геометрии стратов пространства $T = \mathbb{C}^{A_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_k}$ (размерности, степени и т.д.), геометрии слоя общего положения $\varphi = 0$ и его вырождений вблизи общей точки данного страта (например, монодромии при обходе многочленом $\varphi \in T$ дискриминанта).

Эти проблемы изучались даже задолго до Плюккера: например, в случае $n = k = 2$ формулу для числа общих корней пары многочленов общего положения данных степеней (теорему Безу) получил Ньютон. В 1960х годах Арнольд поставил аналогичную задачу для произвольных носителей A_i, см. [157], а Кушниренко решил ее в работе [91], заложив основы новой области математики на стыке алгебраической геометрии и теории многогранников. Уже в середине XIX века Сильвестр и Кэли приступают к изучению стратов коразмерности 1 в пространстве $T = \mathbb{C}^{A_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_k}$ для случая $n = 1$ и $k \leqslant 2$, т.е. классических результанта и дискриминанта. Затем Маколей в 1902 г. вводит и исследует аналогичное понятие для произвольного n и пространства многочленов данной степени, так называемый результант Маколея, который играет сейчас важную роль в теории символьных вычислений. Гельфанд, Зелевинский и Капранов в книге [60] обобщили эти понятия на случай произвольных носителей A_i в связи с изучением многомерных гипергеометрических функций. В 1902г. Севери исследует некоторые страты бóльших коразмерностей для случая $k = 1, n = 2$ (многообразий Севери). К концу XX века они стали привлекать все большее внимание в связи с изучением инвариантов Громова-Виттена (для проективной плоскости эти инварианты есть степени многообразий Севери).

Заметим, однако, что описанная версия исчислительной теории особенностей не допускает применения техники полиномов Тома: рассматриваемое пространство $T = \mathbb{C}^{A_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_k}$ стягиваемо, поэтому его гомологии тривиаль-

ны, и фундаментальные классы стратов мультиособенностей в гомологиях T не представляют интереса. При этом любая попытка компактифицировать базу T и слои семейства $\varphi = 0$, $\varphi \in T$, чтобы обогатить топологию T, приводит к семействам, слишком далеким от общего положения, чтобы применять к ним технику полиномов Тома. Поэтому, чтобы развивать исчислительную теорию особенностей в этом контексте, нужно исследовать фундаментальные классы стратов мультиособенностей T не в кольце когомологий, а в более богатом – например, в так называемом кольце условий, или кольце тропических вееров, или эквивариантном кольце Чжоу относительно естественного действия комплексного тора на T. Это кольцо было введено в 1980х годах разными авторами для разных пространств с действиями редуктивных групп. Напомним конструкцию этого кольца в интересующем нас случае.

Определение. Пусть Z_k – пространство конечных формальных линейных комбинаций $\sum_i \alpha_i V_i$ с комплексными коэффициентами $\alpha_i \in \mathbb{C}$ неприводимых k-мерных алгебраических подмножеств $V_i \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$. Множество $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ является группой относительно операции покоординатного умножения. Обозначим через $g \cdot V$ сдвиг множества $V \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ на элемент $g \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n$. Определим индекс пересечения $U \circ V$ алгебраических подмножеств U и $V \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ дополнительной размерности $\dim U + \dim V = n$ как число точек пересечения U и сдвига $g \cdot V$ на элемент g общего положения (это число одно и то же для всех g из открытого по Зарисскому подмножества $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$). Индекс пересечения продолжается по линейности до спаривания $\circ : Z_k \times Z_{n-k} \to \mathbb{C}$. Назовем элемент $\mathcal{U} \in Z_k$ численно эквивалентным нулю ($\mathcal{U} \sim 0$), если $\mathcal{U} \circ \mathcal{V} = 0$ для всех $\mathcal{V} \in Z_{n-k}$. Тогда *кольцом условий* C называется прямая сумма пространств $Z_k / \sim$ по $k = 0, 1, \ldots, n$ с естественной операцией сложения и произведением, которое для классов эквивалентности неприводимых алгебраических множеств U и V определяется как класс пересечения U и сдвига $g \cdot V$ на элемент g общего положения (этот класс один и тот же для всех g из открытого по Зарисскому

подмножества $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$). Класс эквивалентности алгебраического множества V в кольце C называется его *фундаментальным классом* $[V]$.

Пример. Из определения и теоремы Кушниренко–Бернштейна (см.[158] и теорему 1.2.1) легко видеть, что фундаментальный класс алгебраической гиперповерхности $\varphi = 0$ в кольце условий определяется ее *многогранником Ньютона* (выпуклой оболочкой точек решетки $\mathbb{Z}^n$, соответствующих мономам, которые входят в многочлен φ с ненулевыми коэффициентами). Таким образом, фундаментальные классы двух гиперповерхностей равны, если и только если равны их многогранники Ньютона. В частности, это означает, что фундаментальный класс алгебраического множества произвольной коразмерности в кольце условий является естественным обобщением понятия многогранника Ньютона гиперповерхности.

Мы будем исследовать фундаментальные классы стратов мультиособенностей пространства $T = \mathbb{C}^{A_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_k}$ в этом кольце C, называя такую постановку задачи “аффинной теорией особенностей”.

Примечательно, что, при такой постановке задачи, анализу ее частных случаев по сути оказываются посвящены многочисленные исследования в разных областях геометрии. Прежде всего, это относится к найденному Михалкиным новому подходу к исчислительной геометрии – тропическим теоремам соответствия (см. [104], [105], [13], а также работы Шустина [126], [127], Зиберта и Нишину [128], Темкина [141], Гросса [65], Дикенштейн с соавторами [33], [36]). Эти результаты можно интерпретировать как описание фундаментальных классов некоторых стратов мультиособенностей в пространстве T (см. раздел 5.3.2).

Укажем другие известные темы исследований, которые можно рассматривать как частные случаи вышеописанной задачи “аффинной теорией особенностей”.

– Многогранники Ньютона результантов и дискриминантов, изучаемые многими авторами для приложений в самом широком диапазоне: от многомер-

ных гипергеометрических уравнений до символьной алгебры (см., например, монографию Гельфанда, Зелевинского и Капранова [60], работы Стармфелса с соавторами [131], [35], [25], [132], Анитповой и Циха [156] и других авторов [62], [12], [34]).

– Двойственно вырожденные проективные многообразия (т.е.такие, для которых проективно двойственное многообразие не является гиперповерхностью) для случая торических многообразий (см. [27], [31], [23], [57]).

– Топология полиномиальных отображений и их особенностей на бесконечности (см. подробнее в разделе 4.2.5).

Настоящая диссертация посвящена разработке эффективных методов исследования геометрии многочленов с неопределенными коэффициентами в рамках исчислительной теории особенностей и их приложениям к перечисленным выше вопросам.

Степень разработанности темы исследования. Развивая теорию многомерных гипергеометрических уравнений, Гельфанд, Зелевинский и Капранов описали в монографии [60] многогранники Ньютона классических дискриминанта и результанта и их обобщений на многочлены старших степеней. Затем Стармфелс в [131] в связи с приложениями к символьным вычислениям приступил к изучению многогранников Ньютона результанта $n+1$ многочлена от n переменных с произвольными носителями. В работах [62] и [52] эти результаты о дискриминантах и результантах соответственно перенесены со случая многочленов с неопределенными коэффициентами на случай многочленов, коэффициенты которых полиномиально зависят от параметров. В работах [156], [25] и [34] изучен многогранник Ньютона для дискриминанта системы n полиномиальных уравнений от n неизвестных.

В недавних работах [33] и [36] начаты аналогичные исследования для следующих по сложности стратов мультиособенностей пространства $\mathbb{C}^A$ после A-дискриминанта. Так как их коразмерность больше 1, для них вместо многогранника Ньютона изучается фундаментальный класс в кольце условий.

Более того, даже простейший страт мультиособенностей, A-дискриминант $D_A \subset \mathbb{C}^A$, в случае многочленов нескольких переменных при некоторых носителях $A \subset \mathbb{Z}^n$ имеет коразмерность больше 1. Такие носители называются *двойственно вырожденными*, потому что A-дискриминант является аффинным конусом над проективно двойственным к торическому многообразию, соответствующему A. Для таких A фундаментальный класс $[D_A]$ вычислен в работе [35]. Задача классификации двойственно вырожденных A, поставленная в [60], решена в работах [31] и [23] для гладких торических многообразий, и только совсем недавно в [57] для общего случая.

Оказывается, описанное направление исследований тесно связано также с исчислительной геометрией. Классический подход к исчислительной геометрии опирается на теорию пересечений, характеристические классы и полиномы Тома. Ответы на упомянутые выше перечислительные задачи, как правило, могут быть выражены в терминах некоторых универсальных многочленов, напоминающих полиномы Тома. Примером может служить задача подсчета рациональных кривых, проходящих через данный набор точек общего положения на данной поверхности, см., например, работы [63] и [142].

В 2003г Михалкин в работе [104] предложил новый подход к исчислительной алгебраической геометрии: он построил версию алгебраической геометрии кривых над полуполем $\mathbb{T} = (\mathbb{R} \sqcup \{-\infty\}, \max, +)$, в которой ответы на важные исчислительные вопросы совпадают с таковыми для классической алгебраической геометрии над $\mathbb{C}$. Например, инварианты Громова-Виттена проективной плоскости (число алгебраических кривых данной степени с данным числом простых самопересечений, проходящих через данный набор точек общего положения), оказались одинаковы над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{T}$. Этот факт (*теорема тропического соответствия*) сам по себе можно рассматривать как комбинаторное вычисление инвариантов Громова-Виттена проективной плоскости, поскольку задачи исчислительной геометрии над $\mathbb{T}$ – чисто комбинаторные.

Позднее принцип тропического соответствия был перенесен на более широ-

кие классы кривых и условий инцидентности. В частности, Шустин распространил его на кривые с более сложными особенностями, чем простые самопересечения (см. [126], [127], с приложениями к исчислительной геометрии поверхностей дель Пеццо), Зиберт и Нишиноу – на рациональные кривые в пространствах произвольной размерности (см. [128]), Михалкин с соавторами – на исчисление кривых, проходящих через данный набор точек и касающихся данного набора прямых общего положения (см. работу [13], в которой предложены новый подход и далекое обобщение классической задачи о числе коник, касающихся пяти прямых).

В доказательствах тропических теорем соответствия обычно используются методы теории деформаций. Каждое такое доказательство, помимо установления желаемого равенства между количествами комплексных и тропических объектов, неявным образом содержит алгоритм построения целого однопараметрического семейства комплексных объектов, которое можно в некотором смысле продеформировать в тропический объект. Например, для данного однопараметрического семейства $P(t)$ точек на проективной прямой и данной рациональной тропической кривой T, проходящей через точки тропикализации семейства $P(t)$, доказательство теоремы соответствия, использующее теорию деформаций (см. [126], [128], [141]), неявно содержит алгоритм вычисления (с точностью до произвольной степени параметра t) однопараметрического семейства рациональных кривых, проходящих через $P(t)$ и стремящихся к T. Естественно надеяться, что другой подход, в котором получение ответа не сопряжено с получением такой избыточной информации, мог бы оказаться применимым в более общих условиях.

Один такой подход предложен в работе [65]. Он ориентирован на применение к рациональным кривым.

Обсуждаемая нами аффинная теория особенностей предлагает другой подход, адаптированный к изучению кривых и гиперповерхностей, которые заданы неявно. Оказывается, что если нам известен фундаментальный класс страта

мультиособенности S в аффинных когомологиях, то мы можем получить тропические теоремы соответствия для гиперповерхностей с мультиособенностью S и различными условиями инцидентности. Таким образом, тропические теоремы соответствия могут интерпретироваться как классический подход к исчислительной геометрии, в котором вместо когомологий и классических полиномов Тома используется кольцо условий и "аффинная теория особенностей" в нашем смысле. Данный факт объясняется тем, что фундаментальный класс подмножества тора в кольце условий кодируется его *тропикализацией* (см. работы Казарновского [161] и [162], Стармфелса [133], Марквиг [59]). Подробности даны в разделе 5.3.2 и проиллюстрированы во введении, где мы выводим теорему тропического соответствия Михалкина для кривых с одним простым самопересечением из описания многогранника Ньютона A-дискриминанта (т.е. фундаментального класса универсального страта мультиособенности коразмерности 1).

Цели и задачи диссертационной работы: Цель диссертации – разработка аппарата, который дает возможность развить теорию многочленов Тома для "аффинной теории особенностей" в вышеописанном смысле, а также его применение для анализа стратов мультиособенностей малых коразмерностей. В рамках диссертации решены следующие задачи:

— построена теория характеристических классов алгебраических подмножеств тора $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ со значениями в кольце условий, которая играет для аффинной теории особенностей ту же роль, что классические характеристические классы для теории полиномов Тома.

— исследован вопрос чистоты размерности для простейших (т.е.имеющих малую коразмерность) стратов мультиособенностей $\Sigma \subset T = \mathbb{C}^{A_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_k}$.

— описаны фундаментальные классы в кольце условий для таких стратов Σ.

— изучена геометрия вырождения гиперповерхности $\varphi = 0$, когда $\varphi \in T$ стремится к общей точке страта Σ.

— получены примеры приложений разработанного аппарата к другим областям.

Научная новизна. Результаты работы новые и получены автором самостоятельно. Перечислим здесь основные.

— Полностью описаны фундаментальные классы стратов коразмерности 1 и 2 в пространстве $\mathbb{C}^A$.

— Получено многомерное обобщение теоремы Абеля о неразрешимости – классифицированы системы полиномиальных уравнений с неопределенными коэффициентами, разрешимые в радикалах. До сих пор результаты о теории Галуа систем уравнений практически отсутствовали – возможно, во многом из-за того, что имеющийся аппарат теории конечных групп недостаточен для этой цели. Например, наш результат опирается на совсем недавнее важное достижение в этой области [79].

— Классифицированы торические многообразия, проективно двойственные к которым являются гиперповерхностями (противоположная задача – классификация остальных, т.н. двойственно-вырожденных торических многообразий – являлась давней открытой проблемой и решена совсем недавно, после публикации наших результатов).

— Доказано существование “дискриминанта системы уравнений” – показано, что множество всех систем уравнений $\varphi_1 = \ldots = \varphi_k = 0$, $\varphi_i \in \mathbb{C}^{A_i}$, у которых множество решений топологически нестабильно относительно возмущений коэффициентов уравнений, образует гиперповерхность в пространстве систем уравнений $\mathbb{C}^{A_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_k}$ (при некоторых очевидных необходимых условиях на A_i). В качестве приложения показано, что бифуркационное множество общего полиномиального отображения является гиперповерхностью, и исследована ее степень. Изучение степени бифуркационного множества полиномиального отображения $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ и топологии вырождения слоев вдоль бифуркационного множества – классическая тематика, но большинство известных результатов охватывает только случаи $k = 1$ и $k = n$, а для произвольного k пока мало что

известно (см. подробнее в разделе 4.2.5).

— Вычислен тропический веер множества многочленов с двумя особенностями множества нулей, т.е. множества двойных касательных гиперплоскостей к данному торическому многообразию. В качестве приложения описан многогранник Ньютона "дискриминанта Морса" – многочлена на $\mathbb{C}^A$, который обращается в ноль на многочленах $\varphi \in \mathbb{C}^A$, не являющихся морсовскими функциями. (Точнее, описан двойственный веер этого многогранника, что однозначно его характеризует, хотя пока не дает замкнутого описания его вершин и комбинаторики – см. замечание 5.3.34.) На уровне степеней (т.е. когда $A = d \cdot$ (стандартный симплекс), и мы интересуемся степенью дискриминанта Морса) эта задача исследовалась, например, в работах [5], а также [93] и [166] (для $n = 1$).

Не менее значимыми, чем перечисленные результаты, представляются разработанные в диссертации методы – в первую очередь, конструкция характеристических классов алгебраических подмногообразий комплексного тора со значениями в кольце условий C. Для нашего исследования этот инструмент играет ту же роль, что и обычные характеристические классы в теории многочленов Тома. Также разработаны некоторые инструменты из области геометрии решеток, многогранников и выпуклых тел:

— Доказано существование смешанного расслоенного тела, обобщающего понятия смешанного объема и расслоенного тела. Введенные относительно недавно смешанные расслоенные многогранники до сих пор изучались только средствами геометрии многогранников (см., например, [102]), а общие выпукло-аналитические подходы разработаны не были.

— Построено дифференциальное кольцо тропических вееров с полиномиальными весами, элементы которого обобщают понятие тропического веера, а дифференцирование – понятие множества изломов кусочно-линейной функции. Конструкции, похожие на весьма частные случаи нашей (например, "тропические дивизоры Картье"), уже использовались разными авторами, но для целей

диссертации недостаточны, см. подробности в замечании 5.3.27.

— Классифицированы целочисленные многогранники объема не больше четырех (в связи с классификацией систем уравнений, разрешимых в радикалах).

— Для набора многогранников построен смешанный аналог частично упорядоченного множества граней одного многогранника, важный для изучения комбинаторики примыканий результантов.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Разработанные методы и полученные результаты могут быть использованы в исследованиях в области исчислительной, тропической и выпуклой геометрии, а также могут упростить и прояснить изложение некоторых сюжетов в учебной литературе и спецкурсах, посвященных указанным областям. Результаты и конструкции диссертации использованы, в частности, в работах А. Ито, В. Гублера, К. Д'Андреа, А. Дикенштейн, С. Ди Рокко, Б. Казарновского, А. Карасулу, Э. Каттани, М. Куэто, К. Кюннеманна, М. Сомбра, Б. Стармфелса, Л. Табера, Г. Франсуа, К. Фурукава, М. Хелмера, М. Херреро, И. Эмириса и др.

Методология и методы исследования. Работа основана на методах алгебраической геометрии и топологии, геометрии торических многообразий, теории характеристических классов, топологической теории Галуа, теории конечных групп, теории пересечений, выпуклой и тропической геометрии. Оригинальные методы, разработанные в рамках диссертации, включают исчисление характеристических классов со значениями в кольце условий и тропических веров с полиномиальными весами, а также инструменты из области геометрии многогранников и решеток, кратко описанные в разделе "Научная новизна".

Положения, выносимые на защиту. Глава 1 содержит обзор текущего состояния областей, связанных с нашей работой, и кратко напоминает основные понятия и конструкции. Она не содержит новых результатов.

В главе 2 изучается геометрия целочисленных многогранников и выпук-

лых тел и ее связи с алгебраической геометрией: вводится относительная версия смешанного объема и соответствующая относительная версия формулы Кушниренко–Бернштейна–Хованского, с ее помощью вводятся новые инварианты (числа Милнора и эйлеровы препятствия) целочисленных многогранников, которые нам в дальнейшем понадобятся. Также строятся и изучаются смешанные расслоенные тела и изучаются смешанные объемы некоторых специальных многогранников (призм, или конфигураций Кэли), которые встретятся нам в дальнейшем. Основные результаты этой главы изложены в работах [175], [176], [41], [42], [45].

В главе 3 развивается геометрия тропических вееров: вводятся и изучаются понятия смешанной грани и смешанного числа Милнора для набора многогранников, обобщающие аналогичные понятия для одного многогранника, а также дифференциальное кольцо тропических вееров с полиномиальными весами. Основные результаты этой главы изложены в работах [51] и [46].

Эти две главы почти независимы, результаты каждой из них используются в последующих двух главах.

В главе 4 мы приступаем к изучению “аффинной теории особенностей” начиная со стратов минимальной положительной коразмерности – результантов и дискриминантов. Мы, в частности, классифицируем проективные торические многообразия минимальной степени, проективно двойственные к которым – гиперповерхности, а также вводим и исследуем новое понятие бифуркационного дискриминанта системы уравнений. В качестве его приложений мы получаем новые результаты о топологии полиномиальных отображений и классифицируем системы полиномиальных уравнений с неопределенными коэффициентами, разрешимые в радикалах. Основные результаты этой главы изложены в работах [44], [46] и [49].

Наконец, в главе 5 мы продолжаем изучение “аффинной теории особенностей”, изучая страты коразмерности 2. Для этой цели мы строим характеристические классы подмногообразий комплексного тора со значениями в кольце

условий. Основные результаты этой главы изложены в работе [47].

Процитируем основные результаты каждого из разделов диссертации, выносимые на защиту.

В разделе 2.1 вводится понятие относительного смешанного объема и соответствующая относительная версия формулы Кушниренко-Бернштейна-Хованского. Для выпуклого многогранного m-мерного конуса $\tau \subset (\mathbb{R}^m)^*$ обозначим через $\tau^\vee$ его двойственный конус $\{x \in \mathbb{R}^m \mid \gamma(x) > 0 \text{ для } \gamma \in \tau\}$. Пусть $\mathcal{M}_{\tau^\vee}$ — полугруппа всех (неограниченных) многогранников вида

$$\tau^\vee + \text{некоторый ограниченный многогранник.}$$

Рассмотрим множество $\mathcal{P}_{\tau^\vee} \subset \mathcal{M}_{\tau^\vee} \times \mathcal{M}_{\tau^\vee}$ всех упорядоченных пар многогранников (P, Q) таких, что симметрическая разность $P \triangle Q$ ограничена. $\mathcal{P}_{\tau^\vee}$ является полугруппой относительно сложения по Минковскому пар: $(P, Q) + (C, D) = (P + C, Q + D)$.

Определение. Определим *объем* $V(P, Q)$ пары многогранников $(P, Q) \in \mathcal{P}_\Gamma$ как разность $\mathrm{Vol}(P \setminus Q) - \mathrm{Vol}(Q \setminus P)$. *Смешанный объем* пар многогранников определяется как симметричная мультилинейная функция $\mathrm{MV} : \underbrace{\mathcal{P}_{\tau^\vee} \times \ldots \times \mathcal{P}_{\tau^\vee}}_{m} \to \mathbb{R}$ такая, что $\mathrm{MV}\big((P, Q), \ldots, (P, Q)\big) = m! V(P, Q)$ для любой пары $(P, Q) \in \mathcal{P}_{\tau^\vee}$.

Утверждение. *Смешанный объем пар существует и единственен.*

Заметим, что в случае, когда конус $\tau^\vee$ нульмерен, построенный смешанный объем совпадает с классическим и, в частности, удовлетворяет неравенству Александрова–Фенхеля. В случае же, когда конус $\tau^\vee$ имеет полную размерность, смешанный объем пар удовлетворяет обратному неравенству Александрова–Фенхеля, см. [88]. Было бы интересно обобщить эти неравенства на случаи промежуточной размерности $\tau^\vee$.

Торические многообразия. Для рационального веера Σ в $(\mathbb{R}^m)^*$ соответствующее торическое многообразие обозначается через X_Σ. Для любой орбиты T коразмерности 1 торического многообразия X_Σ примитивная образующая

соответствующего одномерного конуса в Σ обозначается $\gamma(T)$. Предположим, что объединение конусов веера Σ является замкнутым выпуклым конусом τ, обозначим через $\tau^\vee \subset \mathbb{R}^m$ ему двойственный.

Если I — очень обильное линейное расслоение на X_Σ, а мероморфное сечение s расслоения I не имеет нулей и полюсов в максимальном торе многообразия X_Σ, то существует многогранник $\Delta \in \mathcal{M}_{\tau^\vee}$, такой что его двойственный веер равен Σ, а кратность любой орбиты T коразмерности 1 многообразия X_Σ в дивизоре нулей и полюсов сечения s равно максимальному значению ковектора $\gamma(T) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ на многограннике Δ. Так как пара (I, s) однозначно определяется указанным многогранником Δ, мы обозначим линейное расслоение I через I_Δ, а сечение s — через s_Δ.

Многогранники Ньютона. Объединение всех предкомпактных орбит торического многообразия X_Σ (т.е. орбит, соответствующих конусам веера Σ, принадлежащим внутренности τ) обозначается X_Σ^{comp} и называется *компактной частью* X_Σ (это множество действительно компактно).

Пусть f — произвольный росток некоторого голоморфного сечения расслоения I_Δ вблизи компактного множества X_Σ^{comp}, тогда функцию f/s_Δ можно разложить в степенной ряд $\sum_{a\in\Delta} c_a x^a$, где x принадлежит максимальному тору $(\mathbb{C} \setminus 0)^m$ торического многообразия X_Σ. Выпуклая оболочка множества $\{a \mid c_a \neq 0\} + \tau^\vee$ является целочисленным многогранником, принадлежащим $\mathcal{M}_{\tau^\vee}$. Он называется *многогранником Ньютона* f и обозначается Δ_f. Для любого ограниченного многогранника $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ многочлен $\sum_{a\in\Gamma} c_a x^a$, рассматриваемый как функция на комплексном торе $(\mathbb{C} \setminus 0)^m$, обозначается f^Γ. Если a содержится в ограниченной грани многогранника Ньютона Δ_f, то коэффициент c_a называется *старшим коэффициентом* f. Каждое сечение имеет конечное число старших коэффициентов.

Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ — целочисленные многогранники, принадлежащие $\mathcal{M}_{\tau^\vee}$, и пусть $\widetilde{\Delta}_1, \ldots, \widetilde{\Delta}_m$ — многогранники Ньютона сечений $f_1, \ldots, f_m$ линейных рас-

слоений $I_{\Delta_1}, \ldots, I_{\Delta_m}$, соответствующих многогранникам $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ на торическом многообразии X_Σ, причем первое из линейных расслоений $\mathcal{I}_{\Delta_1}$ тривиально, т.е. $\Delta_1 = \tau^\vee$. Относительная версия формулы Кушниренко-Бернштейна-Хованского (теорема 1.2.4) позволяет вычислить эйлерову характеристику слоя Милнора функции f_1 на полном пересечении $f_2 = \ldots = f_k = 0$ для $k \leqslant m$ в терминах многогранников Ньютона сечений $f_1, \ldots, f_k$.

Чтобы определить слой Милнора функции f_1, удобно зафиксировать семейство окрестностей для компактной части торического многообразия X_Σ. Например, выберем целочисленную точку a_i на каждой бесконечной грани многогранника Δ_1, и пусть B_ε — множество всех $x \in (\mathbb{C} \setminus 0)^m$ таких, что $\sum_i |x^{a_i}| \leqslant \varepsilon$. Тогда его замыкание в торическом многообразии X_Σ является окрестностью компактной части X_Σ^{comp}.

Определение. Слоем Милнора функции f_1 на полном пересечении $f_2 = \ldots = f_k = 0$ называется многообразие $\{f_1 - \delta = f_2 = \ldots = f_k = 0\} \cap B_\varepsilon$, где $|\delta| \ll \varepsilon \ll 1$.

Заметим, что коммутативно-алгебраическая интерпретация данного инварианта, видимо, неизвестна, что препятствует его вычислению в терминах многогранников Ньютона методами оригинальной работы [91].

Определение. Старшие коэффициенты сечений $f_1, \ldots, f_k$ находятся в общем положении, если для любого совместного набора ограниченных граней $\widetilde{\Gamma}_1, \ldots, \widetilde{\Gamma}_k$ многогранников $\widetilde{\Delta}_1, \ldots, \widetilde{\Delta}_k$, системы полиномиальных уравнений $f_1^{\widetilde{\Gamma}_1} = \ldots = f_k^{\widetilde{\Gamma}_k} = 0$ и $f_2^{\widetilde{\Gamma}_2} = \ldots = f_k^{\widetilde{\Gamma}_k} = 0$ определяют регулярные многообразия в максимальном торе $(\mathbb{C} \setminus 0)^m$.

Мы обозначаем смешанный объем пар многогранников $(P_1, Q_1), \ldots, (P_m, Q_m)$ в $\mathbb{R}^m$ через моном $(P_1, Q_1) \cdot \ldots \cdot (P_m, Q_m)$.

Теорема. *В описанной выше ситуации, эйлерова характеристика слоя*

Милнора функции f_1 на полном пересечении $\{f_2 = \ldots = f_k = 0\}$ равна

$$(-1)^{m-k} \sum_{\substack{a_1>0,\ldots,a_k>0 \\ a_1+\ldots+a_k=m}} (\Delta_1, \widetilde{\Delta}_1)^{a_1} \cdot \ldots \cdot (\Delta_k, \widetilde{\Delta}_k)^{a_k}$$

при условии, что старшие коэффициенты сечений $f_1, \ldots, f_k$ находятся в общем положении.

В разделе 2.2 доказывается существование смешанного расслоенного тела, и в терминах относительного смешанного объема описывается его опорная функция.

Рассмотрим L и M, вещественные векторные пространства размерностей l и m соответственно, и пусть μ — форма объема на пространстве M. Обозначим проекции прямой суммы $L \oplus M$ на слагаемые L и M через u и v соответственно. Пусть $\Delta \subset L \oplus M$ — выпуклое тело, т. е. компактное множество, которое вместе с любой парой своих точек содержит соединяющий их отрезок. Для выпуклого тела и произвольной точки $a \in M$, обозначим *слой* $u\big(\Delta \cap v^{(-1)}(a)\big)$ выпуклого тела Δ через Δ_a. Напомним, что *опорная функция* $B(\cdot) : L^* \to \mathbb{R}$ выпуклого тела $B \subset L$ определяется как $B(\gamma) = \max\limits_{b \in B} \langle \gamma, b \rangle$ для любого ковектора $\gamma \in L^*$.

Определение. Для выпуклого тела $\Delta \subset L \oplus M$ его *интеграл Минковского* — выпуклое тело $B \subset L$, опорная функция которого равна интегралу опорных функций слоев Δ_a, где a пробегает множество $v(\Delta)$:

$$B(\gamma) = \textstyle\int_{v(\Delta)} \Delta_a(\gamma)\, \mu \text{ для каждого } \gamma \in L^*.$$

Интеграл Минковского обозначается $\int \Delta\, \mu$.

Через $\mathcal{C}(K)$ обозначим множество всех выпуклых тел в вещественном векторном пространстве K. Данное множество является полугруппой относительно сложения по Минковскому: $A + B = \{a + b \,|\, a \in A, b \in B\}$.

Теорема. *Существует единственное симметричное мультилинейное от-*

носительно сложения по Минковскому отображение

$$\mathrm{MP}_\mu : \underbrace{\mathcal{C}(L \oplus M) \times \ldots \times \mathcal{C}(L \oplus M)}_{m+1} \to \mathcal{C}(L)$$

такое, что $\mathrm{MP}_\mu(\Delta, \ldots, \Delta) = \int \Delta \, \mu$ *для любого выпуклого тела* $\Delta \subset L \oplus M$.

Существование вытекает из следующей более конструктивной версии этой теоремы.

Определение. Выпуклое тело $\mathrm{MP}_\mu(\Delta_0, \ldots, \Delta_m)$ называется *смешанным расслоенным телом* тел $\Delta_0, \ldots, \Delta_m$.

Для ковектора $\gamma \in L^*$ и выпуклого тела $\Delta \subset L \oplus M$ обозначим образ Δ при проекции $(\gamma, \mathrm{id}) : L \oplus M \to \mathbb{R} \oplus M$ через $\Gamma_\Delta(\gamma)$. Для тела $\Gamma \subset \mathbb{R} \oplus M$ обозначим через $\widetilde{\Gamma}$ пару тел $(\pi\Gamma + l, \Gamma + l)$, где $\pi : \mathbb{R} \oplus M \to \{0\} \times M$ – проекция на второе слагаемое, и $l \subset \mathbb{R} \oplus M$ – луч $(-\infty, 0] \times \{0\}$. Напомним, что положительно однородной назвается функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, такая что $\lambda f(x) = f(\lambda x)$ для любого $\lambda > 0$.

Теорема. *Для любого набора выпуклых тел* $\Delta_0, \ldots, \Delta_m \subset L \oplus M$, *выражение*

$$\mathrm{MV}\big(\widetilde{\Gamma}_{\Delta_0}(\gamma), \ldots, \widetilde{\Gamma}_{\Delta_m}(\gamma)\big)$$

задает выпуклую положительно однородную функцию от ковектора $\gamma \in L^*$, *и тело, опорной функцией которого она является, удовлетворяет определению смешанного расслоенного тела тел* $\Delta_0, \ldots, \Delta_m$.

В разделе 2.3 доказывается формула типа Пика для смешанного объема призм и показывается роль смешанных объемов призм в изучении детерминантных многообразий в терминах многогранников Ньютона.

Определение. Пусть векторы $e_1, \ldots, e_l$ образуют стандартный базис $\mathbb{R}^l$, а e_0 равен $0 \in \mathbb{R}^l$. Для ограниченных многогранников $P_0, \ldots, P_l$ in $\mathbb{R}^m$ и подмножества $I \subset \{0, \ldots, l\}$, через P_I обозначим выпуклую оболочку объединения

многогранников $P_i \times \{e_i\} \subset \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^l$, $i \in I$. Будем называть такой многогранник **призмой** или **конфигурацией Кэли**. Призму $P_{\{0,\dots,l\}}$ будем также обозначать $P_0 * \dots * P_l$.

Обозначим через $I(A)$ число точек решетки в целочисленном многограннике $A \subset \mathbb{R}^n$.

Определение. *Тропическим полукольцом* P многогранников называется множество всех выпуклых многогранников в $\mathbb{R}^n$ (включая пустой) с операцией сложения

$$A \vee B = \text{ выпуклая оболочка } A \cup B$$

и суммой Минковского в качестве операции умножения

$$A + B = \{a + b \,|\, a \in A,\, b \in B\}.$$

Название обосновано следующим фактом: опорные функции многогранников $A \vee B$ и $A + B$ равны соответственно максимуму и сумме опорных функций многогранников A и B соответственно. Нулем и единицей в этом полукольце являются многогранники $\varnothing$ и $\{0\}$ соответственно. В частности, если суммирование многогранников $A_j \in P$ ведется по пустому множеству индексов $J = \varnothing$, положим $\sum_{j \in J} A_\alpha = \{0\}$, по определению.

Теорема. *Пусть* $m = k - n + 1$, *и* $\Delta_{i,j} \subset \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, – *целочисленные многогранники. Тогда смешанный объем призм* $\Delta_{1,j} * \dots * \Delta_{n,j} \subset \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-1}, j = 1, \dots, k$, *равен*

$$\sum_{\substack{J \subset \{1,\dots,k\} \\ b_1 + \dots + b_n = |J|}} (-1)^{k-|J|} I\Big(\bigvee_{\substack{J_1 \sqcup \dots \sqcup J_n = J \\ |J_1| = b_1, \dots, |J_n| = b_n}} \sum_{\substack{i = 1,\dots,n \\ j \in J_i}} \Delta_{i,j} \Big). \qquad (**)$$

Здесь первое суммирование ведется по всем непустым $J \subset \{1, \dots, k\}$ *и всем наборам неотрицательных чисел* b_i, *сумма которых равна* $|J|$, *и* $\bigvee$ *берется по всем разложениям* J *в дизъюнктное объединение множеств* J_i *размера* b_i.

Заметим, что некоторые из $\Delta_{i,j}$ могут быть пустыми. Эта теорема, очевидно, допускает относительную версию: в качестве $\Delta_{i,j}$ можно брать многогранники в $\mathbb{R}^m_+$, а $I(A)$ определять как число целых точек в разности замкнутых многогранников $\mathbb{R}^m_+ \setminus A$, тогда смешанный объем пар многогранников $(\mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^{n-1}, \Delta_{1,j} * \ldots * \Delta_{n,j})$, $j = 1, \ldots, k$, также равен $(**)$.

В разделе 2.3 приводится также пример вычисления топологического инварианта детерминантной особенности в терминах смешанного объема призм, построенных по многогранникам Ньютона функций, задающих особенность. Этот результат получен путем построения торических разрешений детерминантных особенностей. Заметим, что другим авторам удавалось получить аналогичные результаты методами коммутативной алгебры только при существенных ограничениях на многогранники Ньютона (например, в случае совпадающих многогранников Ньютона, см., например, [15]). Было бы интересно передоказать полученные здесь результаты методами коммутативной алгебры (например, как в [1], [155], [2]).

Здесь уместно будет отметить, что в самом общем контексте вычисление смешанных объемов многогранников Ньютона в различных ситуациях есть не что иное как вычисление гомологий (когомологий) подходящих комплексов, причем условие невырожденности соответствующих многогранников Ньютона обеспечивает конечномерность этих гомологий, а величина смешанного объема дает размерность соответствующих пространств гомологий.

Например, число Милнора изолированной особенности гиперповерхности X выражается через эйлерову характеристику комплекса де Рама $(\Omega^\bullet_X, d)$, т.е. через альтернированную сумму размерностей групп его когомологий. Для вычисления целочисленных локальных инвариантов торических многообразий в качестве такого комплекса удобно использовать бидуальный комплекс де Рама $(\omega^\bullet_X, d)$, который можно описать в стандартных терминах конусов и их граней (см. [160]), взвешенные смешанные объемы [1] и т.д. Таким образом, весьма вероятно, что полученные в настоящей диссертации результаты могут быть по-

лезным предметом изучения в рамках общей коммутативной и гомологической алгебры, а также традиционной аналитической геометрии [155], [2].

В разделе 3.1 строится и изучается некоторый аналог частичного порядка примыкания на множестве граней многогранника для случая, когда вместо одного многогранника имеется набор многогранников. Цель – последующее исследование примыканий A-результантов; именно связь с A-результантами, описанная в разделе 4.3.1, проясняет естественность вводимых ниже понятий. Доказательство основных результатов основано на методах тропической геометрии.

Гранью конечного множества $H \subset \mathbb{Z}^n$ называется пересечение множества H с гранью его выпуклой оболочки. Размерность $\dim H$ множества $H \subset \mathbb{Z}^n$ — размерность его выпуклой оболочки.

K-набором конечных множеств называется отображение A из конечного множества K во множество конечных подмножеств в $\mathbb{Z}^n$, его *I-поднабор* для $I \subset K$ обозначается AI, сумма Минковского его элементов $\{\sum_{k\in K} a_k \,|\, a_k \in A_k\}$ обозначается $\sum A$ (и равна $\{0\}$ при $K = \varnothing$), а через $\dim A$ обозначается разность $\dim(\sum A) - |K|$. K-набор Γ является *гранью* K-набора A (обозначение – $\Gamma \prec A$), если $\Gamma(k)$ — грань множества $A(k)$ для любого $k \in K$ и $\sum \Gamma$ — грань множества $\sum A$.

Определение. Назовем грань $\Gamma \prec AI$ огранкой исходного набора A. Назовем огранку *важной*, если существует грань $\Gamma' \prec A$ такая, что $\Gamma = \Gamma' I$ и $\dim \Gamma \leqslant \dim \Gamma' J$ для любого $J \supset I$. Она называется *существенной*, если к тому же $\dim \Gamma < \dim \Gamma' J$ для любого $J \subsetneq I$.

Грань Γ' с указанными свойствами называется *расширением* огранки Γ. Огранка Γ *примыкает* к огранке B, если у них существуют расширения $\Gamma' \prec B'$.

Если Γ — грань набора AI, то обозначим проекцию $\mathbb{Z}^n$ вдоль выпуклой оболочки суммы $\sum \Gamma$ через p, выпуклые оболочки образов $pA(i)$, $i \notin I$, — через $\Psi_1, \dots, \Psi_m$, выпуклые оболочки $p(\sum AI)$ и $p(\sum AI \setminus \sum \Gamma)$ — через Ψ_0 и Ψ,

соответственно. Пусть ψ_0 — вершина $p(\sum \Gamma)$ многогранника Ψ_0, и пусть

$$C = \{\lambda(\psi - \psi_0) \,|\, \lambda > 0,\, \psi \in \Psi_0\}$$

— конус, который в малой окрестности 0 совмещается параллельным переносом с многогранником Ψ_0 в малой окрестности своей вершины ψ_0. Обозначим пару (неограниченных) многогранников $(\Psi_0 + C, \Psi + C)$ через Φ_0, а $(\Psi_i + C, \Psi_i + C)$ — через Φ_i для $i > 0$. Напомним, что через Φ_I обозначаются призмы с основаниями Φ_i, $i \in I$.

Определение. *Числом Милнора* набора A в грани Γ называется

$$\sum_{a_0+\ldots+a_m=d} \Phi_0^{a_0} \cdot \Phi_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot \Phi_m^{a_m} = \sum_{I \subset \{0,\ldots,m\}} (-1)^{m+1-|I|}(d + |I| - 1)! \operatorname{Vol} \Phi_I,$$

где $(a_0, \ldots, a_m)$ пробегает множество всех наборов натуральных чисел, дающих в сумме $d = \dim \sum A - \dim \sum \Gamma$, и смешанный объем пар многогранников $P_1, \ldots, P_k$ в k-мерном векторном пространстве записывается в виде $P_1 \cdot \ldots \cdot P_k$.

Утверждение. *Верно* $c_A^\Gamma \geqslant 0$. *Более того, грань* Γ *важна тогда и только тогда, когда* $c_A^\Gamma > 0$.

Определение. Набор A называется *значимым*, если размерность выпуклой оболочки $A_{i_0} + \ldots + A_{i_p}$ не меньше p для любой последовательности $0 \leq i_0 < \ldots < i_p \leq k$ и равна n при $p = k$.

Утверждение. *Если* $\dim E = -k < 0$ *для существенной огранки* E *значимого набора* A, *то существует цепочка существенных огранок* E_i *размерностей* $-i$ *при* $i = 1, \ldots, k$ *такая, что* $E = E_k$, *и* E_i *примыкает к* E_{i-1} *для любого* i.

Заметим, что примыкание не транзитивно, и мы не можем утверждать, что E_k примыкает к E_1.

В разделе 3.2 строится дифференциальное кольцо тропических вееров с полиномиальными коэффициентами. Пусть L — n-мерная целочисленная решетка. Рассмотрим пару (P, φ), где

1) $P \subset L \otimes \mathbb{R}$ — объединение конечного числа непересекающихся выпуклых относительно открытых полиэдральных конусов коразмерности k, обладающее следующим свойством: у каждой точки $p \in P$ существует окрестность, в которой P совпадает с плоскостью коразмерности k (данная плоскость обозначается T_pP);

2) Функция $\varphi : P \to \mathbb{R}$ представляется многочленом с рациональными коэффициентами $\varphi_p : T_pP \to \mathbb{R}$ в некоторой достаточно малой окрестности каждой точки $p \in P$.

Две такие пары (P, φ) и (Q, ψ) назовем **эквивалентными**, если $\varphi(p) = \psi(p)$ для любых точек $p \in P \cap Q$ таких, что $T_pP = T_pQ$, и $\varphi = 0$ на $P \setminus \overline{Q}$ и $\psi = 0$ на $Q \setminus \overline{P}$.

Для рациональной k-мерной плоскости $R \subset L \otimes \mathbb{R}$ и точки $x \in L \otimes \mathbb{R}$ скажем, что аффинная плоскость $R + x$ **трансверсальна** к (P, φ), если она пересекает P в конечном множестве точек и не пересекает $\overline{P} \setminus P$. Тогда **тропический индекс пересечения** $(R + x) \cdot (P, \varphi)$ определяется как

$$\sum_{p \in (R+x) \cap P} \varphi(p) \left| \frac{L}{(R \cap L) + (T_pP \cap L)} \right|.$$

Данный индекс пересечения является локально-полиномиальной функцией от x, определенной на открытом плотном подмножестве $L \otimes \mathbb{R}$. Если данная функция продолжается до непрерывной функции $i_R : L \otimes \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ для любого R, то пара (P, φ) называется **тропической**, и **тропический индекс пересечения** $(R + x) \cdot (P, \varphi)$ определяется по непрерывности как $i_R(x)$ для любых значений x, даже если плоскость $R + x$ не трансверсальна (P, φ).

Классы эквивалентности тропических пар коразмерности k называются тропическими веерами и образуют множество $\mathcal{K}_k(L)$. Для любых двух вееров $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, существует единственный (с точностью до эквивалентности) веер $\mathcal{S}$ такой, что $\mathcal{P} \cdot R + \mathcal{Q} \cdot R = \mathcal{S} \cdot R$ для любой аффинной плоскости R. Данный веер $\mathcal{S}$ называется суммой $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$.

Множество $\mathcal{K}_k(L)$ образует $\mathbb{Q}$-векторное пространство относительно дан-

ной операции сложения. Оно разлагается в прямую сумму $\bigoplus_d \mathcal{K}_k^d(L)$, где каждая из компонент $\mathcal{K}_k^d(L)$ состоит из пар $(P, \varphi) \in \mathcal{K}_k(L)$ таких, что φ локально является однородным многочленом степени d. Прямая сумма $\bigoplus_k \mathcal{K}_k(L)$ обозначается $\mathcal{K}(L)$ и всюду далее будет называться **пространством тропических вееров с полиномиальными весами**.

Для тропических пар $(P, \varphi) \in \mathcal{K}(L)$ и $(Q, \psi) \in \mathcal{K}(M)$, их **прямое произведение** определяется как $(P \times Q, \varphi + \psi) \in \mathcal{K}(L \oplus M)$. Для эпиморфизма решеток $f : L \to M$ размерностей n и m соответственно, **прямой образ** $f_*(\mathcal{P})$ тропического веера $\mathcal{P} \in \mathcal{K}_k(L)$, $k \geqslant n-m$, определяется как единственный веер $\mathcal{S} \in \mathcal{K}_{k-n+m}(M)$ такой, что $\mathcal{P} \cdot f^{-1}(R) = \mathcal{S} \cdot R$ для любой $(k-n+m)$-мерной плоскости $R \subset M \otimes \mathbb{Q}$.

Утверждение. *Образ тропического веера $\mathcal{P}$, состоящего из $(n-k)$-мерных конусов $C_i \subset L \otimes \mathbb{R}$ с весами $m_i : C_i \to \mathbb{R}$, является тропическим веером $f_*\mathcal{P}$, который состоит из всех $(n-k)$-мерных конусов $f(C_i)$ с весами $(m_i \circ f^{-1}) \cdot \left|L \big/ (C_i + \ker f)\right|$.*

Векторное пространство $\mathcal{K}(L)$ обладает естественной структурой дифференциального кольца: **произведение-пересечение** вееров $\mathcal{P} \in \mathcal{K}_k(L)$ и $\mathcal{Q} \in \mathcal{K}_m(L)$ — единственный веер $\mathcal{S} \in \mathcal{K}_{k+m}(L)$ такой, что $\mathcal{S} \cdot R = (\mathcal{P} \times \mathcal{Q} \times R) \cdot$ (диагональ) в $(L \oplus L \oplus L) \otimes \mathbb{Q}$ для любой $(k+m)$-мерной аффинной плоскости $R \subset L \otimes \mathbb{Q}$. **Дифференцированием изломов** $\delta : \mathcal{K}_k^d(L) \to \mathcal{K}_{k+1}^{d-1}(L)$ называется единственное дифференцирование в кольце $\mathcal{K}(L)$ такое, что $\delta(\mathcal{P}) \in \mathcal{K}_1^0(L)$ является многообразием углов непрерывной кусочно-линейной функции $\mathcal{P} \in \mathcal{K}_0^1(L)$.

Обозначим подкольца $\bigoplus_k \mathcal{K}_k^0(L)$ и $\bigoplus_d \mathcal{K}_0^d(L)$ кольца $\mathcal{K}(L)$ через $\mathcal{K}^0(L)$ и $\mathcal{K}_0(L)$ соответственно. Первое из них также известно как **кольцо тропических вееров** (более явное описание операций сложения и умножения в данном кольце см., например, в работах [56], [162], [133], [59]), последнее же в точности является кольцом всех непрерывных кусочно-линейных полиномиальных

функций на $L \otimes \mathbb{Q}$ (относительно обычных операций сложения и умножения). Подкольца $\mathcal{K}_0(L^*)$ and $\mathcal{K}^0(L^*)$ дают хорошо известные комбинаторные модели для (определенного в начале введения) кольца условий C комплексного тора $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ с решеткой условий L:

$$C = \mathcal{K}^0(L^*) = \mathcal{K}_0(L^*)/I,$$

где I — идеал, порожденный линейными функциями на $\mathbb{Q}^n$. Первая из данных моделей была обнаружена в работах [56], [101], [162], а вторая — в работах [130] и [18]. Изоморфизм между данными моделями устанавливается отображениями $\delta^k : \mathcal{K}_0^k(L^*) \to \mathcal{K}_k^0(L^*)$ (это описание отлично от ранее известного, приведенного в работах [19] и [83]). Элемент $\mathcal{K}^0(L^*)$, соответствующий классу подмногообразия $V \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ в кольце условий C, называется **тропическим веером** $\operatorname{Trop} V$ и допускает следующее описание: пусть V задано радикальным идеалом $I \in \mathbb{C}[L]$, тогда его тропический веер представлен парой $(P, \varphi) \in \mathcal{K}^0\big(L^*\big)$, $P \subset \mathbb{Q}^n$, $\varphi : P \to \mathbb{Q}$, где $P = \{\gamma \,|\, \mathbb{C}[L] \neq \operatorname{in}_\gamma I\}$, и значение $\varphi(\gamma)$ равно кратности Гильберта-Самюэля идеала $\operatorname{in}_\gamma I \subset \mathbb{C}[L]$.

Пример. Если N — многогранник Ньютона полинома Лорана на комплексном торе $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$, то тропический веер гиперповерхности $f = 0$ равен многообразию углов опорной функции многогранника N. Обозначим данный веер через $[N] \in \mathcal{K}_1^0(\mathbb{Z}^n)$ и назовем его **двойственным веером** многогранника N.

В разделе 4.1 определяются результанты и дискриминанты и исследуется их коразмерность.

Рассмотрим $A_0, \ldots, A_l$, $l \leqslant k$, конечные подмножества решетки $\mathbb{Z}^k$, и пусть $\Sigma_{A_0,\ldots,A_l} \subset \mathbb{C}^{A_0} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_l}$ — множество всех таких наборов многочленов $(\varphi_0, \ldots, \varphi_l)$, что в некоторой точке множества $\{y \in (\mathbb{C} \setminus 0)^k \mid \varphi_0(y) = \ldots = \varphi_l(y) = 0\}$ их дифференциалы линейно зависимы. Объединение всех компонент коразмерности 1 замыкания $\overline{\Sigma_{A_0,\ldots,A_l}}$ задается уравнением $G = 0$, где G — свободный от квадратов многочлен на $\mathbb{C}^{A_0} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_l}$.

Определение. Многочлен G называется *приведенным A-дискриминантом степени* $(A_0, \dots, A_l)$ и обозначается $D^{red}_{A_0,\dots,A_l}$.

Мы предполагаем, что $l \leqslant k$, иначе коразмерность $\Sigma_{A_0,\dots,A_l}$ больше 1 (можно, впрочем, вместо многогранника Ньютона изучать тропикализацию множества $\Sigma_{A_0,\dots,A_l}$, подробнее см. [35] и [133]).

Если $l = k$, то $D^{red}_{A_0,\dots,A_k}$ — приведенный результант $R_{A_0,\dots,A_k}$ (см. определение 4.1.1); если $l = 0$, то $D^{red}_{A_0}$ – приведенный дискриминант D_{A_0} (см. определение 4.1.9). В обоих случаях дискриминантное множество $\Sigma_{A_0,\dots,A_l}$ неприводимо, и известен комбинаторный метод проверки равенства $\operatorname{codim}\Sigma_{A_0,\dots,A_l} = 1$ (см. следствие 4.1.15(2) в случае $l = 0$ и предложение 4.1.5(1) для $l = k$). В общем же случае, множество $\Sigma_{A_0,\dots,A_l}$ не всегда неприводимо и может даже не иметь чистой размерности.

Пример. Если $k = 2$, $A_0 = \{0,1,2\} \times \{0\}$ и $A_1 = \{0,1\} \times \{0,1\}$ (данные множества двойственно невырождены, однако $\dim A_0 < 2$), то $\overline{\Sigma_{A_0,A_1}}$ состоит из двух компонент. Одной из них является множество коразмерности 1 всех пар многочленов вида $\Big(c(x-a)^2,\ b_{11}xy + b_{01}x + b_{10}y + b_{00}\Big)$. Другая же состоит из всех пар многочленов вида $\Big(c_1(x-a_1)(x-a_2),\ c_2(x-a_1)(y-b)\Big)$ и имеет коразмерность 2.

Определение. Набор множеств $A_0, \dots, A_l$ называется *двойственно вырожденным*, если замыкание множества $\Sigma_{A_0,\dots,A_l}$ не является гиперповерхностью.

Утверждение. *Если ни одно из множеств $A_0, \dots, A_l$ не содержится в аффинной гиперплоскости и по крайней мере одно из них двойственно невырождено, то и набор $A_0, \dots, A_l$ двойственно невырожден.*

В разделе 4.2 определяется и исследуется бифуркационный дискриминант системы уравнений и его приложения к изучению топологии полиномиальных отображений.

Для конечного множества $H \subset \mathbb{Z}^n$ мы изучаем пространство $\mathbb{C}^H$ *многочленов Лорана* $h(x) = \sum_{a \in H} c_a x^a$, где x^a обозначает $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$, коэффициент c_a — комплексное число, а полином h рассматривается как функция $(\mathbb{C} \setminus 0)^n \to \mathbb{C}$. Для линейной функции $v : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ мы обозначаем через H^v пересечение H с границей аффинного полупространства $H + \{v < 0\}$, а через h^v — компоненту наибольшей v-степени $\sum_{a \in H^v} c_a x^a$ (при $v = 0$ положим $H^0 = H$ и $h^0 = h$). В дальнейшем набор конечных подмножеств $A_0, \dots, A_k$ в $\mathbb{Z}^n$ мы будем обозначать через A, пространство $\mathbb{C}^{A_0} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^{A_k}$ — через $\mathbb{C}^A$. Элемент $f = (f_0, \dots, f_k) \in \mathbb{C}^A$ мы будем рассматривать как отображение $(\mathbb{C} \setminus 0)^n \to \mathbb{C}^{k+1}$ и через f^v будем обозначать $(f_0^v, \dots, f_k^v)$.

Теорема. *Предположим, что сумма $A_0 + \dots + A_k$ не содержится в аффинной гиперплоскости. Для системы уравнений $f = 0$ следующие три условия эквивалентны :*
1) Существует сколь угодно малый элемент $\tilde{f} \in \mathbb{C}^A$ такой, что множества $\{f = 0\}$ и $\{f + \tilde{f} = 0\}$ не диффеоморфны.
2) Существует сколь угодно малый элемент $\tilde{f} \in \mathbb{C}^A$ такой, что множества $\{f = 0\}$ и $\{f + \tilde{f} = 0\}$ имеют разные эйлеровы характеристики.
3) Существует линейная функция $v : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ такая, что дифференциалы $df_0^v, \dots, df_k^v$ линейно зависимы в некоторой точке множества $\{f^v = 0\}$.

Условие на $A_0 + \dots + A_k$ отбросить нельзя, потому что иначе эйлерова характеристика множества $\{f = 0\}$ равнялась бы 0 для любого $f \in \mathbb{C}^A$, из соображений однородности.

Определение. Система $f \in \mathbb{C}^A$ называется *вырожденной*, если она удовлетворяет одному из вышеупомянутых условий. Множество всех вырожденных систем B назовем *бифуркационным множеством.*

Например, если $k = n$, то B — результантное множество (т.е. множество всех совместных систем уравнений в $\mathbb{C}^A$, см. [131]); Если $A_0 = \dots = A_k$ —

множество вершин стандартного n-мерного симплекса, то $f_0, \dots, f_k$ линейны, и B определяется как множество нулей произведения миноров максимального порядка матрицы коэффициентов системы $f_0, \dots, f_k$.

Теорема. *Если набор A значимый, то множество B всех вырожденных систем в $\mathbb{C}^A$ является непустой гиперповерхностью.*

Предположение о значимости отбросить нельзя, иначе множество совместных систем всегда имеет коразмерность больше единицы. Для $f \in \mathbb{C}^A \setminus B$ и системы $\tilde{f}$ общего положения в некоторой неприводимой компоненте $B_i \subset B$, через e_i обозначим разность эйлеровых характеристик $e\{\tilde{f} = 0\} - e\{f = 0\}$.

Утверждение. *Если A значимо, то $e_i > 0$ при четном $n - k$ и $e_i < 0$ при нечетном $n - k$.*

Определение. Если набор A значимый, то уравнение эффективного дивизора $(-1)^{n-k} \sum_i e_i B_i$ называется *A-бифуркационным дискриминантом*, или *A-дискриминантом Эйлера* и обозначается $E_A = E_{A_0,\dots,A_k}$.

Таким образом, E_A — непостоянный многочлен на $\mathbb{C}^A$, определенный с точностью до умножения на ненулевую константу, и уравнением $E_A = 0$ задается множество всех вырожденных систем уравнений в $\mathbb{C}^A$.

В разделе 4.2 указаны формулы для явного вычисления этого многочлена и его степени (а также его многогранника Ньютона). Доказательства основных фактов о бифуркационном дискриминанте даны в разделе 4.3. В качестве первого приложения бифуркационных дискриминантов получен следующий факт о топологии полиномиальных отображений.

Обозначим через $\sharp S$ число целых точек в выпуклой оболочке множества $S \subset \mathbb{R}^n$. Напомним, что *тропическая сумма Минковского* $P \vee Q$ двух множеств – это выпуклая оболочка их объединения $P \cup Q$, и тропической суммой Минковского пустого набора множеств мы считаем пустое множество. Рассмотрим невырожденный набор многочленов $g \in \mathbb{C}^A$, $g : (\mathbb{C} \setminus 0)^n \to \mathbb{C}^{k+1}$.

Утверждение. *1) Если набор A значимый, набор $g \in \mathbb{C}^A$ невырожден и любые k из $k+1$ многочленов набора g также образуют невырожденный набор, то каждая неприводимая компонента B_i бифуркационного множества отображения $g : (\mathbb{C} \setminus 0)^n \to \mathbb{C}^{k+1}$ является гиперповерхностью.*

2) Для точек общего положения $y \in \mathbb{C}^{k+1}$ и $y_i \in B_i$, разность аддитивных эйлеровых характеристик $\chi(g^{-1}(y_i)) - \chi(g^{-1}(y))$ с точностью до знака $(-1)^{n-k}$ является натуральным числом b_i.

3) Степень дивизора $\sum_i b_i B_i$ равна

$$(-1)^{n+1} \sum_{\substack{0 \leqslant q < b_0 + \ldots + b_k \leqslant n+1 \\ b_i \geqslant 0}} (-1)^{\sum_i b_i} C_{n+k+1}^{k+\sum_i b_i} \sharp\Big(\{0\} \cup \bigcup_{\substack{c_0+\ldots+c_k=q \\ 0 \leqslant c_i \leqslant b_i}} \sum_i c_i A_i\Big). \qquad (*)$$

Исследование монодромии обходов вокруг компонент бифуркационного дискриминанта приводит в разделе 4.4 к следующему многомерному обобщению теоремы Абеля о неразрешимости в радикалах.

Пусть $\mathbf{A}$ — набор конечных множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \mathbb{Z}^n$. Для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$ обозначим набор комплексных чисел $(c_{j,a},\ a \in A_j)$ через c_{A_j}, а пространство всех таких наборов — через $\mathbb{C}^{A_j}$. Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^{\mathbf{A}} := \mathbb{C}^{A_1} \oplus \mathbb{C}^{A_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_n}$ наборов $c_{\mathbf{A}} = (c_{A_1}, c_{A_2}, \ldots, c_{A_n})$, которое является конфигурационным пространством систем многочленов (Лорана) $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $f_j(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in A_j} c_{j,a} \mathbf{x}^{\mathbf{k}}$.

Определение. 1. *Решением общей системы уравнений с носителями* $A_1, A_2 \ldots, A_n$, называется (многозначная) функция $F : \mathbb{C}^{\mathbf{A}} \to (\mathbb{C} \setminus 0)^n$, которая на каждом наборе $c_{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^{\mathbf{A}}$ равна множеству решений системы полиномиальных уравнений

$$\sum\nolimits_{\mathbf{k} \in A_j} c_{j,a} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (*)$$

где $\mathbf{x}^{\mathbf{k}}$ обозначает моном $x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$.

2. Общая система *разрешима в радикалах*, если для каждой точки $c_{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^{\mathbf{A}}$ такой, что множество $F(c_{\mathbf{A}})$ конечно, существуют открытая по Зарискому

окрестность U и многозначная функция $G\colon U \to (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ на ней такие, что $F(c) \subset G(c)$ для всех $c \in U$ и G является композицией рациональных функций и извлечений корня произвольной степени. Система *разрешима в квадратурах*, если функция G является композицией рациональных функций, экспонент, извлечений корня произвольной степени и взятия неопределенных интегралов.

Теорема. *Общая система уравнений с носителем $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A \subset \mathbb{Z}^n$, содержащим 0 и порождающим решетку $\mathbb{Z}^n$, разрешима в радикалах ($\Leftrightarrow$ в квадратурах) тогда и только тогда, когда она имеет не более 4 решений, т.е. объем выпуклой оболочки* $\operatorname{conv} A$ *многогранника A не превышает 4. Каждое множество A, удовлетворяющее данному условию, содержится либо в одном из следующих 34 множеств, либо во множестве, полученном из одного из них последовательным применением следующих двух процедур:*

(1) взятие стандартного конуса $B \rightsquigarrow \{0, \ldots, 0, 1\} \cup B \times \{0\} \subset \mathbb{Z}^{m+1}$ над множеством $B \in \mathbb{Z}^m$,

(2) взятие образа множества при аффинном автоморфизме решетки.

- $n = 6, \quad \operatorname{Vol}(\operatorname{conv} A) = 4$: *контур $S_6 \cup \{(-1,-1,-1,1,1,1)\}$, где S_n — множество вершин стандартного n-мерного симплекса.*

- $n = 5, \quad \operatorname{Vol}(\operatorname{conv} A) = 4$: *контур $S_5 \cup \{(-2,-1,1,1,1)\}$ и джоин $(S_1 \times S_1) \star (S_1 \times S_1)$, где $A \star B$ для $A \subset \mathbb{Z}^m$ и $B \subset \mathbb{Z}^n$ обозначает объединение $A \times \{0\} \times \{0\} \cup \{0\} \times B \times \{1\} \subset \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}$.*

- $n = 4, \quad \operatorname{Vol}(\operatorname{conv} A) = 4$:

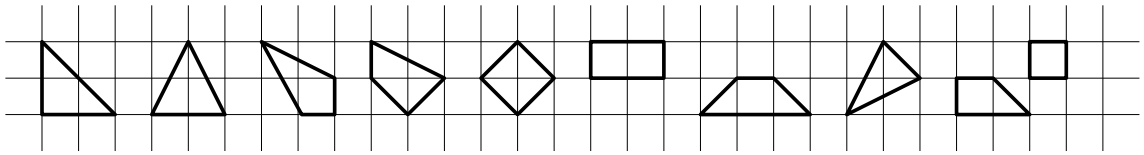
  - *контуры* $S_4 \cup \{(-2,-1,1,1)\}, \quad S_4 \cup \{(-1,-1,-1,1)\}$, $S_4 \cup \{(-1,-1,-1,2)\}$,
  - *призма* $S_1 \times S_3$,
  - *джоин* $(2S_1) \star (S_1 \times S_1)$,

– *сумма* $(S_1 \times S_1) \oplus (S_1 \times S_1)$, *где* $A \oplus B$ *для* $A \subset \mathbb{Z}^m$ *и* $B \subset \mathbb{Z}^n$ *обозначает объединение* $A \times \{0\} \cup \{0\} \times B \subset \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n$.

- $n = 4$, $\operatorname{Vol}(\operatorname{conv} A) = 3$: *контур* $S_4 \cup \{(-1,-1,1,1)\}$.

- $n = 3$, $\operatorname{Vol}(\operatorname{conv} A) = 4$ *и* 3*: контуры* $S_3 \cup \{(-1,-1,-1)\}$, $S_3 \cup \{(1,1,-3)\}$, $S_3 \cup \{(1,1,-2)\}$, *призма* $P = S_2 \times S_1$ *и множества* $P \cup \{(0,0,2)\}$, $\{-1,0,1\}\star\{-1,0,1\}$, $D \cup \{(0,0,-1)\}$, $D \cup \{(0,0,2)\}$, $D \cup \{(1,1,1)\}$ *и* $D \cup \{(1,1,-1)\}$, *где* D *— квадратная пирамида* $S_3 \cup \{(1,1,0)\}$.

- $n = 2$, $\operatorname{Vol}(\operatorname{conv} A) \leqslant 4$*:*



- $n = 1$, $\operatorname{Vol}(\operatorname{conv} A) \leqslant 4 : S_1,\ 2S_1,\ 3S_1,\ 4S_1$.

В разделе 5.2 доказывается существование характеристических классов алгебраических подмножеств комплексного тора $(\mathbb{C}\backslash 0)^n$ со значениями в кольце условий $C = C_0 \oplus \ldots \oplus C_n$ (определение кольца условий дано в начале введения; здесь будет удобнее нумеровать компоненты этого кольца коразмерностью, а не размерностью, так что фундаментальный класс множества коразмерности k содержится в компоненте C_k).

Определение. **Аффинный характеристический класс** — отображение, сопоставляющее каждому алгебраическому подмножеству $V \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ элемент $\langle V \rangle = \langle V \rangle_0 + \ldots + \langle V \rangle_n \in C$, $\langle V \rangle_i \in C_i$ и обладающее следующими свойствами:

(1) Если подмножество $V \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ имеет коразмерность k, то $\langle V \rangle_i = 0$ для $i < k$, $\langle V \rangle_k$ – фундаментальный класс V в пространстве C_k, а $\langle V \rangle_n \in C_0 = \mathbb{Z}$ совпадает с эйлеровой характеристикой $e(V)$.

(2) Для произвольных U и $V \subset (\mathbb{C}\setminus 0)^n$ и общего $g \in G$ верно $\langle U \cap gV\rangle = \langle U\rangle\langle V\rangle$.

(3) Для двух комплексных торов X и Y и любых алгебраических подмножеств $U \subset X$ и $V \subset Y$ выполняется $\langle U \times V\rangle = \langle U\rangle \times \langle V\rangle$.

(4) Отображение, которое сопоставляет элемент $\langle V\rangle$ характеристической функции V, продолжается по линейности на пространство всех конструктивных функций $X \to \mathbb{Z}$ таким образом, что $\langle U \cap V\rangle + \langle U \cup V\rangle = \langle U\rangle + \langle V\rangle$. Напомним, что *конструктивной функцией* называется линейная комбинация характеристических функций алгебраических множеств.

(5) Для гомоморфизма $p : X \to Y$ комплексных торов и алгебраического подмножества $V \subset X$ верно $p_*\langle V\rangle = \langle p_*V\rangle$. Здесь $p_*V : Y \to \mathbb{Z}$ обозначает *прямой образ в смысле Макферсона* подмножества V, значение которого в каждой точке $y \in Y$ определяется как $e\Big(p^{-1}(y) \cap V\Big)$.

(6) Для гладкой торической компактификации $\overline{X} \supset (\mathbb{C}\setminus 0)^n$ такой, что аффинный характеристический класс $\langle V\rangle$ содержится в когомологиях $H^\bullet(\overline{X}) \subset C$, данный класс является двойственным по Пуанкаре к *классу Шварц-Макферсона* множества V в $\overline{X}$, см. [94] и [122]. Напомним, что естественные вложения $H^\bullet(\overline{X}) \subset C$ возникают из того факта, что C совпадает с прямым пределом $H^\bullet(\overline{X})$ по всем торическим компактификациям $\overline{X} \supset (\mathbb{C}\setminus 0)^n$.

Заметим, что аффинный характеристический класс однозначно определяется свойством (6) и свойствами (1–5).

В разделе 5.3 вычисляются фундаментальные классы в кольце условий для стратов мультиособенностей коразмерности 2 в пространстве $\mathbb{C}^A$, и результаты этого вычисления иллюстрируются на одном примере, допускающем также непосредственное вычисление ответа.

Пусть A — конечное подмножество в решетке характеров L комплексного тора $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$. Пусть $\{\times\}$, $\{\times\times\}$ и $\{\prec\}$ — множества всех $f \in \mathbb{C}^A$ таких, что

замыкание гиперповерхности $\{f = 0\}$ в гладком торическом многообразии X_A имеет одну особенность типа $\mathcal{A}_1$, две особенности типа $\mathcal{A}_1$ и одну особенность типа $\mathcal{A}_2$ соответственно. Обозначим тропические характеристические классы данных стратов через $\langle\times\rangle$, $\langle\times\times\rangle$ и $\langle\prec\rangle$. Заметим, что в отличие от классической теории мультиособенностей мы не переходим к замыканиям множеств $\{\times\}$, $\{\times\times\}$ и $\{\prec\}$: данные множества являются гладкими (что для нас не важно), но незамкнутыми! Переход к замыканиям не повлиял бы на их фундаментальные классы (т.е. их высшие характеристические классы), однако изменил бы остальные их характеристические классы.

Из трех теорем ниже следуют три независимых линейных уравнения на фундаментальные классы $\langle\times\rangle_2$, $\langle\times,\times\rangle_2$ и $\langle\prec\rangle_2$. Мы можем решить эту линейную систему и вычислить $\langle\times\times\rangle_2$ и $\langle\prec\rangle_2$, искомые фундаментальные классы стратов мультиособенностей $\{\times\times\}$ и $\{\prec\}$.

Мы докажем данные результаты, наложив на A некоторые условия, напоминающие двойственную невырожденность.

Для конечного множества A в решетке характеров L комплексного тора $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$ определим **тавтологический многочлен** s на $(\mathbb{C}\setminus 0)^n \times (\mathbb{C}\setminus 0)^A$ равенством $s(x,f) = f(x)$. Полное пересечение $s = \partial s/\partial x_1 = \ldots = \partial s/\partial x_n = 0$, где $(x_1,\ldots,x_n)$ — стандартные координаты на торе $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$, будем обозначать через $s = \partial s/\partial x_\cdot = 0$.

Определение. Множество A называется версальным в коразмерности 2, если существует такое множество коразмерности три $\Sigma \subset \mathbb{C}^A$, что каждый полином $f \in \mathbb{C}^A \setminus \Sigma$ относится к одному из следующих типов:

1) f не лежит в образе проекции $\{s = \partial s/\partial x_\cdot = 0\} \to (\mathbb{C}\setminus 0)^A$. В данном случае, гиперповерхность $f = 0$ не имеет особенностей.

2) f является регулярным значением проекции $\{s = \partial s/\partial x_\cdot = 0\} \to (\mathbb{C}\setminus 0)^A$ с одним либо двумя прообразами $(z_{(i)}, f)$. В данном случае, гиперповерхность $f = 0$ не имеет никаких других особых точек, кроме $z_{(i)}$, и они обе являются

особенностями типа $\mathcal{A}_1$. Более того, тавтологическая гиперповерхность $s = 0$ задается уравнением $z_{(i)1}^2 + \ldots + z_{(i)n}^2 = y_i$ в подходящих локальных координатах $(y_1, \ldots, y_{|A|})$ вблизи $f \in \mathbb{C}^A$ и $(z_{(i)1}, \ldots, z_{(i)n}, y_1, \ldots, y_{|A|})$ вблизи $(z_{(i)}, f)$.

3) f — критическое значение проекции $\{s = \partial s/\partial x_\cdot = 0\} \to (\mathbb{C}\backslash 0)^A$ с одним прообразом (z, f). В данном случае, z является единственной особой точкой гиперповерхности $f = 0$ и относится к типу $\mathcal{A}_2$. Более того, тавтологическая гиперповерхность $s = 0$ задается уравнением $z_1^3 + y_1 z_1 + z_2^2 \ldots + z_n^2 = y_2$ в подходящих локальных координатах $(y_1, \ldots, y_{|A|})$ вблизи $f \in \mathbb{C}^A$ и $(z_1, \ldots, z_n, y_1, \ldots, y_{|A|})$ вблизи (z, f).

Всюду далее множество A предполагается версальным в коразмерности 2. Например, всякое двойственно невырожденное множество в $\mathbb{Z}^2$ и любое множество, содержащее $\{0,1\}^{n-1} \times \{0,1,2\}$, является версальным в коразмерности 2.

Всюду далее мы также будем предполагать, что $A \subset L$ просто в ребрах, т.е. A — множество целых точек в целочисленном многограннике, каждое ребро которого содержится в $n-1$ гиперграни, и набор из $n-1$ внешних нормальных ковекторов к данным гиперграням может быть дополнен до базиса в $(\mathbb{Z}^n)^*$.

Первое уравнение.

Теорема. *Если A версально в коразмерности 2 и просто в ребрах, то верно следующее равенство:*

$$\langle \times \rangle_2 + 2\langle \times\times \rangle_2 + 2\langle \prec \rangle_2 = \sum_\Gamma \pi_* \langle \{s^\Gamma = 0\}/T_\Gamma \rangle_{\dim \Gamma + 2},$$

где Γ пробегает все грани положительной размерности выпуклой оболочки множества A.

Слагаемые $\langle \{s^\Gamma = 0\}/T_\Gamma \rangle_j$ для всех j можно выразить в терминах многогранника Ньютона s^Γ, см. пример 5.2.8. Таким образом, все неизвестные слагаемые находятся в левой части.

Второе уравнение.

Теорема. *Если A версально в коразмерности 2 и просто в ребрах, то верно следующее равенство:*

$$\langle\times\rangle_2+2\langle\times\times\rangle_2+\langle\prec\rangle_2=\pi_*\langle s=\frac{\partial s}{\partial x_\cdot}=0\rangle_{n+2}+\sum_\Gamma\pi_*\langle\{s^\Gamma=s^{\Gamma'}=\frac{\partial s^\Gamma}{\partial x_\cdot}=0\}/T_\Gamma\rangle_{n+1},$$

где Γ пробегает все гиперграни выпуклой оболочки множества A.

Слагаемые $\langle\{s^\Gamma=s^{\Gamma'}=\frac{\partial s^\Gamma}{\partial x_\cdot}=0\}\rangle_{n+1}=\langle\{s^\Gamma=\frac{\partial s^\Gamma}{\partial x_\cdot}=0\}\rangle_n\cdot\langle s^{\Gamma'}=0\rangle_1$ и $\langle s=\frac{\partial s}{\partial x_\cdot}=0\rangle_{n+2}$ вычисляются непосредственно (см.следствие 5.3.17). Таким образом, все неизвестные слагаемые находятся в левой части. Это вычисление дает также следующий критерий двойственной невырожденности.

Определение. Множество $B\subset\mathbb{R}^m$ мощности $m+2$ называется *контуром*, если ни одно из его $m+1$-элементных подмножеств не содержится ни в какой аффинной гиперплоскости.

Множество $B\subset\mathbb{R}^m$ называется *итерированным контуром*, если оно не содержится ни в какой аффинной гиперплоскости и при подходящем параллельном переносе распадается в дизъюнктное объединение $\{0\}\sqcup B_1\sqcup\ldots\sqcup B_p$ такое, что выполнено следующее условие. Обозначим через L_i линейную оболочку $\{0\}\sqcup B_1\sqcup\ldots\sqcup B_i$, $i=0,\ldots,p$, тогда проекция $L_{i+1}\to L_{i+1}/L_i$ взаимно однозначно отображает объединение $\{0\}\sqcup B_{i+1}$ на контур в L_{i+1}/L_i.

Утверждение. *Множество $B\subset\mathbb{Z}^n$ является двойственно невырожденным если и только если содержит итерированный контур.*

Третье уравнение. Для начала определим кусочно-линейную функцию $\mathbf{1}_A$ на носителе тропического веера $\langle s=\frac{\partial s}{\partial x_\cdot}=0\rangle_{n+1}$, которая участвует в третьем уравнении.

Для любого целочисленного $\gamma\in(\mathbb{R}^n)^*\oplus\mathbb{R}^A$ рассмотрим его компоненты $\gamma'\in(\mathbb{R}^n)^*$ и $\gamma''\in\mathbb{R}^A$, $\gamma=\gamma'+\gamma''$, как функции на A: функция γ' является

ограничением функции $\gamma' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{Z}$ на $A \subset \mathbb{Z}^n$, и значение γ'' в $a \in A$ равно a-координате вектора γ''. Для последовательности множеств $A_k \subset L$ обозначим аффинную оболочку суммы $\bigcup_{i<k} A_k$ через $A_{<k}$.

Определим последовательность подмножеств $A^\gamma_k \subset A$ индукцией по $k \geqslant 0$ следующим образом: множество A^γ_k состоит из всех точек, в которых ограничение функции $\gamma'' - \gamma' : A \to \mathbb{Z}$ на $A \setminus A^\gamma_{<k}$ достигает своего максимального значения, при условии, что $A^\gamma_{<k} \subsetneq \mathbb{R}^n$, иначе A^γ_k не определено. Если число $\left|\mathbb{Z}^n \big/ \bigcup_k \{a - b \,|\, a \text{ и } b \in A^\gamma_k\}\right|$ конечно, то обозначим его через $i(A^\gamma_\bullet)$, иначе положим $i(A^\gamma_\bullet) = 0$.

Пусть $\gamma \in (\mathbb{R}^n)^* \oplus \mathbb{R}^A$ таков, что $i(A^\gamma_\bullet) > 0$. Для любого k обозначим значение функции $\tilde\gamma = \gamma'' - \gamma' : A \to \mathbb{Z}$ в точках A^γ_k через $\tilde\gamma_k$ и определим $A^\gamma_k(r)$ как множество всех таких $a \in A$, что $\tilde\gamma(a) \in [\tilde\gamma_k,\, \tilde\gamma_k + r]$. Зададим функцию

$$i_\gamma(r) = \left|\mathbb{Z}^n \Big/ \bigcup_i \{a - b \,|\, a \text{ и } b \in A^\gamma_k(r)\}\right|$$

на $\mathbb{R}$ и функцию

$$\mathbf{l}_A(\gamma) = \int_0^{+\infty} (i_\gamma(r) - 1)dr$$

на множестве $\{\gamma \,|\, i(A^\gamma_\bullet) > 0\}$.

Функция $\mathbf{l}_A : \{\gamma \,|\, i(A^\gamma_\bullet) > 0\} \to \mathbb{R}$ определена корректно, так как неравенство $i(A^\gamma_\bullet) > 0$ влечет $i_\gamma(r) \leqslant i_\gamma(0) < \infty$, а из предположения о том, что A аффинно порождает $\mathbb{Z}^n$, следует равенство $i_\gamma(r) = 1$ для достаточно большого r. Более того, функция $\mathbf{l}_A : \{\gamma \,|\, i(A^\gamma_\bullet) > 0\} \to \mathbb{R}$ непрерывна, так как для γ_1, лежащего в достаточно малой окрестности γ, функции i_γ и i_{γ_1} совпадают вне некоторой малой окрестности множества точек разрыва функции i_γ.

Рассмотрим $\tilde{\mathbf{l}}_A$, произвольное непрерывное продолжение функции $\mathbf{l}_A$ на носитель веера $\langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+1}$, тогда произведение $\tilde{\mathbf{l}}_A \cdot \langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+1}$ является элементом компоненты $\mathcal{K}^1_{n+1}\big(\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}^A\big)$ дифференциального кольца тропических вееров. Так как его образ $\pi_*(\tilde{\mathbf{l}}_A \cdot \langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+1})$ при проекции $\pi : (\mathbb{C} \setminus 0)^n \times (\mathbb{C} \setminus 0)^A \to (\mathbb{C} \setminus 0)^A$ не зависит от выбора продолжения $\tilde{\mathbf{l}}_A$, мы

обозначим его через

$$\pi_*(\mathbf{l}_A \cdot \langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+1}) \in \mathcal{K}_1^1\big(\mathbb{Z}^A\big).$$

Определение. Многообразие углов

$$\delta\pi_*(\mathbf{l}_A \cdot \langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+1}) \in \mathcal{K}_2^0\big(\mathbb{Z}^A\big)$$

является тропическим веером коразмерности 2 в $\mathbb{R}^A$, назовем его **третичным веером** множества A (по аналогии со **вторичным веером** коразмерности 1, который в качестве слагаемого содержит $\pi_*(\langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+1}) \in \mathcal{K}_1^0\big(\mathbb{Z}^A\big)$).

Теорема. *Если множество A версально в коразмерности 2 и просто в ребрах, то верно следующее равенство:*

$$\langle \times \rangle_2 - \langle \prec \rangle_2 = \delta\pi_*(\mathbf{l}\langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+1}) - (\pi_*\langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+1})^2.$$

Из трех сформулированных теорем следуют три независимых линейных уравнения на фундаментальные классы $\langle\times\rangle_2$, $\langle\times,\times\rangle_2$ и $\langle\prec\rangle_2$. Мы можем решить эту линейную систему и вычислить $\langle\times\times\rangle_2$ и $\langle\prec\rangle_2$, искомые фундаментальные классы стратов мультиособенностей $\{\times\times\}$ и $\{\prec\}$. Было бы интересно получить аналогичные соотношения для стратов старших коразмерностей в духе работы [170].

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации излагались автором на следующих семинарах и конференциях:

– Заседания Московского Математического Общества, МГУ, Москва.

– Семинар “Группы Ли и теория инвариантов”, МГУ, Москва.

– Семинар “Топология особенностей”, МГУ, Москва.

– Семинар “Узлы и теория представлений”, МГУ, Москва.

– Семинар отдела геометрии и топологии МИАН “Геометрия, топология и математическая физика”, Москва.

– Семинар “Римановы поверхности, алгебры Ли и математическая физика”, НМУ, Москва.

– Семинар “Гомологические и гомотопические методы в геометрии, теории представлений и математической физике”, НИУ ВШЭ, Москва.

– Семинар Лаборатории алгебраической геометрии НИУ ВШЭ, Москва.

– Séminaire d’algèbre, topologie et géométrie, University of Nice, France.

– Algebraic geometry seminar, Universidad Complutense de Madrid, Spain.

– Algebraic geometry seminar, Universitat de Barcelona, Spain.

– Geometry and Dynamics seminar, Tel Aviv University, Israel.

– 7th European Congress of Mathematics, 2016, Technische Universit at Berlin, Germany.

– Конференция Algebraic structures in convex geometry, 2015, НИУ ВШЭ–НМУ, Москва.

– Conference “Effective Methods in Algebraic Geometry”, 2013, Goethe University, Germany.

– Конференция Algebra and Geometry, 2012, НИУ ВШЭ–НМУ, Москва.

– Second International Conference and Workshop on Valuation Theory, 2011, Segovia, Spain.

– Workshop on singularities in Geometry and applications, 2011, Bedlewo, Poland.

– Conference on Singularities, Geometry and Topology, 2010, El Escorial, Spain.

– Workshop Tropical Geometry in Combinatorics and Algebra, 2009, MSRI Berkeley, USA.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 10 печатных работах ([175], [176], [41], [42], [44], [51], [45], [46], [49], [47]) в рецензируемых журналах.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Вклад диссертанта в работе с соавтором [49] был определяю-

щим. Все представленные в диссертации результаты получены автором лично.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и библиографии. Объем диссертации – 332 страница, из них 315 страниц текста, включая 19 рисунков. Библиография включает 176 наименований на 14 страницах.

1. Многогранники Ньютона и дискриминанты многочленов, торическая и тропическая геометрия: обзор

Этот раздел не содержит новых результатов и содержит обзор областей, связанных с нашей работой.

1.1. Смешанный объем.

Пусть V – вещественное n-мерное векторное пространство с фиксированной формой объема μ. В работе [107] Минковский ввел следующие понятия.

Определение **1.1.1.** Суммой Минкосвского выпуклых тел A и $B \subset V$ называется выпуклое тело $A + B = \{a + b \,|\, a \in A,\, b \in B\}$. Смешанным объемом называется функция $\mathrm{MV} : \{\text{наборы } n \text{ выпуклых тел в } V\} \to \mathbb{R}$, которая симметрична и линейна по всем n аргументам и удовлетворяет равенству $\mathrm{MV}_\mu(A, \ldots, A) = n! \operatorname{Vol}_\mu A$ для каждого выпуклого $A \subset V$.

Когда форма объема ясна из контекста, она будет опускаться в обозначении смешанного объема.

Пример **1.1.2.** Если A и B – горизонтальный и вертикальный единичные отрезки в $\mathbb{R}^2$ со стандартной формой объема, то $A + B = [0, 1] \times [0, 1]$, и $\mathrm{MV}(A, B) = 1$.

Существование смешанного объема и приведенные ниже утверждения о нем доказаны, например, в [154]. Единственность следует из формулы

Утверждение **1.1.3.** $\mathrm{MV}(A_1, \ldots, A_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} (-1)^{n-k} \mathrm{Vol}(A_{i_1} + \ldots + A_{i_k})$.

Смешанный объем монотонен по каждому аргументу:

Утверждение **1.1.4.** $B \subset C \Rightarrow \mathrm{MV}(B, A_2, \ldots, A_n) \leqslant \mathrm{MV}(C, A_2, \ldots, A_n)$.

Смешанный объем неотрицателен, причем все тела с нулевым смешанным объемом легко описать:

Определение **1.1.5.** Коразмерностью набора тел $A_1, \ldots, A_m$ называется минимум $k - \dim(A_{i_1} + \ldots + A_{i_k})$ по всем подмножествам $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$.

В этом определени допускается пустое множесто, так что коразмерность всегда неположителна.

Утверждение **1.1.6.** *Смешанный объем набора тел нулевой если и только если коразмерность набора отрицательная.*

Смешанный объем мульипликативен в следующем смысле:

Утверждение **1.1.7.** *Если $A_1, \ldots, A_k$ помещаются параллельными переносами в k-мерное подпространство $U \subset V$, то*

$$\mathrm{MV}_\mu(A_1, \ldots, A_n) = \mathrm{MV}_{\mu'}(A_1, \ldots, A_k)\, \mathrm{MV}_{\mu''}(\pi A_{k+1}, \ldots, \pi A_n),$$

где $\pi : V \to V/U$ – естественная проекция, и $\mu'' = \mu/\mu'$.

Здесь смешанный объем тел $A_1, \ldots, A_k$ как подмножеств U определен корректно, потому что смешанный объем инвариантен относительно параллельных переносов слагаемых. Важнейшим результатом о смешанных объемах является неравенство Александрова–Фенхеля:

Утверждение **1.1.8.** *Для любых A_i, B, C выполнено*

$$\mathrm{MV}(B, B, A_3, \ldots, A_n)\,\mathrm{MV}(C, C, A_3, \ldots, A_n) \leqslant \mathrm{MV}(B, C, A_3, \ldots, A_n)^2.$$

Классификация случаев равенства в этом неравенстве остается открытой проблемой.

Для приложений к алгебраической геометрии важен целочисленный смешанный объем. Пусть L – решетка, $V = L \otimes \mathbb{R}$ – векторное пространство размерности n, через $\mathrm{Vol}\, B$ обозначим объем измеримого множества $B \subset V$ относительно целочисленной формы объема (такой что объем тора V/L равен 1). Подпространство $U \subset V$ называется рациональным, если $\dim U = \dim U \cap L$. Говоря об объемах в рациональном подпространстве U или факторе V/U, мы всегда будем иметь в виду целочисленную форму объема относительно решетки $U \cap L$ или $L/(U \cap L)$ соответственно.

Многогранник в V будем называть целочисленным, если он является пересечением конечного числа полупространств с рациональными границами, у которого все вершины содержатся в L. Целочисленным смешанным объемом в V будем называть смешанный объем, ассоциированный с целочисленной формой объема.

Утверждение **1.1.9.** *Целочисленный смешанный объем целочисленных многогранников является целым числом.*

Это следует, например, из явной формулы для смешанного объема, где через $I(A)$ обозначается число точек решетки в многограннике A:

Утверждение **1.1.10.** *Для ограниченных целочисленных многогранников $A_1, \ldots, A_n$ верно равенство* $\mathrm{MV}(A_1, \ldots, A_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} (-1)^{n-k} I(A_{i_1} + \ldots + A_{i_k})$.

Следующая формула полезна для вычисления смешанного объема многогранников:

Определение **1.1.11.** Опорной функцией замкнутого множества $A \subset V$ называется непрерывнаяя функция $A(\cdot) : V^* \to \mathbb{R}$, задаваемая равенством $A(\gamma) = \sup_{a \in A} \gamma(a)$. Опорной гранью для $\gamma \in V^*$ называется подмножество $A^\gamma \subset A$, на котором линейная функция γ достигает максимума: $A^\gamma = \{a \in A \,|\, \gamma(a) = A(\gamma)\}$.

Заметим, что для многогранников опорная функция кусочно-линейна, и каждая грань являются опорной для некоторого γ, а для конечного множества A грани – это в точности пересечения A с гранями выпуклой оболочки A.

Утверждение **1.1.12.** *Для любого ограниченного выпуклого тела A_1 и ограниченных целочисленных многогранников $A_2, \ldots, A_n$ выполнено*

$$\mathrm{MV}(A_1, \ldots, A_n) = \sum_{\text{примитивные } \gamma \in L^*} A_1(\gamma)\, \mathrm{MV}(A_2^\gamma, \ldots, A_n^\gamma).$$

Заметим, что в правой части $(n-1)$-мерный целочисленный смешанный объем имеет смысл, т.к. грани $A_2^\gamma, \ldots, A_n^\gamma$ помещаются параллельными переносами в $(n-1)$-мерное рациональное подпространство $\ker \gamma$, а сумма имеет смысл, так как равны нулю все слагаемые кроме конечного числа (для функций γ, опорных к гиперграням суммы $A_1 + \ldots + A_n$). Например, при $A_1 = \ldots = A_n = A$ эта формула превращается в вычисление объема A посредством его разбиения на пирамиды с вершинами в начале координат и гипергранями A в качестве оснований.

Пример **1.1.13.** Смешанный объем стандартного куба $[0,1]^3$ и двух копий стандартного симплекса в $\mathbb{R}^3$, очевидно, равен трем по вышеуказанной формуле: единственное ненулевое слагаемое соответствует $\gamma = (1,1,1)$.

Для связей с алгебраической геометрией важны также кообъемы:

Определение **1.1.14.** Для выпуклого конуса $C \subset V$ (т.е. такого выпуклого множества, что $\mathbb{R}_+ \cdot C = C$) выпуклые тела $B \subset C$, такие что $C \setminus B$

ограничено, образуют полугруппу P_C по сложению Минковского, и объем разности $C \setminus B$ называется кообъемом $\operatorname{coVol} B$. Смешанный кообъем – единственная симметричная полилинейная функция $\mathrm{MV}_C : \underbrace{P_C \times \ldots \times P_C}_{n} \to \mathbb{R}$, такая что $\mathrm{MV}_C(B, \ldots, B) = n! \operatorname{coVol} B$ для каждого $B \in P_C$.

Заметим, что определение содержательно, только если конус C имеет полную размерность n и заострен (т.е. не содержит прямой). Для кообъемов верно следующее обращение неравенства Александрова-Фенхеля:

Теорема **1.1.15.** *Для любых $A_i, B, B' \in P_C$ выполнено*

$$\mathrm{MV}_C(B, B, A_3, \ldots, A_n)\,\mathrm{MV}_C(B', B', A_3, \ldots, A_n) \geqslant \mathrm{MV}_C(B, B', A_3, \ldots, A_n)^2.$$

Смешанные кообъемы многогранников можно вычислять аналогично объемам:

Утверждение **1.1.16.** *Для целочисленных многогранников $A_1, \ldots . A_n \in P_C$ выполнено*

$$\mathrm{MV}_C(A_1, \ldots, A_n) = \sum_{\text{примитивные } \gamma \in C^* \cap L^*} A_1(\gamma)\,\mathrm{MV}(A_2^\gamma, \ldots, A_n^\gamma),$$

где $C^* = \{\gamma \,|\, \gamma|_C > 0\} \subset V^*$ – открытый двойственный к C конус.

1.2. Многогранники Ньютона.

Будем интерпретировать точки решетки $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ как мономы $x^a = x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$. Для конечного множества мономов $A \subset \mathbb{Z}^n$, рассмотрим пространство всех линейных комбинаций этих мономов $\mathbb{C}^A = \{\sum_{a \in A} c_a x^a \,|\, c_a \in \mathbb{C}\}$. Многочлен Лорана $\varphi \in \mathbb{C}^A$ будем рассматривать как функцию $\varphi : (\mathbb{C} \setminus 0)^n \to \mathbb{C}$ (заметим, что она, вообще говоря, не определена на координатных плоскостях $x_i = 0$, поскольку a_i может быть отрицательным для некоторых $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$). **Ограничением** многочлена $\varphi(x) = \sum_{a \in A} c_a x^a$ на подмножество $B \subset \mathbb{R}^n$ называется многочлен $\varphi(x)|_B = \sum_{a \in A \cap B} c_a x^a$.

Теорема **1.2.1** (Формула Кушниренко—Бернштейна, [158]). *Для конечных множеств $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{Z}^n$ и многочленов $\varphi_i \in \mathbb{C}^{A_i}$ общего положения, число решений $x \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ системы $\varphi_1(x) = \dots = \varphi_n(x) = 0$ с учетом кратностей равно целочисленному смешанному объему выпуклых оболочек $A_1, \dots, A_n$. Достаточным условием общего положения является следующее: для каждой ненулевой линейной функции $\gamma : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ система $\varphi_1(x)|_{A_1^\gamma} = \dots = \varphi_n(x)|_{A_n^\gamma} = 0$ не имеет решений в $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$.*

Пример **1.2.2.** Известный частный случай этой теоремы – теорема Безу о том, что общие многочлены n переменных степеней $d_1, \dots, d_n$ имеют $d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$ решений.

Замечание **1.2.3.** 1. Под общим положением в формулировке теоремы понимается существование открытого по Зарискому подмножества $U \subset \bigoplus_i \mathbb{C}^{A_i}$, в котором для каждого элемента $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in U$ выполняется заявленное равенство. В частности, указанное в формулировке явное условие на систему уравнений является условием общего положения.

2. Эта теорема иллюстрирует важность следующего понятия: грани выпуклых многогранников (или выпуклых оболочек конечных множеств) $A_i \subset \mathbb{R}^n$ называются **совместимыми**, если их можно представить как (выпуклые оболочки) A_i^γ для некоторой линейной функции $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Эквивалентное определение для ограниченных многогранников: грани называются совместимыми, если их сумма Минковского является гранью суммы $\sum_i A_i$. (Для неограниченных многогранников такая переформулировка невозможна.)

3. Число решений с кратностями можно понимать как размерность $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]/\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ над $\mathbb{C}$ (соответственно, отсутствие решений – как тривиальность этого фактора). В такой форме эта теорема верна над любым алгебраически замкнутым полем характеристики 0.

4. Традиционно это теорема формулируется несколько по-другому: выпуклая оболочка всех мономов, входящих в многочлен φ_i, называется его **много-**

гранником Ньютона, и утверждается, что, для моногчленов общего положения с данными многогранниками Ньютона, число их общих корней в $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$ равно смешанному объему многогранников Ньютона. В этому случае многочлены $\varphi_i(x)|_{A_i^\gamma}$, фигурирующие в условии общего положения, оказываются просто старшими ненулевыми однородными компонентами многочленов φ_i в смысле квазистепени, приписывающей моному x^a вес $\gamma(a)$. Заметим, однако, что традиционная формулировка слабее приведенной выше: в приложениях бывает важно применять теорему к таким $\varphi_i \in \mathbb{C}^{A_i}$, для которых выпуклая оболочка A_i не является многогранником Ньютона (это не всегда противоречит указанному в формулировке теоремы условию общего положения).

Будем обозначать смешанный объем многогранников (или выпуклых оболочек конечных множеств) $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^n$ через $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$. Значением степенного ряда $f(y) = \sum_{a\in\mathbb{Z}^k} c_a y^a$ на $A_1, \dots, A_k \subset \mathbb{R}^n$ назовем число $\sum_{a_1+\ldots+a_k=n} c_a A_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot A_k^{a_k}$.

Теорема **1.2.4** (Формула Хованского). *Для конечных множеств $A_1, \dots, A_k \subset \mathbb{Z}^n$ и многочленов $\varphi_i \in \mathbb{C}^{A_i}$ общего положения, эйлерова характеристика множества решений $x \in (\mathbb{C}\setminus 0)^n$ системы $\varphi_1(x) = \ldots = \varphi_k(x) = 0$ равна $\frac{A_1\cdot\ldots\cdot A_k}{(1+A_1)\cdot\ldots\cdot(1+A_k)}$. Достаточным условием общего положения является следующее: для каждой линейной функции $\gamma : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ ноль является регулярным значением отображения $(\varphi_1|_{A_1^\gamma}, \dots, \varphi_k|_{A_k^\gamma}) : (\mathbb{C}\setminus 0)^n \to \mathbb{C}^k$.*

Замечание **1.2.5.** Выражение, дающее ответ, представляет собой значение на $A_1, \dots, A_k$ степенного ряда, в который разлагается в нуле рациональная функция $\frac{s_1\cdot\ldots\cdot s_k}{(1+s_1)\cdot\ldots\cdot(1+s_k)}$. Для нульмерных полных пересечений ($k = n$) утверждение превращается в формулу Кушниренко-Бернштейна без кратных корней. Для кривых ($k = n-1$) эйлерова характеристика равна $-\operatorname{MV}(A_1, \dots, A_{n-1}, A_1 + \ldots + A_{n-1})$, для гиперповерхностей ($k = 1$) равна $(-1)^{n-1} n! \operatorname{Vol} A_1$.

Аналогичный факт известен и для ростков аналитических функций. Для каждого множества $I \subset \{1, \dots, n\}$ обозначим через $\mathbb{R}^I \subset \mathbb{R}^n$ координатное

подпространство $\{x_i = 0 \text{ при } i \notin I\}$, положительный октант $\{x_i \geqslant 0 \text{ при } i \in I \text{ и } x_i = 0 \text{ при } i \notin I\}$ – через $\mathbb{R}^I_+$, для каждого $B \subset \mathbb{R}^n$ пересечение $B \cap \mathbb{R}^I$ — через B^I, и $|I|$-мерный целочисленный смешанный кообъем $\mathrm{MV}_{\mathbb{R}^I_+}(B^I_1, \ldots, B^I_{|I|})$ — через $B^I_1 \cdot \ldots \cdot B^I_{|I|}$.

Определение **1.2.6.** Многогранником Ньютона $\mathcal{N}_f$ ростка $f \in \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$ назовем выпуклую оболочку объединения множеств $a + \mathbb{R}^n_+$ по всем $a \in \mathbb{Z}^n$, для которых моном x^a входит в f с ненулевым коэффициентом. Назовем $\mathcal{N}_f$ удобным, если он имеет общую точку с каждой из координатных осей. Диаграммой Ньютона Δ_f назовем объединение ограниченных граней многогранника Ньютона $\mathcal{N}_f$, а главной частью f – ограничение $f|_{\Delta_f}$. Для каждой линейной функции $\gamma \in (\mathbb{R}^n_+)^*$ обозначим через f^γ первую ненулевую однородную в смысле квазистепени $\deg x^a = \gamma(a)$ компоненту ряда f (заметим, что она зависит только от главной части f).

Теорема **1.2.7.** *Пусть ростки аналитических функций*

$$(f_1, \ldots, f_k) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^k, 0)$$

имеют удобные многогранники Ньютона $A_1, \ldots, A_k$, а их главные части удовлетворяют следующему условию общего положения: 0 является регулярным значением полиномиальноого отображения $(f_1^\gamma, \ldots, f_k^\gamma) : (\mathbb{C} \setminus 0)^n \to \mathbb{C}^k$ для каждого $\gamma \in (\mathbb{R}^n_+)^*$. Тогда уравнения $f_1 = \ldots = f_k = 0$ задают изолированную особенность полного пересечения в нуле, и ее число Милнора равно $(-1)^{n-k} \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}} \frac{A^I_1 \cdot \ldots \cdot A^I_k}{(1+A^I_1) \cdot \ldots \cdot (1+A^I_k)}$, где слагаемое, соответствующее $I = \varnothing$, по определению считается равным 1.

Это вычисление обобщается на ζ-функцию монодромии ростка f_1 на многообразии $f_2 = \ldots = f_k = 0$. Чтобы сформулировать его, для многогранников $A_1, \ldots, A_k \in P_{\mathbb{R}^k_+}$ определим выражение

$$t^{A_1} \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k = \sum_{\text{примитивные } \gamma \in {}^* \cap L^*} \mathrm{MV}(A^\gamma_2, \ldots, A^\gamma_n) \ln\bigl(1 - t^{A_1(\gamma)}\bigr).$$

Заметим, что его экспонента является многочленом степени $A_1 \cdot \ldots \cdot A_k$ согласно Утверждению 1.1.16. Аналогичный смысл придается обозначению $t^{A_1} \cdot \varphi(A_2, \ldots, A_k)$, где φ – произвольный степенной ряд.

Теорема **1.2.8** ([143] для $k = 1$ и [112]). *В условиях предыдущей теоремы логарифм характеристического многочлена монодромии когомологий слоя Милнора f_1 на полном пересечении $f_2 = \ldots = f_k = 0$ равен*

$$(-1)^{n-k} \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}} \frac{t^{A_1^I} \cdot A_2^I \cdot \ldots \cdot A_k^I}{(1 + A_1^I) \cdot \ldots \cdot (1 + A_k^I)},$$

где слагаемое, соответствующее $I = \varnothing$, по определению считается равным $\ln(1 - t)$.

1.3. Торические многообразия.

Мотивационный пример. В [172] было обнаружено, что торические многообразия помогают доказывать утверждения из предыдущего раздела, так как дают гладкие компактификации и разрешения изучаемых там объектов общего положения.

Приведем модельный пример: пусть $f = \sum_{a \in N} c_a x^a$ – общий многочлен Лорана двух переменных с многоугольником Ньютона $N \subset \mathbb{Q}^2$. Поставим задачу построить гладкую компактификацию кривой $C = \{f = 0\} \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^2$. Оказывается, что простейшая компактификация – замыкание C_f в $(\mathbb{C} \setminus 0)^2 \subset \mathbb{CP}^2$ – почти никогда не будет гладкой.

Для построения гладкой компактификации обозначим через $\mathbb{CP}^N$ проективное пространство, в котором стандартные координаты y_a занумерованы целыми точками $a \in N$, и рассмотрим вложение $j : (\mathbb{C} \setminus 0)^2 \to \mathbb{CP}^N$, переводящее $x \in (\mathbb{C} \setminus 0)^2$ в точку с однородными координатами $y_a = x^a = x_1^{a_1} x_2^{a_2}$. Оказывается, что, если коэффициенты f находятся в общем положении (в смысле предыдущего раздела), то замыкание образа кривой C при вложении j будет гладким.

Эта компактификация C называется торической, а замыкание образа комплексного тора $j(\mathbb{C}\backslash 0)^2 \subset \mathbb{CP}^N$ – торическим многообразием X_N. Отождествляя тор $(\mathbb{C}\setminus 0)^2$ с его образом $j(\mathbb{C}\setminus 0)^2 \subset X_N$, можно рассматривать X_N как некоторую компактификацию $(\mathbb{C}\setminus 0)^2$. После этого про объемлющее пространство $\mathbb{CP}^N$ можно забыть, и определять торическую компактификацию кривой C как замыкание этой кривой в торическом многообразии $X_N \supset (\mathbb{C}\setminus 0)^2 \supset C$.

Часть из сделанных выше утверждений требует легкой корректировки при переходе от двумерного случая к многомерному: в частности, бывают трехмерные многогранники N, для которых j – не вложение, или замыкание $j(C)$ не гладкое. Такая корректировка будет естественно вытекать из сведений о торических многообразиях, которые мы кратко напомним ниже.

Торическое многообразие X_A. Для конечного множества A обозначим через $\mathbb{CP}^A$ стандартное $(|A|-1)$-мерное проективное пространство, однородные координаты y_a в котором занумерованы элементами $a \in A$. Подмножеству $B \subset A$ соответствует координатное подпространство $\mathbb{CP}^B = \{y_a = 0 \text{ при } a \notin B\} \subset \mathbb{CP}^A$ и содержащийся в нем стандартный комплексный тор $(\mathbb{C}\setminus 0)^B = \{y_a \neq 0$ при $a \in B$ и $y_a = 0$ при $a \notin B\}$.

Пусть L – решетка характеров n-мерного комплексного тора T. Если зафиксировать систему координат $T \simeq (\mathbb{C}\setminus 0)^n$ и соответствующие координаты $L \simeq \mathbb{Z}^n$, то значение характера $a \in L$ в точке $x \in T$ будет мономом $x^a = x_1^{a_1}\dots x_n^{a_n}$, поэтому в отсутствие координат также будем обозначать это значение через x^a.

Определение **1.3.1.** Торическим многообразием X_A, соответствующим конечному подмножеству $A \subset L$, называется замыкание в $\mathbb{CP}^A$ образа гомоморфизма $j_A : T \to (\mathbb{C}\setminus 0)^A$, переводящего $x \in T$ в точку с однородными координатами $y_a = x^a$, $a \in A$. Действие тора T на X_A определяется как композиция гомоморфизма $j_A : T \to (\mathbb{C}\setminus 0)^A$ и стандартного действия $(\mathbb{C}\setminus 0)^A \subset \mathbb{CP}^A$ на $\mathbb{CP}^A$ покоординатным умножением.

Ядро $\ker_A$ отображения j_A, равное по построению $\{x \,|\, x^a = x^b$ для всех a и $b \in A\}$, может быть нетривиальным: это случится если и только если A помещается параллельным переносом в собственную подрешетку решетки L. В частности, плотная орбита X_A, равная $j_A(T) = X_A \cap (\mathbb{C} \setminus 0)^A$, отождествляется с фактором $T/\ker_A$, поэтому размерность X_A равна размерности выпуклой оболочки A.

Заметим, однако, что торическое многообразие X_A не меняется при параллельных переносах множества A (т.е. $X_A = X_{A+a}$ для любого $a \in L$) и при замене объемлющей решетки (т.е. $X_A = X_B$, если $B \subset L'$ – образ A при вложении решеток $L \subset L'$). Поэтому любое проективное торическое многообразие можно представить как многообразие X_A для такого A, которое не помещается параллельным переносом ни в какую собственную подрешетку решетки L.

В связи с этим, мы всегда будем предполагать, что A не помещается параллельным переносом в собственную подрешетку L. В этом случае $\ker_A$ тривиально, $\dim X_A = \dim L$, и тор T отождествляется с плотной орбитой многообразия X_A.

Предельные точки кривых в X_A. Так как X_A компактно, для любого ростка аналитической кривой $\varphi : (\mathbb{C} \setminus 0) \to T$ ее предел $\lim_{t\to 0} j_A(\varphi(t))$ содержится в X_A. Обратно, любая точка X_A представляется как такой предел – аналогично представлению бесконечно удаленных точек проективного пространства связками проходящих через них параллельных прямых. Чтобы сделать эту полезную аналогию полной, выясним, какому из координатных торов $(\mathbb{C} \setminus 0)^B$ проективного пространства $\mathbb{CP}^A = \bigsqcup_{B\subset A}(\mathbb{C} \setminus 0)^B$ принадлежит вышеуказанный предел.

Каждой точке l решетки L^*, двойственной к характерам тора T, соответствует однопараметрическая подгруппа $\psi : (\mathbb{C} \setminus 0) \to T$, однозначно определяемая равенством $\psi(t)^a = t^{l(a)}$ для каждого $a \in L$. Если выбрать координаты $T \simeq (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ и $L^* \simeq \mathbb{Z}^n$, то $\psi(t) = t^l = (t^{l_1}, \ldots, t^{l_n})$ – кривая Веронезе, поэтому в отсутствие координат также будем обозначать эту однопараметрическую через

t^l.

Во введенных обозначениях любой росток аналитической кривой $\varphi : (\mathbb{C} \setminus 0) \to T$, представляется в виде $\varphi(t) = \tilde{\varphi}(t)/t^l$, где $\tilde{\varphi}(0) \in T$ уже корректно определено, а деление производится в смысле групповой операции на T. Действительно, если выбрать координаты $T \simeq (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ и $L^* \simeq \mathbb{Z}^n$, то координаты l_i ковектора l нужно положить равными степеням ведущих мономов в разложениях Лорана компонент $\varphi_i(t)$ кривой $\varphi(t)$. Поэтому и в отсутствие координат будем обозначать l через $\deg \varphi$.

В терминах этого разложения и обозначениях определения 1.1.11, однородные координаты y_a искомой предельной точки $\lim_{t\to 0} j_A(\varphi(t)) = \lim_{t\to 0} j_A\big(\tilde{\varphi}(t)/t^l\big)$ после одновременного домножения на $t^{A(l)}$ будут следующими:

$$y_a = \lim_{t\to 0} t^{A(l)-l(a)}\tilde{\varphi}(t)^a = \begin{cases} \tilde{\varphi}(0)^a, \text{ если } l(a) = A(l) \\ 0, \text{ если } l(a) < A(l) \end{cases} \qquad (*)$$

Следствие 1: предельная точка любого ростка аналитической кривой $\varphi : (\mathbb{C} \setminus 0) \to T$ принадлежит координатному тору $(\mathbb{C} \setminus 0)^{A^{\deg \varphi}} \subset \mathbb{CP}^A$. Более того, так как по валюативному критерию полноты любая точка X_A представляется как предел ростка аналитической кривой $\varphi : (\mathbb{C} \setminus 0) \to T$, остальные координатные торы $(\mathbb{C} \setminus 0)^B$ не содержат точек торического многообразия X_A.

Следствие 2: каждая точка X_A представляется как предел сдвинутой однопараметрической c/t^l, $c \in T$, $l \in L^*$. При этом две сдвинутые однопараметрические c/t^l и $c'/t^{l'}$ стремятся к одной и той же точке если и только если $A^l = A^{l'}$ и $c/c' \in \ker_{A^l}$.

Это позволяет представлять точки торического многообразия X_A как классы сдвинутых однопараметрических по указанному отношению эквивалентности – аналогично представлению точек проективного пространства связками прямых.

Разбиение X_A на орбиты. Орбиты X_A, по построению, являются пересечениями X_A с орбитами стандартного действия $(\mathbb{C} \setminus 0)^A$ на $\mathbb{CP}^A$, т.е. комплексными торами $(\mathbb{C} \setminus 0)^B$. Однако, согласно следствиям формулы $(*)$, такое

пересечение $(\mathbb{C}\setminus 0)^B \cap X_A$ не пусто, только если B является **гранью** A, т. е. пересечением A с некоторой гранью своей выпуклой оболочки. Таким образом, многообразие X_A распадается на орбиты $T_B = (\mathbb{C}\setminus 0)^B \cap X_A = j_B(T) \simeq T/\ker_B$ по всем граням $B \subset A$, с размерностями $\dim T_B = \dim B$. Заметим также, что это соответствие между гранями A и орбитами X_A сохраняет примыкания, а замыкание орбиты T_B в X_A естественно отождествляется с торическим многообразием X_B.

Покрытие X_A картами. Обозначим через $M_a \simeq \mathbb{C}^{|A|-1}$ аффинную карту в $\mathbb{CP}^A$, заданную условием $y_a \neq 0$. Многообразие X_A покрывается картами $X_A \cap M_a, a \in A$, которые по построению являются аффинными многообразиями и будут обозначаться X_{A_a}.

Карта X_{A_a} покрывает все орбиты T_B, соответствующие граням $B \subset A$, содержащим a. В частности, многообразие X_A полностью покрывается картами X_{A_a}, которые соответствуют вершинам $a \in A$ (т.е. вершинам выпуклой оболочки A).

Стандартные координаты $z_b = y_b/y_a$, $b \in A$, $b \neq a$, на карте M_a позволяют определить аффинное многообразие X_{A_a} как замыкание образа отображения $j_{A,a} : T \to M_a$, переводящего $x \in T$ в точку с координатами $z_b = x^{b-a}$. В частности, ограничения многочленов от переменных z_b на X_{A_a} дают многочлены Лорана вида $\sum_{a' \in A_a} c_{a'} x^{a'}$, где $A_a \in L$ – полгугруппа, порожденная разностями $b - a$, $b \in A$.

Иными словами, кольцо регулярных функций на аффинном многообразии X_{A_a} зависит не от всего множества A, а только от полугруппы A_a, и является ее полугрупповой алгеброй $\mathbb{C}[A_a]$. Напомним, что аффинное многообразие полностью восстанавливается по кольцу регулярных функций на нем: $X_{A_a} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[A_a]$. В частности, если полугруппы A_a и B_b изоморфны, то аффинные торические многообразия X_{A_a} и X_{B_b} также изоморфны. Это мотивирует следующее определение:

Определение **1.3.2.** Аффинное торическое многообразие X_S, соответствующее полугруппе $S \subset L$ – это многообразие $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[S]$ с действием тора $T = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[L]$, индуцированным вложением $\mathbb{C}[S] \subset \mathbb{C}[L]$.

Более элементарно, X_S – это замыкание образа отображения $j_B : T \to \mathbb{C}^B$, переводящего $x \in T$ в точку с координатами $z_b = x^b$, $b \in B$, где B – произвольная система образующих полугруппы S. (Независимость от выбора образующих следует из совпадения с первым определением; действие тора на X_S определяется композицией вложения $j_B : T \to (\mathbb{C} \setminus 0)^B$ и стандартного действия $(\mathbb{C} \setminus 0)^B$ на $\mathbb{C}^B$ покоординатным умножением.)

Гладкость и нормальность X_A. Заметим, что многообразие X_S будет изоморфно $\mathbb{C}^n = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, если и только если полугруппа S свободна, т.е. изоморфна $\{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \,|\, a_i \geqslant 0\}$. В частности, если полугруппы A_a для всех вершин $a \in A$ свободны, то многообразие X_A покрывается гладкими картами X_{A_a}. Из этого следует часть "если" следующего утверждения:

Утверждение **1.3.3.** *Пусть $A \subset L$ не помещается параллельными переносами в собственную подрешетку L. Тогда многообразие X_A гладко если и только если полугруппы A_a для всех вершин $a \in A$ свободны.*

Часть "только если" не столь важна, но легко выводится, например, из формулы Кушниренко.

Аналогично, переходом к аффинным картам, получается критерий нормальности торического многообразия. Для конечного множества A решетки L обозначим через $\langle A \rangle$ подрешетку, порожденную разностями точек из A. Для пары подмножеств $B \subset A$ обозначим через $[A : B]$ индекс $\left|\langle A \rangle / \langle B \rangle\right|$. Назовем множество A нормальным, если $[A : B] = 1$ для всех граней $B \subset A$.

Утверждение **1.3.4.** *X_A нормально если и только если A нормально.*

Изоморфность торических многообразий и вееры. Покрытие торического многообразия картами показывает, что для изоморфности многообра-

зий X_A и X_B вовсе не требуется равенство $A = B$. Требуется намного более слабое условие – равенство их двойственных вееров в нижеследующем смысле.

Под **конусом** в $\mathbb{Q}^n$ будем всегда понимать множество линейных комбинаций с положительными коэффициентами данного конечного набора векторов. Под **гранью** будем понимать пересечение замыкания конуса с границей содержащего его полупространства. Будем называть конус **заостренным**, если его минимальная грань – точка (т.е. если конус не содержит прямую). **Веером** называется такой набор конусов, в котором вместе с каждым конусом содержатся его грани, а пересечение замыканий каждой пары конусов является их общей гранью. Веер называется **полным**, если объемлющее пространство является объединением его конусов.

Определение **1.3.5.** Для многогранника или конечного множества A в $\mathbb{Q}$-векторном пространстве V, двойственным конусом к данной грани $B \subset A$ называется множество всех таких линейных функций $l \in V^*$, для которых $B = A^l$ — опорная грань. Двойственным веером A называется множество всех конусов, двойственных к граням A.

Если двойственный веер A' является подразбиением двойственного веера A, а торические многообразия $X_{A'}$ и X_A нормальны, то отождествление их плотных орбит, каждая из которых равна тору T, продолжается до естественного отображения $\pi_{A',A} : X_{A'} \to X_A$.

Действительно, для каждой грани $B' \subset A'$ существует единственная грань $B \subset A$, двойственный конус которой содержит двойственный конус B'. Нормальность X_A согласно Утверждению 1.3.4 дает $\ker_{B'} \subset \ker_B$. Поэтому $\pi_{A',A}$ можно определить на орбите $T_{B'} = T/\ker_{B'}$ как отображение факторизации в $T_B = T/\ker_B$.

Из существования отображений $\pi_{A',A}$ и $\pi_{A,A'}$ следует, что нормальные торические многообразия X_A и $X_{A'}$ изоморфны, если двойственные вееры A и A' изоморфны (т.е. переводятся друг в друга изоморфизмом объемлющих про-

странств). Это показывает, что торическое многообразие X_A можно восстановить по двойственному вееру Σ_A множества A, даже не зная само это множество. Конструкция такого восстановления следующая.

Определение **1.3.6.** Пусть пространство V наделено решеткой L, и Σ – веер в V^*. Для каждого конуса $C \in \Sigma$ определим двойственную полугруппу $C^\times$ как пересечение двойственного конуса с L. Примыкание $C' \subset C$ дает вложение групповых алгебр $j_{C',C} : \mathbb{Z}[C'] \subset \mathbb{Z}[C]$. Склеив аффинные торические многообразия $X_{C^\times} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[C^\times])$, $C \in \Sigma$, по отображениям, индуцированным вложениями $j_{C',C}$, получим многообразие, которое будем обозначать через X_Σ. Так как отображения склейки согласованы с действиями тора T на аффинных картах, действие тора определено и на всем многообразии X_Σ. Будем называть его торическим многообразием, соответствующим вееру Σ.

Замечание **1.3.7.** 1. В случае $\Sigma = \Sigma_A$ мы дословно повторили конструкцию покрытия аффинными картами торического многообразия X_A.

2. Для произвольных вееров эта конструкция устанавливает взаимно-однозначное соответствие между торическими многообразиями (нормальными многообразиями с действием тора полной размерности) и рациональными веерами. Это соответствие переводит компактные многообразия в полные вееры, проективные многообразия – в выпуклые (т.е. двойственные многогранникам), а гладкие многообразия – в гладкие вееры (т.е. такие, в которых полномерные конусы порождены базисами решетки).

По построению, орбиты многообразия X_Σ находятся во взаимно-однозначном соответствии с конусами Σ. Орбита, соответствующая конусу $C \in \Sigma$, обозначается через T_C и естественно изоморфна фактору $T/\{t^l,\, l \in C\}$.

Если веер Σ' подразбивает Σ, существует естественное отображение $\pi_{\Sigma',\Sigma} : X_{\Sigma'} \to X_\Sigma$, которое для каждого конуса $C' \in \Sigma'$, содержащегося в конусе $C \in \Sigma$, отображает орбиту $T_{C'} = T/\{t^l,\, l \in C'\}$ в орбиту $T_C = T/\{t^l,\, l \in C\}$ посредством факторизации по $\{t^l,\, l \in C\}$.

1.4. Торические разрешения и компактификации.

Рассмотрим алгебраическое подмножество комплексного тора $V \subset T$ – т.е. такое, которое задается полиномиальными уравнениями $\varphi_1 = \ldots = \varphi_k = 0$. Согласно мотивации в начале этого параграфа, мы стремимся найти такое торическое многообразие $X_\Sigma \supset T$, в котором замыкание V будет гладким.

Оказывается, если уравнения φ_i нашего множества – многочлены Лорана общего положения в пространствах $\mathbb{C}^{A_i}$, то нам подойдет торическое многообразие X_Σ для любого гладкого веера Σ, который является подразбиением двойственных вееров $A_1, \ldots, A_k$. Более точно:

Теорема **1.4.1.** *1) Для любого набора конечных множеств $A_1, \ldots, A_k$ в решетке L существует полный гладкий веер, подразбивающий $\Sigma_{A_1}, \ldots, \Sigma_{A_k}$ (т.е. такой, у которого каждый конус порождается частью базиса решетки L^* и содержится в некотором конусе каждого из вееров Σ_{A_i}).*

2) Наборы многочленов Лорана $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$, удовлетворяющие условию из Теоремы 1.2.4, т.е. такие что для каждой линейной функции $\gamma : L \to \mathbb{Z}, \gamma \in |\Sigma|$, ноль является регулярным значением отображения $\varphi^\gamma = (\varphi_1|_{A_1^\gamma}, \ldots, \varphi_k|_{A_k^\gamma}) : T \to \mathbb{C}^k$, образуют открытое по Зарискому множество в пространстве $\mathbb{C}^{A_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_k}$.

3) Если для данных $A_1, \ldots, A_k$ веер Σ удовлетворяет условию пункта 1 (кроме, возможно, полноты), а множество $V = \{\varphi_1 = \ldots = \varphi_k = 0\}$ – условию пункта 2, то замыкание V в гладком торическом многообразии X_Σ является гладким подмногообразием, трансверсальным всем орбитам X_Σ.

4) При этом пересечение замыкания V с орбитой $T_C = T/\{t^l,\ l \in C\}$, $C \in \Sigma$, совпадает с множеством $\{\varphi^\gamma = 0\}/\{t^l,\ l \in C\}$.

В этой теореме пункт 1 нетривиальный, но чисто комбинаторный (см. [87]). Другие пункты посредством покрытия X_Σ аффинными картами сводятся к случаю аффинного торического многообразия $X_\Sigma = X_Q = \mathbb{C}^n$, где $Q \subset \mathbb{Q}^n$ – положительный квадрант, и $0 \in A_i \subset Q$. Последний же частный случай одновремен-

но является частным случаем леммы Сарда для отображения $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) : (\mathbb{C} \setminus 0)^n \to \mathbb{C}^k$. Действительно, это отображение продолжается до $\tilde{\varphi} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$, и замыкание $V \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ в $\mathbb{C}^n$ задается уравнением $\tilde{\varphi} = 0$.

Теорема 1.4.1 позволяет доказать все утверждения о многогранниках Ньютона из прошлого параграфа средствами торической геометрии.

Для произвольного алгебраического множества $V \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ гладкая торическая компактификация может не существовать, но всегда существует ее более слабая версия в следующем смысле.

Определение **1.4.2.** 1) Укорочением многочлена Лорана $f = \sum_{a \in A} c_a x^a$ в направлении $l \in L^*$ называется сумма его старших мономов в смысле градуировки $l : L \to \mathbb{Z}$, т.е. $f^l = \sum_{a \in B} c_a x^a$, где $B \subset A$ – опорная грань l.

2) Укорочением идеала $I \subset \mathbb{C}[L]$ в кольце многочленов Лорана называется идеал I^l, порожденный укорочениями f^l, $f \in I$.

3) Укорочением V^l многообразия $V \subset T$ в направлении $l \in L^*$ называется многообразие нулей идеала I^l, где I – идеал многообразия V.

Утверждение **1.4.3.** *1) Для каждого подмногообразия V в комплексном торе T существует гладкий полный веер Σ в решетке L^*, такой что замыкание V в торическом многообразии X_Σ пересекает каждую орбиту T_C, $C \in \Sigma$, по множеству коразмерности* $\operatorname{codim} X_C + \operatorname{codim} V$.

2) Для каждого конуса C такого веера Σ укорочения V вдоль всех $l \in C$ совпадают (будем обозначать их V_C), и поэтому V_C инвариантно относительно действия всех однопараметрических подгрупп t^l, $l \in C$.

3) Пересечение замыкания V с орбитой $T_C = T/\{t^l,\, l \in C\}$ совпадает с $V_C/\{t^l,\, l \in C\}$.

Такая пара $(X_\Sigma, \bar{V})$ называется тропической компактификацией V. Гладкое многообразие V называется хорошим (schön), если у него есть тропическая компактификация, такая что $\bar{V}$ гладкое. В частности, мы видели, что многообразия, заданные уравнениями достаточно общего положения – хорошие.

1.5. Тропическая геометрия.

Тропические числа обычно определяются как множество $\mathbb{R}$, дополненное элементом $-\infty$ и структурой полукольца, в которой сумма элементов a и b определяется как $\max(a,b)$, а произведение – как $a+b$. Мы, однако, последуем идеям работы [146] и определим сложение несколько по-другому.

Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R} \sqcup \{-\infty\}$ — тропическое полуполе с операциями

$$a \underset{\mathbb{T}}{\cdot} b = a \underset{\mathbb{R}}{+} b \quad \text{и} \quad a \underset{\mathbb{T}}{+} b = \begin{cases} \max(a,b) & \text{если } a \neq b \\ [-\infty,\, a] & \text{если } a = b \end{cases}$$

Многозначное тропическое сложение, которое мы используем, является чуть более удобным по сравнению с обычным (см., например, следующее определение), а также и более естественным: тропическое сложение и умножение должны аксиоматизировать поведение степени суммы и произведения двух многочленов, а степень $\deg(f+g)$ при условии $\deg f = \deg g$ может принимать любые значения в интервале $[-\infty, \deg f]$.

Всюду далее $\mathfrak{1} \in \mathbb{T}$ и $\mathfrak{o} \in \mathbb{T}$ обозначают $0 \in \mathbb{R}$ и $-\infty$ соответственно. Более того, ввиду многозначности операции сложения, "$= \mathfrak{o}$" в тропическом смысле означает"$\ni -\infty$".

Замечание **1.5.1.** Тропические объекты мы будем обозначать готическими буквами, потому что рассматриваем тропический тор $\mathbb{T}\backslash\mathfrak{o}$ как вещественную часть алгебры Ли комплексного тора $\mathbb{C} \setminus 0$.

Определение **1.5.2.** *Тропической гиперповерхностью* называется множество вида $S = \{x \mid f(x) = \mathfrak{o}\}$, где f — тропический многочлен. В достаточно малой окрестности точки общего положения $x_0 \in S$ многочлен f может быть представлен в виде $g \cdot h^k$, где $g(x_0) \neq \mathfrak{o}$, а многочлен h неприводим. Максимально возможное такое целое число k называется *кратностью* гиперповерхности S в точке x_0.

Боле явно, в малой окрестности точки общего положения $x_0 \in S$ множество $S \subset \mathbb{T}^n$ совпадает с гиперплоскостью, и по две стороны этой гиперплос-

кости многочлен f равен своим мономам $c_a x^a$ и $c_b x^b$. Тогда вектор $b - a \in \mathbb{Z}^n$ представляется $k \cdot v$, где $v \in \mathbb{Z}^n$ примитивный вектор, а число $k \in \mathbb{N}$ называется кратностью S в точке x_0 (это совпадает с исходным определением, так как многочлен f в окрестности x_0 как функция равен $c_a x^a (\frac{c_b}{c_a} x^v + 1)^k$).

Например, ниже изображен график функции $f(x) = x^3 + x^2 + 6x + 8$, а также (белыми точками) множество $\{f = \mathfrak{o}\} = \{2, 3\}$ с кратностями 1 и 2 соответственно.

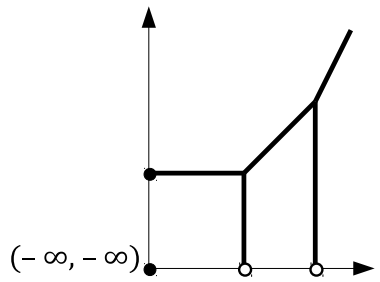


Рисунок 1: график тропического многочлена.

Алгебраическая геометрия над тропическими числами полезна тем, что ответы на многие перечислительные задачи оказываются одинаковыми над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{T}$. Приведем, например, тропический аналоги теоремы Кушниренко–Бернштейна.

Говорят, что тропические гиперповерхности $H_1, \ldots, H_n$ в тропическом торе $\mathbb{R}^n = (\mathbb{T} \setminus 0)^n$ пересекаются *трансверсально*, если они пересекаются в конечном числе точек, и в достаточно малой окрестности каждой точки p их пересечения, каждая из гиперповерхностей H_i задается (с учетом кратностей) тропическим уравнением вида $x^{a_{p,i}} + p^{a_{p,i}} = \mathfrak{o}$ для некоторых $a_{p,i} \in \mathbb{Z}^n$. Тогда *индекс пересечения* гиперповерхностей $H_1, \ldots, H_n$ в точке p определяется как $|\det(a_{p,1}, \ldots, a_{p,n})|$.

Теорема **1.5.3** (Тропическая теорема Кушниренко–Бернштейна)**.** *Суммарный индекс пересечения трансверсальных гиперповерхностей $H_1, \ldots, H_n$ равен смешанному объему многогранников Ньютона их уравнений.*

Заметим, что для случая, когда уравнения гиперповерхностей имеют вид $x^{a_{p,i}} + p^{a_{p,i}} = \mathfrak{o}$, утверждение теоремы совпадает с определением индекса пересе-

чения (т.е. если бы определение индекса пересечения было другим, теорема не могла бы быть верной).

Теорема допускает нижеследующее обобщение на случай нетрансверсальных гиперповерхностей, и в таком виде оказывается некоторым свойством аддитивности смешанных объемов, позволяющим вычислять смешанные объемы сложных многогранников через смешанные объемы их простых частей.

Определение **1.5.4.** Локальный многогранник Ньютона тропического многочлена φ в точке x_0 – минимально возможный многогранник Ньютона тропического многочлена, совпадающего с φ как функция в окрестности x_0.

Будем обозначать его N_{φ,x_0}. Более конструктивное определение – это выпуклая оболочка всех a, для которых значение монома $c_a x^a$ многочлена $\varphi(x) = \sum c_a x^a$ в точке $x = x_0$ равно максимальному значению $\varphi(x_0)$.

Заметим, что у многочлена конечное число локальных многранников Ньютона, и они образуют разбиение многогранника Ньютона φ, называемое *двойственным разбиением* многочлена φ, и обозначаемое S_φ.

Теорема **1.5.5** (Аддитивность смешанного объема относительно разбиений). *Сумма смешанных объемов локальных многогранников Ньютона* $N_{\varphi_1,x}, \ldots,$ $N_{\varphi_n,x}$ *по всем* $x \in \mathbb{T}^n$ *равна смешанному объему многогранников Ньютона* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

В частности, по соображениям размерности, смешанные объемы локальных многогранников Ньютона равны нулю во всех точках x, кроме конечного числа. Заметим, что в случае трансверсальных гиперповерхностей эта теорема превращается в предыдущую.

На практике двойственное разбиение многогранника Ньютона N многочлена $\varphi(x) = \sum_{a \in N \cap \mathbb{Z}^n} c_a x^a$ удобно строить с помощью его *преобразования Лежандра* $\tilde{\varphi} : N \to \mathbb{R}$, которое, очевидно, равно минимальной выпуклой вверх функции, для которой значение в каждой точке $a \in N \cap \mathbb{Z}^n$ не меньше c_a.

Утверждение **1.5.6.** *n-мерные компоненты двойственного разбиения многогранника Ньютона N многочлена φ – это в точности максимальные области линейности преобразования Лежандра $\tilde{\varphi} : N \to \mathbb{R}$.*

Пример **1.5.7.** Двойственное разбиение многочлена $5 + 10x + 11y + 6xy$ – это разбиение многогранника Ньютона $[0, 1]^2$ на два треугольника диагональю от $(1, 0)$ к $(0, 1)$. Преобразование Лежандра этого многочлена – непрерывная функция на $[0, 1]^2$, линейная на двух указанных треугольниках и принимающая в вершинах значения $5, 10, 11, 6$.

Многочлен φ не восстанавливается однозначно по своему преобразованию Лежандра $\tilde{\varphi}$ как многочлен, но однозначно восстанавливается как функция: $\varphi = \widetilde{\tilde{\varphi}}$. В частности, по $\tilde{\varphi}$ однозначно восстанавливается гиперповерхность $\varphi = 0$.

Пример **1.5.8.** Многочлен $2 + cx + 4x^2 \in \mathbb{T}[x]$ определяет одну и ту же функцию $\mathbb{T} \to \mathbb{T}$ и имеет один и тот же ноль и одно и то же преобразование Лежандра при всех $c \leqslant 3$. При всех $c \geqslant 3$, наоборот, преобразования Лежандра, функции и их нули попарно различны.

Связь двойственного разбиения с преобразованием Лежандра мотивирует следующее определение:

Определение **1.5.9.** Разбиение целочисленного многогранника называется *когерентным*, если оно двойственно к какому-либо тропическому многочлену, или, равносильно, является множеством областей линейности выпуклой вверх кусочно-линейной функции.

Не все разбиения когерентны.

1.6. Тропическая теорема соответствия.

Тропическая теорема Кушниренко–Бернштейна – простейшее проявление принципа *тропического соответствия*, который пока представляется довольно

загадочным:

> Ответы на многие задачи исчислительной алгебраической геометрии одинаковы над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{T}$.

Этот принцип полезен тем, что алгебраическая геометрия над $\mathbb{T}$ – кусочно-линейная комбинаторика, поэтому доказательство принципа тропического соответствия для какого-либо класса исчислительных вопросов само по себе является комбинаторным ответом на эти вопросы.

Первый содержательный класс вопросов, для которых был доказан этот принцип – вычисление инвариантов Громова-Виттена проективной плоскости.

Определение **1.6.1.** Через $N_{d,g}$ будем обозначать число алгебраических кривых степени d и рода g на $\mathbb{CP}^2$, проходящих через данный набор точек общего положения $p_1, \ldots, p_k$.

Это число, очевидно, может быть конечным и ненулевым, только если k равно размерности $3d-1-g$ семейства всех плоских кривых степени d и рода g (т.н. *многообразия Севери*). Поэтому всегда будем считать k равным $3d-1-g$.

В многообразии Севери открытое по Зарискому множество образуют *нодальные* кривые, т.е. такие, которые имеют только простейшие особенности – трансверсальные самопересечения (*ноды*). Поэтому семейство ненодальных кривых степени d рода g имеет строго меньшую размерность, а значит при $k = 3d-1-g$ все перечисляемые в определении 1.6.1 кривые будут нодальными. Так как род кривой степени d с n нодами равен $\frac{(d-1)(d-2)}{2} - n$, то у каждой из перечисляемых кривых будет по $\frac{(d-1)(d-2)}{2} - g$ нодов.

Определение **1.6.2.** Пусть многочлен $\varphi \in \mathbb{T}[x,y]$ имеет многоугольник Ньютона N. Назовем тропическую кривую $\varphi = \mathbf{0}$ нодальной, если

– каждая ее негладкая точка x в малой окрестности совпадает с объединением трех лучей из x или двух прямых, проходящих через x, то есть двой-

ственное разбиение многоугольника Ньютона N состоит из треугольников и параллелограммов.

– каждый ее луч имеет кратность 1, то есть все целые точки на границе многоугольника Ньютона N являются вершинами двойственного подразбиения.

Числом нодов кривой $\varphi = 0$ назовем (число параллелограммов в двойственном разбиении) + (число целых точек в многоугольнике Ньютона N, не являющихся вершинами двойственного разбиения). Соответственно, *родом* назовем (число вершин двойственного разбиения внутри N) − (число параллелограммов в двойственном разбиении).

Кратностью кривой $\varphi = 0$ назовем произведение целочисленных площадей треугольников двойственного разбиения многогранника Ньютона φ. Тропическим инвариантом Громова-Виттена $N^{\mathbb{T}}_{d,g}$ назовем суммарную кратность тропических кривых степени d рода g, проходящих через данные $3d-1-g$ точки общего положения.

Теорема **1.6.3** (Теорема Михалкина). $N_{d,g} = N^{\mathbb{T}}_{d,g}$.

Ниже мы выведем эту теорему в простейшем случае (для кривых с одним нодом) из описания многогранника Ньютона дискриминанта, принадлежащего Гельфанду, Зелевинскому и Капранову. Соответственно, начнем с того, что напомним это описание и наметим его более элементарное доказательство, чем в оригинальной работе [60].

1.7. Вторичный многогранник.

В этом разделе мы определим комбинаторный объект – *вторичный многогранник* (secondary polytope), который позже окажется многогранником Ньютона дискриминанта, а также его смешанный аналог, который окажется многогранником Ньютона результанта.

Наиболее естественно вторичный многогранник определяется своей опорной функцией. Напомним, что опорной функцией многогранника N в вектор-

ном пространстве L называется непрерывная кусочно-линефная функция $N(\cdot) : L^* \to \mathbb{R}$, определяемая равенством $N(\gamma) = \max \gamma|_N$ для каждой линейной функции $\gamma : L \to \mathbb{R}$.

Замечание **1.7.1.** 1.Многогранник однозначно определяется своей опорной функцией. Более точно, вершины v_i многогранника $N \subset V$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с областями линейности $L_i \subset V^*$ опорной функции $N(\cdot)$, и $v_i \in V$ равно линейной функции $N(\cdot)|_{L_i} \in V^{**} = V$.

2. Опорную функцию целочисленного многогранника N можно записать как тропический многочлен $\sum_{a \in N \cap \mathbb{Z}^n} x^a$.

Определение **1.7.2.** Вторичным многогранником множества $A \subset \mathbb{Z}^n$ называется многогранник $S_A \subset \mathbb{R}^A$, опорная функция которого на ковекторе $\gamma \in \mathbb{R}^A$ с координатами $\gamma_a, a \in A$, равна интегралу минимальной выпуклой вверх функции $\tilde{\gamma} : \operatorname{conv}(A) \to \mathbb{R}$, для которой $\tilde{\gamma}(a) \geqslant \gamma_a$ при всех $a \in A$.

Пример **1.7.3.** Вторичный многогранник множества $\{0, 1, 2\} \subset \mathbb{Z}^1$ имеет опорную функцию, которая на ковекторе $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R}^{\{0,1,2\}}$ равна $\frac{1}{2}\gamma_0 + \gamma_1 + \frac{1}{2}\gamma_2$ при $\gamma_1 \geqslant \frac{\gamma_0+\gamma_2}{2}$ и $\gamma_0 + \gamma_2$ иначе. Таким образом, вторичный многогранник является отрезком с концами $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ и $(1, 0, 1)$.

Чтобы воспользоваться замечанием 1.7.1.1 для описания вершин вторичного многогранника, нужно описать области линейности его опорной функции. Заметим, что интеграл функции $\tilde{\gamma}$ при вариации $\gamma_a \rightsquigarrow \gamma_a + \varepsilon$ зависит от ε линейно, если все области линейности S_i функции $\tilde{\gamma}$, примыкающие к a, являются симплексами, и при $a \in S_i$ равенство $\tilde{\gamma}(b) = \gamma_b$ выполняется только для вершин $b \in S_i$. В этом случае производная $\int_{\operatorname{conv} A} \tilde{\gamma}(x)\,\mathrm{d}x$ по ε равна $\frac{1}{n+1}\sum_i \operatorname{Vol} S_i$. В противном случае интеграл $\int_{\operatorname{conv} A} \tilde{\gamma}(x)\,\mathrm{d}x$ как функция от ε претерпевает излом при $\varepsilon = 0$, и поэтому не имеет производной. Вывод следующий:

Утверждение **1.7.4.** *1. Опорная функция вторичного многогранника S_A линейна в окрестности точки $\gamma \in \mathbb{R}^A$ если и только если все области линейно-*

сти функции $\tilde{\gamma} : \mathrm{conv}(A) \to \mathbb{R}$ *являются симплексами, и равенство* $\tilde{\gamma}(a) = \gamma_a$ *выполняется только когда* a *является вершиной одного из них.*

2. Вершины S_A*, области линейности опорной функции* $S_A(\cdot)$ *и когерентные разбиения* $\mathrm{conv}(A)$ *на симплексы (т.е. триангуляции) находятся во взаимно-однозначном соответствии.*

Это соответствие сопоставляет триангуляции $\{T_i\}$ *вершину в* $\mathbb{R}^A$*, у которой* a*-координата при каждом* $a \in A$ *равна* $\frac{1}{n+1}\sum_{i \,|\, a \text{ – вершина } T_i} \mathrm{Vol}\, T_i$*. Соответствующая им область линейности функции* $S_A(\cdot)$ *состоит из всех* γ*, для которых функция* $\tilde{\gamma}$ *линейна на каждом из симплексов* T_i*.*

Для дальнейшего нам будет важна следующая тропическая интерпретация опорной функции $S_A(\cdot)$ и участвующей в ее определении функции $\tilde{\gamma}$. Будем рассматривать объемлющее пространство вторичного многогранника $\mathbb{T}^A \supset S_A$ как пространство тропических многочленов вида $\gamma(x) = \sum_{a\in A} \gamma_a x^a$.

Замечание **1.7.5.** Функция $\tilde{\gamma}$ из определения 1.7.2 является преобразованием Лежандра тропического многочлена γ.

Заметим, что гомотетия $(n+1)!S_A$ является целочисленным многогранником. Согласно замечанию 1.7.1.2, мы можем рассматривать опорную функцию $(n+1)!S_A(\cdot)$ как тропический многочлен $\mathfrak{S}_A$ с многогранником Ньютона $(n+1)!S_A$. Соответствующую гиперповерхность $\mathfrak{S}_A = \mathfrak{o}$ будем называть *вторичным веером* множества A. Это множество состоит из тех $\gamma \in \mathbb{T}^A$, для которых нарушено одно из условий в Утверждении 1.7.4.1. Для $n = 2$ опишем явно все γ, для которых нарушается одно из двух условий.

Пример **1.7.6.** При $n = 2$ вторичный веер $\mathfrak{S}_A = \mathfrak{o}$ является объединением замыканий следующего набора конусов C_T и $C_{T,a}$ коразмерности 1:

1) T – произвольная когерентная триангуляция многоугольника $\mathrm{conv}(A)$ с вершинами в A, точка $a \in A$ не является ее вершиной, конус $C_{T,a}$ состоит из всех γ, для которых элементы T являются областями линейности функции $\tilde{\gamma}$, и $\tilde{\gamma}(a) = \gamma_a$.

2) T – произвольное когерентное разбиение многоугольника $\mathrm{conv}(A)$ с вершинами в A, у которого один из элементов – четырехугольник, а остальные элементы – треугольники. Конус C_T состоит из всех γ, для которых элементы T являются областями линейности функции $\tilde{\gamma}$.

1.8. Результанты.

Для конечного множества $A \subset \mathbb{Z}^n$ обозначим через $(\mathbb{C} \setminus 0)^A$ пространство многочленов Лорана вида $\sum_{a \in A} c_a x^a$, $c_a \neq 0$.

Определение **1.8.1.** *A-результантом* $R_A \subset \underbrace{(\mathbb{C} \setminus 0)^A \times \ldots \times (\mathbb{C} \setminus 0)^A}_{n+1}$ называется замыкание множества всех наборов многочленов, имеющих общий корень в $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$.

Говоря об A-результанте, мы всегда будем предполагать, что A не содержится ни в какой аффинной гиперплоскости – в этих предположениях результант является неприводимой алгебраической гиперповерхностью, и мы будем обозначать задающее его уравнение также через R_A.

Пример **1.8.2.** При $A = \{0, 1, \ldots, d\} \subset \mathbb{Z}^1$ получаем классический результант двух многочленов одной переменной одной степени.

Это определение можно сделать более конструктивным, избавившись от взятия замыкания:

Утверждение **1.8.3.** *Набор многочленов $(f_0, \ldots, f_n)$ содержится в R_A если и только если существует грань Γ выпуклой оболочки A, для которой ограничения $f_0|_\Gamma, \ldots, f_n|_\Gamma$ имеют общий корень в $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$.*

Действительно, набор многочленов $f_i = \sum c_{a,i} x^a$ имеет общий корень, если и только если плоскость $\sum c_{a,i} y_a = 0,\ i = 0, \ldots, n$, пересекают образ вложения $j_A : (\mathbb{C} \setminus 0)^n \to \mathbb{CP}^A$, а значит набор $f_i = \sum c_{a,i} x^a$ принадлежит R_A если и только если плоскость $\sum c_{a,i} y_a = 0,\ i = 0, \ldots, n$ пересекает замыкание образа

— торическое многообразие $X_A \subset \mathbb{CP}^A$. Но X_A состоит из орбит, являющихся образами отображений $j_\Gamma : (\mathbb{C} \setminus 0)^n \to \mathbb{CP}^A$ по всем $\Gamma = A \cap (\text{грань } \operatorname{conv} A)$, и пересечение указанной плоскости с указанной орбитой равносильно наличию общего корня у ограничений $f_0|_\Gamma, \dots, f_n|_\Gamma$.

Чтобы описать многогранник Ньютона результанта, будет удобно следующее обозначение. Для ковектора γ в положительном октанте решетки $\mathbb{Z}^A$ определим многогранник $N_\gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ как подграф неотрицательной функции $\tilde{\gamma}$ из определения 1.7.2.

Лемма **1.8.4.** *Значение опорной функции многогранника Ньютона R_A на ковекторе $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_n)$ из положительного октанта решетки $\mathbb{Z}^A \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}^A$ равно смешанному объему $(n+1)!\,\mathrm{MV}(N_{\gamma_0}, \dots, N_{\gamma_n})$.*

Для доказательства рассмотрим в пространстве $\underbrace{(\mathbb{C} \setminus 0)^A \times \dots \times (\mathbb{C} \setminus 0)^A}_{n+1}$ кривую $F(t) = (F_0(t), \dots, F_N(t)) = (\sum c_{a,0}(t)x^a, \dots, \sum c_{a,0}(t)x^a)$, где $c_{a,i}(t) \in \mathbb{C}[t]$ – многочлен общего положения степени $\gamma_{i,a}$. С одной стороны, степень многочлена $R_A(F(t)) \in \mathbb{C}[t]$ равна значению опорной функции многогранника Ньютона результанта на γ. С другой стороны, корни многочлена $R_A(F(t))$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с корнями общей системы уравнений $F_0(t)(x) = \dots = F_n(t)(x) = 0$ от $n+1$ переменной, поэтому по теореме Кушниренко–Бернштейна 1.2.1 число таких корней равно смешанному объему многогранников Ньютона $F_i(t)(x)$, то есть $(n+1)!\,\mathrm{MV}(N_{\gamma_0}, \dots, N_{\gamma_n})$.

Замечание **1.8.5.** Доказанная лемма однозначно определяет многогранник Ньютона результанта R_A: ведь результант однороден, и поэтому значение опорной функции его многогранника Ньютона в любой точке γ равно значению в любой точке вида $\gamma + (d, d, \dots, d)$, $d \in \mathbb{R}$, а значение в этой точке при достаточно больших d описывается леммой 1.8.4.

1.9. Дискриминанты.

Определение **1.9.1.** Главным A-определителем назовем многочлен Лорана на пространстве $(\mathbb{C}\setminus 0)^A$, определенный равенством

$$E_A(f) = R_A(f, x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}).$$

A-дискриминантом D_A назовем замыкание множества всех многочленов $f \in (\mathbb{C}\setminus 0)^A$, имеющих 0 критическим значением. Если D_A — неприводимая гиперповерхность, то обозначим ее неприводимое уравнение также через D_A (иначе будем обозначать через D_A единичный многочлен).

Утверждение 1.8.3 переформулируется для главного A-определителя следующим образом: $E_A(f) = 0$ если и только если для некоторой грани $\Gamma \subset \operatorname{conv} A$ ограничение $f|_\Gamma : (\mathbb{C}\setminus 0)^n \to \mathbb{C}$ имеет ноль критическим значением, т.е. $D_{A\cap\Gamma}(f|_\Gamma) = 0$. Поэтому многочлен $E_A(f)$ равен с точностью до мономиального множителя произведению по всем граням $\Gamma \subset \operatorname{conv} A$ многочленов $D_{A\cap\Gamma}(f|_\Gamma)$ в некоторых степенях $c_A^\Gamma \in \mathbb{N}$. Эти степени вычислены явно в книге [60] и будут подробно обсуждаться ниже (см. раздел 2.1.4). Но если торическое многообразие X_A гладкое в точках своей Γ-орбиты, то рассуждениями, аналогичными доказательству Утверждения 1.8.3, легко убедиться, что $c_A^\Gamma = 1$. В частности, в малых размерностях получаем следующее:

Утверждение **1.9.2.** *1. При $n = 1$ имеем $E_A = D_A$ с точностью до мономиальноого множителя.*

2. Пусть $A \subset \mathbb{Z}^2$ – множество целых точек целочисленного многоугольника N. Тогда с точностью до мономиальноого множителя имеем $E_A(f) = \prod_\Gamma D_{A\cap\Gamma}(f|_\Gamma)$, где Γ пробегает N и все его стороны.

Теорема **1.9.3.** *1. Многогранник Ньютона E_A равен S_A. В частности, степень E_A равна $(n+1)!\operatorname{Vol}(\operatorname{conv} A)$.*

2. Если $A \subset \mathbb{Z}^2$ – множество целых точек целочисленного многоугольника N, то многогранник Ньютона N_{D_A} дискриминанта D_A с точностью до

сдвига однозначно определяется уравнением $S_A = N_{D_A} + \sum_\Gamma S_{A\cap\Gamma}$, *где* Γ *пробегает все стороны* N.

Для доказательства пункта 1 заметим, что опорная функция многогранника Ньютона E_A в γ равна $\int \tilde{\gamma}(x)\,\mathrm{d}x$ по лемме 1.8.4 и замечанию 1.8.5. В частности, степень E_A равна значению опорной функции в точке $(1,\dots,1)$.

Пункт 2 следует из пункта 1 и предыдущего утверждения, потому что многогранник Ньютона произведения равен произведению многогранников Ньютона.

Согласно замечанию 1.7.1.2, мы можем рассматривать опорную функцию многогранника Ньютона N_{D_A} как тропический многочлен с многогранником Ньютона N_{D_A}. Этот многочлен будем называть *тропическим дискриминантом* и обозначать $\mathfrak{D}_A$. тогда пункт 2 пердыдущей теоремы можно переформулировать как равенство для тропических многочленов:

$$\mathfrak{S}_A = \mathfrak{D}_A \cdot \prod_\Gamma \mathfrak{S}_{A\cap\Gamma}. \qquad (*)$$

Из этого равенства следует, что тропическая гиперповерхность $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{o}$ содержится в $\mathfrak{S}_A = \mathfrak{o}$, т.е. в объединении конусов из примера 1.7.6. Однако можно указать один важный класс конусов из этого примера, который не будет содержаться в $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{o}$:

Лемма **1.9.4.** *Пусть* $a \in N$ *– единственная целая точка, которая не является вершиной триангуляции* T *многоугольника* N, *и пусть она лежит внутри некоторой стороны многоугольника Ньютона* $\Gamma_0 \subset N$. *Тогда внутренность конуса* $C_{T,a}$ *не пересекается с* $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{o}$.

Действительно, точка a является является единственной внутренней целой точкой (а значит серединой) стороны $I \subset \Gamma_0$ одного из треугольников триангуляции, поэтому в окрестности внутренней точки $\gamma \in C_{T,a}$ многочлены $\mathfrak{D}_A$ и $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}^2\cap\Gamma_0}$ совпадают с многочленом $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}^2\cap I}$ (который описан в примере 1.7.3).

Соответственно, равенство $(*)$ в окрестности γ превращается в равенство

$$\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}^2\cap I} = \mathfrak{D}_A \cdot \mathfrak{S}_{\mathbb{Z}^2\cap I} \cdot (\text{тропический моном}),$$

то есть многочлен $\mathfrak{D}_A$ в окрестности точки γ совпадает с тропическим мономом (т.е. в обычной терминологии с линейной функцией), а значит не имеет тропических корней вблизи γ.

1.10. Доказательство теоремы соответствия в простейшем случае.

Для множества целых точек A в данном целочисленном многоугольнике $N \subset \mathbb{R}^2$, $0 \in N$, мы хотим вычислить количество многочленов $f \in \mathbb{C}^A$ таких, что кривая $f = 0$ имеет одну особенность и проходит через заданный набор из $q = |A| - 2$ точек общего положения $p_1, \dots, p_q \in (\mathbb{C} \setminus 0)^2$. Иными словами, мы хотим вычислить индекс пересечения I следующих гиперповерхностей в $\mathbb{C}^A$:

– условий инцидентности $H_1, \dots, H_q$, where $H_i = \{f \mid f(p_i) = 0\}$;

– нормализации $H_0 = \{f \mid f(0) = 1\}$;

– A-дискриминанта $D_A = \{f \mid f = 0 \text{ не регулярно}\}$.

Тропикализуем данные объекты: выберем точки $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_q \in (\mathbb{T} \setminus 0)^2$ и определим тропические гиперповерхности $\mathfrak{H}_i = \{f \mid f(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{o}\}$ в $\mathbb{T}^A$ и $\mathfrak{H}_0 = \{f \mid f(\mathfrak{o}) = \mathfrak{1}\}$. Если точки $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_q$ в общем положении, то тропические гиперповерхности $\mathfrak{H}_0, \dots, \mathfrak{H}_q, \mathfrak{D} = \mathfrak{o}$ пересекаются трансверсально; обозначим их индекс пересечения через $\mathfrak{I}$. Тогда верно равенство

$$I = \mathfrak{I}, \qquad (*)$$

ведь обе его части равны смешанному объему многогранников Ньютона гиперповерхностей $H_0, \dots, H_q$ и D_A по формуле Кушниренко–Бернштейна над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{T}$ соответственно.

Посмотрим, с какими из конусов тропической гиперповерхности $\mathfrak{D} = \mathfrak{o}$ могут пересекаться гиперповерхности инцидентности $\mathfrak{H}_i$.

– Пусть конус C_T из примера 1.7.6 соответствует разбиению T многоугольника N, в котором все целые точки являются вершинами. Тогда все треугольники разбиения имеют площадь $\frac{1}{2}$, а единственный четырехугольник – параллелограм единичной площади. Поэтому для каждого $\mathfrak{f} \in C_T$ кривая $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$ – нодальная с одним нодом.

– Пусть конус C_T из примера 1.7.6 соответствует разбиению T многоугольника N, в котором не все целые точки являются вершинами (скажем, есть еще целая точка b). Тогда, хотя размерность конуса равна $|A| - 2$, но размерность соответствующего семейства тропических кривых $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{f} \in C_T$, строго меньше, потому что они не зависят от коэффициента c_b многочлена $\mathfrak{f} = \sum_a c_a x^a$. Так как тропическая кривая из семейства с менее чем $|A| - 2$ параметрами не может проходить через $|A| - 2$ точки общего положения, такой конус C_T не пересекается с гиперповерхностями инцидентности $\mathfrak{H}_i$.

– Если конус $C_{T,a}$ из примера 1.7.6 соответствует триангуляции T многоугольника N, в которой не все целые точки, кроме a, являются вершинами, то, аналогично предыдущему случаю, этот конус не пересекается с гиперповерхностями инцидентности $\mathfrak{H}_i$.

– Если конус $C_{T,a}$ из примера 1.7.6 соответствует триангуляции T многоугольника N, в которой все целые точки, кроме a, являются вершинами, то, согласно Лемме 1.9.4, возможны два случая:

– – точка a лежит внутри одного из треугольников триангуляции, и этот треугольник имеет площадь $\frac{3}{2}$, а остальные треугольники – площадь $\frac{1}{2}$.

– – точка a лежит внутри одного из внутренних ребер триангуляции, и прилегающие к нему два треугольника триангуляции имеют площадь 1, а остальные – площадь $\frac{1}{2}$.

В обоих случаях для каждого $\mathfrak{f} \in C_{T,a}$ кривая $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$ — нодальная с одним нодом.

Итак, мы получили, что пересечение тропических гиперповерхностей $\mathfrak{H}_0, \ldots, \mathfrak{H}_q, \mathfrak{D} = \mathfrak{o}$ состоит в точности из таких многочленов $\mathfrak{f}$, что кривая $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$ – нодаль-

ная с одним нодом и проходит через точки инцидентности $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_q$. Из определений также следует, что кратность пересечения указанных гиперповерхностей в каждой из этих точек $\mathfrak{f}$ равна кратности нодальной кривой $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$ в смысле теоремы соответствия (а именно, 3 в случае, если $\mathfrak{f} \in C_{T,a}$ и a внутри одного из треугольников триангуляции T, и 1 иначе).

Поэтому индекс пересечения тропических гиперповерхностей $\mathfrak{H}_0, \ldots, \mathfrak{H}_q$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{o}$, который, напомним, совпадет с искомой величиной (см. $(*)$ выше), равен числу нодальных тропических кривых с одним нодом, проходящих через данные точки общего положения, с учетом кратностей.

2. Целочисленная и выпуклая геометрия

Эта глава содержит ряд необходимых для дальнейшего результатов из области выпуклой геометрии.

2.1. Смешанные объемы и эйлеровы препятствия.

В этом разделе мы введем относительный смешанный объем (раздел 2.1.1), позволяющий сформулировать локальную версию формулы Кушниренко-Бернштейна (раздел 2.1.2). Раздел 2.1.3 содержит ее обобщение, из которого, в частности, следует формула для эйлеровых препятствий торических многообразий (раздел 2.1.4). Эта формула позволяет ввести важное для дальнейшего понятие эйлерова препятствия многогранника.

2.1.1. Относительный смешанный объем

Материал этого раздела более подробно изложен в [176] и [43].

Для выпуклого многогранного m-мерного конуса $\tau \subset (\mathbb{R}^m)^*$ обозначим через $\tau^\vee$ его двойственный конус $\{x \in \mathbb{R}^m \mid \gamma(x) > 0 \text{ for } \gamma \in \tau\}$. Пусть $\mathcal{M}_{\tau^\vee}$ — полугруппа всех (неограниченных) многогранников вида

$$\tau^\vee + \text{некоторый ограниченный многогранник.}$$

Рассмотрим множество $\mathcal{P}_{\tau^\vee} \subset \mathcal{M}_{\tau^\vee} \times \mathcal{M}_{\tau^\vee}$ всех упорядоченных пар многогранников (P, Q) таких, что симметрическая разность $P \triangle Q$ ограничена. $\mathcal{P}_{\tau^\vee}$ является полугруппой относительно сложения по Минковскому пар: $(P, Q) + (C, D) = (P + C, Q + D)$.

Определение **2.1.1** ([176]). Определим *объем* $V(P, Q)$ пары многогранников $(P, Q) \in \mathcal{P}_\Gamma$ как разность $\mathrm{Vol}(P \setminus Q) - \mathrm{Vol}(Q \setminus P)$. *Смешанный объем* пар многогранников определяется как симметричная мультилинейная функция $\mathrm{MV} : \underbrace{\mathcal{P}_{\tau^\vee} \times \ldots \times \mathcal{P}_{\tau^\vee}}_{m} \to \mathbb{R}$ такая, что $\mathrm{MV}\big((P, Q), \ldots, (P, Q)\big) = m! V(P, Q)$ для любой пары $(P, Q) \in \mathcal{P}_{\tau^\vee}$.

Утверждение **2.1.2.** *Смешанный объем пар существует и единственен.*

Действительно, существование следует из того, что требуемым свойствам удовлетворяет функция

$$\frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{\gamma \in \tau} \big(P_{\sigma(i)}(\gamma) - Q_{\sigma(i)}(\gamma)\big)\, \mathrm{MV}(P^\gamma_{\sigma(1)}, \ldots, P^\gamma_{\sigma(i-1)}, Q^\gamma_{\sigma(i-1)}, \ldots, Q^\gamma_{\sigma(m)}), \tag{$*$}$$

а единственность следует из формулы

$$\mathrm{MV}((P_1, Q_1), \ldots, (P_m, Q_m)) = \sum_{I \subset \{1, \ldots, m\}} (-1)^{m - |I|} V\big(\sum_{i \in I} (P_i, Q_i)\big).$$

Последняя формула – очевидное обобщение на старшие степени для выражения билинейной формы через ассоциированную с ней квадратичную, а предыдущая – относительная версия утверждения 1.1.12. Заметим также, что в предыдущей формуле симметризация по S_m излишняя. В частности, смешанный объем пар целочисленных многогранников содержится в $\frac{1}{m!}\mathbb{Z}$.

Пример **2.1.3.** Если $\tau^\vee = \{0\}$, то $\mathcal{P}_{\tau^\vee}$ — множество пар выпуклых ограниченных многогранников, а смешанный объем пар $\mathrm{MV}\Big((P_1, Q_1), \ldots, (P_m, Q_m)\Big)$ равен разности классических смешанных объемов наборов $P_1, \ldots, P_m$ и $Q_1, \ldots, Q_m$.

В общем случае, смешанный объем пар многогранников выражается через классический смешанный объем следующим образом.

Лемма **2.1.4.** *Пусть $\widetilde{P}_i \subset P_i$ и $\widetilde{Q}_i \subset Q_i$ — ограниченные многогранники в $\mathbb{R}^m$ такие, что $\widetilde{P}_i \setminus \widetilde{Q}_i = P_i \setminus Q_i$ и $\widetilde{Q}_i \setminus \widetilde{P}_i = Q_i \setminus P_i$ при $i = 1, \dots, m$. Тогда*

$$\mathrm{MV}\Big((P_1, Q_1), \dots, (P_m, Q_m)\Big) = \mathrm{MV}(\widetilde{P}_1, \dots, \widetilde{P}_m) - \mathrm{MV}(\widetilde{Q}_1, \dots, \widetilde{Q}_m).$$

Это равенство следует, например, из применения утверждения 1.1.12 к смешанным объемам в правой части и формулы $(*)$ – к левой. Заметим, что для любой пары (P_i, Q_i) мы всегда можем найти требуемые в условии $\widetilde{P}_i$ и $\widetilde{Q}_i$.

Конус $\tau^\vee$ играет роль единицы в полугруппе $\mathcal{P}_{\tau^\vee}$:

Лемма **2.1.5** ([176], [43])**.**

1) $\mathrm{MV}\Big((\tau^\vee, Q_1), (P_2, Q_2), \dots, (P_m, Q_m)\Big) = \mathrm{MV}\Big((\tau^\vee, Q_1), (Q_2, Q_2), \dots, (Q_m, Q_m)\Big)$,

т.е. левая часть не зависит от выбора $P_2, \dots, P_m$;

2) $\mathrm{MV}\Big((\tau^\vee, \tau^\vee), (P_2, Q_2), \dots, (P_m, Q_m)\Big) = 0.$

Это также получается применением формулы $(*)$.

2.1.2. Формула Кушниренко–Бернштейна

Относительная версия смешанного объема позволяет сформулировать относительную версию формулы Кушниренко-Бернштейна. Для того, чтобы её сформулировать, нам необходим ряд обозначений, связанных с многогранниками Ньютона и индексами пересечения.

Торические многообразия. Для рационального веера Σ в $(\mathbb{R}^m)^*$ соответствующее торическое многообразие обозначается через X_Σ. Для любой орбиты T коразмерности 1 торического многообразия X_Σ примитивная образующая соответствующего одномерного конуса в Σ обозначается $\gamma(T)$. Предположим, что объединение конусов веера Σ является замкнутым выпуклым конусом τ, обозначим через $\tau^\vee \subset \mathbb{R}^m$ ему двойственный.

Если I — очень обильное линейное расслоение на X_Σ, а мероморфное сечение s расслоения I не имеет нулей и полюсов в максимальном торе многообразия X_Σ, то существует многогранник $\Delta \in \mathcal{M}_{\tau^\vee}$, такой что его двойственный веер равен Σ, а кратность любой орбиты T коразмерности 1 многообразия X_Σ в дивизоре нулей и полюсов сечения s равно максимальному значению ковектора $\gamma(T) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ на многограннике Δ. Так как пара (I, s) однозначно определяется указанным многогранником Δ, мы обозначим линейное расслоение I через I_Δ, а сечение s — через s_Δ.

Многогранники Ньютона. Объединение всех предкомпактных орбит торического многообразия X_Σ (т.е. орбит, соответствующих конусам веера Σ, принадлежащим внутренности τ) обозначается X_Σ^{comp} и называется *компактной частью* X_Σ (это множество действительно компактно).

Пусть f — произвольный росток некоторого голоморфного сечения расслоения I_Δ вблизи компактного множества X_Σ^{comp}, тогда функцию f/s_Δ можно разложить в степенной ряд $\sum_{a\in\Delta} c_a x^a$, где x принадлежит максимальному тору $(\mathbb{C} \setminus 0)^m$ торического многообразия X_Σ. Выпуклая оболочка множества $\{a \mid c_a \neq 0\} + \tau^\vee$ является целочисленным многогранником, принадлежащим $\mathcal{M}_{\tau^\vee}$. Он называется *многогранником Ньютона* f и обозначается Δ_f. Для любого ограниченного многогранника $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ многочлен $\sum_{a\in\Gamma} c_a x^a$, рассматриваемый как функция на комплексном торе $(\mathbb{C} \setminus 0)^m$, обозначается f^Γ. Если a содержится в ограниченной грани многогранника Ньютона Δ_f, то коэффициент c_a называется *старшим коэффициентом* f. Каждое сечение имеет конечное число старших коэффициентов.

Индексы пересечения. Пусть $f_1, \ldots, f_k$ — непрерывные сечения комплексных линейных расслоений $I_1, \ldots, I_k$ на k-мерном комплексном алгебраическом многообразии V, такие, что множество $\{f_1 = \ldots = f_k = 0\}$ компактно. Рассмотрим $c_i \in H^2\big(V, \{f_i \neq 0\};\ \mathbb{Z}\big)$, локализацию класса Черна расслоения I_i вблизи множества нулей его сечения f_i. Тогда *индекс пересечения* дивизоров

сечений $f_1, \ldots, f_k$ определяется как $c_1 \smile \ldots \smile c_k \in H^{2k}\big(V, \cup_i\{f_i \neq 0\};\ \mathbb{Z}\big) = \mathbb{Z}$ и обозначается $m(f_1 \cdot \ldots \cdot f_k \cdot V)$.

Иными словами, если мы рассмотрим гладкие (неголоморфные) шевеления $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_k$ сечений $f_1, \ldots, f_k$ такие, что система $\tilde{f}_1 = \ldots = \tilde{f}_k = 0$ имеет конечное число регулярных решений вблизи множества $\{f_1 = \ldots = f_k = 0\}$, то каждому из решений может быть присвоен вес ± 1, в зависимости от ориентации базиса $d\tilde{f}_1, \ldots, d\tilde{f}_k$ в данной точке. По определению, индекс пересечения $m(f_1 \cdot \ldots \cdot f_k \cdot V)$ равен сумме этих весов.

Относительная формула Кушниренко-Бернштейна.

Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ — целочисленные многогранники, принадлежащие $\mathcal{M}_{\tau^\vee}$, и пусть $\widetilde{\Delta}_1, \ldots, \widetilde{\Delta}_m$ — многогранники Ньютона сечений $f_1, \ldots, f_m$ линейных расслоений $I_{\Delta_1}, \ldots, I_{\Delta_m}$ на торическом многообразии X_Σ. Вычислим индекс пересечения дивизоров сечений $f_1, \ldots, f_m$ в терминах многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ и $\widetilde{\Delta}_1, \ldots, \widetilde{\Delta}_m$ при условии, что старшие коэффициенты сечений $f_1, \ldots, f_m$ находятся в общем положении.

Определение **2.1.6.** Старшие коэффициенты сечений $f_1, \ldots, f_m$ находятся *в общем положении*, если для любого совместного набора ограниченных граней $\widetilde{\Gamma}_1, \ldots, \widetilde{\Gamma}_m$ многогранников $\widetilde{\Delta}_1, \ldots, \widetilde{\Delta}_m$ система полиномиальных уравнений $f_1^{\widetilde{\Gamma}_1} = \ldots = f_m^{\widetilde{\Gamma}_m} = 0$ не имеет корней в максимальном торе $(\mathbb{C} \setminus 0)^m$.

Теорема **2.1.7** (Относительная формула Кушниренко–Бернштейна, [176], [43]). *Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ — целочисленные многогранники, принадлежащие $\mathcal{M}_{\tau^\vee}$, и пусть $\widetilde{\Delta}_1, \ldots, \widetilde{\Delta}_m$ — многогранники Ньютона сечений $f_1, \ldots, f_m$ линейных расслоений $I_{\Delta_1}, \ldots, I_{\Delta_m}$ такие, что разность $\Delta_i \setminus \widetilde{\Delta}_i$ ограничена при каждом i. Пусть Σ – гладкий веер, подразбивающий двойственные вееры многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ (такой всегда существует). Тогда*

1) Индекс пересечения $m(f_1 \cdot \ldots \cdot f_m \cdot X_\Sigma)$ больше или равен смешанному объему

$$\mathrm{MV}\Big((\Delta_1, \widetilde{\Delta}_1), \ldots, (\Delta_m, \widetilde{\Delta}_m)\Big).$$

2) Данное неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда старшие коэффициенты сечений $f_1, \ldots, f_m$ находятся в общем положении в смысле определения 2.1.6.

Для доказательства без ограничения общности можем предположить, что $\tilde{f}_i = f_i/s_{\Delta_i}$ – многочлен, невырожденный относительно своего (ограниченного) многогранника Ньютона $\tilde{P}_i$, причем существует больший многогранник P_i, такой что $\Delta_i \setminus \tilde{\Delta}_i = P_i \setminus \tilde{P}_i$. Тогда веер Σ дополняется до совместимого с $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$, а торическое многообразие X_Σ – до соответствующего компактного торического X, и искомый индекс пересечения равен разности характеристического числа $c_1(I_{P_1}) \smile \ldots \smile c_1(I_{P_m}) \cdot [X]$ и числа решений системы уравнений $\tilde{f}_1 = \ldots = \tilde{f}_m = 0$ в $(\mathbb{C} \setminus 0)^m$. Эти величины, по теореме Кушниренко-Бернштейна, равны $\mathrm{MV}(P_1, \ldots, Pm)$ и $\mathrm{MV}(\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_m)$ соответственно, поэтому их разность равна требуемому смешанному объему пар по Лемме 2.1.4.

2.1.3. Формула Кушниренко–Бернштейна–Хованского

В предположениях теоремы 2.1.7, допустим, что первое из линейных расслоений $\mathcal{I}_{\Delta_1}$ тривиально, т.е. $\Delta_1 = \tau^\vee$. Относительная версия формулы Кушниренко-Бернштейна-Хованского (теорема 1.2.4) позволяет вычислить эйлерову характеристику слоя Милнора функции f_1 на полном пересечении $f_2 = \ldots = f_k = 0$ для $k \leqslant m$ в терминах многогранников Ньютона сечений $f_1, \ldots, f_k$.

Чтобы определить слой Милнора функции f_1, удобно зафиксировать семейство окрестностей для компактной части торического многообразия X_Σ. Например, выберем целочисленную точку a_i на каждой бесконечной грани многогранника Δ_1, и пусть B_ε — множество всех $x \in (\mathbb{C} \setminus 0)^m$ таких, что $\sum_i |x^{a_i}| \leqslant \varepsilon$. Тогда его замыкание в торическом многообразии X_Σ является окрестностью компактной части X_Σ^{comp}.

Определение **2.1.8.** Слоем Милнора функции f_1 на полном пересечении $f_2 = \ldots = f_k = 0$ называется многообразие $\{f_1 - \delta = f_2 = \ldots = f_k = 0\} \cap B_\varepsilon$,

где $|\delta| \ll \varepsilon \ll 1$.

Определение **2.1.9.** Старшие коэффициенты сечений $f_1, \ldots, f_k$ находятся в общем положении, если для любого совместного набора ограниченных граней $\widetilde{\Gamma}_1, \ldots, \widetilde{\Gamma}_k$ многогранников $\widetilde{\Delta}_1, \ldots, \widetilde{\Delta}_k$, системы полиномиальных уравнений $f_1^{\widetilde{\Gamma}_1} = \ldots = f_k^{\widetilde{\Gamma}_k} = 0$ и $f_2^{\widetilde{\Gamma}_2} = \ldots = f_k^{\widetilde{\Gamma}_k} = 0$ определяют регулярные многообразия в максимальном торе $(\mathbb{C} \setminus 0)^m$.

Мы обозначаем смешанный объем пар многогранников $(P_1, Q_1), \ldots, (P_m, Q_m)$ в $\mathbb{R}^m$ через моном $(P_1, Q_1) \cdot \ldots \cdot (P_m, Q_m)$.

Теорема **2.1.10.** *В описанной выше ситуации, эйлерова характеристика слоя Милнора функции f_1 на полном пересечении $\{f_2 = \ldots = f_k = 0\}$ равна*

$$(-1)^{m-k} \sum_{\substack{a_1>0,\ldots,a_k>0 \\ a_1+\ldots+a_k=m}} (\Delta_1, \widetilde{\Delta}_1)^{a_1} \cdot \ldots \cdot (\Delta_k, \widetilde{\Delta}_k)^{a_k}$$

при условии, что старшие коэффициенты сечений $f_1, \ldots, f_k$ находятся в общем положении в смысле определения 2.1.9.

Доказательство. Если старшие коэффициенты находятся в общем положении, то топология слоя Милнора зависит только от многогранников Ньютона $f_1, \ldots, f_k$, и, без ограничения общности, мы можем предположить, что $f_i = s_{\Delta_i} \cdot \tilde{f}_i$, где $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_k$ — многочлены Лорана на $(\mathbb{C} \setminus 0)^m$ и удовлетворяют условию общего положения из глобальной формулы Кушниренко-Бернштейна-Хованского (теорема 1.2.4). Обозначим многогранники Ньютона многочленов $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_k$ и $\tilde{f}_1 - \delta$, где $\delta \neq 0$, через $D_1, \ldots, D_k$ и $\widetilde{D}_1$.

По глобальной формуле Кушниренко-Бернштейна-Хованского (теорема 1.2.4), эйлеровы характеристики $\{\tilde{f}_1 = \ldots = \tilde{f}_k = 0\}$ и $\{\tilde{f}_1 - \delta = \tilde{f}_2 = \ldots = \tilde{f}_k = 0\}$ равны $(-1)^{m-k} \sum\limits_{\substack{a_1>0,\ldots,a_k>0 \\ a_1+\ldots+a_k=m}} D_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot D_k^{a_k}$ и $(-1)^{m-k} \sum\limits_{\substack{a_1>0,\ldots,a_k>0 \\ a_1+\ldots+a_k=m}} \widetilde{D}_1^{a_1} \cdot D_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot D_k^{a_k}$, соответственно.

Так как граница B_ε разделяет множество $\{\tilde{f}_1 - \delta = \tilde{f}_2 = \ldots = \tilde{f}_k = 0\}$ на две части, гомеоморфные множеству $\{\tilde{f}_1 = \ldots = \tilde{f}_k = 0\}$ и слою Милнора

функции f_1 на $\{f_2 = \ldots = f_n = 0\}$ соответственно, эйлерова характеристика всего множества равна

$$(-1)^{m-k} \sum_{\substack{a_1>0,\ldots,a_k>0 \\ a_1+\ldots+a_k=m}} \widetilde{D}_1^{a_1} \cdot D_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot D_k^{a_k} \; - \; (-1)^{m-k} \sum_{\substack{a_1>0,\ldots,a_k>0 \\ a_1+\ldots+a_k=m}} D_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot D_k^{a_k},$$

по аддитивности эйлеровой характеристики. Данная разность равна

$$(-1)^{m-k} \sum_{\substack{a_1>0,\ldots,a_k>0 \\ a_1+\ldots+a_k=m}} (\Delta_1, \widetilde{\Delta}_1)^{a_1} \cdot \ldots \cdot (\Delta_k, \widetilde{\Delta}_k)^{a_k},$$

по леммам 2.1.4 и 2.1.5. □

Суммируя эйлеровы характеристики слоев Милнора функций $f_1|_{\{f_2=\ldots=f_k=0\}}$ по всем некомпактным торическим подмногообразиям в X_Σ, мы получим следующую формулу для эйлеровой характеристики замыкания слоя Милнора.

Так как $\mathcal{I}_{\Delta_i}$ — линейное расслоение на торическом многообразии X_Σ, для любого конуса $\sigma \in \Sigma$ все внутренние точки σ, рассматриваемые как линейные функции на многограннике Δ_i, принимают минимальное значение на одной и той же грани многогранника Δ_i. Обозначим эту грань через A_i, коразмерность конуса σ — через q, и выберем вектор $a_i \in A_i$. Тогда пары $\mathcal{A}_i = \Big(A_i - a_i, (A_i \cap \widetilde{\Delta}_i) - a_i\Big)$ содержатся в одном и том же рациональном q-мерном подпространстве в $\mathbb{R}^m$, и имеют смысл их q-мерные смешанные объемы. Обозначим число $(-1)^{q-k} \sum\limits_{\substack{a_1>0,\ldots,a_k>0 \\ a_1+\ldots+a_k=q}} \mathcal{A}_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot \mathcal{A}_k^{a_k}$ через χ_σ.

Следствие **2.1.11.** *В описанной выше ситуации, эйлерова характеристика слоя Милнора функции f_1 на полном пересечении $\{f_2 = \ldots = f_n = 0\}$ равна $\sum_{\sigma\in\Sigma} \chi_\sigma$ при условии, что старшие коэффициенты $f_1, \ldots, f_k$ находятся в общем положении.*

2.1.4. Эйлеровы препятствия многогранников

Эйлеровы препятствия многообразий. Рассмотрим $\bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$, стратификацию Уитни комплексного алгебраического многообразия U. Выберем

точку x_0 в страте $U_{\alpha'}$ и рассмотрим росток аналитической функции $f : (U, U_{\alpha'}) \to (\mathbb{C}, 0)$ в данной точке. Эйлерова характеристика множества $\{x \in U_\alpha \mid f(x) = \delta, |x - x_0| \leqslant \varepsilon\}$ принимает одно и то же значение для почти всех ростков f и всех положительных чисел $\delta \ll \varepsilon \ll 1$. Данное значение не зависит от выбора точки $x_0 \in U_{\alpha'}$, обозначим через $\mu_\alpha^{\alpha'}$ противоположное к нему (заметим, что оно равно 0, если страт U_α не примыкает к $U_{\alpha'}$). Положим также $\mu_\alpha^\alpha = 1$ для любого $\alpha \in \Lambda$ и обозначим через M матрицу размера $|\Lambda| \times |\Lambda|$ с элементами $\mu_\alpha^{\alpha'}$.

Определение **2.1.12.** Элемент матрицы M^{-1} с индексом (α', α) обозначается $\epsilon_\alpha^{\alpha'}$ и называется *эйлеровым препятствием* замыкания страта U_α в точке страта $U_{\alpha'}$.

Замечание **2.1.13.** Примыкание стратов задает частичный порядок на множестве Λ. Наборы $\mu_\alpha^{\alpha'}$ и $\epsilon_\alpha^{\alpha'}$, рассматриваемые как функции на частично упорядоченном множестве $\Lambda \times \Lambda$, называются обратными по Мёбиусу (подробнее см., например, [103]).

Пример **2.1.14.** Пусть $(U, 0)$ — m-мерная изолированная торическая особенность (она состоит из двух стратов $U \setminus \{0\}$ и $\{0\}$). Обозначим m-мерный конус ее веера через τ, выпуклую оболочку множества $\tau^\vee \cap \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ — через H, а объем $\tau^\vee \setminus H$ — через V. Тогда из следствия 2.1.11 получаем, что матрица M равна $\begin{pmatrix} 1 & m!V - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ для четных m и $\begin{pmatrix} 1 & -m!V \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ для нечетных m. Таким образом, эйлерово препятствие U равно $2 - m!V$ для четных m и $m!V$ для нечетных m.

Комбинаторные коэффициенты $c_A^{A'}$ и $e_A^{A'}$. Напомним, что подмножество $A' \subset A \subset \mathbb{R}^k$ называется *гранью* множества A, если оно представимо в виде пересечения A с некоторой гранью выпуклой оболочки A.

Для грани A' конечного множества $A \subset \mathbb{R}^k$ рассмотрим M' и $M \subset \mathbb{R}^k$, векторные подпространства, параллельные аффинным оболочкам множеств A' и A соответственно. Обозначим проекцию $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k / M'$ через s и выберем такую

форму объема η на M/M', что объем $M/(M'+\mathbb{Z}^k)$ равен $(\dim M/M')!$. Тогда η-объем разности выпуклых оболочек $s(A)$ и $s(A \setminus A')$ обозначается $c_A^{A'} \in \mathbb{Z}$. Положим c_A^A равным 1, а $c_A^{A'}$ — равным 0, если A' не является гранью A.

Пример **2.1.15.** Рассмотренная выше разность закрашена на картинке, иллюстрирующей следующие два примера:

1) $A_1 = \{(0,0,0),\ (0,0,1),\ (2,1,0),\ (1,2,1)\}$, A_1' — вертикальное ребро множества A_1.

2) A_2 — множество всех целочисленных точек внутри выпуклой облочки $2 \cdot A_1$, A_2' — его вертикальное ребро.

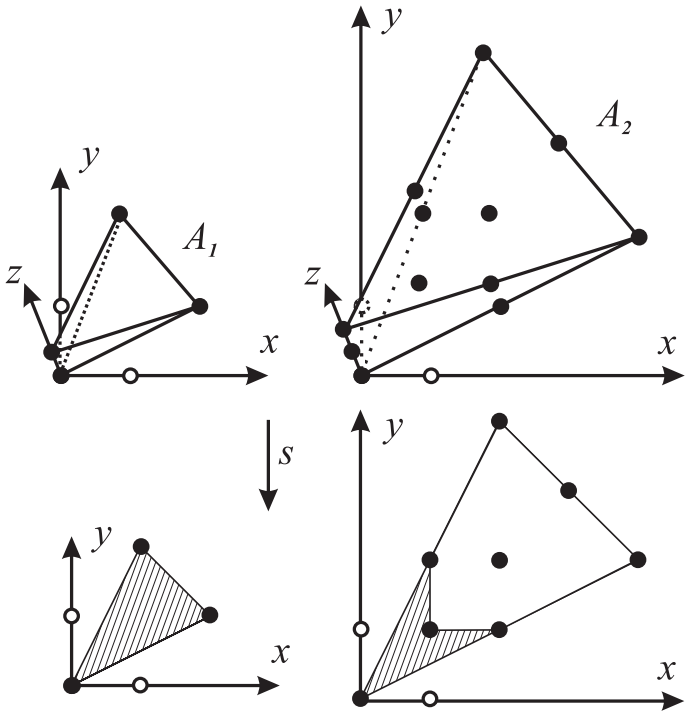


Рисунок 2: число Милнора многогранника.

Рассмотрим квадратную матрицу C с элементами $c_{A'}^{A''}$, где A'' и A' пробегают множество всех граней A, и определим $e_{A'}^{A''}$ как элемент с индексом (A'', A') матрицы C^{-1} . Заметим, что если грани множества A упорядочены по размерности, то матрица C является верхней треугольной с единицами на диагонали. В частности, определитель C равен 1, что доказывает целочисленность матрицы C^{-1} (заметим, однако, что из положительности элементов матрицы C не следует положительность элементов матрицы C^{-1}).

Определение **2.1.16.** Число $e_A^{A'}$ называется *эйлеровым препятствием множества* A в его грани A'.

Например, если мы ограничимся четырьмя гранями множества A_2, примыкающими к вертикальному ребру A_2' из предыдущего примера (включая само ребро A_2'), получим матрицу C^{-1}, правым верхним элементом которой является эйлерово препятствие $e_{A_2'}^{A_2}$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Для целочисленного многогранника $P \subset \mathbb{R}^m$ и его грани Q назовем $c_{Q\cap\mathbb{Z}^m}^{P\cap\mathbb{Z}^m}$ и $e_{Q\cap\mathbb{Z}^m}^{P\cap\mathbb{Z}^m}$ *числом Милнора и эйлеровым препятствием многогранника* P *в его грани* Q, и обозначим их через c_P^Q и e_P^Q соответственно.

Пример **2.1.17.** Рассмотрим целочисленный многоугольник P и его вершину Q. Обозначим через P_Q выпуклую оболочку $\mathbb{Z}^2 \cap P \setminus \{Q\}$. Получим

$$c_P^Q = 2 \cdot \text{area of } P \setminus P_Q, \quad e_P^Q = 2 - 2 \cdot \text{area of } P \setminus P_Q.$$

В частности, при $c_P^Q = e_P^Q = 1$ подходящей аффинной заменой координат в $\mathbb{R}^2$, сохраняющей целочисленную решетку, можно добиться, чтобы примыкающие к вершине Q ребра лежали на прямых

$$y = 0 \text{ и } x = 0.$$

Если $c_P^Q = 2$ (и $e_P^Q = 0$), то, с точностью до аффинной замены координат, можно считать, что ребра, примыкающие к Q, лежат на прямых вида

$$y = 0 \text{ и } y = \left(1 + \frac{1}{n}\right) x, \text{ где } n \in \mathbb{N}.$$

В более общем случае, при $c_P^Q = s$, примыкающие к вершине Q ребра можно перевести в прямые вида

$$y = 0 \text{ and } y = \left(p_0 + \frac{1}{p_1 + \cdots \frac{1}{p_{2k}}} \right) x, \text{ где } p_i \in \mathbb{N} \text{ и } \sum_i p_{2i} = s$$

(число в скобках — цепная дробь последовательности $p_0, \ldots, p_{2k}$). Интересно было бы получить подобную классификацию r-мерных рациональных выпуклых конусов P таких, что $c_P^0 = s$ или $e_P^0 = s$ для достаточно малых r и $|s|$; данная задача связана с задачей классификации многомерных цепных дробей и парусов (см., например, [80]).

Геометрическая интерпретация $c_A^{A'}$ и $e_A^{A'}$. Рассмотрим множество $A = \{a_1, \ldots, a_N\} \subset \mathbb{Z}^k$ такое, что разности $a_i - a_j$ порождают решетку $\mathbb{Z}^k$. Замыкание образа тора $(\mathbb{C} \setminus 0)^k$ при отображении включения $j : (\mathbb{C} \setminus 0)^k \to \mathbb{CP}^A$, $j(t) = (t^{a_1}, \ldots, t^{a_N})$ является торическим многообразием, орбиты которого находятся во взаимно однозначном соответствии с гранями A. Его разбиение на орбиты является стратификацией Уитни $\bigsqcup U_{A'}$, где A' пробегает множество всех граней A. Соответственно, для каждой пары граней A' и A'' данная стратификация задает числа $\mu_{A'}^{A''}$ и $\epsilon_{A'}^{A''}$, определенные в начале раздела.

По теореме 2.1.10, получаем $\mu_{A'}^{A''} = (-1)^{\dim A'' - \dim A'} c_{A'}^{A''}$, следовательно, $\epsilon_{A'}^{A''} = (-1)^{\dim A'' - \dim A'} e_{A'}^{A''}$, что доказывает

Утверждение **2.1.18.** *Эйлерово препятствие множества $A \subset \mathbb{Z}^k$ в грани A' равно с точностью до знака $(-1)^{\dim A' - \dim A}$ эйлерову препятствию торического многообразия, соответствующего A, в точке его орбиты, соответствующей A'.*

2.2. Смешанные расслоенные многогранники

Понятие смешанного расслоенного многогранника является естественным обобщением смешанного объема и интеграла Минковского, (см. работу[14] или

определение 2.2.5 ниже). Оно тесно связано с теорией исключения см. [52], [133] или теорему 2.2.39 ниже. Идея существования смешанных расслоенных многогранников была предложена в работе [98] и доказана в работе [102]. Понятие смешанного расслоенного многогранника можно по непрерывности продолжить на выпуклые тела. Мы приведем явное доказательство существования смешанных расслоенных тел, которое не использует сведение по непрерывности к случаю многогранников (теорема 2.2.6). Оно основано на явной формуле 2.2.2.(∗) для опорной функции смешанного расслоенного тела, представляющей самостоятельный интерес.

2.2.1. Смешанные расслоенные многогранники: обзор

Интеграл Минковского $\int \Delta$ ([14]). Обозначим проекции прямой суммы $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^k$ на слагаемые через p и q соответственно. Рассмотрим целочисленный многогранник $\Delta \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^k$ такой, что проекция $q(\Delta)$ ограничена, и обозначим через S аффинную оболочку $q(\Delta)$. Выберем такую форму объема $\mathrm{d}x$ на S, что объем образа S при проекции $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ равен $(1+\dim S)!$, и рассмотрим множество $I \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^k$ точек вида $\int_{q(\Delta)} s(x)\,\mathrm{d}x$, где s пробегает все непрерывные сечения проекции $q : \Delta \to q(\Delta)$.

Определение **2.2.1.** *Интеграл Минковского*, или *расслоенный многогранник* $\int \Delta$, — замыкание $p(I)$.

Смешанный интеграл Минковского ([102]). Пусть $\tau^\vee \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^k$ — выпуклый многогранный конус, не содержащий никакую прямую. *Смешанный интеграл Минковского, или смешанный расслоенный многогранник,* — симметричная мультилинейная функция $\mathrm{MP} : \underbrace{\mathcal{M}_{\tau^\vee} \times \ldots \times \mathcal{M}_{\tau^\vee}}_{k+1} \to \mathcal{M}_{\tau^\vee}$ такая, что для любого многогранника $\Delta \in \mathcal{M}_{\tau^\vee}$

$$\mathrm{MP}(\Delta, \ldots, \Delta) = \begin{cases} \int \Delta & \text{если } \dim q(\Delta) = n \\ \tau^\vee & \text{иначе} \end{cases}.$$

Доказательство существования и единственности, а также свойства смешанного расслоенного многогранника можно найти в [102], [52]. Ниже в этом разделе доказан более общий факт – существование смешанного расслоенного тела набора выпуклых тел.

Пример **2.2.2.** Если Δ является произведением $P \subset \mathbb{R}^n$ и $Q \subset \mathbb{R}^k$, то $\int \Delta$ равен $\Big((n+1)!\operatorname{Vol} Q\Big) \cdot P$. Если $n = 1$ и $\tau^\vee = \{0\}$, то $\operatorname{MP}(\Delta_0, \ldots, \Delta_n)$ — отрезок длины $\operatorname{MV}(\Delta_0, \ldots, \Delta_n)$.

Нам понадобится следующая формула для опорной функции смешанного расслоенного многогранника. Пусть $\Delta_0, \ldots, \Delta_k$ — многогранники в $\mathcal{M}_{\tau^\vee}$, через B_i обозначим произведение $\mathbb{R}_+ \times q(\Delta_i) \subset \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^k$, где $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ — множество положительных действительных чисел. Для произвольного ковектора $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ обозначим образ Δ_i при отображении $(l, \mathrm{id}) : \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^k$ через $l\Delta_i$.

Утверждение **2.2.3.** *Минимальное значение произвольного ковектора* $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *на* $\operatorname{MP}(\Delta_0, \ldots, \Delta_k)$ *равно*

$$\operatorname{MV}\Big((l\Delta_0,\ B_0),\ \ldots,\ (l\Delta_k,\ B_k)\Big),$$

если $l \in \tau$, *и равно* $-\infty$ *иначе.*

Ниже в этом разделе приведено доказательство в легко отбрасываемом предположении, что многогранники ограничены.

Нам также понадобится чуть более гибкая версия введенных выше обозначений. Для l-мерного векторного подпространства $L \subset \mathbb{R}^k$ рассмотрим полугруппу $\mathcal{M}_{\tau^\vee}(L)$ всех многогранников вида

$$Q + \tau^\vee \times \{x\} \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^k,$$

где x — точка в $\mathbb{R}^k$, а Q — ограниченный многогранник в $\mathbb{R}^n \oplus L$.

Определение **2.2.4.** *Смешанный интеграл Минковского, или смешанный расслоенный многогранник,* — симметричная мультилинейная функция

$$\mathrm{MP} : \underbrace{\mathcal{M}_{\tau^\vee}(L) \times \ldots \times \mathcal{M}_{\tau^\vee}(L)}_{l+1} \to \mathcal{M}_{\tau^\vee}(0),$$

такая, что, для любого многогранника $\Delta \in \mathcal{M}_{\tau^\vee}(L)$,

$$\mathrm{MP}(\Delta, \ldots, \Delta) = \begin{cases} \int \Delta & \text{if } \dim q(\Delta) = l \\ \tau^\vee & \text{иначе} \end{cases}.$$

Заметим, что значение $\mathrm{MP}(\Delta_0, \ldots, \Delta_l)$ не зависит от выбора конуса $\tau^\vee$ и пространства L в определении выше. А именно, конус $\tau^\vee$ определяется аргументами $\Delta_0, \ldots, \Delta_l$ однозначно. Пространство L тоже однозначно определяется $\Delta_0, \ldots, \Delta_l$, при условии, что проекция $q(\Delta_0 + \ldots + \Delta_l)$ l-мерна; иначе, $\mathrm{MP}(\Delta_0, \ldots, \Delta_l) = \tau^\vee$ вне зависимости от выбора L.

2.2.2. Смешанные расслоенные тела

Рассмотрим L и M, вещественные векторные пространства размерностей l и m соответственно, и пусть μ — форма объема на пространстве M. Обозначим проекции прямой суммы $L \oplus M$ на слагаемые L и M через u и v соответственно. Пусть $\Delta \subset L \oplus M$ — выпуклое тело, т. е. компактное множество, которое вместе с любой парой своих точек содержит соединяющий их отрезок. Для выпуклого тела и произвольной точки $a \in M$, обозначим *слой* $u\big(\Delta \cap v^{(-1)}(a)\big)$ выпуклого тела Δ через Δ_a. Напомним, что *опорная функция* $B(\cdot) : L^* \to \mathbb{R}$ выпуклого тела $B \subset L$ определяется как $B(\gamma) = \max\limits_{b \in B} \langle \gamma, b \rangle$ для любого ковектора $\gamma \in L^*$.

Определение **2.2.5.** Для выпуклого тела $\Delta \subset L \oplus M$ его *интеграл Минковского* — выпуклое тело $B \subset L$, опорная функция которого равна интегралу опорных функций слоев Δ_a, где a пробегает множество $v(\Delta)$:

$$B(\gamma) = \textstyle\int_{v(\Delta)} \Delta_a(\gamma)\, \mu \text{ for every } \gamma \in L^*.$$

Интеграл Минковского обозначается $\int \Delta\, \mu$.

Через $\mathcal{C}(K)$ обозначим множество всех выпуклых тел в вещественном векторном пространстве K. Данное множество является полугруппой относительно сложения по Минковскому: $A + B = \{a + b \,|\, a \in A, b \in B\}$.

Теорема **2.2.6.** *Существует единственное симметричное мультилинейное относительно сложения по Минковскому отображение*

$$\mathrm{MP}_\mu : \underbrace{\mathcal{C}(L \oplus M) \times \ldots \times \mathcal{C}(L \oplus M)}_{m+1} \to \mathcal{C}(L)$$

такое, что $\mathrm{MP}_\mu(\Delta, \ldots, \Delta) = \int \Delta \, \mu$ *для любого выпуклого тела* $\Delta \subset L \oplus M$.

Определение **2.2.7.** Выпуклое тело $\mathrm{MP}_\mu(\Delta_0, \ldots, \Delta_m)$ называется *смешанным расслоенным телом* тел $\Delta_0, \ldots, \Delta_m$.

Нетрудно доказать, что интеграл Минковского является однородным многочленом и, следовательно, допускает подобную поляризацию в классе виртуальных выпуклых тел (см. определение 2.2.14). Наиболее важная часть утверждения заключается в том, что данная поляризация дает не просто виртуальные выпуклые тела, а “по-настоящему выпуклые”.

Доказательство теоремы 2.2.6.

Определение **2.2.8.** *Теневым объемом* $S_\mu(B)$ выпуклого тела $B \subset \mathbb{R} \oplus M$ называется интеграл $\int_{B_0} \varphi \, \mu$, где B_0 — образ проекции B на M, φ — максимальная функция на B_0 такая, что ее график содержится в B (иными словами, $\varphi(a) = \max_{(t,a) \in B} t$ для любой точки $a \in B_0$).

Определение интеграла Минковского можно переформулировать следующим образом. Для ковектора $\gamma \in L^*$ и выпуклого тела $\Delta \subset L \oplus M$ обозначим образ Δ при проекции $(\gamma, \mathrm{id}) : L \oplus M \to \mathbb{R} \oplus M$ через $\Gamma_\Delta(\gamma)$.

Лемма **2.2.9.** *Значение опорной функции интеграла Минковского* $\int \Delta \, \mu$ *на ковекторе* $\gamma \in L^*$ *равно теневому объему тела* $\Gamma_\Delta(\gamma) \subset \mathbb{R} \oplus M$.

Из данной леммы следует, что вместо построения смешанных расслоенных тел достаточно использовать конструкцию смешанного теневого объема в следующем смысле.

Теорема **2.2.10.** *Существует единственная симметричная мультилинейная относительно сложения по Минковскому функция* MS_μ *от* $m+1$ *выпуклых тел в* $\mathbb{R}\oplus M$ *такая, что* $\mathrm{MS}_\mu(B,\dots,B) = S_\mu(B)$ *для любого выпуклого тела* $B \subset \mathbb{R}\oplus M$.

Доказательство приведено в разделе 2.2.3 и основано на явной формуле для функции MS_μ, которая в дальнейшем используется при доказательстве теоремы 2.2.6 (см. лемму 2.2.31).

Определение **2.2.11.** Число $\mathrm{MS}_\mu(B_0,\dots,B_m)$ называется *смешанным теневым объемом* выпуклых тел $B_0,\dots,B_m \subset \mathbb{R}\oplus M$.

Заметим, что смешанный теневой объем является частным случаем смешанного объема пар (см. утверждение 2.2.32).

Предположим, что существование смешанных расслоенных тел доказано. Тогда из леммы 2.2.9 и теоремы 2.2.10 следует, что значение опорной функции смешанного расслоенного тела $\mathrm{MP}_\mu(\Delta_0,\dots,\Delta_m)$ на ковекторе $\gamma \in L^*$ равно смешанному теневому объему $\mathrm{MS}_\mu\big(\Gamma_{\Delta_0}(\gamma),\dots,\Gamma_{\Delta_m}(\gamma)\big)$. Мы обратим это рассуждение, используя следующий факт. Напомним, что функция $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ называется *положительно однородной*, если $f(ta) = tf(a)$ для всех $a\in\mathbb{R}^k$ и $t\geqslant 0$.

Теорема **2.2.12.** *Для любого набора выпуклых тел* $\Delta_0,\dots,\Delta_m \subset L\oplus M$, *выражение* $\mathrm{MS}_\mu\big(\Gamma_{\Delta_0}(\gamma),\dots,\Gamma_{\Delta_m}(\gamma)\big)$ *является выпуклой положительно однородной функцией от ковектора* $\gamma\in L^*$.

Доказательство приведено в разделе 2.2.4.

По теореме 2.2.12, для любого набора выпуклых тел $\Delta_0,\dots,\Delta_m \subset L\oplus M$ выражение $\mathrm{MS}_\mu\big(\Gamma_{\Delta_0}(\gamma),\dots,\Gamma_{\Delta_m}(\gamma)\big)$ задает опорную функцию некоторого

выпуклого тела $B \in L$:

$$\mathrm{MS}_\mu\big(\Gamma_{\Delta_0}(\gamma), \dots, \Gamma_{\Delta_m}(\gamma)\big) = B(\gamma) \text{ для каждого } \gamma \in L^*. \qquad (*)$$

Данное тело B удовлетворяет определению смешанного расслоенного тела $\Delta_0, \dots, \Delta_m$, по лемме 2.2.9 и теореме 2.2.10. □

Замечание **2.2.13.** В частности, мы получили, что опорная функция смешанного расслоенного тела задается формулой $(*)$.

2.2.3. Смешанный теневой объем: доказательство теоремы 2.2.10.

Теневой объем выпуклого тела $\Delta \subset \mathbb{R} \oplus M$ равен объему некоторого виртуального выпуклого тела $[\Delta]$, соответствующего телу Δ (см. определение 2.2.18 и лемму 2.2.20 ниже). Так как соответствие $\Delta \to [\Delta]$ линейно относительно сложения по Минковскому, смешанный теневой объем выпуклых тел $\Delta_0, \dots, \Delta_m \subset \mathbb{R} \oplus M$ можно определить как смешанный объем виртуальных тел $[\Delta_0], \dots, [\Delta_m]$. Таким образом мы докажем существование смешанного теневого объема. Чтобы подробнее сформулировать данное рассуждение, напомним определение виртуального выпуклого тела.

Пусть Λ — коммутативная полугруппа, в которой выполняется закон сокращения ($a + c = b + c \ \Rightarrow \ a = b$). *Группой Гротендика* называется группа формальных разностей элементов полугруппы Λ. Иными словами, Λ_G является фактор-множеством $\Lambda \times \Lambda$ по отношению эквивалентности $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$ с операциями $(a, b) + (c, d) = (a + c,\ b + d)$ и $-(a, b) = (b, a)$. Отображение, сопоставляющее каждому элементу $a \in \Lambda$ элемент $(a + a, a) \in \Lambda_G$, является инъекцией $\Lambda \hookrightarrow \Lambda_G$. Элемент вида $(a + a, a) \in \Lambda_G$ называется *собственным* и обычно отождествляется с $a \in \Lambda$. В рамках данного соглашения корректна запись $(a, b) = a - b$.

Определение **2.2.14.** *Группой виртуальных тел* в вещественном векторном пространстве K называется группа Гротендика полугруппы выпуклых тел в K (относительно операции сложения по Минковскому).

Операцию вычисления классического смешанного объема можно по линейности продолжить на виртуальные тела. Данное продолжение единственно, но не монотонно: (например, $\mathrm{MV}(-A, A) > \mathrm{MV}(-A, 2A)$ для выпуклого многоугольника A).

Определение **2.2.15.** Пусть μ — инвариантная относительно параллельных переносов форма объема на вещественном векторном пространстве K размерности n. *Смешанный объем* MV_μ — симметричная мультилинейная относительно сложения по Минковскому функция от n виртуальных тел в K, совпадающая на диагонали с функцией объема в смысле формы μ.

Определение **2.2.16.** *Опорной функцией* разности Δ двух выпуклых тел Δ_1 и Δ_2 в K, называется функция $\Delta(\cdot)\colon K^* \to \mathbb{R}$, равная $\Delta(\gamma) = \Delta_1(\gamma) - \Delta_2(\gamma)$.

Мы дадим более явное определение группы виртуальных тел. Функция $f\colon K \to \mathbb{R}$ называется *DC-функцией*, если она может быть представлена в виде разности двух выпуклых функций.

Лемма **2.2.17.** *Отображение, сопоставляющее каждому виртуальному телу Δ его опорную функцию $\Delta(\cdot)$, является изоморфизмом между группой виртуальных тел в вещественном векторном пространстве K и группой положительно однородных DC-функций на двойственном пространстве K^*.*

Рассмотрим m-мерное вещественное векторное пространство M. Через l_- обозначим луч $\{(t, 0) \,|\, t \leqslant 0\} \subset \mathbb{R} \oplus M$, а через H_a — полупространство $\{(t, x) \,|\, t \geqslant a\} \subset \mathbb{R} \oplus M$.

Определение **2.2.18.** *Тенью* $[\Delta]$ выпуклого тела $\Delta \subset \mathbb{R} \oplus M$ называется разность выпуклых тел $(\Delta + l_-) \cap H_a$ и $l_- \cap H_a$, где a — отрицательное число такое, что $H_a \supset \Delta$.

Данное определение не зависит от выбора a, потому что его можно переформулировать в терминах опорных функций следующим образом. Каждому

ковектору $\gamma = (t, \gamma_0) \in (\mathbb{R} \oplus M)^*$ сопоставим ковектор $[\gamma]$, равный $(\max\{0, t\}, \gamma_0) \in (\mathbb{R} \oplus M)^*$. Тогда $[\Delta](\gamma) = \Delta([\gamma])$ для любого γ.

Доказательство теоремы 2.2.10. Обозначим единичную форму объема на $\mathbb{R}$ через dt. Функция, которая каждому набору $\Delta_0, \dots, \Delta_m$ выпуклых тел в $\mathbb{R} \oplus M$ сопоставляет число $\mathrm{MV}_{dt \wedge \mu}\big([\Delta_0], \dots, [\Delta_m]\big)$, по лемме 2.2.19 ниже, является симметричной мультилинейной относительно сложения по Минковскому, а на диагонали она совпадает с функцией теневого объема S_μ, по лемме 2.2.20 ниже. Следовательно, данная функция удовлетворяет определению смешанного теневого объема. Единственность следует из леммы 2.2.22 ниже. □

Лемма **2.2.19.** $[\Delta_1 + \Delta_2] = [\Delta_1] + [\Delta_2]$.

Доказательство. $[\Delta_1 + \Delta_2](\gamma) = \Delta_1([\gamma]) + \Delta_2([\gamma]) = [\Delta_1](\gamma) + [\Delta_2](\gamma)$ для любого ковектора γ. □

Лемма **2.2.20.** $S_\mu(\Delta) = \mathrm{MV}_{dt \wedge \mu}([\Delta], \dots, [\Delta])$.

Доказательство Если $\Delta \subset H_0$ в обозначениях определения 2.2.18, то тень $[\Delta]$, по определению, совпадает с выпуклым телом $(\Delta + l_-) \cap H_0$, а функции $S_\mu(\Delta)$ и $\mathrm{MV}_{dt \wedge \mu}([\Delta], \dots, [\Delta])$ равны объему $(\Delta + l_-) \cap H_0$. Утверждение леммы 2.2.20 можно свести к этому частному случаю следующим образом: заменим произвольное тело Δ на его сдвиг $\Delta + \{v\} \subset H_0$, где вектор v имеет вид $(s, 0) \in \mathbb{R} \oplus M$.

Заметим, что и $S_\mu(\Delta)$, и $\mathrm{MV}_{dt \wedge \mu}([\Delta], \dots, [\Delta])$ увеличиваются в произведение s на объем проекции $\Delta \subset \mathbb{R} \oplus M \to M$ раз. Данный факт следует из определения теневого объема $S_\mu(\Delta)$ и леммы 2.2.21 для смешанного объема $\mathrm{MV}_{dt \wedge \mu}([\Delta], \dots, [\Delta])$. □

Лемма **2.2.21.** $\mathrm{MV}_{dt \wedge \mu}([\Delta_0 + \{(s, 0)\}], [\Delta_1], \dots, [\Delta_m]) =$

$$= \mathrm{MV}_{dt \wedge \mu}([\Delta_0], \dots, [\Delta_m]) + s \, \mathrm{MV}_\mu(B_1, \dots, B_m),$$

где выпуклое тело $B_j \subset M$ является проекцией $\Delta_j \subset \mathbb{R} \oplus M$ на M, а s — положительное число.

Доказательство. Равенство

$$\mathrm{MV}_{dt\wedge\mu}([\{(s,0)\}],[\Delta_1],\dots,[\Delta_m]) = s\,\mathrm{MV}_\mu(B_1,\dots,B_m)$$

следует из утверждения 1.1.7 (при $V=\mathbb{R}\oplus M$ и $U=\mathbb{R}\times\{0\}$). □

Лемма **2.2.22.**

$$\mathrm{MS}_\mu(\Delta_0,\dots,\Delta_m) = \sum_{0\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant m} (-1)^{m+1-p} S_\mu(\Delta_{i_1}+\ldots+\Delta_{i_p}).$$

Доказательство. Чтобы доказать равенство

$$l(a_1,\dots,a_n) = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant n} (-1)^{n-p} l(a_{i_1}+\ldots+a_{i_p},\dots,a_{i_1}+\ldots+a_{i_p})$$

для любой симметричной мультилинейной функции l, достаточно раскрыть скобки и привести подобные слагаемые в правой части. □

Следующая лемма описывает, как изменяется смешанный теневой объем при сдвигах и растяжениях аргументов вдоль прямой $\mathbb{R}\times\{0\}\subset\mathbb{R}\oplus M$.

Лемма **2.2.23.** *1) Пусть $D_s:\mathbb{R}\oplus M\to\mathbb{R}\oplus M$ — растяжение вдоль $\mathbb{R}\times\{0\}$, т. е. $D_s(t,x)=(st,x)$ для всех $t\in\mathbb{R}$ и $x\in M$. Тогда $\mathrm{MS}_\mu(D_s\Delta_0,\dots,D_s\Delta_m) = s\,\mathrm{MS}_\mu(\Delta_0,\dots,\Delta_m)$ для любого неотрицательного s.*
2) Рассмотрим сдвиг $T_s:\mathbb{R}\oplus M\to\mathbb{R}\oplus M$, $T_s(t,x)=(t+s,x)$ всех $t\in\mathbb{R}$ и $x\in M$. Тогда $\mathrm{MS}_\mu(T_s\Delta_0,\Delta_1,\dots,\Delta_m) = \mathrm{MS}_\mu(\Delta_0,\dots,\Delta_m) + s\,\mathrm{MV}_\mu(B_1,\dots,B_m)$, где выпуклое тело $B_j\subset M$ является проекцией $\Delta_j\subset\mathbb{R}\oplus M$ на M.

В частности, смешанный теневой объем не сохраняется при параллельных переносах.

Доказательство. Часть 1 следует из определения теней и равенства $\mathrm{MV}_{dt\wedge\mu}(D_s\Delta_0,\dots,D_s\Delta_m) = s\,\mathrm{MV}_{dt\wedge\mu}(\Delta_0,\dots,\Delta_m)$ для выпуклых тел $\Delta_0,\dots,\Delta_m$. Часть 2 является следствием леммы 2.2.21. □

2.2.4. Выпуклость теневого объема: доказательство теоремы 2.2.12.

Определение **2.2.24.** *Множеством с выпуклой структурой* называется пара (U, C), где U — произвольное множество, а C — произвольное отображение $U \times (0,1) \times U \to U$.

Пример **2.2.25.** Пара $(\mathbb{R}^k, C_{\mathbb{R}^k})$, где $C_{\mathbb{R}^k}(u,t,v) = tu + (1-t)v$, является множеством с выпуклой структурой.

Определение **2.2.26.** Рассмотрим (U, C) и (V, D), множества с выпуклыми структурами, и предположим, что на V введен частичный порядок $\leqslant$. Отображение $f : U \to V$ называется *выпуклым отображением из* (U, C) *в* $(V, D, \leqslant)$, если $f\Big(C(u,t,v)\Big) \leqslant D\Big(f(u), t, f(v)\Big)$ для любой тройки $(u,t,v) \in U \times (0,1) \times U$.

Пример **2.2.27.** Для отображения из $(\mathbb{R}^k, C_{\mathbb{R}^k})$ в $(\mathbb{R}^1, C_{\mathbb{R}^1}, \leqslant)$, данное определение совпадает с классическим.

Лемма **2.2.28** (тавтология)**.** *Если отображения* $f : (U, C) \to (V, D, \leqslant)$ *и* $g : (V, D) \to (W, E, \leqslant)$ *выпуклы, и* g *монотонно возрастает, то их композиция выпукла.*

Для классического понятия выпуклости эта лемма известна как “теорема о композиции”. Мы используем ее при доказательстве теоремы 2.2.12 следующим образом. Наша цель — доказать выпуклость отображения, сопоставляющего каждому ковектору $\gamma \in L^*$ смешанный теневой объем $\mathrm{MS}_\mu\big(\Gamma_{\Delta_0}(\gamma), \dots, \Gamma_{\Delta_m}(\gamma)\big)$. Его можно представить в виде композиции более простых отображений (см. диаграмму (**) ниже), выпуклость и монотонность которых просто доказать (этому и будет посвящен конец данного раздела). Таким образом, мы, по лемме 2.2.28, докажем выпуклость отображения из теоремы 2.2.12.

Для выпуклого тела $B \subset M$ через $\mathcal{C}(B)$ обозначим множество всех выпуклых тел $\Delta \subset \mathbb{R} \oplus M$ таких, что проекция Δ на M совпадает с B. Определим теневую выпуклую структуру и выпуклую структуру Минковского C_S и C_M на

$\mathcal{C}(B)$ следующим образом. Рассмотрим выпуклые тела $\Delta_i = \{(t,a)\,|\,a \in B,\, t \in [\psi_i(a), \varphi_i(a)]\},\ i = 1,2$, в $\mathcal{C}(B)$, где φ_i и $-\psi_i$ — вогнутые функции на B. Положим по определению

$$C_S(\Delta_1, \alpha, \Delta_2) = \Big\{(t,a)\,|\,a \in B,\, t \in [\alpha\psi_1(a)+(1-\alpha)\psi_2(a),\, \alpha\varphi_1(a)+(1-\alpha)\varphi_2(a)]\Big\},$$

$$C_M(\Delta_1, \alpha, \Delta_2) = \alpha\Delta_1 + (1-\alpha)\Delta_2, \quad \Delta_1 \leqslant \Delta_2 \Leftrightarrow \varphi_1 \leqslant \varphi_2.$$

Для выпуклых тел $\Delta_0, \dots, \Delta_m \subset L \oplus M$ обозначим проекцию Δ_j на M через B_j, и рассмотрим отображения

$$(L^*,\, C_{L^*}) \xrightarrow{(\Gamma_{\Delta_0},\dots,\Gamma_{\Delta_m})} \big(\mathcal{C}(B_0) \times \ldots \times \mathcal{C}(B_m),\, C_S,\, \leqslant\big) \xrightarrow{(\mathrm{id},\dots,\mathrm{id})} \\ \to \big(\mathcal{C}(B_0) \times \ldots \times \mathcal{C}(B_m),\, C_M,\, \leqslant\big) \xrightarrow{\mathrm{MS}_\mu} (\mathbb{R},\, C_{\mathbb{R}},\, \leqslant), \qquad (**)$$

где id отображает каждое выпуклое тело на себя.

Лемма **2.2.29.** *Если выпуклое тело $B \subset M$ является проекцией выпуклого тела $\Delta \subset L \oplus M$, то отображение $\Gamma_\Delta : (L^*,\, C_{L^*}) \to \big(\mathcal{C}(B),\, C_S,\, \leqslant\big)$ выпукло.*

Доказательство. Если $\dim M = 0$, то тело $\Gamma_\Delta(\gamma) \subset \mathbb{R} \oplus \{0\}$ — отрезок $[-\Delta(-\gamma), \Delta(\gamma)]$ для любого $\gamma \in L^*$, и выпуклость Γ_Δ следует из выпуклости опорной функции $\Delta(\cdot)$. Общее утверждение сводится к данному частному случаю, так как выпуклость отображения $\Gamma_\Delta : (L^*,\, C_{L^*}) \to \big(\mathcal{C}(B),\, C_S,\, \leqslant\big)$ эквивалентна выпуклости отображений $\Gamma_{\Delta_a} : (L^*,\, C_{L^*}) \to \big(\mathcal{C}(\{0\}),\, C_S,\, \leqslant\big)$ для всех точек $a \in B$ (определение слоя Δ_a тела Δ см. в начале раздела 2.2.2). □

Лемма **2.2.30.** *Если Δ_1 и Δ_2 — элементы множества $\mathcal{C}(B)$, и $\alpha \in (0,1)$, то*

$C_S(\Delta_1, \alpha, \Delta_2) \leqslant C_M(\Delta_1, \alpha, \Delta_2)$.

Доказательство. Каждую точку (t,a) из левой части неравенства можно представить в виде $\big(\alpha s_1 + (1-\alpha)s_2, a\big)$, где $(s_1,a) \in \Delta_1$ и $(s_2,a) \in \Delta_2$. Следовательно, она равна $\alpha(s_1,a) + (1-\alpha)(s_2,a)$, поэтому принадлежит множеству из правой части неравенства.□

Лемма **2.2.31.** *Если* $\Delta_j^0 \in C(B_j)$, $\Delta_j^1 \in C(B_j)$ *и* $\Delta_j^0 \leqslant \Delta_j^1$ *при* $j = 0, \dots, m$, *то* $\mathrm{MS}_\mu(\Delta_0^0, \dots, \Delta_m^0) \leqslant \mathrm{MS}_\mu(\Delta_0^1, \dots, \Delta_m^1)$.

Доказательство. Обозначим выпуклое тело $\{0\} \times B_j \subset \mathbb{R} \oplus M$ через $\tilde{B}_j$, а полупространство $\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times M$ — через H. Параллельно перенося тела Δ_j^i и пользуясь частью 2 леммы 2.2.23, без ограничения общности можем предположить, что $\Delta_j^i \subset H$ для любых $i = 1, 2$ и $j = 0, \dots, m$. В таком случае, тени $[\Delta_j^i]$ тел Δ_j^i (см. определение 2.2.18) в совпадают с выпуклыми оболочками $\mathrm{conv}(\Delta_j^i \cup \tilde{B}_j)$. В частности, тени $[\Delta_j^i]$ являются выпуклыми телами, и $[\Delta_j^0] \subset [\Delta_j^1]$. Так как смешанный теневой объем равен смешанному объему теней, неравенство $\mathrm{MS}_\mu(\Delta_0^0, \dots, \Delta_m^0) \leqslant \mathrm{MS}_\mu(\Delta_0^1, \dots, \Delta_m^1)$ следует из монотонности смешанного объема выпуклых тел.□

Доказательство теоремы 2.2.12. Положительная однородность следует из части 1 леммы 2.2.23. Чтобы доказать выпуклость, представим отображение, сопоставляющее смешанный теневой объем $\mathrm{MS}_\mu\big(\Gamma_{\Delta_0}(\gamma), \dots, \Gamma_{\Delta_m}(\gamma)\big)$ каждому ковектору $\gamma \in L^*$, в виде композиции более простых отображений (**). Данные три отображения являются выпуклыми и монотонно возрастающими.

А именно, выпуклость отображения $\Gamma_{\Delta_j} : (L^*, C_{L^*}) \to \big(\mathcal{C}(B_j), C_S, \leqslant\big)$ доказана в лемме 2.2.29. Монотонное возрастание отображения $\mathrm{id} : \big(\mathcal{C}(B_j), C_S, \leqslant\big) \to (\mathcal{C}, C_M, \leqslant)$ очевидна, выпуклость следует из леммы 2.2.30. Выпуклость смешанного теневого объема следует из линейности. По лемме 2.2.31 , смешанный теневой объем монотонно возрастает.

Так как данные отображения выпуклы и монотонно возрастают, их композиция тоже выпукла, по лемме 2.2.28.□

2.2.5. Замечания.

Смешанные объемы пар. Смешанный теневой объем является частным случаем смешанного объема пар (см. определение 2.1.1). Рассмотрим проекцию $p\colon \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^k \to \{0\} \times \mathbb{R}^k$, и пусть l_- — луч $\{(t, 0, \dots, 0) \,|\, t \leqslant 0\} \subset \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^k$.

Для выпуклого тела $\Delta \subset \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^k$ обозначим пару $\big(\Delta + l_-, p(\Delta) + l_-\big) \in \mathrm{BP}_{l_-}$ через $\widetilde{\Delta}$.

Утверждение **2.2.32.** $\mathrm{MS}_\mu(\Delta_0, \ldots, \Delta_k) = \mathrm{MV}\big(\widetilde{\Delta}_0, \ldots, \widetilde{\Delta}_k\big)$ *для любого набора выпуклых тел* $\Delta_0, \ldots, \Delta_k$ *в* $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^k$.

Доказательство. Данное равенство следует из определений при $\Delta_0 = \ldots = \Delta_k$. Из единственности смешанного теневого объема следует, что общее утверждение можно свести к данному частному случаю. □

Определение интеграла Минковского в форме Бильера—Штурмфельса. Оригинальное определение расслоенного интеграла слегка отличается от определения 2.2.5. Пусть $p : N \to K$ — проекция n-мерного вещественного векторного пространства на k-мерное. Зафиксируем на K форму объема μ.

Определение **2.2.33** ([14])**.** Для выпуклого тела $\Delta \subset N$ множество всех точек вида $\int_{p(\Delta)} s\mu \in N$, где $s : p(\Delta) \to \Delta$ является непрерывным сечением проекции p, называется *Интегралом Минковского* тела Δ и обозначается $\int^{BS} \Delta\, \mu$.

Определения 2.2.5 и 2.2.33 связаны следующим образом. В обозначениях данных определений, если мы предположим, что $N = L \oplus M$, а p — проекция $L \oplus M \to M$, то выпуклое тело $\int^{BS} \Delta\, \mu$ содержится в слое проекции p, и $\int \Delta\, \mu$ совпадает с образом $\int^{BS} \Delta\, \mu$ при проекции $L \oplus M \to L$.

Определение 2.2.33 также сводится к определению 2.2.5. В тех же обозначениях, положим теперь $L = N$, $M = K$ и допустим, что тело Δ^{diag} состоит из точек $\big(a, p(a)\big) \in L \oplus M$, где a пробегает множество всех точек выпуклого тела $\Delta \subset N$. Тогда $\int^{BS} \Delta\, \mu = \int \Delta^{diag}\, \mu$. В частности, обозначив $\mathrm{MP}_\mu(\Delta_0^{diag}, \ldots, \Delta_m^{diag})$ через $\mathrm{MP}_\mu^{BS}(\Delta_0, \ldots, \Delta_m)$, можно переформулировать теорему 2.2.6 для смешанных расслоенных тел в форме Бильера—Штурмфельса.

Теорема **2.2.34.** *Существует единственное симметричное мультилинейное относительно сложения по Минковскому отображение*

$$\mathrm{MP}_\mu^{BS} : \underbrace{\mathcal{C}(N) \times \ldots \times \mathcal{C}(N)}_{k+1} \to \mathcal{C}(N)$$

такое, что $\mathrm{MP}_\mu^{BS}(\Delta,\dots,\Delta) = \int^{BS} \Delta\,\mu$ *для любого смешанного тела* $\Delta \subset N$.

Монотонность смешанных расслоенных тел. Из доказательства теоремы 2.2.12 тут же следует ещё один факт.

Теорема **2.2.35.** *В обозначениях теоремы 2.2.6, рассмотрим выпуклые тела* $\Delta_0,\dots,\Delta_m$, $\Delta_0',\dots,\Delta_m'$ *в пространстве* $L\oplus M$. *Если* $\Delta_i \subset \Delta_i'$ *и* $v(\Delta_i) = v(\Delta_i')$ *для любого* i, *где* v *— проекция* $L\oplus M \to M$, *то* $\mathrm{MP}_\mu(\Delta_0,\dots,\Delta_m) \subset \mathrm{MP}_\mu(\Delta_0',\dots,\Delta_m')$.

Если $v(\Delta_i) \neq v(\Delta_i')$, то утверждение, вообще говоря, неверно, однако $\mathrm{MP}_\mu(\Delta_0,\dots,\Delta_m) \subset \mathrm{MP}_\mu(\Delta_0',\dots,\Delta_m') + a$ при подходящем выборе $a \in L$ (см. раздел 2.2.6).

2.2.6. Неявное определение смешанного расслоенного тела: монотонность и связь с теорией исключения.

Теорема **2.2.36.** *Смешанное расслоенное тело тел* $A_1,\dots,A_k$ *в* l*-мерной плоскости* L *– единственное тело* $X \subset L$, *удовлетворяющее уравнению*

$$\mathrm{MV}(A_1,\dots,A_k,B_2,\dots,B_l) = \mathrm{MV}(X,B_2,\dots,B_l)$$

для любых выпуклых тел $B_i \subset L$.

Доказательство. Так ка тело однозначно определено своими смешанными объемами с произвольными наборами тел, достаточно доказать, что смешанное расслоенное тело удовлетворяет указанному уравнению. Для случая, когда $A_1 = \ldots = A_k = C \times B$, $B \subset L$, это уравнение становится тавтологией. Случай $A_1 = \ldots = A_k = A$ можно свести к предыдущему, аппроксимировав A как $\sqcup_i C_i \times B_i$ и заметив, что при этом $\mathrm{MV}(A_1,\dots,A_k,B_2,\dots,B_l)$ аппроксимируется как $\sum_i \mathrm{MV}(C_i\times B_i,\dots,C_i\times B_i,B_2,\dots,B_l)$ (это видно, например, из утверждения 1.1.3), а расслоенное тело A – как сумма Миковского расслоенных тел $C_i \times B_i$. Наконец, произвольный случай сводится к случаю $A_1 = \ldots = A_k$ по линейности смешанных расслоенных тел и смешанных объемов. □

Это альтернативное определение смешанного расслоенного тела позволяет, в частности, показать его монотонную зависимость от аргументов и обнаружить связь с теорией исключения.

Теория исключения. Обозначим через $\overline{M}$ замыкание множества M в топологии Зарисского. Для алгебраического отображения $f : M \to (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ неприводимого алгебраического многообразия M обозначим число точек прообраза $f^{(-1)}(x)$ точки общего положения $x \in f(M)$ через $m(f)$, если данное число конечно, иначе положим $m(f)$ равным 0. Определим *цикл* $N = \sum_i a_i N_i$ в $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ как формальную линейную комбинацию с целыми коэффициентами a_i неприводимых алгебраических многообразий $N_i \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ одинаковой размерности.

Определение **2.2.37.** Пусть $\pi : (\mathbb{C} \setminus 0)^n \mapsto (\mathbb{C} \setminus 0)^{n-k}$ — эпиморфизм комплексных торов. Для цикла $N = \sum_i a_i N_i$ в $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ цикл $\sum_i m(\pi|_{N_i}) a_i \overline{\pi(N_i)}$ называется *проекцией* $\pi_* N$ цикла N.

Пусть $f_1, \dots, f_m$ — многочлены Лорана на $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ такие, что $\operatorname{codim}\{f_1 = \dots = f_m = 0\} = m$. Обозначим цикл пересечения дивизоров многочленов $f_1, \dots, f_m$ через $[f_1 = \dots = f_m = 0]$.

Определение **2.2.38.** Пусть $f_0, \dots, f_k$ — многочлены Лорана на $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ такие, что $\operatorname{codim}\{f_0 = \dots = f_k = 0\} = k + 1$. Многочлен Лорана $\pi_{f_0,\dots,f_k}$ on $(\mathbb{C} \setminus 0)^{n-k}$ такой, что $[\pi_{f_0,\dots,f_k} = 0] = \pi_*[f_0 = \dots = f_k = 0]$, называется *элиминантом* многочленов $f_0, \dots, f_k$ относительно проекции π.

Элиминант $\pi_{f_0,\dots,f_k}$ определен однозначно с точностью до мономиального множителя, соответственно, его многогранник Ньютона определяется с точностью до сдвига.

Теорема **2.2.39.** *Рассмотрим $\pi^\times : \mathbb{Z}^{n-k} \hookrightarrow \mathbb{Z}^n$, решетку характеров, заданную эпиморфизмом $\pi : (\mathbb{C} \setminus 0)^n \mapsto (\mathbb{C} \setminus 0)^{n-k}$. Пусть $A_0, \dots, A_k \subset \mathbb{Z}^n$ и $A \subset \mathbb{Z}^{n-k}$ — многогранники Ньютона многочленов $f_0, \dots, f_k$ и $\pi_{f_0,\dots,f_k}$. Тогда*

A – смешанное расслоенное тело $A_0, \dots, A_k$, т.е. для любых выпуклых тел $B_1, \dots, B_{n-k-1} \subset \mathbb{Z}^{n-k}$ верно

$$\mathrm{MV}(A, B_1, \dots, B_{n-k-1}) =$$

$$= \mathrm{MV}(A_0, \dots, A_k, \pi^\times B_1, \dots, \pi^\times B_{n-k-1}), \qquad (*)$$

при условии, что многочлены $f_0, \dots, f_k$ невырождены относительно своих многогранников Ньютона.

Доказательство. По непрерывности и линейности смешанного объема, данную теорему достаточно доказать в предположении, что $B_1, \dots, B_{n-k-1}$ являются целочисленными многогранниками. В данном предположении, рассмотрим многочлены Лорана $g_1, \dots, g_{n-k-1}$ общего положения на $(\mathbb{C} \setminus 0)^{n-k}$, многогранники Ньютона которых равны соответственно $B_1, \dots, B_{n-k-1}$. Так как многочлен $\pi_{f_0,\dots,f_k}$ не равен тождественно нулю, набор $\pi_{f_0,\dots,f_k}$, $g_1, \dots, g_{n-k-1}$ невырожден. Если набор $f_0, \dots, f_k$ невырожден, то таковым является и набор $f_0, \dots, f_k, g_1 \circ \pi, \dots, g_{n-k-1} \circ \pi$.

По формуле Кушниренко-Бернштейна, системы $f_0 = \dots = f_k = g_1 \circ \pi = \dots = g_{n-k-1} \circ \pi = 0$ и $\pi_{f_0,\dots,f_k} = g_1 = \dots = g_{n-k-1} = 0$ имеют $V(A_0, \dots, A_k, B_1, \dots, B_{n-k-1})$ и $V(A, B_1, \dots, B_{n-k-1})$ решений соответственно. В то же время, решения второй системы являются проекциями решений первой. □

Монотонность смешанного расслоенного тела.

Теорема **2.2.40.** *Если $\Delta_i \subset \Delta_i'$ для $i = 0, \dots, k$, то $\mathrm{MP}_\mu(\Delta_0, \dots, \Delta_k) \subset \mathrm{MP}_\mu(\Delta_0', \dots, \Delta_k')$.*

Данная теорема следует из монотонности смешанного объема и следующего факта.

Лемма **2.2.41.** *Пусть Δ и Δ' — выпуклые тела в $\mathbb{R}^m$. Допустим, что*

$$\mathrm{MV}(\Delta, B, \dots, B) \leqslant \mathrm{MV}(\Delta', B, \dots, B)$$

для любого симплекса B. Тогда, для некоторого сдвига $a \in \mathbb{R}^n$ тело $\Delta + a$ содержится в Δ'.

Доказательство. Выберем a таким образом, чтобы хаусдорфово расстояние

$$\operatorname{dist}(\Delta + a, \Delta') = \max_{x \in \Delta + a} \min_{y \in \Delta'} |x - y|$$

было минимальным. Предположим, что $\operatorname{dist}(\Delta + a, \Delta') > 0$. Тогда множество всех ковекторов $\gamma \in (\mathbb{R}^m)^*$ таких, что

$$\max_{x \in \Delta + a} \langle \gamma, x \rangle > \max_{y \in \Delta'} \langle \gamma, y \rangle,$$

не содержится в полупространстве. В частности, оно содержит ковекторы $\gamma_0, \dots,$ γ_m такие, что ни один из них не представим в виде линейной комбинации остальных с неотрицательными коэффициентами. Через B обозначим m-мерный симплекс с внешними нормалями $\gamma_0, \dots, \gamma_m$. Тогда неравенство $\operatorname{MV}(\Delta, B, \dots, B) > \operatorname{MV}(\Delta', B, \dots, B)$ выводится из утверждения 1.1.12. □

2.3. Смешанные объемы конфигураций Кэли

Определение **2.3.1.** Пусть векторы $e_1, \dots, e_l$ образуют стандартный базис $\mathbb{R}^l$, а e_0 равен $0 \in \mathbb{R}^l$. Для ограниченных многогранников $P_0, \dots, P_l$ in $\mathbb{R}^m$ и подмножества $I \subset \{0, \dots, l\}$, через P_I обозначим выпуклую оболочку объединения многогранников $P_i \times \{e_i\} \subset \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^l$, $i \in I$. Будем называть такой многогранник **призмой** или **конфигурацией Кэли**. Призму $P_{\{0,\dots,l\}}$ будем также обозначать $P_0 * \dots * P_l$.

В дальнейшем нам придется работать со смешанными объемами призм. Это вызвано тем, что смешанный объем призм возникает естественным образом при применении теоремы Кушниренко–Бернштейна к системам уравнений, линейным, по некоторым переменным.

В разделе 2.3.1 мы приведем формулу для вычисления объема и расслоенного многогранника призмы. Однако смешанную версию этой формулы, кото-

рая выражала бы смешанный объем призм в терминах их оснований, получить уже не так просто – ее выводу и иллюстрации приложений к изучению систем уравнений, линейных по некоторым переменным, посвящена оставшаяся часть данного раздела.

2.3.1. Объем и расслоенный многогранник призмы.

Объем призмы. В этом разделе смешанный объем ограниченных многогранников $Q_1, \dots, Q_m$ в $\mathbb{R}^m$ будет удобнее обозначать через моном $Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_m$.

Лемма **2.3.2.**

$$1) \quad (m+l)!\ \mathrm{Vol}(P_{\{0,\dots,l\}}) = \sum_{\substack{a_0 \geqslant 0, \dots, a_l \geqslant 0 \\ a_0 + \dots + a_l = m}} P_0^{a_0} \cdot \ldots \cdot P_l^{a_l}.$$

$$2) \quad \sum_{I \subset \{0,\dots,l\}} (-1)^{l+1-|I|}(m+|I|-1)!\ \mathrm{Vol}(P_I) = \sum_{\substack{a_0 > 0, \dots, a_l > 0 \\ a_0 + \dots + a_l = m}} P_0^{a_0} \cdot \ldots \cdot P_l^{a_l}.$$

Доказательство. Эквивалентность данных формул следует из формулы включений-исключений. Докажем вторую из них. Выберем многочлены общего положения $g_0, \dots, g_l$, многогранники Ньютона которых равны, соответственно, $P_0, \dots, P_l$. Вычислим эйлерову характеристику гиперповерхности $\lambda_0 g_0 + \ldots + \lambda_l g_l = 0$ в $\mathbb{CP}^l_{\lambda_0:\dots:\lambda_l} \times (\mathbb{C} \setminus 0)^m$ следующими двумя способами.

1) Подразбиение $\mathbb{CP}^l_{\lambda_0:\dots:\lambda_l} \times (\mathbb{C} \setminus 0)^m$ на комплексные торы $T_I = \{\lambda_i = 0 \text{ for } i \notin I\}$ индуцирует подразбиение гиперповерхности на части, эйлеровы характеристики которых равны $(-1)^{l+1-|I|}(m+|I|-1)!\ \mathrm{Vol}(P_I)$, по формуле Кушниренко-Бернштейна-Хованского (теорема 1.2.4). По аддитивности, эйлерова характеристика гиперповерхности $\lambda_0 g_0 + \ldots + \lambda_l g_l = 0$ равна левой части доказываемого равенства.

2) Рассматривая проекцию гиперповерхности $\lambda_0 g_0 + \ldots + \lambda_l g_l = 0$ на $(\mathbb{C} \setminus 0)^m$, заметим, что слой этой проекции над точкой $y \in (\mathbb{C} \setminus 0)^m$ равен $\mathbb{CP}^l$ or $\mathbb{CP}^{l-1}$ в

зависимости от того, принадлежит y множеству $\{g_0 = \ldots = g_l = 0\}$ или нет. Таким образом, интегрируя эйлерову характеристику по слоям этой проекции, получаем, что эйлерова характеристика гиперповерхности $\lambda_0 g_0 + \ldots + \lambda_l g_l = 0$ совпадает с эйлеровой характеристикой полного пересечения $\{g_0 = \ldots = g_l = 0\}$. Вычисляя последнюю по формуле Кушниренко-Бернштейна-Хованского, мы получаем правую часть доказываемого равенства. □

Интеграл Минковского призмы. В дальнейшем, смешанный расслоенный многогранник $\mathrm{MP}(\Delta_0, \ldots, \Delta_l)$ будет удобнее обозначить через моном $\Delta_0 \cdot \ldots \cdot \Delta_l$, аналогично тому, как мы условились обозначать смешанный объем (что согласуется с примером 2.2.2). Пусть векторы $e_1, \ldots, e_l$ образуют стандартный базис $\mathbb{R}^l$, а e_0 равен $0 \in \mathbb{R}^l$. Для многогранников $P_0, \ldots, P_l$ in $\mathcal{M}_{\tau^\vee}$ и подмножества $I \subset \{0, \ldots, l\}$ через P_I обозначим выпуклую оболочку объединения многогранников $P_i \times \{e_i\} \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l$, $i \in I$,.

Лемма **2.3.3.** *Для многогранников $P_0, \ldots, P_l$ в $\mathcal{M}_{\tau^\vee}$,*

$$1) \quad P^{k+l+1}_{\{0,\ldots,l\}} = \sum_{\substack{a_0 \geqslant 0, \ldots, a_l \geqslant 0 \\ a_0 + \ldots + a_l = k+1}} P_0^{a_0} \cdot \ldots \cdot P_l^{a_l},$$

$$2) \quad \sum_{I \subset \{0,\ldots,l\}} (-1)^{l+1-|I|} P_I^{k+|I|} = \sum_{\substack{a_0 > 0, \ldots, a_l > 0 \\ a_0 + \ldots + a_l = k+1}} P_0^{a_0} \cdot \ldots \cdot P_l^{a_l}.$$

Доказательство. Эквивалентность данных формул следует из формулы включений-исключений. Докажем вторую из них. Заменив смешанные расслоенные многогранники смешанными объемами пар с помощью утверждения 2.2.3, а последние — классическими смешанными объемами с помощью леммы 2.1.4, получим, что достаточно доказать данную формулу для смешанных объемов ограниченных многогранников, что уже сделано в лемме 2.3.2. □

2.3.2. Вычисление смешанного объема призм

В предыдущем разделе мы выразили объем призмы через смешанные объемы ее оснований. Для смешанного объема призм такое выражение невозможно,

однако смешанный объем целочисленных призм выражается формулой типа Пика через числа целых точек в суммах Минковского оснований. В этом разделе мы получим такое выражение, а в последующих применим – например, вычислим кратность вырождения матрицы, у которой элементы – однородные многочлены общего положения данных степеней.

Обозначим через $I(A)$ число точек решетки в целочисленном многограннике $A \subset \mathbb{R}^n$.

Определение **2.3.4.** *Тропическим полукольцом* P многогранников называется множество всех выпуклых многогранников в $\mathbb{R}^n$ (включая пустой) с операцией сложения

$$A \vee B = \text{ выпуклая оболочка } A \cup B$$

и суммой Минковского в качестве операции умножения

$$A + B = \{a + b \,|\, a \in A,\, b \in B\}.$$

Название обосновано следующим фактом: опорные функции многогранников $A \vee B$ и $A + B$ равны соответственно максимуму и сумме опорных функций многогранников A и B соответственно. Нулем и единицей в этом полукольце являются многогранники $\varnothing$ и $\{0\}$ соответственно. В частности, если суммирование многогранников $A_j \in P_+$ ведется по пустому множеству индексов $J = \varnothing$, или среди многогранников A_j есть пустой, положим $\sum_{j\in J} A_\alpha = \mathbb{R}^m_+$, по определению.

Теорема **2.3.5.** *Пусть* $m = k - n + 1$, *и* $\Delta_{i,j} \subset \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, *– целочисленные многогранники. Тогда смешанный объем призм* $\Delta_{1,j} * \dots * \Delta_{n,j} \subset \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-1}$, $j = 1, \dots, k$, *равен*

$$\sum_{\substack{J\subset\{1,\dots,k\}\\ b_1+\dots+b_n=|J|}} (-1)^{k-|J|} I\Big(\bigvee_{\substack{J_1\sqcup\dots\sqcup J_n=J\\ |J_1|=b_1,\dots,|J_n|=b_n}} \sum_{\substack{i=1,\dots,n\\ j\in J_i}} \Delta_{i,j} \Big). \qquad (**)$$

Здесь первое суммирование ведется по всем непустым $J \subset \{1,\dots,k\}$ и всем наборам неотрицательных чисел b_i, сумма которых равна $|J|$, и $\bigvee$ берется по всем разложениям J в дизъюнктное объединение множеств J_i размера b_i.

Заметим, что некоторые из $\Delta_{i,j}$ могут быть пустыми. Доказательство приведено в разделе 2.3.4.

Эта теорема, очевидно, допускает относительную версию: в качестве $\Delta_{i,j}$ можно брать многогранники в $\mathbb{R}^m_+$, а $I(A)$ определять как число целых точек в разности замкнутых многогранников $\mathbb{R}^m_+ \setminus A$, тогда смешанный объем пар многогранников $(\mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^{n-1}, \Delta_{1,j} * \ldots * \Delta_{n,j})$, $j = 1,\dots,k$, также равен $(**)$.

Пример **2.3.6.** Раскрывая скобки в самом простом случае $(m,n,k) = (2,2,3)$, получим, что выражение $(**)$ равно

$$I(\Delta_{1,1}+\Delta_{1,2}+\Delta_{1,3}) + I\Big((\Delta_{2,1}+\Delta_{1,2}+\Delta_{1,3}) \vee (\Delta_{1,1}+\Delta_{2,2}+\Delta_{1,3}) \vee (\Delta_{1,1}+\Delta_{1,2}+\Delta_{2,3})\Big) +$$

$$+I\Big((\Delta_{1,1}+\Delta_{2,2}+\Delta_{2,3}) \vee (\Delta_{2,1}+\Delta_{1,2}+\Delta_{2,3}) \vee (\Delta_{2,1}+\Delta_{2,2}+\Delta_{1,3})\Big) + I(\Delta_{2,1}+\Delta_{2,2}+\Delta_{2,3}) -$$

$$-I(\Delta_{1,1}+\Delta_{1,2}) - I(\Delta_{1,1}+\Delta_{1,3}) - I(\Delta_{1,2}+\Delta_{1,3}) - I(\Delta_{2,1}+\Delta_{2,2}) - I(\Delta_{2,1}+\Delta_{2,3}) - I(\Delta_{2,2}+\Delta_{2,3}) -$$

$$-I((\Delta_{1,1}+\Delta_{2,2}) \vee (\Delta_{1,2}+\Delta_{2,1})) - I((\Delta_{1,1}+\Delta_{2,3}) \vee (\Delta_{1,3}+\Delta_{2,1})) - I((\Delta_{1,3}+\Delta_{2,2}) \vee (\Delta_{1,2}+\Delta_{2,3})) -$$

$$+I(\Delta_{1,1}) + I(\Delta_{1,2}) + I(\Delta_{1,3}) + I(\Delta_{2,1}) + I(\Delta_{2,2}) + I(\Delta_{2,3}).$$

Пример **2.3.7.** Пусть, например, $\Delta_{i,j}$ кратны стандартному симплексу с коэффициентами $d_{i,j}$. Для $J \subset \{1,\dots,k\}$ и разложения $|J| = b_1 + \ldots + b_n$ в сумму неотрицательных целых чисел введем следующее обозначение:

$$d^J_{b_1,\dots,b_n} = \min_{\substack{J_1 \sqcup \ldots \sqcup J_n = J \\ |J_1|=b_1,\dots,|J_n|=b_n}} \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j \in J_i}} d_{i,j}.$$

Тогда формула $(**)$ принимает вид

$$\sum_{\substack{J \subset \{1,\dots,k\} \\ b_1+\ldots+b_n=|J|}} (-1)^{k-|J|} \binom{m + d^J_{b_1,\dots,b_n} - 1}{m}.$$

2.3.3. Веера и целые точки многогранников.

В данном разделе мы докажем равенство

$$(A \cap \mathbb{Z}^q) + (B \cap \mathbb{Z}^q) = (A + B) \cap \mathbb{Z}^q$$

для некоторого класса ограниченных целочисленных многогранников $A, B \subset \mathbb{R}^q$ (гипотеза в общем случае сформулирована в работе [111]).

Напомним определение двойственного веера многогранника.

Определение **2.3.8.** *(Рациональным) веером* Φ в $\mathbb{R}^q$ называется непустое конечное множество непересекающихся (рациональных) конусов в $\mathbb{R}^q$ таких, что
1) Каждая грань конуса из набора Φ принадлежит Φ,
2) Каждый конус из Φ является гранью некоторого q-мерного конуса из набора Φ.

Определение **2.3.9.** *Двойственным конусом* грани B многогранника $A \subset \mathbb{R}^q$ называется множество всех ковекторов $\gamma \in (\mathbb{R}^q)^*$ таких, что $\{a \in A \,|\, \gamma(a) = \min \gamma(A)\} = B$. *Двойственным веером* многогранника называется множество двойственных конусов его граней.

Определение **2.3.10.** Набор рациональных конусов $C_1, \ldots, C_p$ in $\mathbb{R}^q$ называется $\mathbb{Z}$-*трансверсальным*, если $\sum \dim C_i = q$ и множество $\mathbb{Z}^q \cap \bigcup_i C_i$ порождает решетку $\mathbb{Z}^q$.

Определение **2.3.11.** Набор вееров $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ in $\mathbb{R}^q$ называется $\mathbb{Z}$-*трансверсальным относительно сдвигов* $c_1 \in \mathbb{R}^q, \ldots, c_p \in \mathbb{R}^q$, если каждый набор конусов $C_1 \in \Phi_1, \ldots, C_p \in \Phi_p$ такой, что пересечение $(C_1 + c_1) \cap \ldots \cap (C_p + c_p)$ состоит из одной точки, является $\mathbb{Z}$-трансверсальным.

Теорема **2.3.12.** *Если двойственные веера ограниченных целочисленных многогранников* $A_1, \ldots, A_p \subset \mathbb{R}^q$ $\mathbb{Z}$-*трансверсальны относительно некоторых сдвигов* $c_1 \in (\mathbb{R}^q)^*, \ldots, c_p \in (\mathbb{R}^q)^*$ *и* $\dim(A_1 + \ldots + A_p) = q$, *то*

$$(A_1 \cap \mathbb{Z}^q) + \ldots + (A_p \cap \mathbb{Z}^q) = (A_1 + \ldots + A_p) \cap \mathbb{Z}^q.$$

Доказательство. Рассмотрим ковекторы $c_1 \in (\mathbb{R}^q)^*, \ldots, c_p \in (\mathbb{R}^q)^*$ как линейные функции на многогранниках $A_1 \subset \mathbb{R}^q, \ldots, A_p \subset \mathbb{R}^q$, соответственно, и рассмотрим их графики в $\mathbb{R}^q \oplus \mathbb{R}^1$ by $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$. Обозначим проекцию $\mathbb{R}^q \oplus \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^q$ через π, а луч $\{(0, \ldots, 0, t) \mid t < 0\} \subset \mathbb{R}^q \oplus \mathbb{R}^1$ — через L_-.

Каждая ограниченная q-мерная грань B суммы $\Gamma_1 + \ldots + \Gamma_p + L_-$ равна сумме некоторых граней $B_1, \ldots, B_p$ многогранников $\Gamma_1 + L_-, \ldots, \Gamma_p + L_-$. Из $\mathbb{Z}$-трансверсальности относительно сдвигов $c_1 \in (\mathbb{R}^q)^*, \ldots, c_p \in (\mathbb{R}^q)^*$ следует, что

$$\big(\pi(B_1) \cap \mathbb{Z}^q\big) + \ldots + \big(\pi(B_p) \cap \mathbb{Z}^q\big) = \pi(B_1 + \ldots + B_p) \cap \mathbb{Z}^q.$$

Так как проекции ограниченных q-мерных граней суммы $\Gamma_1 + \ldots + \Gamma_p + L_-$ покрывают сумму $A_1 + \ldots + A_p$, верно следующее равенство:

$$(A_1 \cap \mathbb{Z}^q) + \ldots + (A_p \cap \mathbb{Z}^q) = (A_1 + \ldots + A_p) \cap \mathbb{Z}^q. \qquad \square$$

Следствие **2.3.13.** *Пусть $S \subset \mathbb{R}^q$ — стандартный q-мерный симплекс, $l_1, \ldots, l_p$ — линейные функции на S с графиками $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$, и пусть l — максимальная кусочно линейная функция на pS такая, что ее график Γ содержися в сумме $\Gamma_1 + \ldots + \Gamma_p$. Тогда для каждой целой точки $a \in pS$ значение $l(a)$ равно максимуму сумм $l_1(c_1) + \ldots + l_p(c_p)$, где $(c_1, \ldots, c_p)$ пробегает множество всех p-наборов вершин в S таких, что $c_1 + \ldots + c_p = a$.*

Доказательство. Обозначим проекцию $\mathbb{R}^q \oplus \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^q$ через π. q-мерная грань B в Γ, содержащая точку $\big(a, l(a)\big) \in \mathbb{R}^q \oplus \mathbb{R}^1$, может быть представлена в виде суммы граней B_i симплексов Γ_i. Так как $\pi(B_1), \ldots, \pi(B_p)$ являются гранями стандартного симплекса, их двойственные веера $\mathbb{Z}$-трансверсальны относительно набора сдвигов общего положения, и, по теореме 2.3.12,

$$\big(\pi(B_1) \cap \mathbb{Z}^q\big) + \ldots + \big(\pi(B_p) \cap \mathbb{Z}^q\big) = \pi(B) \cap \mathbb{Z}^q.$$

В частности, $a = c_1 + \ldots + c_p$ для некоторых целых точек $c_i \in \pi(B_i)$, следовательно, $l(a) = l_1(c_1) + \ldots + l_p(c_p)$. $\square$

Замечание **2.3.14.** В частности, если функции $l_1, \dots, l_p$ находятся в общем положении, то все C_{p+q}^q целых точек в симплексе pS являются проекциями вершин Γ. Переводя это на язык тропической геометрии, можно снова доказать следующий хорошо известный факт: p тропических гиперплоскостей в пространстве $\mathbb{R}^q$ разбивают его на C_{p+q}^q частей.

Пример **2.3.15.** Если S в формулировке следствия 2.3.13 не является стандартным симплексом, то данное утверждение не всегда верно. Например, рассмотрим $a = (1, 0)$ при

$$S = \operatorname{conv}\big\{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\big\},\ l_1(x,y) = x + y,\ l_2(x,y) = x - y.$$

Более того, если мы допустим, что функции l_j вогнуты и кусочно линейны с целочисленными областями линейности, то утверждение неверно, если S не является стандартным симплексом.

2.3.4. Доказательство теоремы 2.3.5.

Записав смешанный объем многогранников $\Delta_{1,i} * \dots * \Delta_{n,i}$, $i = 1, \dots, k$, в виде

$$\sum_{0<p\leqslant m} (-1)^{n-p} \sum_{0<i_1<\dots<i_p\leqslant n} I\big((\Delta_{1,i_1} * \dots * \Delta_{n,i_1}) + \dots + (\Delta_{1,i_p} * \dots * \Delta_{n,i_p})\big)$$

по утверждению 1.1.10, и применив следующую лемму 2.3.16 к каждому слагаемому данной суммы, получим в точности утверждение теоремы 2.3.5.

Лемма **2.3.16.** *Для пар многогранников* $A_{i,j} = (\Delta_{i,j}, \Phi_{i,j})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$,

$$I\big((A_{1,1} * \dots * A_{n,1}) + \dots + (A_{1,p} * \dots * A_{n,p})\big) =$$

$$= \sum_{\substack{a_1+\dots+a_n=p \\ a_1\geqslant 0,\dots,a_n\geqslant 0}} I\Big(\bigvee_{\substack{J_1\sqcup\dots\sqcup J_n=\{1,\dots,p\} \\ |J_1|=a_1,\dots,|J_n|=a_n}} \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j\in J_i}} \Delta_{i,j},\ \bigvee_{\substack{J_1\sqcup\dots\sqcup J_n=\{1,\dots,p\} \\ |J_1|=a_1,\dots,|J_n|=a_n}} \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j\in J_i}} \Phi_{i,j} \Big).$$

Доказательство. Каждая целая точка, участвующая в левой части равенства, содержится в плоскости $\{(a_1,\dots,a_{n-1})\}\times\mathbb{R}^m\subset\mathbb{R}^{n-1}\oplus\mathbb{R}^m$ для некоторых неотрицательных целых чисел $a_1,\dots,a_n$, сумма которых равна p. Таким образом, достаточно описать пересечение пары $\big((A_{1,1}*\ldots*A_{n,1})+\ldots+(A_{1,p}*\ldots*A_{n,p})\big)$ с каждой из данных плоскостей, используя следующий факт. □

Лемма **2.3.17.** *Предположим, что многогранники $\Delta_{i,j}\subset\mathbb{R}^m$ попарно параллельны для $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,p$. Тогда для каждого n-набора неотрицательных целых чисел $a_1,\dots,a_n$, сумма которых равна p,*

$$\Big(\{(a_1,\dots,a_{n-1})\}\times\mathbb{R}^m\Big)\cap\big((\Delta_{1,1}*\ldots*\Delta_{n,1})+\ldots+(\Delta_{1,p}*\ldots*\Delta_{n,p})\big)=$$

$$=\{(a_1,\dots,a_{n-1})\}\times\Big(\bigvee_{\substack{J_1\sqcup\ldots\sqcup J_n=\{1,\dots,p\}\\|J_1|=a_1,\dots,|J_n|=a_n}}\sum_{\substack{i=1,\dots,n\\j\in J_i}}\Delta_{i,j}\Big)\subset\mathbb{R}^{n-1}\oplus\mathbb{R}^m.$$

Доказательство. Для каждой гиперплоскости $L\subset\mathbb{R}^m$ обозначим проекцию $\mathbb{R}^{n-1}\oplus\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{n-1}\oplus\mathbb{R}$ вдоль $\{0\}\oplus L$ через π_L. Достаточно доказать, что образы левой и правой частей при преокции π_L совпадают. Для этого применим следствие 2.3.13, положив q равным $n-1$, a — равной $(a_1,\dots,a_{n-1})$, и Γ_j — равным максимальной грани проекции $\pi_L\big(\Delta_{1,j}*\ldots*\Delta_{n,j}\big)$ для любого $j=1,\dots,p$. □

2.3.5. Смешанный объем призм и детерминантные особенности.

Обозначим положительные ортанты в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{Z}^m$ через $\mathbb{R}^m_+$ и $\mathbb{Z}^m_+$, соответственно. Для каждой точки $a=(a_1,\dots,a_m)\in\mathbb{Z}^m$ обозначим моном $x_1^{a_1}\dots x_m^{a_m}$ через x^a.

Определение **2.3.18.** *Многогранником Ньютона* Δ_f ростка аналитической функции $f=\sum_{a\in\mathbb{Z}^m_+}c_ax^a:\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}$ называется выпуклая оболочка объединения $\bigcup\limits_{a\mid c_a\neq0}(a+\mathbb{R}^m_+)$.

Определение **2.3.19.** *Ограничение* $f|_B$ ростка $f = \sum_{a\in\mathbb{Z}^m_+} c_a x^a$ на ограниченное подмножество B многогранника Ньютона Δ_f — многочлен $\sum\limits_{a\in\mathbb{Z}^m\cap B} c_a x^a$. Ограничение f на объединение всех ограниченных граней многогранника Δ_f называется *главной частью* ростка f. Ограничение на пустое множество равно нулю, по определению.

Главные части компонент отображения $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ образуют *главную часть* f, и главные части элементов $(n \times k)$-матрицы $A : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^{n\times k}$ образуют *главную часть* A.

Комбинация теоремы 1.2.7 и утверждения 1.1.10 дает следующую локальную версию формулы Д. Бернштейна [158]:

Теорема **2.3.20.** *Пусть* $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ *— росток аналитического отображения в окрестности нуля, и разности* $\mathbb{R}^m_+ \setminus \Delta_{f_i}$ *ограничены.*
1) Локальная степень f *больше или равна*

$$\sum_{0<p\leqslant m} (-1)^{m-p} \sum_{0<i_1<\ldots<i_p\leqslant m} I(\Delta_{f_{i_1}} + \ldots + \Delta_{f_{i_p}}), \qquad (*)$$

при условии, что f *является собственным.*
2) Росток f *является собственным, и его локальная степень равна* $(*)$ *тогда и только тогда, когда для любого совместимого набора граней* $B_1, \ldots, B_m$ *многогранников* $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ *система полиномиальных уравнений* $f_1|_{B_1} = \ldots = f_m|_{B_m} = 0$ *не имеет корней в* $(\mathbb{C} \setminus 0)^m$.

Замечание **2.3.21.** Главные части, удовлетворяющие условию части (2) данной теоремы, образуют плотное алгебраическое множество в пространстве главных частей отображений, компоненты которых имеют данные многогранники Ньютона.

Нас будет интересовать обобщение этого факта на детерминантные особенности.

Пусть $A : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^{n\times k}$ — росток $(n \times k)$-матрицы, составленной из аналитических функций, и $n \leqslant k$ (обозначим пространство всех $(n \times k)$-матриц через $\mathbb{C}^{n\times k}$).

Многообразие $\{x \mid \operatorname{rk} A(x) < n\}$ имеет коразмерность не выше $k-n+1$, и в случае максимальной коразмерности $k-n+1$ росток A называется детерминантной особенностью. В связи с последующим обсуждением смешанных чисел Милнора многогранников, нас будет интересовать описание топологии детерминантной особенности в терминах многогранников Ньютона $\Delta_{i,j}$ элементов $a_{i,j}$ матрицы A, если главные части этих элементов находятся в общем положении.

Будем обозначать через $e_1, \dots, e_n$ вершины стандартного симплекса в $\mathbb{R}^{n-1}$ и через $A_1 * \dots * A_n$ – призму с основаниями $A_i \subset \mathbb{R}^m$, т.е. выпуклую оболочку $\bigcup_{i=1}^n A_i \times \{e_i\}$.

Теорема **2.3.22** ([176]). *Пусть $m = k-n+1$, каждый многогранник Ньютона $\Delta_{i,j}$ пересекает все координатные оси, и главные части элементов $a_{i,j} : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ матрицы A в общем положении. Тогда росток $S = \{x \mid \operatorname{rk} A(x) < n\}$ является изолированной точкой, и ее кратность (размерность локальной алгебры $\mathcal{O}/\langle$максимальные миноры $A\rangle$ над $\mathbb{C}$) равна смешанному объему пар призм $(\mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^{n-1}, \Delta_{1,j} * \dots * \Delta_{n,j})$.*

Доказательство получается применением теоремы 2.1.7 к ограничению функции f на полное пересечение $\sum_{i=1}^n s_i a_{i,j}(x) = 0$, $j = 1, \dots, k$ в пространстве $\mathbb{C}^m \times \mathbb{CP}^{n-1}$ с координатами $(x, s_1 : \dots : d_n)$, так как многогранник Ньютона j-го уравнения – в точности $\Delta_{1,j} * \dots * \Delta_{n,j}$.

Точные условия общего положения, при которых выполняется теорема, обсуждаются в следующем разделе.

Теорема **2.3.23** ([41]). *Пусть $m \leqslant 2(k-n+2)$, каждый многогранник Ньютона $\Delta_{i,j}$ пересекает все координатные оси, и главные части элементов $a_{i,j} : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ матрицы A в общем положении. Тогда росток $S = \{x \mid \operatorname{rk} A(x) < n\}$ является изолированной детерминантной особенностью, и*

для ростка функции $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ *с многогранником Ньютона* Δ *и главной частью общего положения, эйлерова характеристика слоя Милнора* $f|_S$ *равна*

$$\sum_{I\subset\{1,\dots,m\}} \sum_{J\subset\{1,\dots,n\}} (-1)^{m-|I|-|J|} \sum_{a_0+\dots+a_k=|I|+|J|-1} \Delta(I)^{a_0}\cdot\Delta_1(I,J)^{a_1}\cdot\ldots\cdot\Delta_k(I,J)^{a_k},$$

где моном от многогранников – это их смешанный объем, $\Delta(I)$ *– пересечение многогранника* Δ *с* I*-координатной плоскостью* $\mathbb{R}^I \subset \mathbb{R}^m$*, а* $\Delta_i(I,J)$ *– грань пары многогранников* $(\mathbb{R}^I_+ \times \mathbb{R}^{n-1}, \Delta(I)_{i,1} * \ldots * \Delta(I)_{i,k})$*, полученная ее пересечением с аффинной оболочкой* $\mathbb{R}^I \times \{e_j, \mid j \in J\}$*.*

Это также позволяет вычислять индексы аналитических 1-форм общего положения с данными многогранниками Ньютона на детерминантных особенностях ([39]). Доказательство получается применением теоремы 2.1.10 к ограничению функции f на полное пересечение $\sum_{i=1}^n s_i a_{i,j}(x) = 0$, $j = 1,\dots,k$ в пространстве $\mathbb{C}^m \times \mathbb{CP}^{n-1}$ с координатами $(x, s_1 : \ldots : d_n)$, так как многогранник Ньютона j-го уравнения – в точности $\Delta_{1,j} * \ldots * \Delta_{n,j}$.

Смешанный объем пар призм в этих теоремах на практике удобно вычислять с помощью теоремы 2.3.5.

Пример **2.3.24.** В условиях теоремы 2.3.5, предположим, что компоненты $a_{i,j}$ являются однородными многочленами степени $d_{i,j}$. Тогда, совмещая теорему 2.3.22 и пример 2.3.7, получим:

1) Кратность матрицы A больше либо равна

$$\sum_{\substack{J\subset\{1,\dots,k\}\\ b_1+\dots+b_n=|J|}} (-1)^{k-|J|}\binom{m+d^J_{b_1,\dots,b_n}-1}{m}.$$

2) Кратность матрицы A превышает данное число либо является бесконечной тогда и только тогда, когда ее элементы не находятся в общем положении в следующем смысле: существуют целые числа $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ и $\beta_1,\dots,\beta_k$ и отличная от нуля точка $x \in \mathbb{C}^m$ такие, что $d_{i,j} \geqslant \alpha_i + \beta_j$ для любых i и j, причем для каждого j при некотором i имеет место равенство, и матрица, составленная из

$\delta_{d_{i,j}}^{\alpha_i+\beta_j} a_{i,j}(x)$, является эффективно вырожденной в смысле определения 2.3.28 (как обычно, δ_p^q равно 1, если $p = q$, и 0 иначе).

Пример **2.3.25.** Заметим, что, в отличие от случая полного пересечения $n = 1$, кратность такой однородной матрицы может превышать ожидаемую, но быть конечной. Например, если $(m, n, k) = (2, 2, 3)$, то матрица

$$\begin{pmatrix} x+y & (x+y)^2+y^2 & x+y \\ x+y & x+y & (x+y)^2+2y^2 \end{pmatrix}$$

имеет кратность 6, что строго больше, чем ответ 3, полученный из утверждения части 1 для матрицы общего положения степени $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Данный эффект объясняется тем, что матрица выше не является матрицей общего положения (рассмотрим $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ в обозначениях части 2).

2.3.6. Общее положение главных частей матриц.

Условимся считать, что каждый многогранник имеет пустую грань. В частности, некоторые грани $B_{i,j}$ в следующем определении могут быть пустыми.

Определение **2.3.26.** Пусть $B_{i,j}$ — ограниченная грань многогранника $\Delta_{i,j} \subset \mathbb{R}^m$ для $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k$. Набор граней $B_{i,j}$ называется *матрично-совместимым*, если существуют векторы $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}^m$ и непустые совместимые грани $B_1, \ldots, B_k$ выпуклых оболочек $\bigvee_i(\Delta_{i,1} + c_i), \ldots, \bigvee_i(\Delta_{i,k} + c_i)$ такие, что $B_{i,j} = (B_j - c_i) \cap \Delta_{i,j}$ для всех $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k$.

Пример **2.3.27.** Пусть $\Delta_{i,j} \subset \mathbb{R}^1$ — лучи

$$\begin{pmatrix} [1,\infty) & [1,\infty) & [1,\infty) \\ [1,\infty) & [2,\infty) & [2,\infty) \\ [1,\infty) & [2,\infty) & [2,\infty) \end{pmatrix},$$

тогда каждая грань $B_{i,j}$ либо совпадает с началом луча $\Delta_{i,j}$ (будем обозначать ее через $*$), либо пуста. В данном случае, матрично-совместимыми наборами

граней являются

$$\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & \varnothing & \varnothing \\ * & \varnothing & \varnothing \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} \varnothing & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix},$$

и ещё 11 наборов с меньшим множеством непустых граней.

Определение **2.3.28.** Матрица $M \in \mathbb{C}^{n\times k}$, $n \leqslant k$, называется *эффективно невырожденной*, если $(t_1, \ldots, t_n) \cdot M \neq (0, \ldots, 0)$ для всех $(t_1, \ldots, t_n) \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n$.

Пример **2.3.29.** Комплексная матрица

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

эффективно невырождена тогда и только тогда, когда $b = c = 0$ (хотя она вырождена для любых комплексных a, b, c, d, e).

Для $(n \times k)$-матрицы A, составленной из аналитических функций $a_{i,j} : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$, и набора $\mathcal{B}$ граней $B_{i,j}$ многогранников Ньютона $\Delta_{a_{i,j}}$ через $A|_{\mathcal{B}}$ обозначим матрицу, элементы которой равны $a_{i,j}|_{B_{i,j}}$.

Определение **2.3.30.** Главная часть $(n \times k)$-матрицы A, составленной из аналитических функций $a_{i,j} : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ находится *в общем положении*, если для любого матрично-совместимого набора f$\mathcal{B}$ граней многогранников Ньютона $\Delta_{a_{i,j}}$ и любой точки $x \in (\mathbb{C} \setminus 0)^m$ матрица $A|_{\mathcal{B}}(x)$ is эффективно невырождена.

Замечание **2.3.31.** Главные части, находящиеся в общем положении, образуют плотное алгебраическое множество в пространстве главных частей матриц, элементы которых имеют данные многогранники Ньютона. Данное утверждение перестает быть верным, если в определении 2.3.30 вместо эффективной невырожденности матриц потребовать классическую. Например, если

$(m, n, k) = (1, 3, 3)$, и многогранники Ньютона $\Delta_{a_{i,j}}$ те же, что и в примере к определению 2.3.26, то единственное нетривиальное условие, которое накладывает определение 2.3.30, соответствует второму матрично-совместимому набору граней, упомянутому в примере:

$$\det(A|_{\mathcal{B}_2}) = \det \begin{pmatrix} 0 & a^0_{0,1} & a^0_{0,2} \\ a^0_{1,0} & a^0_{1,1} & a^0_{1,2} \\ a^0_{2,0} & a^0_{2,1} & a^0_{2,2} \end{pmatrix} \neq 0,$$

где $a^0_{i,j}$ — старший коэффициент степенного ряда $a_{i,j}$. В то же время, если в определении 2.3.30 вместо эффективной невырожденности потребовать классическую, то никакая матрица A не будет удовлетворять этому условию, потому что матрица $A|_{\mathcal{B}_1}$ всегда вырождена (см. пример к определению 2.3.28).

Было бы интересно получить описание набора миноров матриц $A|_{\mathcal{B}}$ такого, что

1) Если главная часть A находится в общем положении, то данные миноры обращаются в нуль.

2) Главные части, для которых данные миноры обращаются в нуль, образуют (замкнутое алгебраическое) множество положительной коразмерности в пространстве всех главных частей матриц, элементы которых имеют данные многогранники Ньютона.

Данную задачу можно свести к следующей: пусть для данного $K \subset \mathbb{N}^2$ $a_{i,j}$, являются независимыми переменными при $(i, j) \in K$. Рассмотрим матрицу A, элементы которой равны $a_{i,j}$ при $(i, j) \in K$ и 0 при $(i, j) \notin K$. Требуется найти такой набор миноров $\mathcal{A}$ матрицы A, что

1) Если A эффективно невырождена, то $\mathcal{A} = 0$.

2) $\mathcal{A} \neq 0$ для элементов общего положения $a_{i,j}, (i, j) \in K$.

3. Тропическая геометрия

3.1. Чистота размерности тропических пересечений, смешанные грани и числа Милнора многогранников

В разделе 3.1.1 мы напомним понятие стабильного пересечения и связь между линейной зависимостью многогранников, обращением в нуль их смешанного объема и пустотой стабильного пересечения их двойственных комплексов (см. лемму 3.1.3). Мы также сформулируем локальную версию данной зависимости (см. лемму 3.1.5) а также более сильное утверждение о чистоте размерности для стабильных пересечений тропических комплексов (где вместо одного из тропических комплексов взята граница многогранника, см. утверждение 3.1.6). В разделе 3.1.2 сформулируем и докажем версию леммы 3.1.3 для смешанных расслоенных многогранников, из которой следует критерий их обращения в точку, см. теорему 3.1.12.

Эти результаты будут использованы в следующем разделе 3.1.3, который, в свою очередь, позже понадобятся нам для доказательства чистоты размерности дискриминанта системы полиномиальных уравнений.

Раздел 3.1.3 посвящен поискам смешанной версии следующего очевидного утверждения: каждая грань многогранника имеет коразмерность 1 в некоторой примыкающей к ней грани. Для этого мы построим смешанную версию частично упорядоченного множества граней многогранника, соответствующую набору многогранников. Это понятие может показаться не слишком естественным, но позже мы увидим, что оно отражает геометрию результантных множеств (см.раздел 4.3.1), которая естественным образом возникает при изучении дискриминантов систем уравнений.

3.1.1. Тропические вееры и чистота размерности их пересечений

Полиэдральным комплексом размерности k в $\mathbb{R}^n$ называется локально конечное объединение замкнутых выпуклых рациональных k-мерных многогран-

ников $P_i \in \mathbb{R}^n$. Его *стабильным образом* при рациональном векторном отображении $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется объединение всех k-мерных множеств $p(P_i)$. *Стабильным пересечением* множеств P и Q в $\mathbb{R}^n$ называется множество всех таких точек $x \in P \cap Q$, что

$$\forall \varepsilon \, \exists \delta \, : \, v \in \mathbb{R}^n, |v| < \delta \, \Rightarrow \, \operatorname{dist}(x, (P+v) \cap Q) < \varepsilon.$$

Данная операция обозначается $\wedge$; она коммутативна, но не ассоциативна (разные постановки скобок в $\{x = 0\} \wedge \{y = 0\} \wedge \{y \leqslant |x|\} \subset \mathbb{R}^2$ приводит к разным ответам), и ее результат может иметь неожиданную размерность (например, $\{z = |x| + |y|\} \wedge \{z = 0\} = \{0\} \subset \mathbb{R}^3$). Чтобы избежать данных проблем, нам следует ограничиться рассмотрением *тропических комплексов*.

Точка x k-мерного полиэдрального комплекса P *гладкая*, если, если параллельно перенесенная копия $P - x$ совпадает с векторным подпространством в некоторой окрестности $0 \in \mathbb{R}^n$. Данное векторное пространство называется *касательным пространством в* x и обозначается $T_x P$.

Определение **3.1.1.** Замкнутый полиэдральный комплекс $P \subset \mathbb{R}^n$ называется **тропическим**, если существует положительная локально постоянная отличная от нуля функция **весов** $w : \{\text{гладкие точки } P\} \to \mathbb{R}$ такая, что для любого рационального подпространства $L \subset \mathbb{R}^n$ дополнительной размерности **тропический индекс пересечения** его параллельно перенесенной копии $L - x$ с P

$$\sum_{p \in P \cap (L-x)} w(p) \left| \frac{\mathbb{Z}^n}{(\mathbb{Z}^n \cap L) + (\mathbb{Z}^n \cap T_p P)} \right|$$

не зависит от x (данная сумма определена корректно для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$).

Положительность w не всегда требуется в определении, однако нам она в дальнейшем понадобится. Тропические комплексы коразмерности 1 уже уже обсуждались под название тропических гиперповерхностей в связи с теоремой соответствия Михалкина, см. определение 1.5.2. Эквивалентность этих двух определений для коразмерности 1 нетривиальна, но хорошо известна.

Лемма ниже, а также все последующие хорошо известные факты о тропических комплексах приведены в классических работах [56], [162], [133].

Лемма **3.1.2.** *1) Стабильные пересечения, стабильные образы и связные компоненты тропических комплексов являются тропическими комплексами.*
2) Для тропических P и Q выполнено $\operatorname{codim} P \wedge Q = \operatorname{codim} P + \operatorname{codim} Q$, *при условии, что $P \wedge Q \neq \varnothing$.*
3) Операция стабильного пересечения ассоциативна на множестве тропических комплексов.
4) **Двойственный комплекс** *многогранника, т.е. объединение конусов коразмерности 1 из его двойственного веера, является тропическим комплексом; в качестве весов этих конусов в определении 3.1.1 можно взять целочисленные длины соответствующих ребер многогранника.*

Для любого набора рациональных многогранников $A_1, \ldots, A_m$, сумма которых не более чем m-мерна, положим формальный моном $A_1 \cdot \ldots \cdot A_m$ равным нулю при условии, что аффинная оболочка L суммы $\sum_i A_i$ имеет размерность строго меньше m; иначе положим данный моном равным смешанному объему многогранников $A_1, \ldots, A_m$, индуцированному целочисленной формой объема на L.

Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ — произвольные многогранники в $\mathbb{R}^n$.

Лемма **3.1.3** (**об эквивалентности**). *Следующие условия эквивалентны:*
1) Для любого подмножества $I \subset \{1, \ldots, k\}$ верно $\dim \sum_{i \in I} \Delta_i \geqslant |I|$.
2) Существуют такие положительные числа $a_1 + \ldots + a_k = \dim \sum_i \Delta_i$, что $\Delta_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot \Delta_k^{a_k} \neq 0$.
3) Стабильное пересечение двойственных комплексов многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ непусто.

Доказательство. При $n = k$ данная равносильность хорошо известна. В данном случае эквивалентность $1 \Leftrightarrow 2$ была отмечена в работе [173], а эк-

вивалентность $2 \Leftrightarrow 3$ следует из того, что смешанный объем многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ равен тропическому индексу пересечения их двойственных комплексов (см., например, [56] или [162]). В общем случае, без ограничения общности, предположим, что $n = \dim \sum_i \Delta_i$, тогда:

$1 \Rightarrow 2)$ Если набор $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ удовлетворяет условию (1),то набор

$$\Delta_1, \ldots, \Delta_k, \underbrace{\sum_i \Delta_i, \ldots, \sum_i \Delta_i}_{n-k}$$

также удовлетворяет условию (1). Так как для последнего $1 \Leftrightarrow 2$, верно $\Delta_1 \cdot \ldots \cdot \Delta_k \cdot (\Delta_1 + \ldots + \Delta_k)^{n-k} > 0$, или, если удалить скобки, $\sum_{a_1+\ldots+a_k=n} C^n_{a_1,\ldots,a_k} \Delta_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot \Delta_k^{a_k} > 0$. Тогда одно из слагаемых в последней сумме тоже строго положительно.

$2 \Rightarrow 3)$ Для набора $\underbrace{\Delta_1, \ldots, \Delta_1}_{a_1}, \ldots, \underbrace{\Delta_k, \ldots, \Delta_k}_{a_k}$ имеем $2 \Leftrightarrow 3$. Так как данный набор удовлетворяет условию (2), то стабильное пересечение двойственных веров данных n многогранников непусто, следовательно, непусто и стабильное пересечение двойственных вееров поднабора $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$.

$3 \Rightarrow 1)$ Если $\dim \sum_{i \in I} \Delta_i < |I|$ для некоторого I, то многогранники $\Delta_i' = \Delta_i - a_i$, $a_i \in \Delta_i$, $i \in I$, содержатся в $|I|$-мерном векторном подпространстве $L \subset \mathbb{R}^n$, и стабильное пересечение двойственных вееров многогранников Δ_i', $i \in I$, имеет отрицательную размерность в L^*, по лемме 3.1.2, т.е. пусто. Так как двойственные веера многогранников Δ_i являются прообразами двойственных вееров многогранников Δ_i' при проекции $(\mathbb{R}^n)^* \to L^*$, их стабильное пересечение также пусто. $\square$

Определение **3.1.4.** Многогранники $A_1, \ldots, A_k$ называются *линейно независимыми*, если они удовлетворяют одному из условий леммы 3.1.3.

Нам также понадобится следующая относительная версия леммы об эквивалентности 3.1.3.

Лемма **3.1.5.** *Пусть $v : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ — линейная функция такая, что грани $\Delta_2^v, \ldots, \Delta_k^v$ линейно независимы, Δ_1^v — точка, и (замкнутый) многогранник Δ содержится в $\Delta_1 \setminus \Delta_1^v$. Тогда*

$$\sum_{a_1+\ldots+a_k=\dim \sum_i \Delta_i} \Delta_1^{a_1} \cdot \Delta_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot \Delta_k^{a_k} > \sum_{a_1+\ldots+a_k=\dim \sum_i \Delta_i} \Delta^{a_1} \cdot \Delta_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot \Delta_k^{a_k},$$

где суммирование ведется по всем разложениям $\dim \sum_i \Delta_i$ в сумму положительных целых a_i.

Доказательство. **1.** Без ограничения общности, предположим, что $\sum_i \Delta_i$ не содержится в аффинной гиперплоскости, $\Delta_1^v = \{0\}$, и Δ содержит все вершины многогранника Δ_1. По утверждению 2.1.2 перепишем равенство в следующем виде

$$\sum_{a_1+\ldots+a_k=\dim \sum_i \Delta_i} \Delta_1^{a_1} \cdot \Delta_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot \Delta_k^{a_k} - \Delta^{a_1} \cdot \Delta_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot \Delta_k^{a_k} =$$

$$= -\sum_{\gamma} \max_{x \in \Delta} \gamma(x) \cdot \sum_{a_1+\ldots+a_k=n} (\Delta^{\gamma})^{a_1-1} (\Delta_2^{\gamma})^{a_2} \ldots (\Delta_k^{\gamma})^{a_k}, \qquad (*)$$

где $\gamma : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ пробегает множество всех примитивных линейных функций, ограничения которых на Δ строго отрицательны. Выберем ковектор $\delta : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$, ограничение которого на Δ строго отрицательно, такой, что $\Delta_2^{\delta}, \ldots, \Delta_k^{\delta}$ линейно независимы (как минимум один такой ковектор существует: $\delta = v$) и размерность $\dim(\Delta_2^{\delta}+\ldots+\Delta_k^{\delta})$ наибольшая из возможных. Без ограничения общности, также предположим, что аффинная оболочка каждого из Δ_i^{δ} содержит 0.

2. Если $\dim(\Delta_2^{\delta} + \ldots + \Delta_k^{\delta}) = n - 1$, то, по лемме 3.1.3, существуют положительные $a_2, \ldots, a_k$ такие, что $a_2 + \ldots + a_k = n - 1$ и $(\Delta_2^{\delta})^{a_2} \ldots (\Delta_k^{\delta})^{a_k} > 0$. Таким образом, в данном случае набор $\gamma = \delta, a_1 = 1, a_2, \ldots, a_k$ соответствует искомому строго положительному слагаемому в $(*)$, и достаточно рассмотреть лишь случай, когда $\dim(\Delta_2^{\delta}+\ldots+\Delta_k^{\delta}) < n-1$. В частности, пусть N — фактор $\mathbb{R}^n$ по векторному подпространству, параллельному аффинной оболочке суммы $\Delta_2^{\delta} + \ldots + \Delta_k^{\delta}$, тогда предположим, что $\dim N > 1$.

3. Обозначим через q проекцию $\mathbb{R}^n \to N$, а через C — выпуклый конус, порожденный $q(\Delta_1)$, тогда $q(\Delta_i^\delta) \subset C$ для любого i. Иначе существует линейная функция λ такая, что $C^\lambda = \{0\}$ и грань положительной размерности $q(\Delta_2)^\lambda + \ldots + q(\Delta_k)^\lambda$ примыкает к вершине $q(\Delta_2^\delta + \ldots + \Delta_k^\delta)$, значит, линейная функция $\delta' = q^*(\lambda)$, так же как и δ, соответствует линейно независимым граням $\Delta_2^{\delta'}, \ldots, \Delta_k^{\delta'}$ и отрицательна на Δ. Но это противоречит выбору δ на шаге **1**, потому что $\dim(\Delta_2^{\delta'} + \ldots + \Delta_k^{\delta'}) > \dim(\Delta_2^\delta + \ldots + \Delta_k^\delta)$.

4. Конус C не содержится в гиперплоскости (иначе все $q(\Delta_i)$ содержатся в одной гиперплоскости H, по шагу **3**, и $\Delta_1 + \ldots + \Delta_k$ содержится в гиперплоскости $q^{-1}(H)$, что противоречит предположению). Значит, существует линейная функция $\lambda : N \to \mathbb{Z}$ такая, что $\dim q(\Delta)^\lambda = \dim N - 1$, причем, по шагу **2**, данная размерность положительна, и $C^\lambda = \{0\}$. Возьмем $\gamma = q^*\lambda$, тогда $\Delta_2^\gamma, \ldots, \Delta_k^\gamma$ линейно независимы, $\dim(\Delta^\gamma + \Delta_2^\gamma + \ldots + \Delta_k^\gamma) = n-1$, и γ отрицательна на Δ. По лемме 3.1.3, существуют положительные $a_1, \ldots, a_k$ такие, что $a_1 + \ldots + a_k = n$ и $(\Delta^\gamma)^{a_1 - 1}(\Delta_2^\gamma)^{a_2} \ldots (\Delta_k^\gamma)^{a_k} > 0$. Таким образом, набор $\gamma, a_1, \ldots, a_k$ соответствует искомому строго положительному слагаемому в $(*)$. $\square$

Следующий факт можно считать тропической версией утверждений о чистоте размерности для бифуркационных дискриминантов над $\mathbb{C}$, которая в итоге позволит их доказать.

Утверждение **3.1.6.** *Пусть P — многогранник в $\mathbb{R}^n$, открытый в своей аффинной оболочке, и пусть T — тропический комплекс в $\mathbb{R}^n$ такой, что $\dim P + \dim T = n + k$. Тогда*

1) Стабильное пересечение $S = T \wedge P$ k-мерно или пусто.

2) Пересечение замыкания S с относительной границей ∂P всегда $(k-1)$-мерно или пусто.

3) Оно пусто тогда и только тогда, когда каждая связная компонента S содержится в аффинном подпространстве, содержащемся в P.

Все три утверждения остаются верными, если определить S как классиче-

ское пересечение $T \cap P$, и вместо равенства размерностей утверждать, что размерность не меньше указанной величины. Это (не нужное нам в дальнейшем) уточнение можно доказать тем же методом, что и утверждение 3.1.6. Оставшаяся часть данного раздела посвящена доказательству утверждения 3.1.6.

Лемма **3.1.7.** *1) Если образ тропического комплекса T при линейном отображении $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ содержится в многограннике Δ, который не содержит никакую прямую, то данный образ состоит из конечного числа точек. В частности, тропический комплекс положительной размерности не ограничен.*

2) Если для любой гладкой точки x тропического комплекса $T \subset \mathbb{R}^n$ касательное пространство T_xT содержит векторное подпространство L, то T совпадает с прообразом некоторого тропического комплекса в $\mathbb{R}^n/L$.

Доказательство части 1. Предположим, что образ имеет положительную размерность, тогда существует многогранник $T_i \subset T$ такой, что его образ в $\mathbb{R}^k$ имеет размерность не меньше 1, тогда существует аффинное подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$ дополнительной размерности, трансверсально пересекающееся с T_i, такое, что пересечение его образа в $\mathbb{R}^k$ с Δ ограничено. Следовательно, тропический индекс пересечения L с T (см. определение 3.1.1) положителен, в то время как для подходящего $x \in \mathbb{R}^n$ образ $x + L$ в $\mathbb{R}^k$ не пересекает Δ, и тропический индекс пересечения $x + L$ и T равен 0.

Доказательство части 2. Предположим, что T не является прообразом некоторого подмножества в $\mathbb{R}^n/L$: тогда существует такая точка $x \in T$, что достаточно малая ее окрестность в $L + x$ не содержится в T. Без ограничения общности, предположим, что $x = 0$, и рассмотрим объединение полиэдральных конусов T' которое совпадает с T в достаточно малой окрестности начала координат. Так как образ T' в $\mathbb{R}^n/L$ имеет размерность $\dim T - \dim L$, существует векторное подпространство L' дополнительной размерности, образ которого в $\mathbb{R}^n/L$ пересекается с образом T' только в нуле. $0 \in T' \cap L'$, следовательно, тро-

пический индекс пересечения L' и T' положителен, тем не менее, так как L не содержится в T', выберем $x' \in L \setminus T'$ и заметим, что $T' \cap (L' + x') = \varnothing$. Таким образом, индекс пересечения T' и $L' + x'$ равен 0, значит, T' не тропический, следовательно, T не тропический.

Тем же способом можно проверить, что функция $w : \{\text{гладкие точки } T\} \to \mathbb{R}$, задающая тропическую структуру на T (см. определение 3.1.1), постоянна вдоль любого аффинного пространства, пааллельного L, и, следовательно, индуцирует функцию на гладкой части образа T в $\mathbb{R}^n/L$, которая задает тропическую структуру на образе. □

Доказательство утверждения 3.1.6. Пусть L — аффинная оболочка P, тогда $T \wedge P = (T \wedge L) \wedge P = (T \wedge L) \cap P$. Таким образом, часть 1 следует из леммы 3.1.2, и, подставив $T \wedge L$ вместо T и L вместо $\mathbb{R}^n$, мы можем предположить, что P — открытый n-мерный многогранник в $\mathbb{R}^n$. Мы также предположим по индукции, что утверждение уже доказано для многогранников размерности меньшей, чем n.

Доказательство части 2. Докажем от противного. Пусть существует открытый многогранник P, тропический комплекс T в $\mathbb{R}^n$ и точка $x \in \overline{T \cap P} \cap \partial P$, для которых множество $\overline{T \cap P} \cap \partial P$ имеет размерность меньше $\dim T - 1$ в достаточно малой окрестности x (в частности, $\dim T > 1$). Без ограничения общности, предположим, что $x = 0$. Рассмотрим полиэдральный конус P', совпадающий с P в достаточно малой окрестности нуля, и тропический комплекс T', состоящий из конечного числа полиэдральных конусов T_i и совпадающий с T в достаточно малой окрестности нуля. Тогда, по предположению, множество $\overline{T' \cap P'} \cap \partial P'$ непусто и имеет меньшую размерность, чем $\dim T - 1$.

Теперь докажем, что P' содержит прямую. Если конус P' не содержит прямую, то существует аффинная гиперплоскость L'', пересекающаяся с ним по ограниченному $n-1$-мерному многограннику P''. Обозначим (стабильное) пересечение $T' \wedge L'' = T' \cap L''$ через T'', тогда $\overline{T'' \cap P''} \cap \partial P'' = L'' \cap \overline{T' \cap P'} \cap \partial P'$

имеет размерность меньшую, чем $k-2$. С другой стороны, $\overline{T'' \cap P''} \cap \partial P''$ непусто, иначе связная компонента множества $T' \wedge L''$ в P'' — непустой ограниченный тропический комплекс положительной размерности, что невозможно, по лемме 3.1.7.1. Таким образом, многогранник меньшей размерности P'' и тропический комплекс T'' противоречат предположению индукции. Таким образом, максимальное векторное подпространство L', содержащееся в T', имеет положительную размерность.

Докажем, что подпространство L' параллельно каждому из T_i. В противном случае, существует прямая $l \subset L'$, не параллельная некоторому T_i, тогда стабильный образ T'' комплекса T' при проекции вдоль l непуст. Обозначим проекцию P' вдоль l через P'', тогда множество $\overline{T'' \cap P''} \cap \partial P''$ содержит 0, содержится в проекции множества $\overline{T' \cap P'} \cap \partial P'$, и его размерность меньше $k-1$, следовательно многогранник меньшей размерности P'' и тропический комплекс T'' противоречат предположению индукции.

В то же время можно доказать, что подпространство L' не параллельно некоторому T_i. Действительно, в противном случае, по лемме 3.1.7.2, $T' = T'' \times L'$ и $P' = P'' \times L'$ для многогранника P'' и тропического комплекса T'' в факторпространстве $\mathbb{R}^n/L'$. Так как $\overline{T' \cap P'} \cap \partial P' = (\overline{T'' \cap P''} \cap \partial P'') \times L''$, размерность множества $\overline{T'' \cap P''} \cap \partial P''$ меньше, чем $\dim T'' - 1$, следовательно, многогранник меньшей размерности P'' и тропический комплекс T'' противоречат предположению индукции.

Таким образом, предположив противное утверждению части 2, мы пришли к выводу о том, что подпространство L' параллельно всем T_i, но не параллельно одному из них, противоречие.

Доказательство части 3. Представим многогранник P в виде прообраза при линейном отображении $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ многогранника $\Delta \subset \mathbb{R}^k$ такого, что Δ не содержит прямую, затем применим лемму 3.1.7.1. $\square$

3.1.2. Вырождение смешанных расслоенных многогранников

Многие понятия из выпуклой геометрии, связанные с многогранниками, допускают смешанную версию для набора многогранников (например, смешанный объем, смешанный расслоенный многогранник). Наша цель — построение смешанной версии понятия грани, и для этого нам понадобится следующая векторная форма записи наборов многогранников.

Пусть A — K-набор многогранников в $\mathbb{R}^n$ (т.е. отображение из конечного множества $K \subset \mathbb{Z}$ во множество многогранников в $\mathbb{R}^n$). Для любого $J \subset K$ обозначим ограничение A на J через AJ (оно называется *поднабором* набора A). Мощность K обозначим через $|A|$, сумму Минковского многогранников $A(k)$, $k \in K$, — через $\sum A$ (она равна $\{0\}$ при $K = \varnothing$), разность $\dim(\sum A) - |A|$ — через $\dim A$. Обозначим минимум $\dim AJ$ по всем $J \subset K$ через $\min\dim A \leqslant 0$, смешаный объем и смешанный расслоенный многогранник многогранников $A(k)$, $k \in K$,— через $\mathrm{MV}(A)$ и $\mathrm{MP}(A)$, соответственно. Через A/J обозначим набор образов $A(k)$, $k \in K \setminus J$, при проекции вдоль аффинной оболочки суммы $\sum AJ$.

Для набора чисел $a : K \to \mathbb{Z}$ пусть A^a — набор, содержащий $a(k)$ копий многогранника $A(k)$ для любого $k \in K$ (более точно, выберем отображение $\kappa : K' \to K$ такое, что прообраз каждого $k \in K$ состоит из $a(k)$ элементов и положим A^a равным K'-набору $A \circ \kappa$). Например, утверждение 1.1.7 в этих обозначениях запишется следующим образом:

Лемма **3.1.8.** *Для набора A линейно независимых многогранников таких, что $\dim A = \dim AI = 0$, верно $\mathrm{MV}(A) = \mathrm{MV}(AI)\,\mathrm{MV}(A/I)$.*

Определение **3.1.9** ([131])**.** Набор A называется *существенным,* если $\dim AJ = \min\dim A$ только при $J = K$.

Нам понадобится также еще одно близкое понятие:

Определение **3.1.10.** Набор A называется *значимым*, если размерность выпуклой оболочки $A_{i_0} + \ldots + A_{i_p}$ не меньше p для любой последовательности $0 \leq i_0 < \ldots < i_p \leq k$ и равна n при $p = k$.

Лемма **3.1.11** ([131]). *1) Множество всех $J \subset K$ таких, что $\dim AJ = \min \dim A$, содержит единственный минимальный элемент;*
2) Множество всех $J \subset K$ таких, что набор AJ существенен, содержит единственный максимальный элемент.
3) Данные подмножества совпадают.

Доказательство. Заметим, что

$$\dim AI + \dim AJ \geqslant \dim A(I \cup J) + \dim A(I \cap J). \qquad (*)$$

Если $\dim AI = \dim AJ = \min \dim A$, то $\dim A(I \cap J) = \min \dim A$, по $(*)$. Тогда пересечение всех I таких, что $\dim AI = \min \dim A$, имеет ту же размерность, откуда следует утверждение (1). Обозначим данное пересечение через I_0 и заметим, что набор AI_0 существенный.

Если набор AJ существенный, и $J \not\subset I$, то $\dim A(I \cap J) > \dim AJ$, и, сложив это неравенство с $(*)$, получим $\dim AI > \dim A(I \cup J) \geqslant \min \dim A$, следовательно, $I \neq I_0$. Таким образом, I_0 содержит любое другое подмножество J такое, что AJ существенен, что доказывает утверждения (2) и (3). $\square$

Прежде всего применим данную лемму, чтобы сформулировать и доказать версию леммы об эквивалентности 3.1.3 для смешанных расслоенных многогранников. Пусть H — $\{0, \ldots, k\}$-набор многогранников в $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$. Рассмотрим его проекцию A на $\mathbb{R}^n$ (т.е. $A(i) \subset \mathbb{R}^n$ — проекция $H(i)$ для любого i). Допустим, что набор A значимый (см. определение 3.1.10).

Теорема **3.1.12.** *1) Предположим, что набор A линейно зависим, и AI — его максимальный существенный поднабор. Сумма*

$$\sum_{a_0 + \ldots + a_k = n+1} \mathrm{MP}(H^a) \qquad (*)$$

по всем разложениям $n+1$ в сумму положительных целых чисел является точкой тогда и только тогда, когда проекция $\sum HI$ на $\mathbb{R}^n$ инъективна.
2) Пусть набор A линейно независим. Сумма $(*)$ является точкой тогда и только тогда, когда проекция суммы $\sum H$ на $\mathbb{R}^n$ инъективна.

Доказательство импликаций $\Leftarrow$. В обоих случаях, в данных предположениях, смешанный объем многогранников

$$\underbrace{H(0),\dots,H(0)}_{a_0},\dots,\underbrace{H(k),\dots,H(k)}_{a_k},B_1,\dots,B_{m-1}$$

равен нулю, по лемме 3.1.3, для любого представления $n+1$ в виде суммы положительных целых чисел $a_0+\ldots+a_k$ и для всех многогранников $B_0,\dots,B_{m-1}$ в $\mathbb{R}^m$. По теореме 2.2.36, отсюда следует, что смешанный объем многогранников $B_1,\dots,B_{m-1}$ и смешанного расслоенного многогранника $\mathrm{MP}(H^a)$ равен нулю, следовательно, сумма $(*)$ является точкой.

Доказательство импикаций $\Rightarrow$. Рассмотрим набор отрезков общего положения $B_1,B_2,\dots,B_{m-1}\subset\mathbb{R}^m$. Пусть L — аффинная оболочка $\sum B_i$.

Рассмотрим $\{0,1,\dots,k+m-1\}$-набор R такой, что $R(i)=H(i), i\leq k$ и $R(i)=B_{i-k}, i>k$. Рассмотрим его поднабор $B:=R\{k+1,\dots,k+m-1\}$.

Если проекция $\sum H$ на $\mathbb{R}^n$ инъективна, утверждение очевидно. Иначе выберем произвольное одномерное подпространство $K\subset\mathbb{R}^m$, параллельное аффинной оболочке общего слоя. Так как L находится в общем положении, имеем $\mathbb{R}^m=L\oplus K$, и факторпространство $(\mathbb{R}^m\oplus\mathbb{R}^n)/L$ канонически изоморфно $K\oplus\mathbb{R}^n$. Таким образом, получим $\dim\sum R/B=n+1$, значит, $\dim\sum R=\dim\sum R/B+\dim\sum B=n+m$. Проверим условия леммы 3.1.3 применительно к R. Так как сумма $(^*)$ является точкой, верно

$$\sum_{a_0+a_1+\ldots+a_k=n+1} H_0^{a_0}\dots H_n^{a_n}B_1\dots B_{m-1}=0.$$

Многогранники B_i одномерны, поэтому

$$\sum_{a_0+a_1+\ldots+a_{k+m-1}=n+m}\mathrm{MV}(R^a)=0.$$

По лемме 3.1.3, существует такой поднабор RJ, что $\dim RJ < 0$.

Мы можем предположить, что B — поднабор набора RJ, иначе заменим J на $J \cup \{k+1, \ldots, k+m-1\}$, и неравенство $\dim RJ < 0$ будет верно. Пусть $J' = J \setminus \{k+1, \ldots, k+m-1\}$. Обозначим через $p(HJ')$ проекцию HJ' на $K \oplus \mathbb{R}^n$. Тогда $p(HJ') = RJ/B$ and $\dim p(HJ') = \dim RJ/B = \dim RJ < 0$.

Предположим, что проекция $\sum HJ'$ на $\mathbb{R}^n$ не инъективна. Так как L находится в общем положении, слой проекции трансверсален $L \oplus \mathbb{R}^n$. Следовательно, $\dim p(HJ') = \dim AJ' + 1$, а значит, $\dim AJ' < -1$, что противоречит значимости A. Таким образом, проекция $\sum HJ'$ на $\mathbb{R}^n$ инъективна, и $\dim AJ' = \dim p(HJ') = -1$. Тогда J' содержит подмножество I такое, что AI — максимальный существенный поднабор A, и проекция $\sum HI$ на $\mathbb{R}^n$ также инъективна. □

3.1.3. Смешанные грани набора многогранников и их примыкания

Определение **3.1.13.** Набор многогранников B называется *гранью* набора A, если $B(i)$ является гранью $A(i)$ для любого $i \in K$ и $\sum B$ — грань многогранника $\sum A$. Данное отношение мы будем записывать в виде $B \prec A$. Грань B набора A называется *тривиальной*, если $B = A$. Поднабор грани будем называть *огранкой*.

Определение **3.1.14.** Набор E называется *существенной огранкой* набора A, если он является максимальным существенным поднабором грани $B \prec A$. Существенная огранка *тривиальна*, если она является поднабором набора A. Существенная огранка E *примыкает* к существенной огранке E', если они являются максимальными существенными поднаборами граней $B \prec B' \prec A$ соответственно.

Это определение и его дальнейшее подробное изучение мотивируется связью с геометрией результантных множеств, которая прояснится в разделе 4.3.1.

Теорема **3.1.15.** *Каждая существенная огранка E примыкает к некоторой другой существенной огранке E' такой, что* $\dim E' = \dim E + 1$.

Таким образом, существенные огранки набора многогранников ведут себя подобно граням многогранника в отношении примыкания и размерности. С другой стороны, примыкание существенных огранок не является транзитивным отношением (см. пример ниже), и все трудности в данной главе связаны, прежде всего, с данной проблемой. Прежде чем доказать теорему, приведем контрпримеры к нескольким напрашивающимся, но неверным упрощениям ее формулировки. Обозначим стандартный симплекс и стандартный куб в $\mathbb{R}^n$ через S_n и C_n, соответственно, и обозначим выпуклую оболочку точек $(0,0,0), (0,1,2), (0,2,1)$ через D.

Пример **3.1.16.** В утверждении теоремы существенная огранка E не обязательно является гранью поднабора огранки E': рассмотрим $A(1) = C_2, A(2) = A(3) = A(1)^{(0,-1)}$ и $E = A^{(0,-1)}$, тогда $E' = A\{2,3\}$. Набор A изображен черным цветом на левой части рисунка ниже, E выделен голубым цветом, а E' — красным.

В утверждении теоремы поднабор существенной огранки E не обязательно является гранью огранки E': рассмотрим $A(1) = C_2, A(2) = A(3) = S_2$ и $E = A\{2,3\}^{(0,1)}$, тогда $E' = A$. Набор A изображен черным цветом на правой части рисунка ниже, E выделен голубым.

Рисунок 3: огранки набора многогранников.

Если V, E и E' являются существенными огранками набора A, и V примыкает к E, а E примыкает к E', то V не обязательно примыкает к E': рассмотрим $A(1) = C_3, A(2) = A(3) = A(4) = D$, $V = A^{(-1,-1,-1)}$, $E = A\{2,3,4\}^{(0,-1,-1)}$ и

$E' = A\{2,3,4\}^{(0,-2,1)}$. На рисунке набор A изображен четрным,V – голубыми точками, E – красными кружочками, и E' зеленными отрезками. Некоторые возможные способы представить E и E' как максимальные существенные поднаборы граней B и $B' \prec A$ изображены красным и зеленым пунктиром соответственно.

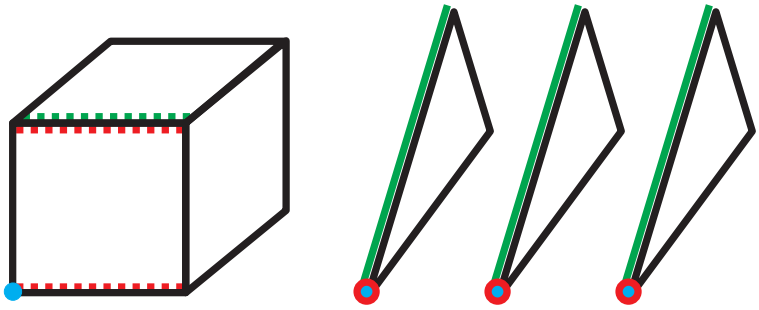


Рисунок 4: примыкание огранок.

Разбирая эти примеры, полезно переформулировать определение существенных огранок и их примыкания следующим образом (мы, тем не менее, не будем в дальнейшем использовать данное утверждение и опустим детали его доказательства).

Утверждение **3.1.17.** *1) Каждая существенная огранка E набора A является максимальным существенным поднабором некоторой грани $B \prec A$ такой, что* $\dim E = \dim B$.
2) Каждая пара примыкающих огранок E и E' представляет собой максимальные существенные поднаборы граней $B \prec B' \prec A$ таких, что $\dim E = \dim B$ *и* $\dim E' = \dim B'$.

Часть 1 совпадает с утверждением леммы 3.1.21 ниже, часть 2 доказывается индукцией по $\dim E' - \dim E$ с помощью теоремы 3.1.18 ниже.

Тем не менее, если для грани B верно утверждение части 1, то не всегда возможно представить ее в виде грани набора B', удовлетворяющего утверждению части 2, даже если $\dim E' = \dim E + 1$. Например, в обозначениях предыдущего примера, набор $B = A^{(0,-1,-1)}$ доказывает утверждение 3.1.17(1) для E, но не

существует грани B' такой, что B и B' доказывали бы утверждение 3.1.17(2) для E и E' (зато его доказывают $B = A^{(0,-10,1)}$ и $B' = A^{(0,-2,1)}$).

Докажем следующую более сильную версию теоремы 3.1.15.

Теорема **3.1.18.** *Если E — нетривиальная существенная огранка набора A, то она также является нетривиальной огранкой грани $B \prec A$, такой что $\dim B = \min \dim B = 1 + \dim E$.*

Оставшаяся часть данного раздела посвящена доказательству данной теоремы. Нам понадобится следующее соотношение между существенными наборами и стабильными пересечениями:

Утверждение **3.1.19.** *Для разложения $K = I \sqcup H$ пусть L — ортогональное дополнение к сумме $\sum AI$. Рассмотрим C, стабильное пересечение двойственных комплексов многогранников AH. Тогда*
1) Если AI — максимальный существенный поднабор набора A, то стабильное пересечение L с C is непусто.
2) Если стабильное пересечение L с C непусто, то максимальный существенный поднабор набора A является поднабором набора AI.

Заметим, что в обоих случаях обратные утверждения неверны.

Доказательство части 1. Выберем произвольные многогранники B_1, $\dots, B_{\operatorname{codim} L}$, ортогональное дополнение к каждому из которых равно L, тогда набор $B_1, \dots, B_{\operatorname{codim} L}, AH$ удовлетворяет условию (1) леммы 3.1.3. Следовательно, по этой лемме, стабильное пересечение двойственных комплексов многогранников $B_1, \dots, B_{\operatorname{codim} L}, AH$ непусто, в то время как стабильное пересечение двойственных комплексов многогранников $B_1, \dots, B_{\operatorname{codim} L}$ равно L.

Доказательство части 2. Докажем от противного. Предположим, что существует поднабор AJ, $J \not\subset I$, являющийся существенным. Обозначим ортогональное дополнение к набору $A(I \cap J)$ через M и выберем произвольные многогранники $B_1, \dots, B_{\operatorname{codim} M}$, ортогональное дополнение к каждому из которых

равно M. Так как набор AJ существенен, верно

$$\dim\bigl(\Sigma A(H\cap J)+\Sigma_i B_i\bigr) = \dim AJ < |I|-|I\cap J|+\dim \Sigma A(I\cap J) = |H\cap J|+\dim \Sigma_i B_i,$$

т.е. набор $B_1,\dots,B_{\operatorname{codim} M}, A(H\cap J)$ не удовлетворяет условию (1) леммы 3.1.3, значит, стабильное пересечение его двойственных комплексов пусто. Стабильное пересечение двойственных комплексов многогранников $B_1,\dots,B_{\operatorname{codim} M}$ равно M, следовательно, оно содержит L, таким образом, стабильное пересечение L с двойственными комплексами набора AH также пусто. □

Следующий факт хорошо известен:

Лемма **3.1.20.** *Двойственный комплекс многогранника Δ^γ определяется следующими условиями: он состоит из конусов с вершинами в γ и в некоторой окрестности γ совпадает с двойственным комплексом многогранника Δ.*

Для набора многогранников A через A^γ обозначим его грань B, удовлетворяющую условию $B(i) = A(i)^\gamma$, $i\in K$. Заметим, что каждую грань можно представить в таком виде для подходящего γ. Докажем следующие более слабые версии теоремы 3.1.18.

Лемма **3.1.21.** *Если E — максимальный существенный поднабор набора A, то он также является максимальным существеным поднабором некоторой грани $B\prec A$ такой, что $\dim B = \dim E$.*

Доказательство. Применив утверждение 3.1.19(1) в случае $AI = E$, получим, что $L\wedge C$ непусто (в обозначениях утверждения). Предположим, что $\dim A > \dim E$ (иначе мы могли бы положить $B = A$), тогда из леммы 3.1.2(2) следует $\dim L\wedge C > 0$; в частности, $L\wedge C$ содержит ненулевой ковектор γ. По лемме 3.1.20, стабильное пересечение двойственных комплексов многогранников $A(i)^\gamma$, $i\notin I$, с L также непусто (т.к. оно тоже содержит γ). Таким образом, применив утверждение 3.1.19(2) к набору A^γ и его поднабору E, получим, что

максимальный существенный поднабор в A^γ является поднабором набора E. Так как E сам является существенным, он и является максимальным существенным поднабором в A^γ. Мы доказали следующее: если E — максимальный существенный поднабор набора A такой, что $\dim A > \dim E$, то он также является максимальным существенным поднабором некоторой нетривиальной грани $B \prec A$. Повторяя данное рассуждение, получим доказываемое утверждение. □

Лемма **3.1.22.** *Если E — нетривиальная существенная огранка набора A, то она также является нетривиальной существенной огранкой некоторой нетривиальной грани $B \prec A$, если только выполнено очевидно необходимое для этого условие* $\dim A > 1 + \dim E$.

Доказательство. По лемме 3.1.21, мы можем выбрать грань $D \prec A$ такую, что $E = DI$ — ее максимальный существенный поднабор и $\dim D = \dim E$. Применив утверждение 3.1.19(1) к D и ее максимальному существенному поднабору E, получим $C \wedge L \neq \varnothing$ (в обозначениях данного утверждения).

Теперь докажем то же утверждение для стабильного пересечения C' двойственных комплексов многогранников $A(i)$, $i \notin I$, и (открытого в своей векторной оболочке) конуса $L' \subset L$ внешних нормальных ковекторов к грани $\sum E$ многогранника $\sum AI$: множество $L' \wedge C'$ непусто. Предположим противное: $L' \wedge C' = \varnothing$. Выберем $\gamma \in L'$ такой, что $A^\gamma = D$, тогда, по лемме 3.1.20, комплекс C однозначно определяется следующим условием: он совпадает с C' в достаточно малой окрестности γ. L совпадает с L' в достаточно малой окрестности γ, поэтому $C \wedge L = L' \wedge C' = \varnothing$ в достаточно малой окрестности γ, откуда следует $C \wedge L = \varnothing$.

По лемме 3.1.2(2) и предположению $\dim A > 1 + \dim E$, верно $\dim L' \wedge C' > 1$. Применив утверждения 3.1.6(2),(3) к тропическому комплексу C' и многограннику L', получим, что замыкание $L' \wedge C'$ пересекает (относительную) границу C' по непустому множеству положительной размерности. В частности,

данное пересечение содержит ненулевой ковектор γ, вблизи которого находится ненулевой ковектор $\delta \in L' \wedge C'$. Мы докажем, что A^γ — искомая грань B следующим образом. По лемме 3.1.20, стабильное пересечение L с двойственными комплексами многогранников $A(i)^\delta$, $i \notin I$, непусто (а именно, оно содержит δ, потому что $L' \wedge C'$ содержит δ). Следовательно, применив утверждение 3.1.19(2) к грани A^δ и ее поднабору E, получим, что максимальный существенный поднабор в A^δявляется поднабором набора E. Так как E существенен, он сам является максимальным существенным поднабором в $A^\delta \prec A^\gamma$. □

Лемма **3.1.23.** *Если E — тривиальная существенная огранка набора A, то* $\dim E = \min \dim A$. *Если E — нетривиальная существенная огранка набора A, то* $\dim E < \min \dim A$.

Доказательство. Первое утверждение следует из определения. Чтобы доказать второе, предположим, что E — максимальный существенный поднабор BJ для грани $B \prec A$. Если $J \subset I$, то выполнено $\dim E \leq \dim BI < \dim AI$, где второе неравенство строгое, потому что E нетривиален. Иначе имеем $\dim E < \dim BI \leq \dim AI$, где первое неравенство строгое, по лемме 3.1.11(1). □

Доказательство теоремы 3.1.18 осуществляется индукцией по $\dim A$. Если $\dim A > 1 + \dim E$, заменим A на грань B, полученную с помощью леммы 3.1.22, и возмользуемся предположением индукции. Если размерность $\dim A = 1 + \dim E$, то она также равна $\min \dim A$, по лемме 3.1.23, и мы можем положить $B = A$. □

3.1.4. Смешанные числа Милнора и грани набора множеств решетки

Здесь мы сформулируем результаты предшествующих разделов в форме, которая нам понадобится в дальнейшем: вместо многогранников мы будем рассматривать конечные подмножества решетки $\mathbb{Z}^n$. В частности, мы будем применять всю терминологию, связанную с многогранниками, к конечным подмно-

жествам в $\mathbb{Z}^n$, рассматривая их выпуклые оболочки. *Гранью конечного множества* $H \subset \mathbb{Z}^n$ называется пересечение множества H с гранью его выпуклой оболочки. Размерность $\dim H$ множества $H \subset \mathbb{Z}^n$ — размерность его выпуклой оболочки.

Как и прежде, *K-набором* конечных множеств называется отображение A из конечного множества K во множество конечных подмножеств в $\mathbb{Z}^n$, его *I-поднабор* для $I \subset K$ обозначается AI, сумма Минковского его элементов $\{\sum_{k\in K} a_k \,|\, a_k \in A_k\}$ обозначается $\sum A$ (и равна $\{0\}$ при $K = \varnothing$), а через $\dim A$ обозначается разность $\dim(\sum A) - |K|$. K-набор Γ является *гранью* K-набора A, если $\Gamma(k)$ — грань множества $A(k)$ для любого $k \in K$ и $\sum \Gamma$ — грань множества $\sum A$.

Определение **3.1.24.** Назовем грань $\Gamma \prec AI$ *важной*, если существует грань $\Gamma' \prec A$ такая, что $\Gamma = \Gamma' I$ и $\dim \Gamma \leqslant \dim \Gamma' J$ для любого $J \supset I$. Она называется *существенной*, если к тому же $\dim \Gamma < \dim \Gamma' J$ для любого $J \subsetneq I$ (т.е. если выпуклые оболочки множеств Γ образуют существенную огранку набора выпуклых оболочек множеств A).

Если Γ — грань набора AI, то обозначим проекцию $\mathbb{Z}^n$ вдоль выпуклой оболочки суммы $\sum \Gamma$ через p, выпуклые оболочки образов $pA(i)$, $i \notin I$, — через $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$, выпуклые оболочки $p(\sum AI)$ и $p(\sum AI \setminus \sum \Gamma)$ — через Ψ_0 и Ψ, соответственно.

Определение **3.1.25.** *Числом Милнора* набора A в грани Γ называется

$$c_A^\Gamma = \sum_{a_0,\ldots,a_m} \Psi_0^{a_0} \cdot \Psi_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot \Psi_m^{a_m} - \Psi^{a_0} \cdot \Psi_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot \Psi_m^{a_m},$$

где $(a_0, \ldots, a_m)$ пробегает множество всех наборов положительных чисел, дающих в сумме $\dim \sum A - \dim \sum \Gamma$, и смешанный объем многогранников $B_1, \ldots, B_k$ в k-мерном векторном пространстве записывается в виде монома $B_1 \cdot \ldots \cdot B_k$.

Число Милнора зависит не от всего набора A, а только от его локальной структуры вблизи Γ. Более точно, пусть ψ_0 — вершина $p(\sum \Gamma)$ многогранника

Ψ_0, и пусть

$$C = \{\lambda(\psi - \psi_0) \,|\, \lambda > 0,\, \psi \in \Psi_0\}$$

— конус, который в некоторой окрестности 0 выглядит как Ψ_0 в некторой окрестности своей вершины ψ_0, и обозначим пару (неограниченных) многогранников $(\Psi_0 + C, \Psi + C)$ через Φ_0, а $(\Psi_i + C, \Psi_i + C)$ — через Φ_i для $i > 0$. Напомним, что через Φ_I обозначаются призмы с основаниями Φ_i, $i \in I$ (определение 2.3.1).

Утверждение **3.1.26.** *Число* c_A^Γ *равно*

$$\sum_{a_0+\ldots+a_m=d} \Phi_0^{a_0} \cdot \Phi_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot \Phi_m^{a_m} = \sum_{I \subset \{0,\ldots,m\}} (-1)^{m+1-|I|}(d + |I| - 1)! \operatorname{Vol} \Phi_I,$$

где $(a_0, \ldots, a_m)$ *пробегает множество всех наборов натуральных чисел, дающих в сумме* $d = \dim \sum A - \dim \sum \Gamma$, *и смешанный объем пар многогранников* $P_1, \ldots, P_k$ *в* k*-мерном векторном пространстве записывается в виде* $P_1 \cdot \ldots \cdot P_k$.

Доказательство очевидно следует из лемм 2.1.4 и 2.3.2.

Следствие **3.1.27.** *Верно* $c_A^\Gamma \geqslant 0$. *Более того, грань* Γ *важна тогда и только тогда, когда* $c_A^\Gamma > 0$.

Положительность можно вывести из важности с помощью леммы 3.1.5, примененной к Ψ_i и Ψ. Важность выводится из положительности непосредственно (нам, впрочем, данная импликация не потребуется).

Следствие **3.1.28.** *Если* $\dim E = -k < 0$ *для существенной огранки* E *значимого набора* A, *то существуют существенные огранки* E_i *размерности* $-i$ *при* $i = 1, \ldots, k$ *такие, что* $E = E_k$, *и* E_i *примыкает к* E_{i-1} *для любого* i.

Данное следствие вытекает индукцией по $\dim E$ из теоремы 3.1.15. Напомним, что примыкание не транзитивно, и мы не можем утверждать, что E_k примыкает к E_1.

3.2. Тропические вееры с полиномиальными весами.

3.2.1. Смешанный объем и произведение опорных функций его аргументов.

Вычисляя двумя различными способами эйлерову характеристику дискриминанта квадратного уравнения в терминах многогранников Ньютона, Г. Гусев ([68]) обнаружил неожиданную связь между смешанными объемами двух многогранников S_1 и S_2 в $\mathbb{R}^n$ и выпуклой оболочкой S их объединения. Например, при $n = 2$, обозначая смешанный объем P и Q через $\mathrm{Vol}(P, Q) = \mathrm{Vol}(P + Q) - \mathrm{Vol}(P) - \mathrm{Vol}(Q)$, получим равенство

$$\mathrm{Vol}(S, S) - \mathrm{Vol}(S, S_1) - \mathrm{Vol}(S, S_2) + \mathrm{Vol}(S_1, S_2) = 0.$$

Мы называем его неожиданным, так как оно априори не инвариантно относительно сдвигов S_1.

Отвечая на вопрос, поставленный в [68], мы приводим элементарное доказательство и многомерное обобщение данного равенства (см. следствие 3.2.5 ниже), которое использует следующий факт (см. теорему 3.2.2): смешанный объем многогранников зависит только от произведения их опорных функций, а не от отдельных опорных функций многогранников. Мы получим новую элементарную формулу, описывающую данную зависимость (см. утверждение 3.2.3) и покажем, что она является специализацией изоморфизма между двумя хорошо известными комбинаторными моделями когомологий торических многообразий. Несмотря на то, что данная конструкция корректно определена для произвольных многогранников, она до сих пор была обоснована только для многогранников с рациональными вершинами (частично ввиду недостатка комбинаторных средств, которые можно использовать вместо торической геометрии в случае, когда вершины не рациональны), см., например, [83]. Чтобы восполнить данный пробел, мы введем понятие тропического многообразия с полиномиальными весами, т.е. веера с полиномиальными функциями на его конусах, связан-

ными некоторым соотношением сбалансированности. (см. определение 3.2.16). Это понятие включает в качестве частных случаев как обычные тропические многообразия, так и непрерывные кусочно полиномиальные функции. С его помощью мы сможем обосновать вышеупомянутые результаты для произвольных (не рациональных) многогранников.

Мы также обсудим возможные приложения тропических многообразий с полиномиальными весами к тропической теории пересечений. А именно, мы заметим, что теория пересечений на гладком тропическом веере, недавно построенная в работах [3], [54], [124], может рассматриваться как ограничение теории пересечений на объемлющем векторном пространстве (см. теорему 3.2.41). Тропические многообразия с полиномиальными весами позволяют сформулировать возможное обобщение данного факта на случай негладких тропических многообразий. Ниже приведены краткие описания всех четырех глав настоящей работы.

Равенство Гусева. Для простоты обозначений, смешанный объем многогранников $A_1, \dots, A_k$ в $\mathbb{R}^k$ мы будем записывать в виде монома $A_1 \cdot \ldots \cdot A_k$ (смешанный объем, по определению, равен коэффициенту при мономе $x_1 \dots x_k$ многочлена $\mathrm{Vol}(x_1A_1 + \ldots + x_kA_k)$ от переменных $x_1, \dots, x_k$). Аналогично, для однородного многочлена $P(x_1, \dots, x_m) = \sum c_{a_1,\dots,a_m} x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m}$ степени k мы определим $P(A_1, \dots, A_m)$ как $\sum c_{a_1,\dots,a_m} A_1^{a_1} \dots A_m^{a_m}$.

Теорема **3.2.1** ([68]). *Для любых двух многогранников S_1 и S_2 в $\mathbb{R}^n$ и выпуклой оболочки S их объединения выполняется следующее равенство:* $(2^n - 2)S^n = \sum_{i=1}^{n-1} 2^i \left(S_1^{n-i} S^i + S^{n-i} S_2^i - S_1^{n-i} S_2^i\right)$.

При доказательстве данной теоремы мы используем следующий факт. Обозначим опорную функцию многогранника $A \subset \mathbb{R}^n$ через $A(\cdot) : (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}$, где $A(v) = \max_{a \in A} v \cdot a$.

Теорема **3.2.2.** *На пространстве веерно-полиномиальных функций на*

$(\mathbb{R}^n)^*$ существует такая линейная функция D, что

$$D\Big(A_1(\cdot)\dots A_n(\cdot)\Big) = A_1\dots A_n$$

для любого набора многогранников $A_1,\dots,A_n$ in $\mathbb{R}^n$.

Напомним, что функция f на $\mathbb{R}^m$ называется веерно-полиномиальной, если ее область определения можно разбить на полиэдральные конусы с вершиной в 0, на каждом из которых она является полиномом.

Заметим, что само существование функции D (помимо ее линейности) априори не очевидно, так как набор многогранников не определяется однозначно произведением их опорных функций: на следующем рисунке изображены две различные пары многоугольников, произведения опорных функций которых совпадают (следовательно, совпадают и смешанные объемы; они в данном случае равны 4).

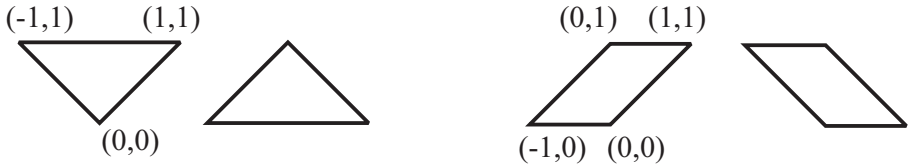


Рисунок 5: две пары многоугольников
с одинаковым произведением опорных функций.

Также заметим, что функция D не монотонна: если A, B и C — отрезки на плоскости, соединяющие начало координат с точками $(1,0)$, $(0,1)$ и $(1,1)$ соответственно, то $A(\cdot)B(\cdot) < C(\cdot)^2$, хотя $A\cdot B = 1 > C\cdot C = 0$. Более того, для произвольных выпуклых тел (если не ограничиваться многогранниками) такой функции D просто не существует, см. пример в [164].

Для рациональных многогранников теорема 3.2.2 является частным случаем изоморфизма между двумя хорошо известными моделями когомологий торических многообразий, подробнее см. в конце данной главы. Она также следует из более сильного факта о произведении опорных функций рациональных многогранников, см. теорему 5.1 в [83]. Но данное рассуждение не может

быть продолжено по непрерывности на произвольные (не рациональные) конусы и многогранники. Мы докажем теорему 3.2.2 в полной общности, используя утверждение 3.2.3 ниже, в котором приведена явная формула для функции D.

Заметим, что результаты работы [83] верны и для не рациональных многогранников; чтобы это доказать, достаточно вместо формулы Бриона в [83] использовать комбинаторную формулу Римана-Роха (см. [169]) (т.е. сложение по целым точкам многогранника нужно заменить интегрированием по многограннику). Однако это выходит за рамки данной работы.

Для (упорядоченного) базиса $v_1, \dots, v_n$ в $\mathbb{R}^n$ обозначим конус, образованный $v_1, \dots, v_n$, через $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$; ортогонализацию Грама-Шмидта базиса $v_1, \dots, v_n$ обозначим через $v_1^\perp, \dots, v_n^\perp$ (т.е. $v_1^\perp, \dots, v_n^\perp$ — ортонормированный базис, $v_1^\perp, \dots, v_i^\perp$ порождают то же подпространство, что и $v_1, \dots, v_i$ для $i = 1, \dots, n$, и $v_i \cdot v_i^\perp > 0$). Для непрерывной веерно-полиномиальной функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ рассмотрим простой полный веер Γ, на каждом из конусов $C \in \Gamma$ которого функция f совпадает с полиномом f_C. Тогда теорему 3.2.2 можно переформулировать следующим образом.

Утверждение **3.2.3.** *Определим $D(f)$ как*

$$\frac{1}{n!} \sum_{\langle v_1, \dots, v_n \rangle \in \Gamma} \frac{\partial^n f_{\langle v_1, \dots, v_n \rangle}}{\partial v_1^\perp \dots \partial v_n^\perp}, \tag{$*$}$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным базисам из единичных векторов $v_1, \dots, v_n$, порождающим конусы веера Γ. Тогда функция $D(f)$ не зависит от выбора веера Γ, линейна по аргументу f, и $D\Big(A_1(\cdot) \dots A_n(\cdot)\Big)$ равно смешанному объему многогранников $A_1, \dots, A_n$.

Данное утверждение является элементарной версией теоремы 3.2.39, формулировка и доказательство которой используют более общий аппарат, развиваемый в последующих главах. Для удобства читателя, мы наметим здесь план элементарного доказательства утверждения 3.2.3. Заметим также, что в работе [97] приведена другая явная формула для функции D.

План доказательства. Линейность и инвариантность относительно выбора подразбиений Γ следуют из определения, поэтому нам остается только доказать, что $D\Big(A_1(\cdot)\dots A_n(\cdot)\Big) = A_1\cdot\ldots\cdot A_n$. Более того, функция $D\Big(A_1(\cdot)\dots A_n(\cdot)\Big)$ мультилинейна по своим аргументам $A_1,\dots,A_n$, следовательно, равенство достаточно доказать при $A_1 = \ldots = A_n$, т.е. доказать, что $D\Big(A^n(\cdot)\Big)$ равно объему многогранника A.

Как симплициальная цепь, многогранник A представим в виде линейной комбинации симплексов с коэффициентами ± 1, объемы которых, с точностью до знака коэффициента в линейной комбинации, равны слагаемым суммы $(*)$. Отсюда следует доказываемое равенство. Таким образом, доказательство сводится к построению требуемых симплексов. Мы опишем данную конструкцию, для простоты предполагая, что ортогональное дополнение к аффинной оболочке каждой из (открытых в своей аффинной оболочке) граней $B \subset A$ пересекается с B.

Пусть $\Gamma_1 \subset \mathbb{R}^n$ — множество всех внешних нормалей к граням положительной размерности многогранника A, рассмотрим Γ_2, объединение всех лучей с началом в нуле, проходящих через точки тех граней многогранника A, коразмерность которых выше 1. Тогда множество $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ разбивает A на n-мерные симплексы, однозначно соответствующие слагаемым суммы $(*)$, и данные слагаемые равны объемам соответствующих симплексов, по лемме 3.2.4 ниже. □

Лемма **3.2.4.** *Если симплекс в $\mathbb{R}^n$ имеет n взаимно перпендикулярных ребер, то его объем равен произведению длин ребер на множитель $1/n!$.*

Следствие **3.2.5.** *Для любых многогранников $B_1,\dots,B_n$ в $\mathbb{R}^n$ и выпуклой оболочки B их объединения выполнено равенство $(B-B_1)\dots(B-B_n) = 0$.*

Доказательство. Так как $B(v) = \max_i B_i(v)$ для любого $v \in (\mathbb{R}^n)^*$, верно $\Big(B(v)-B_1(v)\Big)\dots\Big(B(v)-B_n(v)\Big) = 0$, и доказываемое равенство следует из теоремы 3.2.2. □

Доказательство теоремы 3.2.1. Суммируем равенство

$$2^i(S^{n-i} - S_1^{n-i})(S^i - S_2^i) = 0$$

(оно является частным случаем следствия 3.2.5) по $i = 1, \ldots, n-1$. □

Покажем теперь, что теорема 3.2.2 является частным случаем изоморфизма между двумя известными моделями когомологий торических многообразий.

Кольцо когомологий торических многообразий и его описание в форме Бриона—Стэнли.

Множество всех полных рациональных вееров в $\mathbb{R}^n$ допускает следующее отношение частичного порядка: $\Gamma_1 \leqslant \Gamma_2$ если каждый конус веера Γ_2 содержится в каком-нибудь конусе веера Γ_1. Обозначим торическое многообразие, соответствующее вееру Γ, через X_Γ. Естественное отображение $X_{\Gamma_2} \to X_{\Gamma_1}$ индуцирует гомоморфизм колец когомологий $h_{\Gamma_1,\Gamma_2} : H^\cdot(X_{\Gamma_1}) \to H^\cdot(X_{\Gamma_2})$. Индуктивная система данных колец и гоморфизмов имеет прямой предел

$$\mathcal{H} = \varinjlim H^\cdot(X_\Gamma).$$

Заметим, что полученное кольцо $\mathcal{H}$ не зависит от рассматриваемой версии теории когомологий (будь то сингулярные когомологии, кольца Чжоу или когомологии пересечений; обзор подобного рода результатов см. в работе [115]). Хорошо известны два комбинаторных описания данного кольца.

Первое из них получается из описания Бриона колец Чжоу [18] и описания Стэнли когомологий пересечений [130] торических многообразий. Рассмотрим $\mathcal{P}_\mathbb{Q}$, кольцо непрерывных кусочно полиномиальных функций на $\mathbb{R}^n$, области полиномиальности которых являются рациональными полиэдральными конусами с вершиной в 0. Обозначим через $\mathcal{L}_\mathbb{Q}$ его идеал, порожденный линейными функциями. Тогда $\mathcal{H} = \mathcal{P}_\mathbb{Q}/\mathcal{L}_\mathbb{Q}$.

Описание в форме Фултона—Казарновкого—МакМаллина—Штурмфельса.

Ещё одна комбинаторная модель описания кольца когомологий $\mathcal{H}$ была

предложена независимо несколькими авторами и известна как веса многогранников (МакМаллин [101]), веса Минковского (Фултон—Штурмфельс [56]), и c-вееры (Казарновский [162]). k-мерным *взвешенным кусочно-линейным множеством* называется пара (P, p), где *опорное множество* $P \subset \mathbb{R}^n$ является объединением конечного числа рациональных k-мерных многогранников (замкнутых и, возможно, неограниченных), а *вес* $p : P \to \mathbb{R}$ — локально постоянная функция на множестве гладких точек множества P. Оно *однородно*, если P — объединение полиэдральных конусов с вершиной в 0. Для гладкой точки x множества P пусть $N_x P \subset \mathbb{R}^n$ — подпространство коразмерности k, ортогональное касательному пространству к P в точке x. *Тропический индекс пересечения* $\circ_i(P_i, p_i)$ трансверсальных взвешенных кусочно-линейных множеств (P_i, p_i) таких, что $\sum_i \operatorname{codim} P_i = n$ определяется как сумма произведений $\left|\mathbb{Z}^n / \bigoplus_i (\mathbb{Z}^n \cap N_x P_i)\right| \cdot \prod_i p_i(x)$ по всем точкам $x \in \cap_i P_i$ (трансверсальность означает гладкость множеств P_i во всех точках их пересечения и трансверсальность их касательных плоскостей в этих точках).

Взвешенное кусочно-линейное множество (P, p) называется *тропическим многообразием*, если для любого рационального подпространства дополнительной размерности $L \subset \mathbb{R}^n$ тропический индекс пересечения $(P, p) \circ (L + x, 1)$ не зависит от точки $x \in \mathbb{R}^n$ (заметим, что индекс пересечения корректно определен для почти всех x). Тропические многообразия с положительными весами уже встречались нам под названием тропических комплексов, см. определение 3.1.1.

Произвольные тропические многообразия (P_i, p_i) такие, что $\sum_i \operatorname{codim} P_i = n$ в $\mathbb{R}^n$, будут пересекаться трансверсально, если их сдвинуть на векторы общего положения $x_i \in \mathbb{R}^n$, причем индекс пересечения $\circ_i\Big(P_i + x_i,\, p_i(\cdot - x_i)\Big)$ не зависит от выбора x_i. Следовательно, таким образом можно определить индекс пересечения многообразий (P_i, p_i) и обозначить его $\circ_i(P_i, p_i)$. Рассмотрим, например, два способа вычисления индекса пересечения пары тропических кривых в правой части следующего рисунка; оба способа приводят к ответу 4.

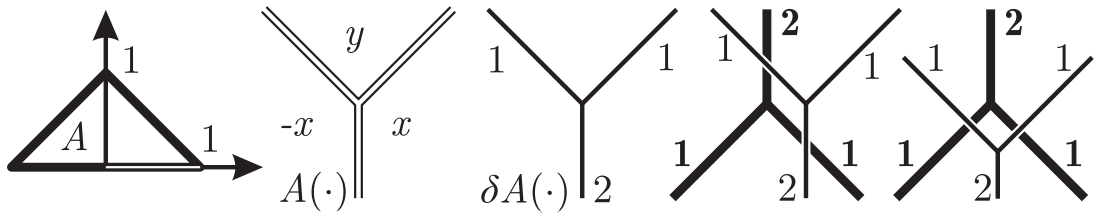


Рисунок 6: кусочно-линейные функции и тропические вееры

Произведение (R, r) тропических многообразий (P, p) и (Q, q) однозначно определяется равенством индексов пересечения $(R, r) \circ (S, s) = (P, p) \circ (Q, q) \circ (S, s)$ для любого тропического многообразия (S, s) дополнительной размерности (из данного определения не ясно, почему такое многообразие (R, r) существует, см. более конструктивное определение в главе 2). В частности, если (P, p) и (Q, q) — однородные тропические многообразия дополнительных размерностей, то их произведение — 0-мерное тропическое многообразие $\Big(\{0\}, (P, p) \circ (Q, q)\Big)$. Относительно данного умножения, естественного сложения $(P, p) + (Q, q) = (P \cup Q, p + q)$ и отношения эквивалентности $(P, 0) = (\varnothing, 0)$ для любого множества P однородные тропические многообразия образуют кольцо $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$, причем $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{H}$.

Изоморфизм.

Изоморфизмы $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}/\mathcal{L}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{H} = \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ индуцируют изоморфизм $I_{\mathbb{Q}} : \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}/\mathcal{L}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ двух комбинаторных моделей когомологий торических многообразий. Известна ещё одна комбинаторная модель $\mathcal{H}$, предложенная Хованским и Пухликовым. Изоморфизм между данной моделью и $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ комбинаторно описан в работе [86], но нам эта конструкция не понадобится.

Явные комбинаторные конструкции изоморфизма $I_{\mathbb{Q}}$ приведены в работах [83] и [97]. Его компонента степени 1, сопоставляющая веерно-линейным функциям однородные тропические гиперповерхности, устроена существенно проще и допускает следующее хорошо известное описание.

Определение **3.2.6.** Допустим, что конечная веерно-линейная функция $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ равна линейным функциям L_+ and L_- на дополнительных полу-

пространствах H_+ и H_-, разделяемых рациональной гиперплоскостью P (такая функция называется *книгой*). Выберем вектор $v \in H_+$, порождающий одномерную решетку $\mathbb{Z}^n/P$, и определим (постоянную) функцию

$$p(x) = \partial_v L_+(x) - \partial_v L_-(x) \text{ для любого} x \in P.$$

многообразие углов функции L определяется как пара (P, p) при $p \neq 0$ и $(\varnothing, 0)$ иначе (т.е. если L линейна). Оно не зависит от выбора v и обозначается δL. Для произвольной непрерывной кусочно-линейной функции L, области линейности которой являются рациональными многогранниками, многообразием углов является взвешенное кусочно-линейное множество δL такое, что если в окрестности некоторой точки функция L совпадает с книгой B, то в окрестности этой точки выполнено равенство $\delta L = \delta B$.

Следующие известные факты связывают многообразия углов с тропической и торической геометрией:

Утверждение **3.2.7.** *1) Многообразия углов, и только они, являются тропическими многообразиями коразмерности 1.*
2) Изоморфизм $I_{\mathbb{Q}}$ каждой вееро-линейной функции сопоставляет её многообразие углов.

Например, многообразие углов тропического многочлена – это в точности определяемая им тропическая гиперповерхность (см. определение 1.5.2). В частности, многообразие углов (P, p) опорной функции целочисленного многогранника A допускает следующее простое описание: множество P содержит все внешние нормальные ковекторы к ребрам A, и значение p на каждом таком ковекторе равно целочисленной длине соответствующего ребра. В таком случае A называется *многогранником Ньютона* тропической гиперповерхности (P, p), и тропическая версия теоремы Кушниренко-Бернштейна 1.5.5 записывается следующим образом:

Теорема **3.2.8** (Тропическая теорема Бернштейна)**.** *Индекс пересечения n тропических гиперповерхностей в $\mathbb{R}^n$ равен смешанному объему их многогранников Ньютона, то есть верно равенство*

$$\delta A_1(\cdot) \cdot \ldots \cdot \delta A_n(\cdot) = (\{0\}, A_1 \cdot \ldots \cdot A_n).$$

Пример **3.2.9.** Опорная функция треугольника и ее многообразие углов изображены на левой части рисунка 2. Таким образом, треугольники, изображенные на рисунке 1, являются многогранниками Ньютона тропических кривых, изображенных на правой части рисунка 2. Следовательно, смешанная площадь данных треугольников равна индексу пересечения данных кривых.

Доказательство теоремы 3.2.2 для рациональных многогранников.

Изоморфизм $I_{\mathbb{Q}}$ сопоставляет веерно-полиномиальной функции F степени n нульмерное тропическое многообразие $(\{0\}, c_F)$, где $0 \in \mathbb{R}^n$ — начало координат, а c_F — действительное число, зависящее от F. Мы докажем, что отображение, сопоставляющее веерно-полиномиальной функции F константу c_F, является искомой функцией D, т.е.

$$I_{\mathbb{Q}}\Big(A_1(\cdot) \cdot \ldots \cdot A_n(\cdot)\Big) = (\{0\}, A_1 \cdot \ldots \cdot A_n). \qquad (*)$$

Заметим для начала, что

$$I_{\mathbb{Q}}\Big(A_1(\cdot) \cdot \ldots \cdot A_n(\cdot)\Big) = I_{\mathbb{Q}}\Big(A_1(\cdot)\Big) \cdot \ldots \cdot I_{\mathbb{Q}}\Big(A_n(\cdot)\Big),$$

для любого набора целочисленных многогранников $A_1, \ldots, A_n$, так как $I_{\mathbb{Q}}$ является изоморфизмом колец. Далее, по утверждению 3.2.7(2), получим:

$$I_{\mathbb{Q}}\Big(A_i(\cdot)\Big) = \delta A_i(\cdot).$$

Искомое равенство $(*)$ следует из последних двух равенств и теоремы 3.2.8.

3.2.2. Тропические многообразия с полиномиальными весами.

Оказывается, что $I_{\mathbb{Q}}$ действует на веерно-полиномиальных функциях произвольной степени d как d-я степень некоторого оператора взятия многообразия углов, который обобщает определение 3.2.6 (см. определение 3.2.20 ниже), точно так же как показано выше в случае $d = 1$. Чтобы более точно сформулировать данное утверждение в виде, применимом к произвольным (не рациональным) многогранникам и конусам, мы воспользуемся понятием тропического многообразия с полиномиальными весами, которое может представлять самостоятельноый интерес. В данном разделе мы введем это понятие, а в следующем с его помощью изучим изоморфизм $I_{\mathbb{Q}}$. Позже оно понадобится, чтобы выписать простейшие тропические "полиномы Тома".

Взвешенные веера.

Выпуклым полиэдральным конусом в m-мерном векторном пространстве M называется пересечение его подпространства и конечного множества открытых полупространств. Конечное объединение C выпуклых полиэдральных конусов в M называется *гладким конусом* коразмерности k, если у каждой его точки x существует окрестность, в которой C совпадает с $(m-k)$-мерной плоскостью. Данная плоскость обозначается через $T_xC \subset M$, а ее ортогональное дополнение — через $N_xC \subset M^*$.

Определение **3.2.10.** *Взвешенным предвеером* коразмерности k в M называется пара (P, p) такая, что *опорное множество* P является гладким конусом коразмерности k, а *вес* p — функция, отображающая каждую точку $x \in P$, снабженную *кориентацией* $\alpha \in \{\text{ориентации } N_xP\}$, в k-форму $p(x, \alpha) \in \wedge^k M^*$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) для любой линейной функции $l : M \to \mathbb{R}$, равной нулю на T_xP, имеем $p(x, \alpha) \wedge dl = 0$,

2) $p(y, \alpha)$ — нечетная по α функция, т.е. $p(x, \alpha) + p(x, -\alpha) = 0$, и

3) $p(y, \alpha)$ в некоторой окрестности точки x совпадает с полиномиальной функ-

цией от y.

Замечание **3.2.11.** Мы будем придерживаться соглашения, что $\{-1, +1\}$ является множеством ориентаций в 0-мерном пространстве.

Пример **3.2.12.** Пусть $x_1, \ldots, x_m$ образуют стандартную систему координат в $\mathbb{R}^m$, а $P = \{x_1 = \ldots = x_k = 0,\ x_{k+1} > 0\}$. Выберем стандартную кориентацию $\alpha = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$ на P. Если (P, p) — взвешенный предвеер, то его вес может быть записан в виде $p(x, \pm\alpha) = \pm f(x_{k+1}, \ldots, x_m) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$, где f — многочлен.

Определение **3.2.13.** Для взвешенных предвееров (P, p) и (Q, q) коразмерности k в M, определим сумму $(P, p) + (Q, q)$ как предвеер $(R_1 \sqcup R_2 \sqcup R, r)$, где

$R_1 = P \setminus \overline{Q}$, and $r = p$ on R_1;

$R_2 = Q \setminus \overline{P}$, and $r = q$ on R_2;

$R = \{x \in P \cap Q \mid N_x P = N_x Q\}$, and $r = p + q$ on R.

Определение **3.2.14.** *Взвешенным веером* коразмерности k в M называется класс эквивалентности взвешенных предвееров коразмерности k по следующему отношению эквивалентности:

$$(P, p) \sim (Q, q) \ \Leftrightarrow\ (P, p) + (R, 0) = (Q, q) + (R, 0) \text{ для некоторого } R \subset M.$$

Пример. 0-мерный взвешенный веер в M — пара $(\{0\}, p)$, где p — форма псевдообъема на M.

Пример. Взвешенный веер коразмерности 0 в M может быть представлен в виде пары (P, p), где $P \subset M$ — объединение открытых полиэдральных конусов, а $p : P \to \mathbb{R}$ — локально полиномиальная функция.

Тропические многообразия.

Для взвешенного веера (P, p) коразмерности k в M удобно следующим образом определить ограничение функции веса p на границу подмножества опорного множества P. Рассмотрим выпуклый конус Q коразмерности k и его грань максимальной размерности R, выберем произвольную точку $y \in \overline{R}$ такую, что в достаточно малой ее окрестности P содержит Q. Любая кориентация α на Q индуцирует граничную кориентацию β на R, и предел $p(x, \alpha)$ при $x \in Q$, стремящемся к y, обозначается $\partial_R^Q p(y, \beta)$.

Точка $x \in M$, лежащая вне гладкого конуса P коразмерности k, принадлежит его *стабильной границе*, если в достаточно малой окрестности точки x множество P совпадает с конечным дизъюнктным объединением полупространств коразмерности k с общим граничным подпространством, содержащим x. Граничное подпространство обозначим через ∂P_x, множество соответствующих полупространств — через $\mathcal{P}_x$ (т.е. P совпадает с $\cup_{Q \in \mathcal{P}_x} Q$ в достаточно малой окрестности x). а через ∂P обозначим стабльную границу P. Стабильная граница является гладким конусом коразмерности $k+1$.

Пример **3.2.15.** В условиях примера, предшествующего определению 3.2.13, $\partial P = \{x_1 = \ldots = x_{k+1} = 0\}$, граничная кориентация β на ∂P, соответствующая α, равна $\beta = dx_{k+1} \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$, и $\partial_{\partial P}^P p(x, \pm\beta) = \pm f(0, x_{k+2}, \ldots, x_m) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$.

Определение **3.2.16.** Взвешенный веер (P, p) коразмерности k в M называется *тропическим многообразием коразмерности k с полиномиальными весами*, если для любой точки $x \in \partial P$ и кориентации $\beta \in \{\text{ориентации } N_x \partial P\}$, верно равенство

$$\sum_{Q \in \mathcal{P}_x} \partial_{\partial P_x}^Q p(x, \beta) = 0.$$

Множество тропических многообразий коразмерности k в M таких, что их веса — локально полиномиальные однородные функции степени d, обозначается $\mathcal{K}_k^d(M)$. Оно образует векторное пространство относительно сложения из определения 3.2.13 и умножения $c \cdot (P, p) = (P, c \cdot p)$.

Пример **3.2.17.** Пусть P — конечное объединение лучей l_i в $\mathbb{R}^2$, для каждого i зафиксируем линейную функцию $u_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, равную нулю на луче l_i и возрастающую в направлении против часовой стрелке от него. Пусть (P, p) — взвешенный веер. Тогда для $x \in l_i$ верно $p(x, du_i) = f_i(x)du_i$, где f_i — полиномиальная функция на l_i. В данном случае, (P, p) является тропическим многообразием, если $\sum_i f_i(0)u_i = 0$.

Многообразия углов.

Лемма **3.2.18.** *1) Для взвешенного веера (P, p) коразмерности k и его точки $x \in P$ с кориентацией α существует и единственна $(k+1)$-форма $\delta p(x, \alpha)$, удовлетворяющая равенству*

$$\delta p(x, \alpha)\ (v_0 \wedge \ldots \wedge v_k) \ = \ \partial_{v_0} p(x, \alpha)\ (v_1 \wedge \ldots \wedge v_k)$$

для любого набора векторов $v_0 \in T_x P$ и $v_1, \ldots, v_k$ в M (в данном случае, $\partial_{v_0} p$ — производная функции $p(\cdot, \alpha)$ вдоль вектора v_0).
2) Рассмотрим выпуклый полиэдральный конус Q коразмерности k, его грань максимальной размерности R и линейную функцию $l : M \to \mathbb{R}$, равную нулю на R. Тогда выполняется равенство:

$$\delta \partial_R^Q (dl \wedge p) = -\partial_R^Q (dl \wedge \delta p).$$

Каждое из утверждений леммы следует из условия 1 определения 3.2.10. Доказательство мы опустим, так как обе импликации сводятся к очевидным фактам из линейной алгебры, если их записать в координатах.

Пример **3.2.19.** В условиях примера, предшествующего определению 3.2.16, положим $l = x_{k+1}$, и рассмотрим взвешенный веер (P, p). Тогда:

$$\delta p(x, \alpha) = df(x_{k+1}, \ldots, x_m) \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k,$$

$$\partial_{\partial P}^P (dl \wedge \delta p)(x, \beta) = dx_{k+1} \wedge df(0, x_{k+2}, \ldots, x_m) \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k, \text{ and}$$

$$\delta\partial^P_{\partial P}(dl \wedge p)(x,\beta) = df(0, x_{k+2}, \ldots, x_m) \wedge dx_{k+1} \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k.$$

Лемма 3.2.18(1) утверждает, что первое из данных выражений является корректно определенной $(k+1)$-формой. По лемме 3.2.18(2), остальные выражения равны с точностью до знака.

Определение **3.2.20.** Рассмотрим тропическое многообразие с полиномиальными весами (P,p). В каждой точке $x \in \partial P$ с кориентацией $\beta \in \{\text{ориентации } N_x\partial P\}$ определим форму $r(x,\alpha)$ следующим образом:

$$r(x,\beta) = \sum_{Q \in \mathcal{P}_x} \partial^Q_{\partial P_x} \delta p(x,\beta).$$

Взвешенный веер $(\partial P, r)$ называется *многообразием углов* тропического многообразия (P,p) и обозначается $\delta(P,p)$.

Пример **3.2.21.** В условиях примера, следующего за определением 3.2.16, многообразием углов $\delta(P,p)$ является точка $\{0\}$ с весом $\sum_i df_i(0) \wedge du_i$. Заметим, что форма $df_i(0) \wedge du_i$ корректно определена, если df_i определена на луче l_i и u_i обнуляется на этом луче.

Теорема **3.2.22.** *Многообразие углов тропического многообразия само является тропическим многообразием.*

Доказательство. Рассмотрим тропическое многообразие с полиномиальными весами (P,p). Чтобы доказать выполнение условия 1 определения 3.2.10 для $\delta(P,p)$ в точке $x \in \partial P$, нужно проверить равенство

$$dl \wedge \sum_{Q \in \mathcal{P}_x} \partial^Q_{\partial P_x} \delta p(x,\alpha) = 0$$

для любой линейной функции l, равной нулю на $T_x\partial P$. По лемме 3.2.18(2), данное равенство можно переписать в виде $\delta(dl \wedge \sum_{Q \in \mathcal{P}_x} \partial^Q_{\partial P_x} p) = 0$. Последнее равенство следует из равенства $\sum_{Q \in \mathcal{P}_x} \partial^Q_{\partial P_x} p = 0$, которое является предположением определения 3.2.16 тропического многообразия (P,p).

Чтобы проверить данное предположение для $\delta(P,p)$ в точке $x \in \partial\partial P$, удобно выбрать представителя (P,p) в классе взвешенных предвееров, соответствующем данному тропическому многообразию, такого, что P является прообразом двумерного веера при сюръекции $M \to N$. Иными словами, в достаточно малой окрестности x выполнены следующие условия:

1) Множество $\partial\partial P$ совпадает с подпространством $R \subset M$ коразмерности $k+2$,

2) Множество ∂P совпадает с конечным дизъюнктным объединением полупространств Q_i, общей границей которых является R,

3) Множество P совпадает с конечным дизъюнктным объединением выпуклых полиэдральных конусов P_j, каждый из которых имеет две грани максимальной размерности, равные $Q_{j'}$ и $Q_{j''}$ для некоторых j' и j''.

В указанных обозначениях, нужно доказать равенство $\sum \partial_R^{Q_i}\partial_{Q_i}^{P_j}\delta p = 0$, где суммирование ведется по всем парам (i,j) таким, что Q_i является гранью максимальной размерности конуса P_j. Для этого достаточно просуммировать очевидные равенства

$$\partial_R^{Q_{j'}}\partial_{Q_{j'}}^{P_j} + \partial_R^{Q_{j''}}\partial_{Q_{j''}}^{P_j} = 0$$

по всем j. $\square$

Замечания.

Замечание **3.2.23.** Если пространство M снабжено метрикой или решеткой, то, отождествляя векторы с ковекторами и псевдообъемы со скалярами, можно считать, что веса взвешенных вееров принимают значения в числах, а не в формах. Всюду в нижеследующих примерах мы пользуемся этим отождествлением и записываем веса как численнозначные функции.

Замечание **3.2.24.** Хотя мы допускаем только кусочно-полиномиальные веса для взвешенных вееров, все рассуждения также работают в случае кусочно-гладких весов. Один пример, в котором естественно возникают кусочно-гладкие веса, был любезно предоставлен Дирком Сиерсма. Рассмотрим функцию $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, сопоставляющую каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$ расстояние от нее

до конечного множества $A \subset \mathbb{R}^n$. Данная функция является кусочно-гладкой, и ее k-е многообразие углов $\delta^k F$ — корректно определенное тропическое многообразие (P, p). Легко проверить, что P — остов коразмерности k диаграммы Вороного множества A и множество критических точек функции p совпадает с множеством критических точек функции F, содержащихся в P.

Многие из дальнейших утверждений являются обобщениями на случай полиномиальных весов известных фактов об обычных тропичеких многообразиях с постоянными весами. Мы опустим доказательства таких утверждений, так как они полностью повторяют рассуждения в случае постоянных весов, см. подробнее в [56], [162] или [105]. Единственными источниками новой информации являются утверждения об операторе взятия многообразия углов δ.

Лемма **3.2.25.** *1) Взвешенный веер (P, p) коразмерности 0 является тропическим многообразием с полиномиальными весами в M тогда и только тогда, когда P — объединение открытых полиэдральных конусов (коразмерности 0), а функция $p : P \to \mathbb{R}$ — ограничение непрерывной веерно-полиномиальной функции $M \to \mathbb{R}$, равной нулю вне замыкания P.*

2) Отображение $\delta : \mathcal{K}_0^1(M) \to \mathcal{K}_1^0(M)$ сюръективно, и его ядро имеет вид $\{(M, l) \mid l$ — линейная функция на $M\}$.

Часть 2 является переформулировкой утверждения 3.2.7.

Доказательство части 1. Непрерывность p в точках множества ∂P эквивалентна предположению определения 3.2.16 для (P, p). Непрерывность в других точках следует из а игрушечного варианта теоремы Римана об устранимой особенности: если действительная кусочно-полиномиальная функция непрерывна вне множества коразмерности 2, то она всюду непрерывна. □

Произведения.

Определение **3.2.26.** Рассмотрим (P, p) и (Q, q), взвешенные веера такие, что в некоторой точке $x \in P \cap Q$ касательные плоскости $T_x P$ и $T_x Q$ трансверсальны. Тогда ориентации α и β на пространствах $N_x P$ и $N_x Q$ индуцируют

ориентацию $\alpha\wedge\beta$ на $N_x(P\cap Q) = N_xP\oplus N_xQ$. Определим *внешнее произведение* $p\wedge q$ весов p и q в точке x равенством

$$(p\wedge q)(x,\alpha\wedge\beta) = p(x,\alpha)\wedge q(x,\beta).$$

Декартово произведение взвешенных вееров (P,p) в M и (Q,q) в N является взвешенным веером $(P\times Q, p\wedge q)\subset M\oplus N$. Обозначим его через $(P,p)\times(Q,q)$.

Лемма **3.2.27.**
1) Если F и G — тропические многообразия с полиномиальными весами, то таково и их произведение $F\times G$.
2) В данном случае, выполняется правило Лейбница: $\delta(F\times G) = (\delta F)\times G + F\times(\delta G)$.

Доказательство мы опустим, так как оба утверждения следуют из определения.

Пара гладких конусов в M называется *двухтомником*, если они являются прообразами гладких конусов дополнительных размерностей в векторном пространстве N при проекции $M\to N$, и их объединение не принадлежит никакой гиперповерхности. Точка $x\in\overline{P}\cap\overline{Q}$ содержится в *стабильном пересечении* $P\cap_s Q$ гладких конусов P и Q в M, если в достаточно малой окрестности точки x пара (P,Q) совпадает с некоторым двухтомником. $P\cap_s Q$ является гладким конусом коразмерности $\operatorname{codim}P + \operatorname{codim}Q$.

В некоторой окрестности точки $x\in P\cap_s Q$, гладкие конусы P и Q разбиваются в объединение своих связных компонент $\sqcup_i P_i$ и $\sqcup_j Q_j$ соответственно. Выберем достаточно малый (относительно радиуса окрестности) вектор $\varepsilon\in M$ находящийся в общем положении относительно P и Q. Определим

$$\varepsilon_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{если } P_i+\varepsilon \text{ пересекает } Q_j \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

(предположение об общем положении гарантирует трансверсальность пересечений $(P_i+\varepsilon)\cap Q_j$, а также равенство $\overline{P}\cap\overline{\partial Q} = \overline{\partial P}\cap\overline{Q} = \varnothing$ в некоторой окрестности x).

Для взвешенных вееров (P, p) и (Q, q) и их опорных множеств P и Q обозначим пределы $p(y)$ и $q(z)$ при $y \in P_i$ и $z \in Q_j$, стремящихся к x, через p_i и q_j соответственно. Обозначим сумму $\sum_{i,j} \varepsilon_{i,j} \cdot p_i \wedge q_j$ через $s(x)$ для любого $x \in P \cap_s Q$.

Определение **3.2.28.** Взвешенный веер $(P \cap_s Q, s)$ называется *произведением-пересечением* взвешенных вееров (P, p) и (Q, q) и обозначается $(P, p) \cdot (Q, q)$.

Лемма **3.2.29.** *1) Если F и G — тропические многообразия с полиномиальными весами, то таковым является и $F \cdot G$, причем его определение не зависит от выбора ε.*

2) Произведение-пересечение ассоциативно.

Доказательство мы опустим, так как оно полностью повторяет рассуждения в случае тропических многообразий с постоянными весами.

Ограничения.

Нас прежде всего интересует следующий частный случай произведения-пересечения.

Определение **3.2.30.** Пусть F — тропическое многообразие с полиномиальными весами в M, а $L \subset M$ — векторное подпространство коразмерности d. Выберем произвольный постоянный отличный от нуля вес w такой, что (L, w) — торическое многообразие, и обозначим через (P, p) произведение-пересечение F и (L, w) . Тогда пару $(P, p/w)$ можно рассматривать как тропическое многообразие с полиномиальными весами в L, причем данное определение не зависит от выбора w. Тропическое многообразие $(P, p/w)$ в L называется *ограничением* F на плоскость L и обозначается $F|_L$.

Лемма 3.2.29(2) в данном случае формулируется следующим образом:

Лемма **3.2.31.** *Для любых векторных подпространств $K \subset L \subset M$ верно равенство $(F|_L)|_K = F|_K$.*

Теорема **3.2.32.** $\delta(F|_L) = (\delta F)|_L$.

Доказательство. Если утверждение доказано в случае, когда L — гиперповерхность, то в общем случае мы можем выбрать полный флаг $L = L_d \subset L_{d-1} \subset \ldots \subset L_0 = M$ и заметить, что

$$\delta(F|_L) = \Big(\delta(F|_{L_d})\Big)\big|_{L_d} = \Big(\delta(F|_{L_{d-1}})\Big)\big|_{L_d} = \ldots = \Big(\delta(F|_{L_0})\Big)\big|_{L_d} = (\delta F)|_L,$$

по лемме 3.2.31. Таким образом, без ограничения общности мы предположим, что L — гиперплоскость, задаваемая линейным уравнением $l = 0$.

Чтобы доказать равенство $\delta\Big((P,p)|_L\Big) = \Big(\delta(P,p)\Big)|_L$ вблизи точки $x \in L \cap_s \partial P$, удобно выбрать в качестве представителя данного тропического многообразия взвешенный предвеер (P,p) такой, что пересечение $P \cap \{l > 0\}$ является прообразом двумерного веера при проекции $M \to N$. Иными словами, в достаточно малой окрестности x выполнены следующие условия:

1) Множество $L \cap_s \partial(P \cap \{l > 0\})$ совпадает с некоторым подпространствов$R \subset L$,

2) Множество $\partial(P \cap \{l > 0\})$ совпадает с конечным дизъюнктным объединением полупространств $Q_i \subset M$, общей границей которых является подпространство R,

3) Множество $P \cap \{l > 0\}$ совпадает с конечным дизъюнктным объединением выпуклых полиэдральных конусов P_j, каждый из которых имеет две грани максимальной размерности, равные $Q_{j'}$ и $Q_{j''}$ для некоторых j' и j''.

В указанных обозначениях, нам нужно доказать равенство:

$$\sum_{\substack{(i,j) \text{ such that} \\ Q_i \subset L \text{ is a facet of } P_j}} \partial_R^{Q_i} \delta \partial_{Q_i}^{P_j}(dl \wedge p) = \sum_{\substack{(i,j) \text{ such that} \\ Q_i \not\subset L \text{ is a facet of } P_j}} \partial_R^{Q_i} \partial_{Q_i}^{P_j}(dl \wedge \delta p).$$

По лемме 3.2.18(2), его можно переписать в виде $\sum \partial_R^{Q_i} \partial_{Q_i}^{P_j}(dl \wedge \delta p) = 0$, где суммирование ведется по всем парам (i,j) таким, что Q_i является гранью максимальной размерности конуса P_j. Для этого достаточно просуммировать очевидные равенства

$$\partial_R^{Q_{j'}} \partial_{Q_{j'}}^{P_j} + \partial_R^{Q_{j''}} \partial_{Q_{j''}}^{P_j} = 0$$

по всем j. $\square$

Дифференциальное кольцо тропических многообразий с полиномиальными весами.

Операцию произведения-пересечения можно выразить в терминах декартова произведения и ограничения следующим естественным образом:

Лемма **3.2.33.** *Отождествив диагональ D прямой суммы $M \oplus M$ с самим пространством M, получим $(F \times G)|_D = F \cdot G$ для любой пары F и G тропических многообразий полиномиальными весами в пространстве M.*

Мы опустим доказательство, так как оно следует из определения.

Теорема **3.2.34.** *Если F и G — тропические многообразия с полиномиальными весами в M, то $\delta(F \cdot G) = \delta F \cdot G + F \cdot \delta G$.*

Доказательство. По лемме 3.2.33, общий случай сводится к случаю $G = (L, c)$, где $L \subset M$ — векторное подпространство, а вес c постоянен. Данный частный случай составляет утверждение теоремы 3.2.32. $\square$

Пусть $\mathcal{K}_k^d$ — пространство тропических многообразий (P, p) с полиномиальными весами в векторном пространстве M таких, что $\operatorname{codim} P = k$ и p — локально полиномиальная однородная функция степени d. Прямая сумма пространств $\mathcal{K}_k^d$ по всем $d \geqslant 0$ и $k = 0, \ldots, m$ обозначается $\mathcal{K}$ и называется *кольцом тропических многообразий с полиномиальными весами*. Подытожим результаты данной главы.

Следствие **3.2.35.** *$\mathcal{K} = \bigoplus \mathcal{K}_k^d$ — биградуированное дифференциальное кольцо относительно умножения*

$$\cdot \,:\, \mathcal{K}_k^c \oplus \mathcal{K}_l^d \to \mathcal{K}_{k+l}^{c+d}$$

из определения 3.2.28 и оператора взятия многообразия углов

$$\delta \,:\, \mathcal{K}_k^d \to \mathcal{K}_{k+1}^{d-1}$$

из определения 3.2.20.

3.2.3. Связь с теорией пересечения на торических многообразиях

Обозначим подкольцо $\bigoplus_d \mathcal{K}_0^d \subset \mathcal{K}$ через $\mathcal{P}$, а подкольцо $\bigoplus_k \mathcal{K}_k^0$ — через $\mathcal{C}$. Напомним, что элементы множества P имеют вид $(M \setminus \Sigma, f)$, где M — объемлющее векторное пространство размерности m, функция $f : M \to \mathbb{R}$ непрерывна и веерно-полиномиальна, а Σ — множество точек негладкости функции f. Таким образом, мы будем в дальнейшем отождествлять $\mathcal{P}$ с кольцом непрерывных веерно-полиномиальных функций на M. Рассмотрим $\mathcal{L}$, идеал в кольце $\mathcal{P}$, порожденный всеми линейными функциями на M. Если векторное пространство M снабжено m-мерной целочисленной решеткой, то, ограничившись рассмотрением взвешенных вееров, носители которых являются объединением рациональных полиэдральных конусов, мы получим подкольца $\mathcal{K}_\mathbb{Q}, \mathcal{P}_\mathbb{Q}, \mathcal{C}_\mathbb{Q}, \mathcal{L}_\mathbb{Q}$ колец $\mathcal{K}, \mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{L}$. Так как при наличии решетки псевдообъемы отождествляются со скалярами, данное определение колец $\mathcal{C}_\mathbb{Q}, \mathcal{P}_\mathbb{Q}$ и $\mathcal{L}_\mathbb{Q}$ согласовно с определением из главы 1.

Мы приведем комбинаторное (т.е. не использующее геометрию и топологию торических многообразий) описание изоморфизма $I : \mathcal{P}/\mathcal{L} \to \mathcal{C}$ и его специализации $I_\mathbb{Q} : \mathcal{P}_\mathbb{Q}/\mathcal{L}_\mathbb{Q} \to \mathcal{C}_\mathbb{Q}$, которое, в частности, позволит нам получить новую явную формулу, выражающую смешанный объем многогранников через произведение их опорных функций. Для полноты изложения мы также напомним конструкцию изоморфизмов $\mathcal{H} \to \mathcal{P}_\mathbb{Q}/\mathcal{L}_\mathbb{Q}$ и $\mathcal{H} \to \mathcal{C}_\mathbb{Q}$ (где $\mathcal{H}$ — прямой предел колец когомологий m-мерных торических многообразий, подробнее см. главу 1). В следующей главе мы обсудим, что происходит с изоморфизмом $I : \mathcal{P}/\mathcal{L} \to \mathcal{C}$, если заменить объемлющее векторное пространство M тропическим многообразием.

Изоморфизм $\mathcal{P}/\mathcal{L} \to \mathcal{C}$.

Определим линейное отображение $I : \mathcal{P} \to \mathcal{C}$ на каждой компоненте $\mathcal{K}_0^d$ как $\delta^d/d!$.

Теорема **3.2.36.** *Выполнено равенство $I(\mathcal{L}) = 0$, и $I : \mathcal{P}/\mathcal{L} \to \mathcal{C}$ —*

изоморфизм колец.

Замечание **3.2.37.** Зафиксируем простой веер Δ и ограничимся рассмотрением тропических многообразий с полиномиальными весами, носители которых являются объединениями конусов веера Δ. В данном случае утверждение теоремы тоже верно, и доказывается оно так же.

Замечание **3.2.38.** Хотя линейное отображение $\delta^d : \mathcal{K}_0^k \to \mathcal{K}_d^{k-d}$ сюръективно при $d = k$ и ядро $\delta^d : \mathcal{K}_{k-d}^d \to \mathcal{K}_k^0$ порождается линейными функциями при $d = k$, для других значений d не выполняется ни одно из этих свойств. Например, введем стандартную метрику $dx^2 + dy^2$ на координатной плоскости и, таким образом, представим веса плоских тропических кривых в виде численнозначных функций. Тогда ограничение функции $|x| - |y|$ на множество $\{xy = 0\}$ может рассматриваться как тропическая кривая $F \in \mathcal{K}_1^1$, и $\delta F = 0$. Однако F не является многообразием углов никакой веерно-квадратичной функции, следовательно, не представима в виде суммы $\sum_i l_i F_i$, где $l_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — линейные функции, а F_i — тропические кривые с постоянными весами. (Первое из утверждений следует из определения, а второе верно, потому что иначе $F = \delta(\sum_i l_i \delta^{(-1)} F_i)$, что противоречит первому утверждению.) Было бы интересно явно описать ядро $\delta^d : \mathcal{K}_{k-d}^d \to \mathcal{K}_k^0$ и образ $\delta^d : \mathcal{K}_0^k \to \mathcal{K}_d^{k-d}$.

Доказательство. Из равенства $\delta^{d+1}(\mathcal{K}_0^d) = 0$ следует

$$\delta^{k+l}(F \cdot G) \;=\; \sum_j C_{k+l}^j \cdot \delta^j F \cdot \delta^{k+l-j} G \;=\; C_{k+l}^k \cdot \delta^k F \cdot \delta^l G$$

для любой пары тропических многообразий $F \in \mathcal{K}_0^k$ и $G \in \mathcal{K}_0^l$, значит, I — изоморфизм колец. Так как $\delta(M, l) = 0$ для любой линейной функции l, верно $I(\mathcal{L}) = 0$. Ограничение I на компоненту степени 1 — изоморфизм колец $\mathcal{K}_0^1 \to \mathcal{K}_1^0$, по лемме 3.2.25.2. Кольцо $\mathcal{C}$ порождено элементами $\mathcal{K}_1^0$ (см., например, [162]). Следовательно, гомоморфизм I сюръективен.

Спаривание $F, G \mapsto F \cdot G$ на $\mathcal{P}/\mathcal{L}$ невырождено (см., например, [19]), т.е. образ компоненты $\mathcal{K}_0^m$ в факторе $\mathcal{P}/\mathcal{L}$ порожден одним элементом L, и для лю-

бого отличного от нуля элемента $F \in \mathcal{P}/\mathcal{L}$ существует элемент дополнительной размерности $G \in \mathcal{P}/\mathcal{L}$ такой, что $F \cdot G = L \mod \mathcal{L}$. Элемент $I(L)$ отличен от нуля в $\mathcal{C}$, что следует из сюръективности I. Значит, $I(F) \cdot I(G) = I(L) \neq 0$, следовательно, $I(F)$ ненулевой. Таким образом мы доказали инъективность гомоморфизма I. □

Доказательство утверждения 3.2.3.

Если мы введем метрику на $\mathbb{R}^n$ и распишем δ^n в явном виде по определению, то заметим, что вес нульмерного тропического многообразия $\delta^n(f)$ для непрерывной веерно-полиномиальной функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точности равен сумме из утверждения 3.2.3 (причем $\delta^n(f)$ вычислить еще проще, потому что в соответствующем выражении приведено больше подобных слагаемых). Следовательно, утверждение 3.2.3 можно переформулировать следующим образом.

Теорема **3.2.39.** *Для любого набора многогранников $A_1, \dots, A_n$ в $\mathbb{R}^n$ выполнено следующее равенство:*

$$\frac{\delta^n}{n!}\Big(A_1(\cdot) \cdot \ldots \cdot A_n(\cdot)\Big) = (\{0\}, A_1 \cdot \ldots \cdot A_n).$$

Доказательство. Для любого набора многогранников $A_1, \dots, A_n$ верно

$$\frac{\delta^n}{n!}\Big(A_1(\cdot) \cdot \ldots \cdot A_n(\cdot)\Big) = I\Big(A_1(\cdot) \cdot \ldots \cdot A_n(\cdot)\Big) = I\Big(A_1(\cdot)\Big) \cdot \ldots \cdot I\Big(A_n(\cdot)\Big),$$

так как I является изоморфизмом колец (см. теорему 3.2.36) и определяется как $\delta^n/n!$ для однородной веерно-полиномиальной функции степени n. Для веерно-линейных функций он определяется как δ, откуда

$$I\Big(A_i(\cdot)\Big) = \delta A_i(\cdot).$$

Тропическая формула Бернштейна верна для произвольных тропических многообразий с постоянными весами, не только для рациональных (см., например, [162]):

$$\delta A_1(\cdot) \cdot \ldots \cdot \delta A_n(\cdot) = (\{0\}, A_1 \cdot \ldots \cdot A_n).$$

Из данных трех равенств следует доказываемое. □

Например, смешанную площадь пары треугольников, изображенных на рисунке 1, можно вычислить следующим образом (через F и G обозначены их опорные функции):

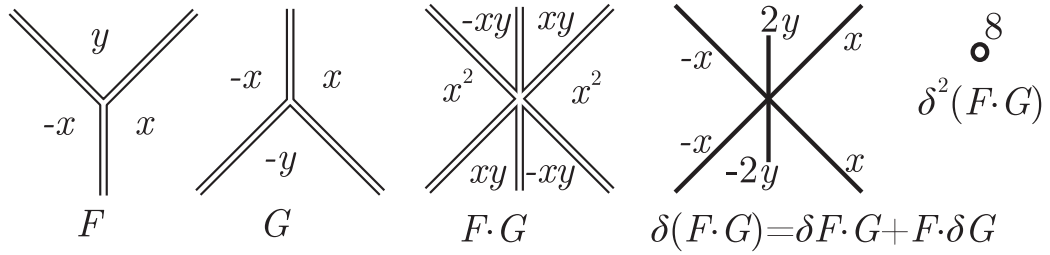


Рисунок 7: правило Лейбница для тропических вееров

Смешанная площадь пары многоугольников в правой части рисунка 1 вычисляется тем же способом, так как произведение их опорных функций равно произведению опорных функций пары многоугольников слева.

Замечание **3.2.40.** Понятие многообразия углов тропических многообразий с полиномиальными весами упрощает доказательство многих известных полезных формул для смешанного объема. Приведем следующий пример. Обозначим грань максимальной размерности многогранника $A \subset \mathbb{R}^n$, на которой ненулевой ковектор $\gamma \in (\mathbb{R}^n)^*$ достигает своего максимального значения $A(\gamma)$, через A^γ. Заметим, что $(n-1)$-мерный смешанный объем $A_2^\gamma \cdot \ldots \cdot A_n^\gamma$ корректно определен для любых многогранников $A_2, \ldots, A_n$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Пусть $\langle\gamma\rangle$ — луч, порожденный γ. Применяя тропическую теорему Кушниренко-Бернштейна к обеим частям равенства

$$\delta A_1(\cdot) \cdot \ldots \cdot \delta A_n(\cdot) = \delta\Big(A_1(\cdot)\delta A_2(\cdot) \cdot \ldots \cdot \delta A_n(\cdot)\Big), \qquad (*)$$

получаем, что $\delta A_1(\cdot) \cdot \ldots \cdot \delta A_n(\cdot) = (\{0\}, A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)$ и что $\delta A_2(\cdot) \cdot \ldots \cdot \delta A_n(\cdot)$ — объединение всех внешних нормалей к граням максимальной размерности суммы $A_2 + \ldots + A_n$, с постоянным весом $A_2^\gamma \cdot \ldots \cdot A_n^\gamma$, присвоенным каждому лучу $\langle\gamma\rangle$. В результате, равенство $(*)$ превращается в известное

$$A_1 \cdot \ldots \cdot A_n = \sum_{|\gamma|=1} A_1(\gamma)\Big(A_2^\gamma \cdot \ldots \cdot A_n^\gamma\Big).$$

Изоморфизмы $\mathcal{H} \to \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}/\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ and $\mathcal{H} \to \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$.

Модели $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}/\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ и $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ кольца когомологий $\mathcal{H}$ двойственны друг другу по Пуанкаре в следующем смысле. Зафиксируем простой веер Γ в M и рассмотрим k-мерный когомологический цикл γ в соответствующем торическом многообразии X_Γ как элемент кольца $\mathcal{H}$. Цикл γ можно описать явно двумя способами. Пусть X_C — замыкание орбиты многообразия X_Γ, соответствующей конусу $C \in \Gamma$. Фундаментальные циклы подмногообразий X_C по всем конусам C порождают группы гомологий многообразия X_Γ, а двойственные к ним аддитивно порождают когомологии. Представим γ в виде суммы $\sum_C \gamma_C \cdot X_C,\ \gamma_C \in \mathbb{R}$, и обозначим индекс пересечения $\gamma \cdot X_C \in \mathbb{R}$ через γ^C для любого конуса $C \in \Gamma$ коразмерности k. Обозначим набор таких конусов через Γ^k. Тогда цикл γ однозначно определяется каждым из следующих двойственных друг другу по Пуанкаре наборов чисел :

$$(\gamma_C,\ C \in \Gamma^{m-k}) \text{ и } (\gamma^C,\ C \in \Gamma^k).$$

Образ γ при изоморфизмах

$$I_P : \mathcal{H} \to \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}/\mathcal{L}_{\mathbb{Q}} \quad \text{и} \quad I_C : \mathcal{H} \to \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$$

может быть описан в терминах данных двух наборов следующим образом.

Для рационального подпространства $L \subset \mathbb{R}^m$ зафиксируем базис $v_1, \ldots, v_l$ целочисленной решетки $L \cap \mathbb{Z}^m$ и соответствующую ориентацию α на L. Обозначим $v_1 \wedge \ldots \wedge v_l$ через $e(L, \alpha)$; заметим, что $e(L, \alpha)$ является нечетной функцией по α и не зависит от выбора v_i. Определим $P = \cup_{C \in \Gamma^k} C$, и $p(x, \alpha) = \gamma^C \cdot e(N_x P, \alpha)$ для $x \in C$. Тогда:

$$I_C(\gamma) = (P, p).$$

Для простого конуса $C \subset \mathbb{R}^m$, порожденного примитивными линейно независимыми векторами $v_1, \ldots, v_l$ обозначим через $e(C)$ полиномиальную функцию $v^1 \cdot \ldots \cdot v^l : C \to \mathbb{R}$, где линейные функции $v^i : C \to \mathbb{R}$ двойственны к

векторам v_j в том смысле, что $v^i \cdot v_j = \delta^i_j$. Определим $q(x) = \gamma_C \cdot e(C)$ для $s \in C,\ C \in \Gamma^{m-k}$, тогда функция q на объединении $\cup_{C\in\Gamma^{m-k}} C$ единственным образом продолжается на каждый конус веера Γ полиномиальной функцией степени меньше или равной k. Из данных продолжений склеим непрерывную веерно-полиномиальную функцию $q : M \to \mathbb{R}$ степени меньше или равной k. Обозначим $\cup_{C\in\Gamma^0} C$ через Q. Тогда

$$I_P(\gamma) = (Q, q).$$

3.2.4. Теория пересечений на тропических многообразиях.

Сначала мы покажем, что теория пересечений на гладком тропическом многообразии локально индуцируется из объемлющего векторного пространства, и затем обсудим общий случай. Мы будем использовать обозначения из главы 2.

Теория пересечений на гладких тропических многообразиях.

Тропическое многообразие с веерно-постоянными весами называется гладким, если его опорное множество локально выглядит как матроидный веер (определение см., например, в работе [54]). Данная терминология мотивирована, например, тем обстоятельством, что тропикализация множества $V \cap (\mathbb{C}\setminus 0)^n$, где $V \subset \mathbb{C}^n$ — аффинное подпространство, является матроидным веером.

Теорема **3.2.41.** *Пусть тропическое многообразие (P, p) — матроидный веер P с ненулевым веерно-постоянным весом p, и предположим, что $P \supset Q$ для некоторого тропического многообразия (Q, q). Тогда многообразие (Q, q) представимо в виде $(P, p) \cdot V$, где V — тропическое многообразие с веерно-полиномиальными весами той же степени, что и q.*

Замечание **3.2.42.** В настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением тропических многообразий, опорные множества которых состоят из конусов с вершинами в начале координат. Можно также рассматривать “аффинные”

тропические многообразия, опорные множества которых — объединения произвольных многогранников одинаковой размерности. Если мы предположим, что многообразие Q "аффинно", то утверждение теоремы будет верно, причем доказываться оно будет так же. Напротив, если мы предположим, что многообразие P "аффинно", то данное утверждение будет уже неверно. Например, если P — объединение двух параллельных прямых, а Q — точка на одной из них, то равенство $(Q, q) = (P, p) \cdot V$ невозможно. Теорема 3.2.41 также неверна для самого простого негладкого тропического многообразия (см. последний пример данной главы).

Теория пересечений на гладких тропических многообразиях, построенная в работах [54], [3], [124], и т.д., локально индуцируется из объемлющего пространства в следующем смысле:

> Произведение тропических многообразий G_1 и G_2 в (P, p), определенное а работах [54], [3], [124], равно $\widetilde{G}_1 \cdot \widetilde{G}_2 \cdot (P, p)$, где $\widetilde{G}_i$ — тропические многообразия такие, что $G_i = \widetilde{G}_i \cdot (P, p)$. Многообразия $\widetilde{G}_i$ всегда локально существуют, по теореме 3.2.41.

В частности, с помощью изоморфизма из теоремы 3.2.36 можно доказать следующее утверждение:

Следствие **3.2.43.** *Кольцо тропических многообразий в матроидном веере P (построенное в работах [54], [3] и [124]) порождается дивизорами рациональных функций на P (в терминологии данных работ).*

Напомним, что для любого линейного отображения $l : M \to N$ векторных пространств и для тропических многообразий F в M и G в N таких, что $\operatorname{codim} F \geqslant \dim \ker l$, можно определить образ $l_* F$ и обратный образ $l^* G$, для которых выполняется $l_*(F \cdot l^* G) = l_*(F) \cdot G$, и l^* — гомоморфизм колец.(см., например, [105] or [162]). В условиях теоремы 3.2.41, пусть $i : M \to M \times M$ — диагональное отображение объемлющего векторного пространства $M \supset P$.

Лемма **3.2.44.** *Существует такое тропическое многообразие* Σ *в* $M \oplus M$*, что если* G *— произведение тропических многообразий* G_1 *и* G_2 *в* (P, p) *в смысле [54], [3], [124], то* $i_* G = (G_1 \times G_2) \cdot \Sigma$.

Доказательство. Пусть $(G_1 \times G_2)$ — тропическое многообразие (R, r). В работе [54] построены непрерывные веерно-линейные функции $h_1, \ldots, h_k$ на замыкании $P \times P$ такие, что $\delta^k(R, h_1 \ldots h_k r) = i_* G$ (см. теорему 4.5 вышеупомянутой работы). Продолжив произведение $h_1 \ldots h_k$ до непрерывной веерно-полиномиальной функции на $M \times M$, мы можем рассмотреть последнюю как тропическое многообразие H коразмерности 0 с весами степени k. Тогда можно взять $\Sigma = \delta^k H$. $\square$

Доказательство теоремы 3.2.41. Обозначим тропические многообразия (P, p), (Q, q) и $(M, 1)$ через F, G, и H соответственно. По лемме 3.2.44, имеем

$$(F \times G) \cdot \Sigma = i_* G.$$

Теперь рассмотрим диагональное включение $j : M \oplus M \to (M \oplus M) \oplus (M \oplus M)$, проекцию $\pi : \oplus^3 M \to \oplus^2 M$, отображающую (b, c, d) в $(c,\ d - b)$, и $\pi' : \oplus^4 M \to \oplus^3 M$, отображающую (a, b, c, d) в $(a, c,\ d - b)$, так что $\pi' = (\mathrm{id}, \pi)$. Аналогично, пусть $i' = (i, \mathrm{id}) : M \to \oplus^3 M$ отображает a в $(a, a, 0)$. В указанных обозначениях вышеупомянутое равенство, по определению произведения, можно переписать в виде

$$(F \times G \times \Sigma) \cdot j_*(H \times H) = j_* i_* G$$

. Заметим, что $j_*(H \times H) = \pi'^* i'_* H$, следовательно,

$$(F \times G \times \Sigma) \cdot \pi'^* i'_* H = j_* i_* G.$$

Применяя π'_* к обеим частям равенства, получим:

$$\Big(F \times \pi_*(G \times \Sigma)\Big) \cdot i'_* H = i'_* G.$$

Обозначим через Σ_G ограничение $\pi_*(G \times \Sigma)$ на $M \oplus \{0\} \subset M \oplus M$. По лемме 3.2.31, $(F \times \Sigma_G) \cdot i_* H = i_* G$, что эквивалентно доказываемому равенству $F \cdot \Sigma_G = G$. $\square$

Аксиоматизируем свойство (P, p), которое мы использовали при доказательстве теоремы 3.2.41.

Определение **3.2.45.** Тропическое многообразие (P, p) в M называется *диагонализуемым*, если существует тропическое многообразие Σ в $M \oplus M$, удовлетворяющее следующему условию. Для любого тропического многообразия (Q, q) такого, что $Q \subset P$, верно $\Big((P, p) \times (Q, q)\Big) \cdot \Sigma = i_*(Q, q)$.

Утверждение **3.2.46.** *Пусть тропическоое многообразие (P, p) диагонализуемо, и предположим, что $P \supset Q$ для некоторого тропического многообразия (Q, q). Тогда многообразие (Q, q) можно представить в виде $(P, p) \cdot V$, где V — тропическое многообразие с вееерно-полиномиальными весами той же степени, что и q.*

Когомологии тропических многообразий.

Теорию пересечений на тропических многообразиях (см., например, [105], [4], [82]) можно сформулировать в наших терминах следующим образом. Пусть $F = (P, p)$ — тропическое многообразие с постоянными весами в векторном пространстве M, рассмотрим отображение $m : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ умножения на F, так что $m(G) = F \cdot G$ (напомним, что через $\mathcal{K}$ обозначается определенное в конце главы 2 кольцо тропических многообразий с полиномиальными весами).

Определение **3.2.47.** Образы $m(\mathcal{K}_k^0)$ и $m(\mathcal{K}_0^d)$ называются *гомологиями* и *эквивариантными когомологиями* F и обозначаются через $H_k(F)$ и $HH^d(F)$ соответственно. Отображение m переносит структуру кольца с $\mathcal{K}$ на прямые суммы $H_\bullet(F) = \bigoplus_k H_k(F)$ и $HH^\bullet(F) = \bigoplus_d HH^d(F)$, так что произведение $m(G_1)$ и $m(G_2)$ равно $m(G_1 \cdot G_2)$. Множества $H_\bullet(F)$ и $HH^\bullet(F)$ мы всегда будем рассматривать как кольца с указанной выше структурой, а не с той, которая

индуцируется включениями $H_\bullet(F) \subset \mathcal{K}$ и $HH^\bullet(F) \subset \mathcal{K}$. The *Двойственность Пуанкаре* $D_F : HH^d(F) \to H_d(F)$ определяется как $D_F(G) = \frac{1}{d!}\delta^d(G)$. *Кольцом когомологий* $H^\bullet(F)$ тропического многообразия F называется фактор эквивариантных когомологий $HH^\bullet(F)$ по идеалу $\ker D_F$.

Следующие утверждения доказывают корректность данного определения.

Лемма **3.2.48.** *1)* $\ker D_F$ *является идеалом.*

2) Индуцированное отображение $D_F : H^\bullet(F) \to H_\bullet(F)$ *— изоморфизм колец.*

Доказательство. Нужно доказать, что если $D_F(g) = 0$, то $D_F(g \cdot h) = 0$ для любого $h \in HH^c(F)$. Данное утверждение следует из равенства $\delta^{d+c}(gh) \cdot F = \delta^d(g) \cdot \delta^c(h) \cdot F$, которое, в свою очередь, следует из правила Лейбница для δ и равенств $\delta^{d+1}g = \delta^{c+1}h = 0$.

Сюръективность и мультипликативность D_F следуют из сюръективности и мультипликативности отображения из теоремы 3.2.36. □

Пример **3.2.49.** Если $F = (M, 1)$ — m-мерное векторное пространство, то $H^\bullet(F)$ и $HH^\bullet(F)$ являются прямыми пределами когомологий и эквивариантных когомологий m-мерных торических многообразий (подробнее см. главу 1).

Пример **3.2.50.** Группа $HH^1(F)$, вообще говоря, известна как группа рациональных функций на F (см. [4]) или группа смешанных весов Минковского (см. [82]); компонента степени 1 отображения D_F — как отображение пересечения; $H_1(F)$ — как группа дивизоров Вейля. Заметим, что $H^1(F)$ – нетривиальный (вообще говоря) фактор группы дивизоров Картье, см. пример во втором замечании после теоремы 3.2.36.

Пример **3.2.51.** В наших обозначениях, индекс самопересечения прямой $L = \{x = y,\ z = 0\}$ на тропической плоскости $F = \delta \max(0, x, y, z)$ в $\mathbb{R}^3$ можно

вычислить следующим способом. Напомним, что опорное множество P плоскости F – гладкая часть множества негладкости функции $\max(0, x, y, z)$, и что стандартная метрика $x^2 + y^2 + z^2$ на $\mathbb{R}^3$ позволяет рассматривать веса тропических многообразий как скаляры. В работе [4] прямая $(L, 1)$ представлена в виде $D_F(g \cdot F)$, где непрерывная веерно-линейная функция g на $\mathbb{R}^3$ однозначно определяется на P следующими свойствами: ее ограничение на каждую из связных компонент множества $P \setminus L$ линейно, и на границах данных связных компонент имеем $g(1,1,1) = g(0,-1,0) = g(0,0,-1) = g(-1,-1,0) = 0,\ g(1,1,0) = -1,\ g(-1,0,0) = 1$. По определению, $\delta(g^2 \cdot F)$ — луч, порожденный $(1,1,0)$, с линейным весом $-\sqrt{2}x$ (вес имеет данный вид в стандартной метрике; в "целочисленной метрике" он записывается как $-2x$). Таким образом, искомый индекс самопересечения $L \circ L = D_F(g^2 \cdot F) = \frac{1}{2}\,\delta^2(g^2 \cdot F) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial(-\sqrt{2}x)}{\partial(x/\sqrt{2})}$ равен -1, что согласуется с [4].

Помимо $H_d(F)$ и $H^d(F)$, для тропического многообразия $F = (P, p)$ можно также рассматривать следующие бóльшие группы (они зависят только от опорного множества P). Группа $\overline{H}_d(F) \supset H_d(F)$ состоит из всех тропических многообразий с постоянными весами, содержащихся в множестве P и в нем имеющих коразмерность d (данную группу обычно называют *группой циклов коразмерности* d на F). Группа $\overline{HH}^d(F) \supset HH^d(F)$ состоит из всех тропических многообразий с полиномиальными весами (P, q), где q — произвольная (не обязательно непрерывная) веерно-полиномиальная однородная функция степени d на P. Двойственность Пуанкаре $D_F : \overline{HH}^d(F) \to \overline{H}_d(F)$ определяется как $D_F(G) = \frac{1}{d!}\delta^d(G)$, и группа $\overline{H}^d(F) \supset H^d(F)$ — фактор $\overline{HH}^d(F)$ по $\ker D_F$.

Для этих бóльших групп не известно естественной кольцевой структуры, за исключением следующего частного случая.

Определение **3.2.52.** Одномерный гладкий конус называется *регулярным* или *регуляризуемым* , если его лучи являются внешними нормалями к граням максимальной размерности симплекса или произведения симплексов со-

ответственно. Регулярная или регуляризуемая книга является образом регулярного или регуляризуемого одномерного гладкого конуса, соответственно, при сюръективном отображении векторных пространств. Гладкий конус P называется *регулярным* или *регуляризуемым* в коразмерности 1, если он совпадает с регулярной или регуляризуемой книгой, соответственно, вблизи каждой из точек множества ∂P.

Например, тропические кривые, участвующие в теореме соответствия Михалкина, являются локально регуляризуемыми.

Лемма **3.2.53.** *1) Если (P,p), (P,q) и (P,r) — тропические многообразия с одним и тем же опорным множеством P, регуляризуемые в коразмерности 1, а вес p веерно-постоянен и отличен от нуля, то $(P,\frac{qr}{p})$ также является тропическим многообразием.*
2) Если, дополнительно, P регулярен в коразмерности 1, то q/p — ограничение на P непрерывной веерно-полиномиальной функции на объемлющем пространстве (в частности, если вес q веерно-постоянен, то вес q/p постоянен).

Доказательство. Достаточно доказать данное утверждение для одномерного P. Обозначим через v_i порождающие его лучей, тогда доказываемое утверждение можно переформулировать следующим образом. Если векторы $v_0,\dots,v_m$ в $\mathbb{R}^m$ — внешние нормали к граням максимальной размерности m-мерного симплекса и $\sum_i a_iv_i=\sum_i b_iv_i$, то b_i/a_i не зависит от i. Если же векторы $v_0,\dots,v_r$, $r\geqslant m$, в $\mathbb{R}^m$ — внешние нормали к граням максимальной размерности m-мерного произведения симплексов и $\sum_i a_iv_i=\sum_i b_iv_i=\sum_i c_iv_i=0$, то $\sum_i \frac{b_ic_i}{a_i}v_i=0$. Оба утверждения очевидны. □

Часть 2 данной леммы доказывает корректность следующей конструкции.

Определение **3.2.54.** Пусть $F=(P,p)$ — тропическое многообразие с веерно-постоянным отличным от нуля весом p на гладком конусе P, регуляризуемое в коразмерности 1. Тогда *большим кольцом когомологий* $\overline{HH}^\bullet(F)$ назы-

вается множество $\bigoplus_d \overline{HH}^d(F)$ с операцией умножения элементов (P, q) и (P, r), определенной как $(P, \frac{qr}{p})$.

Из утверждения части 1 той же леммы следует равенство колец $\overline{HH}^\bullet(F) = HH^\bullet(F)$ в случае, когда P регуляпно в коразмерности 1. В общем случае, это неверно. Аналогично, по теореме 3.2.41, группы $\overline{H}_\bullet(F) = H_\bullet(F)$ равны, если F — гладкое тропическое многообразие, что не выполняется в общем случае. Поэтому было бы интересно узнать, индуцирует ли для каких-нибудь тропических ногообразий F отображение двойственности Пуанкаре D_F кольцевую структуру с большого кольца когомологий $\overline{HH}^\bullet(F)$ на $\overline{H}_\bullet(F)$, если кольцевая структура не определяется обычными когомологиями $D_F\big(HH^\bullet(F)\big) = H_\bullet(F) \subsetneq \overline{H}_\bullet(F)$. Для этого необходимо, чтобы отображение $D_F : \overline{HH}^\bullet(F) \to \overline{H}_\bullet(F)$ было сюръективным и его ядро было идеалом.

Изучение $\ker D_F$ выходит за рамки данной работы; мы только обсудим разницу между каждыми двумя из трех групп $D_F(\overline{HH}^\bullet)$, $H_\bullet$ и $\overline{H}_\bullet$, поскольку все три, вообще говоря, попарно различны:

Пример **3.2.55.** Пусть A — объединение двух плоскостей $xz = 0$ в $\mathbb{R}^3$, а L — прямая, совпадающая с осью x. Тогда $L \subset A$ нельзя представить в виде произведения тропического многообразия $(A, 1)$ и некоторой тропической поверхности с постоянными весами. В то же время, данная прямая $(L, 1) \in \overline{H}_1(A)$ двойственна по Пуанкаре к $(A, p) \in \overline{HH}^1(A)$, где вес $p : A \to \mathbb{R}$ равен $|y|/2$ при $z = 0$ и равен z иначе.

Из данного примера следует, что $H_1(A) \neq \overline{H}_1(A)$, хотя двойственность Пуанкаре $D_F : \overline{H}^\bullet(A) \to \overline{H}_\bullet(A)$ — изоморфизм (по теореме 3.2.36, примененной к плоскостям $x = 0$ и $z = 0$). Многочисленные определения и примеры этого раздела даны ради того, чтобы сформулировать следующий набор гипотез и продемонстрировать его правдоподобность (см. также второе замечание после теоремы 3.2.36):

Гипотеза **3.2.56.** *Двойственность Пуанкаре* $D_F : \overline{HH}^\bullet(F) \to \overline{H}_\bullet(F)$ *сюръективна для любого тропического многообразия* F*. Его ядро является идеалом, если* F *регуляризуемо в коразмерности 1 и неприводимо (в частности, структура кольца на* $\overline{HH}^\bullet(F)$ *индуцирует структуру кольца* $\mathcal{A}$ *на* $\overline{H}_\bullet(F)$*). Многообразие* F *также диагонализуемо, если оно регуляризуемо в коразмерности 1 и неприводимо (в частности, структура кольца на объемлющем пространстве индуцирует структуру кольца* $\mathcal{B}$ *на* $\overline{H}_\bullet(F)$*, по утверждению 3.2.46). Структуры* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *совпадают.*

4. Геометрия многочленов с неопределенными коэффициентами

Напомним, что $\mathbb{C}^A$ для конечного $A \subset \mathbb{Z}^n$ – пространство многочленов Лорана вида $\sum_{a\in A} c_a x^a$, и что мы интересуемся его стратификацией в соответствии с мультиособенностями гиперповерхности $f = 0$, $f \in \mathbb{C}^A$.

В этом разделе мы будем интересоваться стратом минимальной положительной коразмерности, т.е. множеством $D_A = \{f \in \mathbb{C}^A \,|\, \exists x \in (\mathbb{C}\setminus 0)^n : f(x) = df(x) = 0\}$. Это множество называется дискриминантом – например, при $A = \{0, 1, \dots, d\} \subset \mathbb{Z}^1$ получаем классический дискриминант многочлена одной переменной.

Для большинства A дискриминант D_A – гиперповерхность, ее многогранник Ньютона описан Гельфандом, Зелевинским и Капрановым тридцать лет назад [60], но положительаня (комбинаторная) формула для него найдена относительно недавно в работе [35]. Множества A, для которых дискриминант D_A – не гиперповерхность, называются двойственно-вырожденными, и их классификация остается открытой проблемой. Интерес к этой проблеме и название объясняются тем фактом, что проективизация D_A – проективно-двойственное к A-торическому многообразию, а изучение проективно-вдойственных многообразий большой коразмерности – классическая тема в алгебраической геомет-

рии. Проблема классификации двойственно-вырожденных торических многообразий была решена совсем недавно ([57], уже после публикации наших результатов).

Мы предложим новую положительную формулу для многогранника Ньютона дискриминанта, которая более элементарна, чем в [35], и, в частности, позволяет получить продвижение в классификации двойственно-вырожденных множеств $A \subset \mathbb{Z}^n$: мы покажем, что двойственная вырожденность зависит от A монотонно (по включению), и классифицируем минимальные по включению двойственно невырожденные множества. Заметим, что на данный момент неизвестно комбинаторное доказательство эквивалентности нашей характеризации двойственно-вырожденных торических многообразий и их классификации из [57]; задача разработки такого доказательства представляется важной и сложной.

"Наивное" обобщение изучаемого нами понятия дискриминанта – страт минимальной положительной коразмерности в пространстве систем полиномиальных уравнений $\mathbb{C}^{A_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_k}$, $A_i \subset \mathbb{Z}^n$, т.е. множество

$$D_{A_1,\ldots,A_k} = \{(f_1,\ldots,f_k) \,|\, \exists x \in (\mathbb{C}\backslash 0)^n \,:\, f_1(x) = \ldots = f_k(x) = 0,\, df_1(x),\ldots,df_k(x)$$

линейно зависимы$\}$. Это множество мы будем называть дискриминантом системы уравнений с неопределенными коэффициентами. В частности, при $k > n$ оно совпадает с множеством всех совместимых систем уравнений, называется также результантом и обозначается $R_{A_1,\ldots,A_k}$ – например, при $A_i = \{0,1,\ldots,d_i\} \subset \mathbb{Z}^1$, $i = 1,2$, получаем классический результант Сильвестра.

Мы изучим размерность и многогранник Ньютона дискриминанта системы уравнений, но обнаружим, что этот объект ведет себя слишком сложно: у него, вообще говоря, могут даже быть неприводимые компоненты разной размерности. Это мотивирует нас к тому, чтобы ввести "альтернативного" кандидата на роль дискриминанта системы уравнений – множество всех систем уравнений, топология решений которых нестабильна относительно шевелений системы в

$\mathbb{C}^{A_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_k}$. Мы будем называть это большее множество **бифуркационным дискриминантом**, обозначать через $E_{A_1,\ldots,A_k}$ и обнаружим у него ряд интересных свойств и приложений.

В частности, при $k = 1$ это множество превращается в A-главный детерминант Гельфанда-Зелевинского-Капранова, а при проивольном k, так же как главный детерминант, является гиперповерхностью вне зависимости от $A_1, \ldots, A_k$, допускает простую положительную формулу для своего многогранника Ньютона и простую линейно-алгебраическую формулу для своего вычисления. Тот факт, что бифуркационный дискриминант – всегда гиперповерхность, нетривиален и использует построенную в прошлой главе смешанную версию понятия частично-упорядоченного множества граней многогранника.

Бифуркационный дискриминант системы уравнений оказывается не только интересным, но и полезным объектом. Например, с его помощью мы описываем монодромию квадратной системы полиномиальный уравнений, что позволяет доказать многомерный аналог классической теоремы Абеля: система уравнений с неопределенными коэффициентами разрешима в радикалах если и только если имеет не более четырех решений.

4.1. Результант и дискриминант многочленов с неопределенными коэффициентами

4.1.1. Результанты и A-детерминанты.

Результант. Для конечного множества $A \subset \mathbb{Z}^k$ обозначим через $\mathbb{C}^A$ множество всех многочленов Лорана вида $\sum_{a \in A} c_a x^a$ на комплексном торе $(\mathbb{C} \setminus 0)^k$. Рассмотрим набор $A_0, \ldots, A_l$ конечных подмножеств $\mathbb{Z}^k$ такой, что размерность выпуклой оболочки их суммы $A_0 + \ldots + A_l$ не превышает l. Пусть Σ — множество всех наборов $(\varphi_0, \ldots, \varphi_l) \in \mathbb{C}^{A_0} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_l}$ таких, что $\varphi_0(y) = \ldots = \varphi_l(y) = 0$ для некоторого $y \in (\mathbb{C} \setminus 0)^k$.

Если замыкание Σ является гиперповерхностью в $\mathbb{C}^{A_0} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_l}$, то

1) оно задается равенством $G = 0$, где G — некоторый неприводимый многочлен положительной степени.

2) Для набора общего положения $(\varphi_0, \ldots, \varphi_l) \in \Sigma$, множество $\{y \mid \varphi_0(y) = \ldots = \varphi_l(y) = 0\}$ можно представить в виде $J \cdot T$, где

$$T = \{z \mid z^a = z^b \text{ для любых } a \text{ и } b \text{ в аффинной оболочке } A_0 + \ldots + A_l\}$$

является подтором в $(\mathbb{C}\backslash 0)^k$, а $J \subset (\mathbb{C}\backslash 0)^k/T$ — некоторое конечное множество, мощность которого не зависит от выбора $(\varphi_0, \ldots, \varphi_l)$; обозначим эту мощность через $d(A_0, \ldots, A_l)$.

Определение **4.1.1.** Если замыкание множества Σ является гиперповерхностью, то многочлен G многочлен называется *приведенным* $(A_0, \ldots, A_l)$-*результантом* и обозначается $R_{A_0,\ldots,A_l}$, иначе положим $R_{A_0,\ldots,A_l} = 1$. Многочлен $R_{A_0,\ldots,A_l}^{d(A_0,\ldots,A_l)}$ называется $(A_0, \ldots, A_l)$-*результантом с кратностями* и обозначается $\mathcal{R}_{A_0,\ldots,A_l}$.

Замечание **4.1.2.** Результант определен однозначно с точностью до умножения на ненулевую константу, и все равенства, в которых задействованы результанты, следует понимать соответствующим образом.

Результант с кратностями отличается от стандартного определения из работ [131] и [60] показателем $d(A_0, \ldots, A_l)$. Данный показатель слегка упрощает вычисления и просто выражается в терминах A следующим образом.

Кратность результанта. Пусть $A_0, \ldots, A_k$ — конечные подмножества решетки $\mathbb{Z}^k$. Результант $R_{A_0,\ldots,A_k}$ равен, по определению, некоторой степени $d(A_0, \ldots, A_k)$ неприводимого многочлена. Напомним явную формулу для числа $d(A_0, \ldots, A_k)$ и критерий тривиальности результанта $R_{A_0,\ldots,A_k}$ в терминах множеств $A_0, \ldots, A_k$.

Определение **4.1.3.** Размерность выпуклой оболочки конечного множества $A \subset \mathbb{R}^k$ называется размерностью A и обозначается $\dim A$.

Определение **4.1.4.** Для любого непустого подмножества $J \subset \{0, \dots, k\}$ разность
$\dim \sum_{j\in J} A_j - |J|$ называется *коразмерностью набора* A_j, $j \in J$, и обозначается $\operatorname{codim} J$.

Утверждение **4.1.5** ([131]).
1) $R_{A_0,\dots,A_k} = 1$ *если и только если существует такое* J, *что* $\operatorname{codim} J < -1$.
2) Если $\operatorname{codim} J \geqslant -1$ *для любого* J, *то существует минимальное множество* $J_0 \subset \{0, \dots, k\}$ *такое, что* $\operatorname{codim} J_0 = -1$.

В предположениях утверждения 4.1.5(2), пусть $L_{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}^{k+1}$ — решетка, порожденная множеством $(\sum_{j\in J_0} A_j) \times \{1\} \subset \mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{Z}$, и пусть $L \subset \mathbb{R}^{k+1}$ — линейная оболочка $L_{\mathbb{Z}}$; обозначим через d_1 число $\left|(L \cap \mathbb{Z}^{k+1})/L_{\mathbb{Z}}\right|$.

Обозначим проекцию $\mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^{k+1}/L$ через s, и выберем форму объема η на $\mathbb{R}^{k+1}/L$ такую, что объем $\mathbb{R}^{k+1}/(L + \mathbb{Z}^{k+1})$ равен $(k - |J_0| + 1)!$. Через d_2 обозначим η-смешанный объем выпуклых оболочек множеств $s(A_j \times \{1\})$, $j \in \{0, \dots, k\} \setminus J_0$.

Утверждение **4.1.6** ([41], [43]). *В указанных выше обозначениях,* $d(A_0, \dots, A_k) = d_1 \cdot d_2$.

A-детерминант. Пусть l — размерность аффинной оболочки L конечного множества $A \subset \mathbb{Z}^k$, $t_1, \dots, t_k$ — стандартная система координат на $\mathbb{R}^k$, а $y_1, \dots, y_k$ — стандартная система координат на $(\mathbb{C}\setminus 0)^k$. Выберем числа $i_1, \dots, i_l$ таким образом, чтобы функции $t_{i_1}, \dots, t_{i_l}$ образовывали систему координат на L (например, если $\dim A = k$, то $\{i_1, \dots, i_l\} = \{1, \dots, k\}$).

Определение **4.1.7.** *A-детерминант* — многочлен E_A на $\mathbb{C}^A$, заданный равенством

$$E_A(\varphi) = R_{A,\dots,A}\Big(\varphi,\ y_{i_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_{i_1}},\ \dots,\ y_{i_l}\frac{\partial\varphi}{\partial y_{i_l}}\Big).$$

Аналогично *A-детерминант с кратностями* $\mathcal{E}_A$ определяется через результант с кратностями $\mathcal{R}_{A,\dots,A}$.

Замечание **4.1.8.** A-детерминант определен однозначно с точностью до умножения на ненулевую константу и не зависит от выбора $i_1, \dots, i_l$, так как при изменении данного набора чисел вектор $\left(\varphi,\ y_{i_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_{i_1}},\ \dots,\ y_{i_l}\frac{\partial\varphi}{\partial y_{i_l}}\right)$ умножается на квадратную невырожденную матрицу (по определению, результант $R_{A,\dots,A}$ инвариантен относительно умножения аргумента на невырожденную матрицу).

Кратность A-детерминанта по утверждению 4.1.6 равна индексу подрешетки, порожденной попарными разностями точек множества A.

4.1.2. A-дискриминанты.

Для конечного множества $A \in \mathbb{Z}^k$ рассмотрим подмножество $\Sigma_A \subset \mathbb{C}^A$ всех многочленов $\varphi \in \mathbb{C}^A$ таких, что и сам многочленφ и его дифференциал $\mathrm{d}\varphi$ обращаются в нуль в некоторой точке $y \in (\mathbb{C}\setminus 0)^k$.

Если замыкание Σ_A является гиперповерхностью, то

1) оно задается равенством $G = 0$ для некоторого неприводимого многочлена G положительной степени.

2) Для $\varphi \in \Sigma_A$ общего положения, множество его особенностей $\{y \mid \varphi(y) = \mathrm{d}\varphi(y) = 0\}$ имеет вид $J \cdot T$, где

$$T = \{z \mid z^a = z^b \text{ для всех } a \text{ и } b \text{ в аффинной оболочке } A\}$$

является подтором $(\mathbb{C}\setminus 0)^k$, а $J \subset (\mathbb{C}\setminus 0)^k/T$ — конечное множество, мощность $|J|$ которого не зависит от φ.

Определение **4.1.9.** Если замыкание Σ_A является гиперповерхностью, то многочлен G называется *приведенным A-дискриминантом* и обозначается D_A, иначе положим $D_A = 1$. Многочлен $D_A^{|J|}$ называется *A-дискриминантом с кратностями* и обозначается $\mathcal{D}_A$.

Замечание **4.1.10.** Дискриминант определен однозначно с точностью до умножения на ненулевую константу, и все равенства, в которых задействованы дискриминанты, следует понимать соответствующим образом.

Дискриминант с кратностями определение отличается от стандартного определения из работы [60] показателем $|J|$, который слегка облегчит дальнейшие вычисления и просто выражается в терминах A следующим образом. Пусть $L_{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}^{k+1}$ — решетка, порожденная множеством $A \times \{1\} \subset \mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{Z}$, а $L \subset \mathbb{R}^{k+1}$ — ее линейная оболочка, тогда $|J| = \left|(L \cap \mathbb{Z}^{k+1})/L_{\mathbb{Z}}\right|$.

Лемма **4.1.11.** *Для любого $A \subset \mathbb{Z}^m$ дискриминант D_A неприводим.*

Доказательство. Множество всех пар $(\varphi, y) \in \mathbb{C}^A \times (\mathbb{C} \setminus 0)^m$ таких, что $\varphi(y) = \mathrm{d}\varphi(y) = 0$, является тотальным пространством векторного расслоения $\mathcal{V}$ с базой $(\mathbb{C} \setminus 0)^m$ и проекцией $\mathbb{C}^A \times (\mathbb{C} \setminus 0)^m \to (\mathbb{C} \setminus 0)^m$. Следовательно, оно неприводимо, значит, и его образ Σ_A при проекции на $\mathbb{C}^A$ тоже неприводим. □

Напомним, что размерность выпуклой оболочки множества $A \subset \mathbb{Z}^k$ обозначается $\dim A$.

Лемма **4.1.12.** *Для общего многочлена $\varphi \in \mathbb{C}^A$ коразмерность множества всех точек $y \in (\mathbb{C} \setminus 0)^k$ таких, что $\varphi(y) = \mathrm{d}\varphi(y) = 0$, равна $\dim A - \operatorname{codim} \Sigma_A + 1$.*

Доказательство. Слой векторного расслоения $\mathcal{V}$ из предыдущего доказательства имеет коразмерность $1 + \dim A$ в $\mathbb{C}^A$. □

A-дискриминанты and A-детерминанты связаны следующим образом. Для многочлена $\varphi(y) = \sum_{a \in A} \varphi_a y^a$ и грани A' множества A обозначим многочлен $\sum_{a \in A'} \varphi_a y^a$ через $\varphi^{A'}$. Напомним, что коэффициенты $c^{A',A}$ определены в разделе 2.1.4.

Утверждение **4.1.13** ([60])**.**

$$\mathcal{E}_A(\varphi) = \prod_{A'} \Big(\mathcal{D}_{A'}(\varphi^{A'})\Big)^{c_A^{A'}},$$

где A' пробегает множество всех граней A, включая $A' = A$.

Данное утверждение также легко вывести из теоремы 2.1.7. В частности, используя эту формулу, чтобы индукцией по размерности выразить дискриминант, получаем:

Утверждение **4.1.14.**

$$\mathcal{D}_A(\varphi) = \prod_{A'} \Big(\mathcal{E}_{A'}(\varphi^{A'})\Big)^{e_A^{A'}},$$

где A' пробегает множество всех граней A, включая $A' = A$.

В частности, применяя к правой части утверждение 1.9.3.1, получаем

Следствие **4.1.15.**

$$\deg \mathcal{D}_A = \prod_{A'} e_A^{A'} (\dim A' + 1)! \operatorname{Vol}(\operatorname{conv} A'),$$

где A' пробегает множество всех граней A, включая $A' = A$, а объем берется в смысле целочисленной формы объема на аффинной оболочке A'.

4.1.3. Двойственная вырожденность

Определение **4.1.16.** Конечное множество $A \subset \mathbb{Z}^k$ называется *двойственно вырожденным*, если $D_A = 1$, т.е. многообразие, проективно двойственное к торическому X_A, не является гиперповерхностью.

Формула 4.1.15 позволяет определить (ценой длинных вычислений), является ли данное множество двойственно вырожденным или нет. Очевидна, но полезна следующая переформулировка определения двойственной вырожденности.

Лемма **4.1.17.** *Конечное множество $A \subset \mathbb{Z}^k$, выпуклая оболочка которого k-мерна, является двойственно невырожденным тогда и только тогда, когда общий многочлен в $\mathbb{C}^A$ имеет особую точку.*

Доказательство. Если общий многочлен $\varphi \in \mathbb{C}^A$ имеет особую точку, то общая прямая вида $\{\varphi - c \,|\, c \in \mathbb{C}\}$ пересекает множество Σ_A, следовательно, $\operatorname{codim} \Sigma_A = 1$.

Если $\operatorname{codim} \Sigma_A = 1$ и выпуклая оболочка множества A is k-мерна, то общий многочлен Σ_A имеет изолированную особую точку, значит, все близкие к нему многочлены в Σ_A тоже имеют особую точку. □

Утверждение **4.1.18** (Монотонность; см. также [26]). *Если подмножество A' конечного множества $A \subset \mathbb{Z}^k$ двойственно невырождено и не содержится ни в какой аффинной гиперплоскости, то и само A двойственно невырождено.*

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по $|A|$. Так как свойство двойственной вырожденности, по определению, сохраняется при параллельных переносах, шаг индукции сводится к следующему утверждению: если A' двойственно невырождено и не содержится ни в какой аффинной гиперплоскости, то множество $A' \cup \{0\}$ двойственно невырождено. Последнее является следствием леммы 4.1.17. □

Двойственно вырожденные множества являются "тонкими"во многих смыслах этого слова, например:

Утверждение **4.1.19.** *Если множество A не содержится ни в каком объединении параллельных гиперплоскостей, то оно двойственно невырождено.*

Данное утверждение можно доказать, используя [27]; мы также приведем простое независимое доказательство, использующее два простых свойства итерированных контуров.

Определение **4.1.20.** Множество $B \subset \mathbb{R}^m$ мощности $m + 2$ называется *контуром*, если ни одно из его $m + 1$-элементных подмножеств не содержится ни в какой аффинной гиперплоскости.

Множество $B \subset \mathbb{R}^m$ называется *итерированным контуром*, если оно не содержится ни в какой аффинной гиперплоскости и при подходящем параллельном переносе распадается в дизъюнктное объединение $\{0\} \sqcup B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_p$ такое, что выполнено следующее условие. Обозначим через L_i линейную оболочку $\{0\} \sqcup B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_i$, $i = 0, \ldots, p$, тогда проекция $L_{i+1} \to L_{i+1}/L_i$ взаимно однозначно отображает объединение $\{0\} \sqcup B_{i+1}$ на контур в L_{i+1}/L_i.

Минимальное возможное число p в данном представлении называется *глубиной* итерированного контура B.

Пример **4.1.21.** Некоторые итерированные контуры не содержат контуров. Самый простой пример — множество целочисленных точек внутри единичного шара в $\mathbb{R}^m$ с центром в начале координат. (Данное множество действительно является итерированным контуром: множества B_i — в точности пары его противоположных точек). Если мощность множества $B \subset \mathbb{R}^m$ больше или равна $2m$, то множество B итерированным контуром не является.

Лемма **4.1.22.** *Итерированный контур $B \subset \mathbb{Z}^m$ двойственно невырожден.*

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по глубине B. Подходящая $\mathbb{Q}$-аффинная замена координат в $\mathbb{R}^m$ позволяет свести шаг индукции к следующему утверждению: если множество $B \subset \mathbb{Z}^k$ двойственно невырождено и $B' \sqcup \{0\} \subset \mathbb{Z}^l$ является контуром, то объединение $B \sqcup B' \subset \mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{Z}^l$ двойственно невырождено.

Так как $B' \sqcup \{0\}$ — контур, а B двойственно невырождено, многочлены общего положения $\varphi \in \mathbb{C}^B$ и $\psi \in \mathbb{C}^{B'}$, по лемме 4.1.17, имеют особые точки, следовательно, их сумма $\varphi + \psi$, являющаяся многочленом общего положения в $\mathbb{C}^{B \sqcup B'}$,тоже имеет особую точку, значит, по той же лемме, множество $B \sqcup B'$ двойственно невырождено. $\square$

Лемма **4.1.23.** *Если конечное множество $B \subset \mathbb{R}^m$ не содержит итерированный контур, то оно содержится в объединении двух параллельных гиперплоскостей.*

Пример **4.1.24.** Из того, что B не содержит контур, не следует, что B содержится в объединении двух параллельных гиперплоскостей. Самый простой пример — упомянутое выше множество целочисленных точек внутри единичного шара.

Доказательство. Без ограничения общности предположим, что $0 \in B$, и выберем максимальное подмножество $B' \subset B$ такое, что

1) $0 \in B'$, и

2) B', как подмножество своей векторной оболочки L, является итерированным контуром.

Образ $\widetilde{B}$ множества B при проекции вдоль L содержит не более $k - \dim L + 1$ точек, иначе множество B не было бы максимальным. Значит, $\widetilde{B}$, а следовательно, и B содержатся в объединении двух параллельных гиперплоскостей. □

Доказательство предложения 4.1.19. Если A двойственно вырождено, то, по утверждению 4.1.18 и лемме 4.1.22, оно не содержит итерированный контур. Следовательно, по лемме 4.1.23, оно содержится в объединении двух параллельных гиперплоскостей. □

В частности, мы доказали простую часть следующей теоремы.

Теорема **4.1.25.** *Конечное множество $A \subset \mathbb{Z}^k$, выпуклая оболочка которого k-мерна, двойственно вырождено тогда и только тогда, когда оно не содержит итерированный контур, т. е. итерированные контуры – минимальные по вложению двойственно невырожденные множества, не лежащие в аффинной гиперплоскости.*

В сложную сторону эта теорема будет доказана в следующей главе.

Напомним, что D_A — многочлен от неопределенных коэффициентов φ_a многочлена $\varphi(y) = \sum_{a\in A} \varphi_a y^a$.

Лемма **4.1.26.** *Для любого двойственно невырожденного множества $A \subset \mathbb{Z}^m$ и любого элемента $a \in A$, дискриминант D_A имеет положительную степень, как многочлен от φ_a, при условии, что он не постоянен.*

Доказательство. Так как свойство двойственной вырожденности, по определению, сохраняется при параллельных переносах, достаточно доказать данное утверждение для $a = 0$, что является следствием леммы 4.1.17. □

4.1.4. Дискриминант системы уравнений.

Дискриминант $D_{A_0,\dots,A_l}$. Рассмотрим $A_0, \dots, A_l$, $l \leqslant k$, конечные подмножества решетки $\mathbb{Z}^k$, и пусть $\Sigma_{A_0,\dots,A_l} \subset \mathbb{C}^{A_0} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^{A_l}$ — множество всех таких наборов многочленов $(\varphi_0, \dots, \varphi_l)$, что в некоторой точке множества $\{y \in (\mathbb{C}\setminus 0)^k \mid \varphi_0(y) = \dots = \varphi_l(y) = 0\}$ их дифференциалы линейно зависимы. Объединение всех компонент коразмерности 1 замыкания $\overline{\Sigma_{A_0,\dots,A_l}}$ задается уравнением $G = 0$, где G — свободный от квадратов многочлен на $\mathbb{C}^{A_0} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^{A_l}$.

Определение **4.1.27.** Многочлен G называется *приведенным A-дискриминантом степени* $(A_0, \dots, A_l)$ и обозначается $D^{red}_{A_0,\dots,A_l}$.

Мы предполагаем, что $l \leqslant k$, иначе коразмерность $\Sigma_{A_0,\dots,A_l}$ больше 1 (можно, впрочем, вместо многогранника Ньютона изучать тропикализацию множества $\Sigma_{A_0,\dots,A_l}$, подробнее см. [35] и [133]).

Если $l = k$, то $D^{red}_{A_0,\dots,A_k}$ — приведенный результант $R_{A_0,\dots,A_k}$ (см. определение 4.1.1); если $l = 0$, то $D^{red}_{A_0}$ приведенный дискриминант D_{A_0} (см. определение 4.1.9). В обоих случаях дискриминантное множество $\Sigma_{A_0,\dots,A_l}$ неприводимо, и известен комбинаторный метод проверки равенства $\operatorname{codim}\Sigma_{A_0,\dots,A_l} = 1$ (см. следствие 4.1.15(2) в случае $l = 0$ и предложение 4.1.5(1) для $l = k$). В общем же случае, множество $\Sigma_{A_0,\dots,A_l}$ не всегда неприводимо и может даже не иметь чистой

размерности. Таким образом, подмножество коразмерности 1 $\{D^{red}_{A_0,\dots,A_l} = 0\}$, и $\Sigma_{A_0,\dots,A_l} \setminus \{D^{red}_{A_0,\dots,A_l} = 0\}$, подмножество более высокой коразмерности, вообще говоря, могут быть непусты при $0 < l < k$ (см. пример 4.1.30 ниже). Тем не менее, если ограничиться подмножествами коразмерности 1, можно выразить $D^{red}_{A_0,\dots,A_l}$ в терминах A-дискриминантов с помощью трюка Кэли, см. теорему 4.1.31 ниже.

Двойственная вырожденность.

Определение **4.1.28.** Набор множеств $A_0, \dots, A_l$ называется *двойственно вырожденным*, если замыкание множества $\Sigma_{A_0,\dots,A_l}$ не является гиперповерхностью.

Сформулируем одно из достаточных условий двойственной невырожденности:

Утверждение **4.1.29.** *Если ни одно из множеств $A_0, \dots, A_l$ не содержится в аффинной гиперплоскости и по крайней мере одно из них двойственно невырождено, то и набор $A_0, \dots, A_l$ двойственно невырожден.*

Мы докажем данное утверждение в разделе 4.1.6 ниже, наряду с несколько улучшенным условием (см. утверждение 4.1.40), по-видимому, являющимся критерием двойственной невырожденности. Вообще говоря, все условия данного утверждения существенны, что продемонстрировано на следующих примерах:

Пример **4.1.30.** Если $k = 2$ и $A_0 = A_1$ — множество вершин стандартного двумерного симплекса (данное множество двойственно вырождено), то Σ_{A_0,A_1} имеет коразмерность 2.

Если $k = 2$, $A_0 = \{0,1,2\} \times \{0\}$ и $A_1 = \{0,1\} \times \{0,1\}$ (данные множества двойственно невырождены, однако $\dim A_0 < 2$), то $\overline{\Sigma_{A_0,A_1}}$ состоит из двух компонент. Одной из них является множество коразмерности 1 всех пар многочленов вида $\Big(c(x-a)^2,\ b_{11}xy + b_{01}x + b_{10}y + b_{00}\Big)$. Другая же состоит из всех пар

многочленов вида $\Big(c_1(x-a_1)(x-a_2),\ c_2(x-a_1)(y-b)\Big)$ и имеет коразмерность 2.

4.1.5. Трюк Кэли для дискриминанта.

Пусть векторы $e_0,\dots,e_l$ образуют стандартный базис в $\mathbb{Z}^{l+1}$. Для подмножества $J\subset\{0,\dots,l\}$ через $A_J\subset\mathbb{Z}^k\oplus\mathbb{Z}^{l+1}$ мы обозначаем множество $\bigcup\limits_{j\in J}A_j\times\{e_j\}$. Сопоставим пространству $\bigoplus_{j\in J}\mathbb{C}^{A_j}$ пространство $\mathbb{C}^{A_J}$ следующим образом. Каждому набору $\varphi_j\in\mathbb{C}^{A_j},\ j\in J$ многочленов на комплексном торе $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$ поставим в соответствие многочлен $\sum_{j\in J}\lambda_j\varphi_j$ на $(\mathbb{C}\setminus 0)^k\times(\mathbb{C}\setminus 0)^{l+1}$, где $\lambda_0,\dots,\lambda_l$ — стандартная система координат на торе $(\mathbb{C}\setminus 0)^{l+1}$. Такое сопоставление позволяет рассматривать дискриминант $D^{red}_{A_J}$ как многочлен на $\mathbb{C}^{A_0}\oplus\ldots\oplus\mathbb{C}^{A_l}$.

Теорема **4.1.31** (Трюк Кэли). *Дискриминант $D^{red}_{A_0,\dots,A_l}=0$ равен объединению дискриминантов $D^{red}_{A_J}=0$ по всем таким подмножествам $J\subset\{0,\dots,l\}$, что $\operatorname{codim}J\leqslant\operatorname{codim}J'$ для любого $J'\supset J$ (напомним, что через $\operatorname{codim}J$ мы обозначили разность $\dim\sum_{j\in J}A_j-|J|$).*

Работа [60] содержит доказательство данной теоремы при $l=k$; в этом случае единственное J, удовлетворяющее условию теоремы — само множество $\{0,\dots,k\}$. Если ни одно из множеств A_i не содержится в аффинной гиперплоскости, то в качестве J можно тоже взять только само множество $\{0,\dots,k\}$.

Доказательство теоремы 4.1.31, приведенное в конце раздела, основано на следующей конструкции.

Определение **4.1.32.** Через $\Sigma_{\{j_0,\dots,j_q\}}$ обозначим множество всех наборов $(\varphi_0,\dots,\varphi_l)\subset\mathbb{C}^{A_0}\oplus\ldots\oplus\mathbb{C}^{A_l}$ таких, что

1) $\varphi_0(x)=\ldots=\varphi_l(x)=0$ для некоторого $x\in(\mathbb{C}\setminus 0)^k$, и

2) $\lambda_{j_0}\mathrm{d}\varphi_{j_0}(x)+\ldots+\lambda_{j_q}\mathrm{d}\varphi_{j_q}(x)=0$ для некоторых $(\lambda_{j_0},\dots,\lambda_{j_q})\in(\mathbb{C}\setminus 0)^{q+1}$.

Для каждого из множеств Σ_J существует две возможности:

Лемма **4.1.33.** *A) Если A_J двойственно невырождено и* $\operatorname{codim} J \leqslant \operatorname{codim} J'$ *для любого $J' \supset J$, то замыкание множества Σ_J задается уравнением $D^{red}_{A_J} = 0$.*

B) $\operatorname{codim} \Sigma_J > 1$, *иначе.*

Доказательство данной леммы основано на следующем важном утверждении:

Лемма **4.1.34.** *Многочлены общего положения $\psi_i \in \mathbb{C}^{A_i}, ; i = 0, \dots, l$, имеют общий корень в $(\mathbb{C}\backslash 0)^n$ тогда и только тогда, когда* $\dim A_{i_1} + \ldots + A_{i_q} \geqslant q$ *для любой последовательности $0 \leqslant i_1 < \ldots < i_q \leqslant l$.*

Данный факт упомянут как очевидный в статье [173], однако для полноты изложения мы приведем его доказательство.

Доказательство. При $l \geqslant k$ утверждение очевидно, так как, с одной стороны, многочлены общего положения $\psi_0, \dots, \psi_l$ не имеют общих корней, а с другой стороны, верно неравенство $\dim A_0 + \ldots + A_l < l + 1$. Случай $l < k - 1$ сводится к случаю $l = k - 1$ рассмотрением произвольных конечных множеств $A_{l+1}, \dots, A_{k-1}$, выпуклые оболочки которых k-мерны, и многочленов общего положения $\psi_i \in \mathbb{C}^{A_i}$, $i = 0, \dots, k - 1$. Наконец, при $l = k - 1$ число общих корней многочленов общего положения $\psi_0, \dots, \psi_{k-1}$ равно произведению $k!$ на смешанный объем выпуклых оболочек множеств $A_0, \dots, A_{k-1}$. Из предположения леммы следует, по лемме 3.1.3, что это число отлично от нуля. □

Доказательство леммы 4.1.33. Заметим для начала, что образ множества Σ_J при естественной проекции $\mathbb{C}^{A_0} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_l} \to \bigoplus_{j \in J} \mathbb{C}^{A_j}$ содержится в Σ_{A_J}. В частности, если $\operatorname{codim} \Sigma_{A_J} > 1$, то множество Σ_J удовлетворяет условиям (A) и (B) леммы 4.1.33 вне зависимости от $\operatorname{codim} J'$ для $J' \supset J$. Таким образом, мы можем предположить, что $\operatorname{codim} \Sigma_{A_J} = 1$, т.е. A_J двойственно невырождено.

Рассмотрим векторное подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$, параллельное аффинной оболочке суммы $\sum_{j \in J} A_j$, через p_L обозначим проекцию $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k / L$ и рассмот-

рим тор $T_L = \{x \,|\, x^a = 1 \text{ для всех } a \in L\} \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^k$. Тогда для многочлена общего положения в $\mathbb{C}^{A_j}$ его ограничение на тор T_L является многочленом общего положения в $\mathbb{C}^{p_L A_j}$. Таким образом, по лемме 4.1.34, многочлены общего положения $\varphi_i \in \mathbb{C}^{A_i},\ i \notin J$, имеют общий корень в торе $c \cdot T_L,\ c \in (\mathbb{C} \setminus 0)^k$ тогда и только тогда, когда любое подмножество $I \subset \{0, \dots, l\} \setminus J$ удовлетворяет неравенству $\dim \sum_{i \in I} p_L(A_i) \geqslant |I|$, т.е. $\operatorname{codim} I \cup J \geqslant \operatorname{codim} J$.

Доказательство части A. Для $J = \{j_0, \dots, j_q\}$ и многочлена $\lambda_{j_0}\varphi_{j_0} + \dots + \lambda_{j_q}\varphi_{j_q}) \in \mathbb{C}^{A_J}$ множество

$$\{x \in (\mathbb{C} \setminus 0)^k \mid \varphi_{j_0}(x) = \dots = \varphi_{j_q}(x) = 0 \text{ и } \lambda_{j_0} \mathrm{d}\varphi_{j_0}(x) + \dots + \lambda_{j_q} \mathrm{d}\varphi_{j_q}(x) = 0$$

$$\text{для некоторых } (\lambda_{j_0}, \dots, \lambda_{j_q}) \in (\mathbb{C} \setminus 0)^{q+1}\}$$

непусто и замкнуто относительно умножения на элементы T_L, следовательно, оно содержит тор $c \cdot T_L,\ c \in (\mathbb{C} \setminus 0)^k$. Следовательно, многочлены общего положения $\varphi_i \in \mathbb{C}^{A_i},\ i \notin J$, имеют в этом торе общий корень, по предположению части A утверждения. Значит, каждый слой проекции $\Sigma_J \to \Sigma_{A_J}$ открыто по Зарисскому в соответствующем слое проекции $\mathbb{C}^{A_0} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^{A_l} \to \bigoplus_{j \in J} \mathbb{C}^{A_j}$. Таким образом, $\operatorname{codim} \Sigma_J = \operatorname{codim} \Sigma_{A_J} = 1$.

Доказательство части B. Для $J = \{j_0, \dots, j_q\}$ и многочлена общего положения $\lambda_{j_0}\varphi_{j_0} + \dots + \lambda_{j_q}\varphi_{j_q}$ в $\mathbb{C}^{A_J}$ множество

$$\{x \in (\mathbb{C} \setminus 0)^k \mid \varphi_{j_0}(x) = \dots = \varphi_{j_q}(x) = 0 \text{ и } \lambda_{j_0} \mathrm{d}\varphi_{j_0}(x) + \dots + \lambda_{j_q} \mathrm{d}\varphi_{j_q}(x) = 0$$

$$\text{для некоторых } (\lambda_{j_0}, \dots, \lambda_{j_q}) \in (\mathbb{C} \setminus 0)^{q+1}\}$$

состоит из конечного множества торов $c_s \cdot T_L,\ c_s \in (\mathbb{C} \setminus 0)^k,\ s = 1, \dots S$, так как A_J двойственно невырожден. Следовательно, по предположению части B, многочлены общего положения $\varphi_i \in \mathbb{C}^{A_i},\ i \notin J$, не имеют общих корней в этих торах. Соответственно, общий слой проекции $\Sigma_J \to \Sigma_{A_J}$ имеет коразмерность 1 или выше в соответствующем слое проекции $\mathbb{C}^{A_0} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^{A_l} \to \bigoplus_{j \in J} \mathbb{C}^{A_j}$. Таким образом, $\operatorname{codim} \Sigma_J \geqslant \operatorname{codim} \Sigma_{A_J} > 1$. $\square$

Доказательство теоремы 4.1.31. Искомое множество $\Sigma_{A_0,\dots,A_l}$ является объединением множеств Σ_J по всем $J \subset \{0,\dots,l\}$. По лемме 4.1.33, объединение дискриминантов, упомянутое в формулировке теоремы, содержит объединение компонент коразмерности 1 замыкания $\overline{\Sigma_{A_0,\dots,A_l}}$. Так как все дискриминанты положительной степени, указанные в условии, неприводимы и различны, само произведение является свободным от квадратов многочленом и равно $D^{red}_{A_0,\dots,A_l}$, по леммам 4.1.11 и 4.1.26. □

4.1.6. Доказательство утверждения 4.1.29.

В доказательстве используется лемма 4.1.33 и необходимые обозначения из прошлого раздела. Разобьем утверждение 4.1.29 на следующие две леммы.

Лемма **4.1.35.** *Если A_0 двойственно невырождено и $\dim A_i = k$ для любого $i = 0,\dots,l$, то $A_{\{0,\dots,l\}}$ двойственно невырожден.*

Лемма **4.1.36.** *Если $A_{\{0,\dots,l\}}$ двойственно невырожден и $\dim A_i = k$ для любого $i = 0,\dots,l$, то $\Sigma_{A_0,\dots,A_l}$ неприводимо и имеет коразмерность 1.*

Доказательства данных лемм, приведенные ниже, основаны на следующем утверждении.

Лемма **4.1.37.** *Если $\dim A = k$, $\varphi \in \mathbb{C}^A$, $\varphi(y_0) = 0$, и вектор $v \in \mathbb{C}^n$ достаточно близок к $\mathrm{d}\varphi(y_0)$, то существует $\tilde\varphi \in \mathbb{C}^A$ возле φ такой, что $\tilde\varphi(y_0) = 0$ и $\mathrm{d}\tilde\varphi(y_0) = v$.*

Доказательство. Данное утверждение легко проверяется для $k+1$-элементного множества A и $\varphi = 0$. Таким образом, если $A_0 \subset A$ — множество вершин k-мерного симплекса, то для некоторого достаточно малого $\psi \in \mathbb{C}^{A_0}$ верно $\mathrm{d}\psi(y_0) = v - \mathrm{d}\varphi(y_0)$, и мы можем положить $\tilde\varphi = \varphi + \psi$. □

Доказательство леммы 4.1.35. Так как свойство двойственной вырожденности сохраняется при параллельных переносах, мы можем без ограничения общности предположить, что $0 \in A_0$. По лемме 4.1.12, многочлен общего

положения $\varphi_0 \in \Sigma_{A_0}$ имеет изолированную особую точку y_0. По лемме 4.1.37, многочлены общего положения $\varphi_i \in \mathbb{C}^{A_i}$ такие, что $\varphi_i(y_0) = 0$, задают невырожденное полное пересечение $\varphi_1 = \ldots = \varphi_l = 0$, проходящее через y_0 и трансверсально пересекающее гиперплоскость $\varphi_0 = 0$ в проколотой окрестности точки y_0. Тогда для многочленов общего положения $\tilde{\varphi}_i \in \mathbb{C}^{A_i}$ вблизи φ_i, $i = 0, \ldots, l$, при достаточно малом ε невырожденное полное пересечение $\tilde{\varphi}_1 = \ldots = \tilde{\varphi}_l = 0$ касается гладкой гиперповерхности $\tilde{\varphi}_0 = \varepsilon$ в некоторой близкой к y_0 точке. Следовательно, $(\tilde{\varphi}_0 - \varepsilon, \tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_l) \in \Sigma_{A_0,\ldots,A_l}$. Таким образом, $\operatorname{codim} \Sigma_{A_0,\ldots,A_l} = 1$ вблизи точки $(\varphi_0, \ldots, \varphi_l)$.

Так как $\operatorname{codim} \Sigma_{A_0,\ldots,A_l} = 1$ в некоторой точке этого множества,

$$\Sigma_{A_0,\ldots,A_l} = \bigcup_{J \subset \{0,\ldots,l\}} \Sigma_J,$$

$$\operatorname{codim} \Sigma_J > 1 \text{ for } J \subsetneq \{0, \ldots, l\} \text{ по лемме 4.1.33(B)},$$

$$\text{и } \Sigma_{\{0,\ldots,l\}} = \Sigma_{A_{\{0,\ldots,l\}}},$$

получаем $\operatorname{codim} \Sigma_{A_{\{0,\ldots,l\}}} = 1$, следовательно, $A_{\{0,\ldots,l\}}$ двойственно невырожден. □

Доказательство леммы 4.1.36. Для любого набора $(\varphi_0, \ldots, \varphi_l) \in \Sigma_{A_0,\ldots,A_l}$, существует точка y_0 такая, что $\varphi_0(y_0) = \ldots = \varphi_l(y_0) = 0$ и $\mathrm{d}\varphi_0(y_0), \ldots, \mathrm{d}\varphi_l(y_0)$ линейно зависимы. Существуют векторы $v_0, \ldots, v_l$ вблизи $\mathrm{d}\varphi_0(y_0), \ldots, \mathrm{d}\varphi_l(y_0)$ такие, что $\sum_{j=0}^{l} \lambda_j v_j = 0$, где $\lambda_j \neq 0$ для *любого* $j = 0, \ldots, l$. Таким образом, по лемме 4.1.37, вблизи $(\varphi_0, \ldots, \varphi_l)$ существует такой набор $(\tilde{\varphi}_0, \ldots, \tilde{\varphi}_l)$, что

$$\sum_{j=0}^{l} \lambda_j \mathrm{d}\tilde{\varphi}_j(y_0) = 0,$$

где $\lambda_j \neq 0$ для любого $j = 0, \ldots, l$. Это означает, что $(\lambda_0, \ldots, \lambda_l, y_0) \in \Sigma_{A_{\{0,\ldots,l\}}}$. Следовательно, $\Sigma_{A_0,\ldots,A_l}$ содержит неприводимое множество коразмерности 1 $\Sigma_{A_{\{0,\ldots,l\}}}$ и содержится в его замыкании, что доказывает лемму. □

Уточнение утверждения 4.1.29. Рассмотрим конечные подмножества $A_0, \ldots, A_l$ решетки $\mathbb{Z}^k$ и подмножество $J \subset \{0, \ldots, l\}$.

Определение **4.1.38.** Назовем J *надежным*, если A_J двойственно невырождено, и $\operatorname{codim} J \leqslant \operatorname{codim} J'$ для любого $J' \supset J$ (напомним, что через $\operatorname{codim} J$ мы обозначили разность $\dim \sum_{j\in J} A_j - |J|$).

Заметим, что J надежно тогда и только тогда, когда Σ_J является гиперповерхностью.

Определение **4.1.39.** Векторы $v_0, \ldots, v_l$ называются J-линейно зависимыми, если $\sum_{j\in J} \lambda_j v_j = 0$, где $\lambda_j \neq 0$ для любого $j \in J$.

Для подмножества $A \subset \mathbb{R}^k$ рассмотрим $A^\perp \subset (\mathbb{R}^k)^*$, пространство всех линейных функционалов, ограничения которых на A постоянны. Следующая уточненная версия утверждения 4.1.29, по-видимому, является критерием двойственной невырожденности для наборов множеств.

Утверждение **4.1.40.** *Набор конечных подмножеств $A_0, \ldots, A_l$ решетки $\mathbb{Z}^k$ двойственно невырожден, если $\operatorname{codim} J \geqslant -1$ для любого $J \subset \{0, \ldots, l\}$, и в любой окрестности любого линейно зависимого набора векторов $v_0 \in A_0^\perp, \ldots, v_l \in A_l^\perp$ для некоторого надежного J существует J-линейно зависимый набор $\tilde{v}_0 \in A_0^\perp, \ldots, \tilde{v}_l \in A_l^\perp$.*

В лемме 4.1.37 можно отказаться от предположения о том, что $\dim A = k$, следующим образом. Через e_y обозначим естественный изоморфизм $T_y(\mathbb{C} \setminus 0)^n \to T_{(1,\ldots,1)}(\mathbb{C} \setminus 0)^n$.

Лемма **4.1.41.** *Предположим, что $\varphi \in \mathbb{C}^A$, $\varphi(y) = 0$, и $v \in \mathbb{C}^n$ достаточно близок к $\mathrm{d}\varphi(y)$. Тогда любая окрестность φ содержит многочлен $\tilde{\varphi} \in \mathbb{C}^A$ такой, что $\tilde{\varphi}(y) = 0$ и $\mathrm{d}\tilde{\varphi}(y) = v$ тогда и только тогда, когда $e_y(v) \in A^\perp$.*

Доказательство утверждения 4.1.40. Для набора $(\varphi_0, \ldots, \varphi_l) \subset \Sigma_{A_0,\ldots,A_l}$, выберем точку y такую, что $\varphi_0(y) = \ldots = \varphi_l(y) = 0$ и дифференциалы $\mathrm{d}\varphi_0(y), \ldots, \mathrm{d}\varphi_l(y)$ линейно зависимы, и выберем поблизости J-линейно

зависимые векторы $v_0, \dots, v_l$ для некоторого надежного J. По лемме 4.1.41, получим $\tilde{\varphi}_i(y) = 0$ и $\mathrm{d}\tilde{\varphi}_i(y) = v_i$ для некоторого $\tilde{\varphi}_i$ вблизи φ_i, следовательно, набор $(\tilde{\varphi}_0, \dots, \tilde{\varphi}_l)$ принадлежит гиперповерхности Σ_J. $\square$

4.2. Бифуркационный дискриминант системы уравнений: свойства

Какой многочлен от кооэффициентов системы алгебраических уравнений стоит называть ее дискриминантом? Мы докажем набор фактов, которые приводят к возможному ответу на данный вопрос, отличному от обсуждавшегося выше. Назовем систему типичной, если топологический тип множества ее решений не изменяется при шевелении ее (ненулевых) коэффициентов. Множество всех нетипичных систем является гиперповерхностью в пространстве всех систем k уравнений от $n \geq k-1$ переменных, мономы которых содержатся в данных k конечных множествах. Данная гиперповерхность B — объединение двух хорошо известных стратов: множества всех систем, имеющих особое решение (данный страт обычно и называют дискриминантом) и множество всех систем, главная часть которых вырождена (их можно считать системами с особым решением на бесконечности). Вообще говоря, ни один из данных стратов не является гиперповерхностью, и до сих пор не все известно о коразмерностях их компонент (например, не классифицированы двойственно вырожденные торические многообразия), поэтому чистота размерности их объединения кажется удивительным фактом. Мы докажем его, используя тропический аналог, доказанный в прошлой главе: стабильное пересечение тропического веера с границей многогранника в объемлющем пространстве имеет в данном веере чистую коразмерность 1.

Система общего положения в неприводимой компоненте B_i гиперповерхности B всегда имеет отличную от типичной системы эйлерову характеристику множества решений. Присвоив каждой компоненте B_i кратность, равную разности соответствующих эйлеровых характеристик, мы превратим B в эффективный дивизор, уравнение которого называется дискриминантом Эйлера

системы уравнений, по следующим причинам. Во-первых, он обращается в нуль в точности на тех системах, которые имеют особое решение (возможно, на бесконечности). Во-вторых, несмотря на свое топологическое определение, он может быть вычислен с помощью простой линейно-алгебраической формулы, а его многогранник Ньютона описывается простой положительной формулой. В-третьих, он является обобщением многих классических объектов и наследует многие их замечательные свойства: при $k = n + 1$ он совпадает с A-результантом; при $k = 1$, он совпадает с главным A-детерминантом; подобно дискриминтам плоских деформаций, дискриминант Эйлера сохраняется при заменах базы – например, при замене неопределенных коэффициентов многочленами от новых параметров. Это, в частности, позволяет перенести наши результаты на полиномиальные отображения общего положения: бифуркационное множество доминантного полиномиального отображения, компоненты которого являются общими линейными комбинациями данных мономов, всегда является гиперповерхностью, и почти все нетипичные слои такого отображения имеют отличную от типичных эйлерову характеристику.

4.2.1. Вырожденные системы уравнений

Для конечного множества $H \subset \mathbb{Z}^n$ мы изучаем пространство $\mathbb{C}^H$ *многочленов Лорана* $h(x) = \sum_{a \in H} c_a x^a$, где x^a обозначает $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$, коэффициент c_a — комплексное число, а полином h рассматривается как функция $(\mathbb{C} \setminus 0)^n \to \mathbb{C}$. Для линейной функции $v : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ мы обозначаем через H^v пересечение H с границей аффинного полупространства $H + \{v < 0\}$, а через h^v — компоненту наибольшей v-степени $\sum_{a \in H^v} c_a x^a$ (при $v = 0$ положим $H^0 = H$ и $h^0 = h$). В дальнейшем набор конечных подмножеств $A_0, \dots, A_k$ в $\mathbb{Z}^n$ мы будем обозначать через A, пространство $\mathbb{C}^{A_0} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^{A_k}$ — через $\mathbb{C}^A$. Элемент $f = (f_0, \dots, f_k) \in \mathbb{C}^A$ мы будем рассматривать как отображение $(\mathbb{C} \setminus 0)^n \to \mathbb{C}^{k+1}$ и через f^v будем обозначать $(f_0^v, \dots, f_k^v)$.

Теорема **4.2.1.** *Предположим, что сумма $A_0 + \ldots + A_k$ не содержится в аффинной гиперплоскости. Для системы уравнений $f = 0$ следующие три условия эквивалентны :*

1) Существует сколь угодно малый элемент $\tilde{f} \in \mathbb{C}^A$ такой, что множества $\{f = 0\}$ и $\{f + \tilde{f} = 0\}$ не диффеоморфны.

2) Существует сколь угодно малый элемент $\tilde{f} \in \mathbb{C}^A$ такой, что множества $\{f = 0\}$ и $\{f + \tilde{f} = 0\}$ имеют разные эйлеровы характеристики.

3) Существует линейная функция $v : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ такая, что дифференциалы $df_0^v, \ldots, df_k^v$ линейно зависимы в некоторой точке множества $\{f^v = 0\}$.

Данная и все последующие теоремы, сформулированные в этом разделе, доказаны в разделе 4.3.5. Условие на $A_0 + \ldots + A_k$ отбросить нельзя, потому что иначе эйлерова характеристика множества $\{f = 0\}$ равнялась бы 0 для любого $f \in \mathbb{C}^A$, из соображений однородности.

Определение **4.2.2.** Система $f \in \mathbb{C}^A$ называется *вырожденной*, если она удовлетворяет одному из вышеупомянутых условий. Множество всех вырожденных систем B назовем *бифуркационным множеством.*

Условие 3 было предложено в работе [91] для $k = 0$ и в работе [173] для произвольного k в несколько ином виде: например, в ситуации, которая рассматривалась в работе [91], при $k = 0$ (выпуклая оболочка) A предполагается равной многограннику Ньютона f, в то время как в нашем случае многогранник Ньютона уравнения f содержится в A, и f считается вырожденным, если его многогранник Ньютона строго меньше A. Для наших целей Условие 2 будет играть роль понятия "tameness" в комплексном торе (ср. определение в [22]), хотя они вовсе не эквивалентны. Тем не менее, их схожесть прослеживается и дальше: например, для невырожденного f и локальной системы общего положения L на $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$, такой что $H((\mathbb{C} \setminus 0)^n, L) = 0$, подкрученные гомологии $H(\{f = 0\}, L)$ исчезают во всех размерностях кроме средней ([50]).

Например, если $k = n$, то B — результантное множество (т.е. множество всех совместных систем уравнений в $\mathbb{C}^A$, см. [131]); Если $A_0 = \ldots = A_k$ — множество вершин стандартного n-мерного симплекса, то $f_0, \ldots, f_k$ линейны, и B определяется как множество нулей произведения миноров максимального порядка матрицы коэффициентов системы $f_0, \ldots, f_k$.

Теорема **4.2.3.** *Если набор A значимый (определение 3.1.10), то множество B всех вырожденных систем в $\mathbb{C}^A$ является непустой гиперповерхностью.*

Предположение о значимости отбросить нельзя, иначе множество совместных систем имеет коразмерность выше 1 (см. [131]). Напомним, что аналогичный вопрос о том, является ли A-дискриминант $\{f \in \mathbb{C}^A \mid f = 0 \text{ не регулярна}\}$ гиперповерхностью, в случае $k = 0$ известный как задача классификации двойственно вырожденных многогранников, имеет куда более сложный ответ (см. [27], [31], [35], [95], [57]). Более того, при $k > 0$ A-дискриминант может вообще не иметь чистой размерности, напомним пример: для $A_0 = \{0,1\} \times \{0,1\}$ и $A_1 = \{0,1,2\} \times \{0\}$ существует компонента коразмерности 1, состоящая из систем вида $f = \Big(a + bx + cy + dxy,\, r(x-p)^2\Big)$, и компонента коразмерности 2, состоящая из систем вида $f = \Big(a(x-b)(y-c),\, r(x-b)(x-p)\Big)$. К счастью, последняя поглощается стратом коразмерности 1 бифуркационного множества B, состоящим из систем $f = \Big(a(x-b)(y-c) + d,\, r(x-b)(x-p)\Big)$, имеющих особенность на бесконечности. На картинке изображена общая конфигурация $f_0 = 0$ (сплошной линией) и $f_1 = 0$ (пунктиром), а также три вышеупомянутые вырождения этой конфигурации.

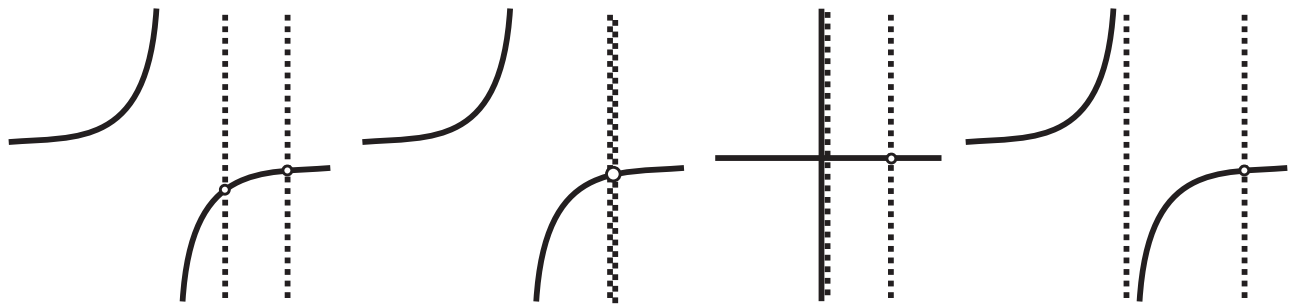


Рисунок 8: компоненты дискриминанта разной размерности.

Если вместо вырожденных многочленов Лорана на $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$ рассматривать вырожденные многочлены на $\mathbb{C}^n$ (т.е. такие многочлены $f\in\mathbb{C}^A$, что множества $\{x\in\mathbb{C}^n\,|\,f(x)=0\}$ и $\{x\in\mathbb{C}^n\,|\,\tilde f(x)=0\}$ не гомеоморфны для близкого $\tilde f\in\mathbb{C}^A$), то множество B может быть более высокой коразмерности, что происходит в случае $n=2$, $k=0$, $A=\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$, и было бы интересно классифицировать все такие исключительные наборы множеств $A_0,\dots,A_k$ в $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, содержащих 0.

Для $f\in\mathbb{C}^A\setminus B$ и системы $\tilde f$ общего положения в некоторой неприводимой компоненте $B_i\subset B$, через e_i обозначим разность эйлеровых характеристик $e\{\tilde f=0\}-e\{f=0\}$.

Утверждение **4.2.4.** *Если A значимо, то $e_i>0$ при четном $n-k$ и $e_i<0$ при нечетном $n-k$.*

Это часть утверждения Следствия 4.3.8, доказанного ниже.

Определение **4.2.5.** Если набор A значимый, то уравнение эффективного дивизора $(-1)^{n-k}\sum_i e_iB_i$ называется *A-бифуркационным дискриминантом*, или *A-дискриминантом Эйлера* и обозначается $E_A=E_{A_0,\dots,A_k}$.

По утверждению 4.2.4, E_A — непостоянный многочлен на $\mathbb{C}^A$, определенный с точностью до умножения на ненулевую константу. По теореме 4.2.1, уравнением $E_A=0$ задается множество всех вырожденных систем уравнений в $\mathbb{C}^A$. A-дискриминант Эйлера можно вычислить следующим образом (мы используем обозначения, связанные с трюком Кэли, из раздела 4.1.5 и понятие A-детерминанта с кратностями из раздела 4.1.1).

Теорема **4.2.6.**

$$E_A(f)=\prod_{I\subset\{0,\dots,k\}}\mathcal{E}_{A_I}(f_I)^{(-1)^{k+1-|I|}},$$

где произведение берется по всем I таким, что A_I порождает $(n+|I|)$-мерную решетку.

Данная теорема сводит вычисление дискриминанта Эйлера к вычислению главных детерминантов, которые хорошо изучены (см., например, [60] and [131]). В частности, при $k = n$ многочлен E_A совпадает с разреженным результантом, а при $k = 0$ он совпадает с главным A-детерминантом. Так же как и в данных частных случаях, многогранник Ньютона дискриминанта Эйлера допускает следующее простое описание.

4.2.2. Степень бифуркационного дискриминанта

Напомним, что когерентной триангуляцией T конечного подмножества $H \subset \mathbb{Z}^N$ называется множество N-мерных симплексов таких, что

1) их вершины содержатся в H,

2) их объединение совпадает с выпуклой оболочкой H,

3) любые два из них пересекаются по общей грани (возможно пустой),

4) они являются областями линейности выпуклой кусочно-линейной функции (данное свойство называется *когерентностью* или *выпуклостью*).

Коэффициенты наборов многочленов пространства $\mathbb{C}^A$ образуют в нем естественную систему координат $(c_{a,i})_{a\in A_i,\, i=0\ldots,k}$, так что $c_{a,i}(f)$ — коэффициент при мономе x^a в i-ом многочлене набора $f \in \mathbb{C}^A$. Для симплекса S с вершинами в $A_{\{0,\ldots,k\}}$ определим c_S как произведение всех таких $c_{a,i}$, что (e_i, a) является вершиной S, и для любого $j \neq i$ множество $\{e_j\} \times \mathbb{Z}^n$ содержит более одной вершины симплекса S.

Утверждение **4.2.7.** *Множество мономов*

$$\Big\{\prod_{S\in T} c_S^{\operatorname{Vol} S} \,|\, T \text{ — когерентная триангуляция } A_{\{0,\ldots,k\}}\Big\}$$

совпадает с множеством вершин многогранника Ньютона A-дискриминанта Эйлера E_A (в естественной системе координат $(c_{a,i})$; через Vol *обозначен*

целочисленный объем, нормированный таким образом, что Vol(*стандартный симплекс*) = 1*).*

Данное утверждение следует из описания многогранника Ньютона дискриминанта Эйлера (см. теорему 4.3.20.3) и описания вершин смешанного расслоенного многогранника (см. теорему 3.19 в [52]). В частности, степень дискриминанта Эйлера может быть вычислена следующим образом(ту же самую формулу можно вывести из теоремы 4.2.6, которая сводит ее к известному частному случаю главных A-детерминантов). Напомним, что *смешанный объем* конечных множеств $B_1, \dots, B_n$ в $\mathbb{R}^n$ — симметричная вещественнозначная функция, аддитивная относительно сложения по Минковскому $P + Q = \{p + q \,|\, p \in P,\, q \in Q\}$ и равная объему выпуклой оболочки $\operatorname{conv} B$ для $B_1 = \ldots = B_n = B$. Обозначим ее через моном $B_1 \cdot \ldots \cdot B_n$. Аналогично, *смешанным моментом* конечных множеств $B_0, \dots, B_n$ в $\mathbb{R}^n$ называется симметричная функция со значениями в $\mathbb{R}^n$, аддитивная относительно сложения по Минковскому и равная моменту $\int_{\operatorname{conv} B} x \, \mathrm{d}x$ для $B_0 = \ldots = B_n = B$. Мы обозначим ее через моном $B_0 \cdot \ldots \cdot B_n$. Как обычно, формальная производная $\frac{\partial}{\partial B_0}(B_0^{a_0} \cdot \ldots \cdot B_n^{a_n})$ определяется как $a_0 B_0^{a_0 - 1} \cdot B_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot B_n^{a_n}$.

Следствие **4.2.8.** *1) Как многочлен от переменных $c_{a,i}$, $a \in A_i$, для данного i, A-дискриминант Эйлера — однородный степени*

$$\deg_{n,i} A = \frac{\partial}{\partial A_i} \left(\sum_{\substack{(a_0,\dots,a_k) \in \mathbb{N}^{k+1}, \\ a_0 + \ldots + a_k = n+1}} A_0^{a_0} \cdot \ldots \cdot A_k^{a_k} \right).$$

2) Для линейной функции $v : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ определим v-квазистепень переменной $c_{a,i}$ как $v(a)$. Тогда A-дискриминант Эйлера — v-квазиоднородный степени

$$\deg_{n,v} A = v \left(\sum_{\substack{(a_0,\dots,a_k) \in \mathbb{N}^{k+1}, \\ a_0 + \ldots + a_k = n+1}} A_0^{a_0} \cdot \ldots \cdot A_k^{a_k} \right).$$

3) Каждая квазиоднородность A-дискриминанта Эйлера представима в виде линейной комбинации однородностей, определенных в пунктах (1) и (2).

Из утверждения 4.2.7 следует, что многогранник Ньютона дискриминанта Эйлера — смешанный вторичный многогранник набора A в смысле следующего определения (хорошо известного в случае $k = 0$).

Определение **4.2.9.** Для когерентной триангуляции T конечных множеств $A_0, \dots, A_k$ в $\mathbb{R}^k$ определим $T_{i,a}$ как сумму целочисленных объемов по всем симплексам $S \in T$ таким, что (e_i, a) является вершиной S и для любого $j \neq i$ множество $\{e_j\} \times \mathbb{Z}^n$ содержит более одной вершины симплекса S. Выпуклая оболочка множества точек с координатами $(T_{i,a})$, $i = 0, \dots, k$, $a \in A_i$, в решетке $\mathbb{Z}^{A_0} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}^{A_k}$, где T пробегает множество всех когерентных триангуляций множеств $A_0, \dots, A_k$, называется *смешанным вторичным многогранником* набора $A_0, \dots, A_k$ и обозначается S_A.

Обозначим вершины симплекса S в $\{e_j\} \times \mathbb{R}^n$ через $s_0^i, \dots, s_{n_i}^i$. Тогда $n_0 + \ldots + n_k = n$, и объем S равен определителю матрицы размера $n \times n$, строки которой имеют вид $s_j^i - s_0^i$, где $i = 0, \dots, k$ и $j = 1, \dots, n_i$.

4.2.3. Факторизация бифуркационного дискриминанта

Опишем разложение дискриминанта Эйлера E_A на неприводимые сомножители. Обозначим $A_{\{0,\dots,k\}}$-дискриминант Гельфанда-Капранова-Зелевинского (определяемый как уравнение замыкания множества $\{F \mid F = 0 \text{ не регулярно}\} \subset \mathbb{C}^{A_{\{0,\dots,k\}}}$, см. обозначения в разделе 4.1.5) через Δ_A. (Данное обозначение согласуется с обозначением для смешанных дискриминантов в работе [25], см. теорему 2.1 в этой работе).

Многочлен Δ_A неприводим, и с помощью теоремы 4.2.3 и следствия 4.3.8 можно получить разложение дискриминанта Эйлера на сомножители данного вида. Набор Γ непустых подмножеств $\Gamma_i \subset A_i$, $i \in I \subset \{0, \dots, k\}$ называется *огранкой* A, если $\Gamma_I \subset \mathbb{Z}^I \times \mathbb{Z}^n$ равен $A^v_{\{0,\dots,k\}}$ для некоторой линейной функции

$v : \mathbb{Z}^{k+1} \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$. В таком случае обозначим многочлен $f^v_{\{0,\dots,k\}}$ через f_Γ, а индекс подрешетки, порожденной попарными разностями точек множества Γ_I, — через i_Γ.

Утверждение **4.2.10.** *Верно следующее равенство:*

$$E_A(f) = \prod_\Gamma \Delta_\Gamma(f_\Gamma)^{i_\Gamma c^\Gamma_A},$$

где Γ *пробегает множество всех огранок* A*, и* c^Γ_A *— число Милнора набора* A *в огранке* Γ *(см. определение 3.1.25).*

Перейдя к многогранникам Ньютона обеих частей равенства, получим представление смешанного вторичного многогранника в следующем виде:

$$S_A = \sum_\Gamma i_\Gamma c^\Gamma_A \cdot (\text{многогранник Ньютона } \Delta_A), \qquad (*)$$

где под сложением подразумевается сложение по Минковскому $P + Q = \{p + q \,|\, p \in P,\, q \in Q\}$, а под умножением подразумевается растяжение. Смешанный вторичный многогранник определен комбинаторно, в отличие от многогранника Ньютона многочлена Δ_A, поэтому более полезна формула, обратная к данной. Пусть Γ и B пробегают множество всех огранок A. Определим (e^Γ_B) как обратную к матрице $(i_\Gamma c^\Gamma_B)$, в которой положим $c^\Gamma_B = 0$, если Γ не является огранкой B. Заметим, что матрица $(i_\Gamma c^\Gamma_B)$ верхретреугольная, невырожденная и довольно разреженная (см. следствие 3.1.27).

Определение **4.2.11.** Число e^Γ_A называется *смешанным эйлеровым препятствием* A в Γ.

При $k = 0$ действительно получается эйлерово препятствие A-торическое многообразия в точке его Γ-орбиты. Обращая систему линейных уравнений $(*)$ для всех A и Γ, получим:

Следствие **4.2.12.** *Многогранник Ньютона многочлена* Δ_A *равен*

$$\sum_\Gamma e^\Gamma_A \cdot S_\Gamma.$$

Данная формула сводится к формуле Гельфанда-Капранова-Зелевинского для многогранника Ньютона A-дискриминанта (при $k = 0$, см. [60]), к аналогичным формулам для многогранников Ньютона A-результанта (при $k = n$, см. [131]) и смешанного дискриминанта (при $k = n - 1$, см. [25]), а также к формуле, выражающей степень классического дискриминанта через степени f_i (если A_i кратны стандартному симплексу, см. [12] или [110]). Заметим, что данная формула не положительна, потому что эйлеровы препятствия могут быть отрицательными; в следующей главе будет дана положительная формула, а в работах [35] и [25] приведена положительная формула, основанная на совсем другой идее.

Так как дискриминант Эйлера не свободен от квадратов, важно также изучить его приведенную версию – свободный от квадратов многочлен E_A^{red} на $\mathbb{C}^A$, обнуляющийся на вырожденных системах уравнений. По утверждению 4.2.10, $E_A^{red}(f)$ равен произведению $\Delta_\Gamma(f_\Gamma)$ по всем важным огранкам Γ набора A.

Следствие **4.2.13.** *Многогранник Ньютона E_A^{red} равен*

$$\sum_{\Gamma,\, B-\text{ важная}} \frac{e_B^\Gamma}{i_B} \cdot S_\Gamma,$$

где B и Γ пробегают все важные огранки A.

4.2.4. Связь с бифуркационными множествами

Мы докажем сформулированные результаты в большей общности, которая также покрывает несколько других достопримечательных частных случаев. А именно, мы будем считать коэффициенты $c_{a,i}$ многочленов $f_i(x) = \sum_{a\in A_i} c_{a,i}x^a$ не независимыми переменными, а многочленами на пространстве параметров M. Рассмотрим два случая.

I (Многочлены Лорана). В данном случае, $M = (\mathbb{C} \setminus 0)^m$; выберем конечное множество $H_{a,i} \subset \mathbb{Z}^m$ для каждого $a \in A_i$ и рассмотрим $c_{a,i} \in \mathbb{C}^{H_{a,i}}$ как

функцию на M.

II (Многочлены). Имеем $M = \mathbb{C}^m$; для каждого $a \in A_i$ выберем конечное множество $H_{a,i} \subset \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$, $0 \in H_{a,i}$,, и рассмотрим $c_{a,i} \in \mathbb{C}^{H_{a,i}}$ как функцию на M. В обоих случаях обозначим объединение $\bigcup_{a \in A_i} \{a\} \times H_{a,i} \subset \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}^m$ через H_i, так что $f_i \in \mathbb{C}^{H_i}$ — функция на $(\mathbb{C} \setminus 0)^n \times M$. Как и прежде, набор $H_0, \ldots, H_k$ мы обозначим через H, а вектор-многочлен $(f_0, \ldots, f_k)$ — через f. Рассматривая $f(x,t)$ как вектор-функцию от $x \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ при фиксированном $t \in M$, мы можем считать ее элементом $F(t)$ пространства $\mathbb{C}^A$. Таким образом, получим полиномиальное отображение $F\colon M \to \mathbb{C}^A$. Мы изучим проекцию π множества $Q = \{f = 0\} \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n \times M$ на M.

Определение **4.2.14.** *Бифуркационным множеством* B_p морфизма алгебраических многообразий $p : Q \to M$ называется дополнение к максимальному открытому множеству $S \subset M$ такому, что ограничение p на прообраз $p^{-1}(S)$ является локально тривиальным расслоением.

Теорема **4.2.15.** *Предположим, что набор A значимый, а H, M и F определены как описано выше в одном из случаев* (I) *и* (II)*, и $f \in \mathbb{C}^H$ невырождена (или удовлетворяет более слабому требованию f 1-невырожденности в смысле определения 4.2.17 ниже).*

1) Бифуркационное множество B_π задается уравнением $\{E_A \circ F = 0\}$. В частности, B_π — гиперповерхность (возможно, пустая).

2) Для точек общего положения $t_0 \in B_\pi$ и $t \notin B_\pi$ локальная кратность $E_A \circ F$ в t_0 равна произведению $(-1)^{n-k}$ на разность эйлеровых характеристик слоев

$$e\{f(\cdot, t_0) = 0\} - e\{f(\cdot, t) = 0\}.$$

3) Бифуркационное множество пусто тогда и только тогда, когда

$$\dim(H_{i_1} + \ldots + H_{i_p}) < p$$

для некоторых $i_1 < \ldots < i_p$, *или*

$$\dim(H_0 + \ldots + H_k) \leqslant n.$$

Части 1 и 2 входят в утверждение Теоремы 4.3.20.1–2.

Часть 3 следует из утверждения 4.3.22 и описывает два очевидных случая, когда бифуркационное множество пусто: в одном из них Q пусто, а в другом $Q = Q' \times M$ для некоторого $Q' \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ с точностью до мономиальной замены координат. Из утверждения части 2 следует, что уравнение $E_A \circ F = 0$ множества B_π не свободно от квадратов, при этом кратности его множителей измеряют вырожденность слоев проекции π. Часть 1 иллюстрирует более общее явление "инвариантности бифуркационного множества при заменах базы", см., например, похожую иллюстрацию для случая двух переменных в [16]. Теорема 4.2.15 доказывает следующую гипотезу в случае невырожденных полных пересечений в торе.

Гипотеза **4.2.16.** *Для проекции p произвольного schön подмногообразия в комплексном торе (см. [136]) вдоль произвольного подтора бифуркационное множество B_p имеет коразмерность 1, и общий слой проекции p над B_p отличается от слоя проекции p вне B_p своим вектором виртуальных чисел Бетти (и, следовательно, многочленом Ходжа-Делиня).*

Мы можем ослабить предположение о невырожденности в теореме 4.2.15 следующим образом. *Размерностью* линейной функции $v : \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}$ называется максимальная размерность слоя проекции выпуклой оболочки множества $\sum_i H_i^v \subset \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}^m$ на $\mathbb{Z}^n$.

Определение **4.2.17.** Вектор-многочлен $f \in \mathbb{C}^H$ *i-вырожден*, если существует такая линейная функция $v : \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}$ размерности меньше или равной i, что дифференциалы $df_0^v, \ldots, df_k^v$ линейно зависимы в некоторой точке множества $\{f^v = 0\}$.

Пример **4.2.18.** Условие невырожденности в теореме 4.2.15 можно заменить более слабым условием 1-невырожденности, но не 0-невырожденности: например, бифуркационное множество проекции $1+x+z+yz = 1+x+bz+byz = 0$ вдоль оси z равно $\{(0,0)\}$ при $b \neq 1$, насмотря на 0-невырожденность данных уравнений.

Существует также версия теоремы 4.2.15 для незначимых A.

Утверждение **4.2.19.** *Пусть c — максимальный элемент множества разностей*

$$p - \dim(\textit{выпуклая оболочка } A_{i_1} + \ldots + A_{i_p})$$

по всем последовательностям $0 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq k$. Если $c > 0$, и система f c-невырождена, то бифуркационное множество B_π совпадает с замыканием образа проекции π и имеет чистую коразмерность c. Более того, общий нетипичный слой проекции π имеет ненулевую эйлерову характеристику при условии, что $A_0 + \ldots + A_k$ не содержится в аффинной гиперплоскости.

Это утверждение является частью утверждения 4.3.18.

Заметим, что в случае $\min \dim A < -1$ также можно изучать бифуркационное множество проекции $\pi : Q \to \pi(Q)$; это другая задача, которая также имеет смысл и затрагивается в следующей главе. Напомним, что число c в утверждении 4.2.19 называется *размерностью* набора A.

4.2.5. Приложения к топологии полиномиальных отображений

Обозначим через $\sharp S$ число целых точек в выпуклой оболочке множества $S \subset \mathbb{R}^n$. Напомним, что *тропическая сумма Минковского* $P \vee Q$ двух множеств – это выпуклая оболочка их объединения $P \cup Q$, и тропической суммой Минковского пустого набора множеств мы считаем $\{0\}$.

Рассмотрим невырожденный набор многочленов $g \in \mathbb{C}^A$, $g : (\mathbb{C} \setminus 0)^n \to \mathbb{C}^{k+1}$. Применим теорему 4.2.15 в случае (II) к графику $g_0(x) - y_0 - c_0 = \ldots =$

$g_k(x) - y_k - c_k = 0$ в $(\mathbb{C}\setminus 0)^n \times \mathbb{C}^{k+1}$, сдвинутому на вектор общего положения с координатами $c_i \in \mathbb{C}$, и получим первые два пункта следующего утверждения.

Следствие **4.2.20.** *1) Если набор A значимый, набор $g \in \mathbb{C}^A$ невырожден и любые k из $k+1$ многочленов набора g также образуют невырожденный набор, то каждая неприводимая компонента B_i бифуркационного множества отображения $g : (\mathbb{C}\setminus 0)^n \to \mathbb{C}^{k+1}$ является гиперповерхностью.*

2) Для точек общего положения $y \in \mathbb{C}^{k+1}$ и $y_i \in B_i$, разность аддитивных эйлеровых характеристик $\chi(g^{-1}(y_i)) - \chi(g^{-1}(y))$ с точностью до знака $(-1)^{n-k}$ является натуральным числом b_i.

3) Степень дивизора $\sum_i b_i B_i$ равна

$$(-1)^{n+1} \sum_{\substack{0\leqslant q<b_0+\ldots+b_k\leqslant n+1\\ b_i\geqslant 0}} (-1)^{\sum_i b_i} C_{n+k+1}^{k+\sum_i b_i} \sharp\Big(\{0\}\cup \bigcup_{\substack{c_0+\ldots+c_k=q\\ 0\leqslant c_i\leqslant b_i}} \sum_i c_i A_i\Big). \qquad (*)$$

Доказательство пункта (3) Пусть $y_0, \ldots, y_k$ – стандартные координаты в $\mathbb{C}^{k+1}$, тогда искомое бифуркационное множество совпадает с бифуркационным множеством проекции графика $g_0(x) - y_0 = \ldots = g_k(x) - y_k = 0$ в произведении $(\mathbb{C}\setminus 0)^n \times \mathbb{C}^{k+1}$ на второй множитель. Многогранник Ньютона уравнения бифуркационного множества (с учетом кратности) для этой проекции можно вычислить по теореме 4.3.20.3, ответ будет суммой некоторых смешанных расслоенных многогранников $\sum_i M_i$. Так как степень многочлена – это значение опорной функции его многогранника Ньютона в точке $(1,\ldots,1)$, осталось вычислить сумму значений опорных функций многогранников M_i в точке $(1,\ldots,1)$. Это можно сделать по формуле для опорной функции смешанного расслоенного многогранника (замечание 2.2.13), и ответом окажется выражение

$$\sum_{a_0+\ldots+a_k=n+1} \widetilde{A}_0^{a_0} \cdot \ldots \cdot \widetilde{A}_k^{a_k}$$

где $\widetilde{A}_i \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^1$ – объединение $A\times\{0\}$ и $\{0\}\times[0,1]$. Оно равно $(*)$ по теореме 2.3.5. $\square$

Замечание **4.2.21.** 1. Теорема 4.3.20.3 описывает многогранник Ньютона данной гиперповерхности.

2. Число $(*)$ оценивает сверху степень бифуркационного множества без естественных кратностей, кторые мы приписали его компонентам. Однако для наиболее естественных классов носителей A_i кратности всех компонент равны 1, так что степень бифуркационного множества в обычном понимании (без кратностей) в точности равна $(*)$. В частности, это верно, если мы исследуем общие многочлены f_i данных мультистепеней относительно одних и тех же групп переменных, т.е. каждое A_i является линейной комбинацией (в смысле Минковского) стандартных симплексов $\Delta_j \subset \mathbb{R}^{d_j}$ для некоторого разложения $\mathbb{R}^n = \bigoplus_j \mathbb{R}^{d_j}$. Это следует из явного вычисления кратностей b_i компонент бифуркаицонного множества в терминах множеств A_i. А именно, по теоремам 4.3.6, 4.2.15.1, 4.3.7 и следствию 3.1.27, упомянутая разность эйлеровых характеристик слоев состоит из слагаемых, соответствующих особенностям (в области определения или на бесконечности) нетипичного слоя отображения g: каждой его особенности соответствует определенная *важная огранка* Γ набора A (см. определение 3.1.24), и ее вклад в разность эйлеровых характеристик равна *числу Милнора* c_A^Γ набора A в огранке Γ (см. определение 3.1.25). В частности, при вышеупомянутых условиях на A_i, все числа Милнора набора многогранников равны 1.

3. Тем не менее, точный смысл утверждению о соответствии чисел Милнора особенностей на бесконечности числам Милнора набора многогранников придать не так просто – например, потому, что вышеупомянутые особенности на бесконечности могут оказаться неизолированными даже в минимальной торической компактификации g, совместимой с A, что затрудняет корректное определение их числа Милнора.

Одно из утверждений следствия 4.2.20 связано с вопросом чистоты размерности бифуркационного множества, который тривиален при $k = 0$ и является классическим в случае $k = n - 1$: чистота размерности множества Елонека

доказана в [73] и [74].

Другое утверждение следствия 4.2.20 затрагивает вопрос о различении нетипичных слоев полиномиальных отображений с помощью их дискретных инвариантов. Данный вопрос, напротив, тривиален при $k = n - 1$ и является классическим в случае $k = 0$: в работах [151] и [147] обсуждается случай двух переменных; в работах [129], [114], [113], [9] и [10] получены результаты в случае, когда основным полем является $\mathbb{C}$, а в работе [119] получены результаты в случае произвольного поля нулевой характеристики для многочленов с изолированными особенностями на бесконечности, в работах [109] и [153] — для невырожденных многочленов. Данный вопрос также обсуждался для $k = n-2$ (см., например, [149] и [150]), о случае произвольного k известно гораздо меньше (см., например, [140] и [58]). Заметим, что основным условием в данных исследованиях является предположение об изолированных особенностях на бесконечности, которое не слабее, но и не сильнее предположения в следствии 4.2.20. Многочлены с изолированными особенностями на бесконечностями могут быть вырожденными (например, $(x-y)^2+(x-y)+c$), и, наоборот, невырожденные многочлены, многогранники Ньютона которых не являются простыми, могут иметь неизолированные особенности в любой гладкой компактификации (например, $xyz(x + y)(z + 1) + c$). Интересный вопрос из области торической теории особенностей – придумать обобщение следствия 4.2.20, включающее обе эти ситуации в качестве частных случаев.

Многие из вышеупомянутых работ также посвящены оценке степени бифуркационного множества с помощью степени отображения (см. также [137] и [138] для $k = 0, n = 2$, [75] и [77] для $k = 0$, [76] и [78] в общем случае). Точный ответ на данный вопрос в случае невырожденных отображений (или, в более общем случае 1-невырожденных отображений, см. определение 4.2.17), дает теорема 4.3.20.3 (она, более того, описывает многогранник Ньютона). Бифуркационные множества 0-невырожденных отображений могут иметь компоненты более высокой коразмерности, тем не менее, они содержатся в гиперповерхности,

степень которой определяется формулой из теоремы 4.3.20.3. Для произвольных n и k предположение о 0-невырожденности ослабить нельзя, тем не менее, в некоторых исключительных случаях части данного утверждения верны без предположения об общем положении отображения (см. [73] о чистоте размерности множества ветвления произвольного конечного почти всюду отображения, и [151] о скачках эйлеровой характеристики нетипичных слоев произвольного многочлена двух переменных).

4.3. Бифуркационный дискриминант системы уравнений: доказательство основных теорем

В этом разделе мы оценим бифуркационное множество произвольного морфизма p алгебраических многообразий сверху (*дискриминантом Бертини*, см. определение 4.3.14) и снизу (*дискриминантом Эйлера*, см. определение 4.3.10). Дискриминант Бертини — множество критических значений стратифицированной послойной компактификации p; он широко используется для оценки бифуркационного множества сверху. Дискриминантом Эйлера называется компонента коразмерности 1 дискриминанта в смысле Тессье [135]; компонента коразмерности 1 корректно определена для морфизмов гладких алгебраических многообразий со сколь угодно сложными особенностями слоев.

Дискриминант Эйлера инвариантен относительно замены базы при некототых предположениях трансверсальности (см. теорему 4.3.12). Дискриминант Бертини является гиперповерхностью (см. теорему 4.3.15.4), если страты послойной компактификации представляют собой аффинные полные пересечения, образы которых примыкают к образам, имеющим коразмерность 1.

Далее мы применим эти оценки бифуркационного множества в торической ситуации, описанной в теореме 4.2.15. Все результаты, анонсированные в прошлом разделе, вытекают из следующих трех наблюдений о дискриминантах Бертини и Эйлера в торическом случае:

1) Отображение F из теоремы 4.2.15 удовлетворяет условиям трансверсаль-

ности теоремы 4.3.12, гарантирующим инвариантность дискриминанта Эйлера относительно замены базиса F тогда и только тогда, когда набор f 1-невырожден.

2) Дискриминант Бертини является гиперповерхностью, так как гладкая торическая компактификация $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$, совместимая с A, удовлетворяет предположению теоремы 4.3.15.4. При $A_0 = \ldots = A_k$ условие примыкания из теоремы 4.3.15.4 отражает очевидный факт о том, что каждая грань выпуклой оболочки A_0 является гранью максимальной размерности некоторой другой грани. Если множества A_i не совпадают, то условие примыкания следует из полученных в прошлой главе свойств примыкания смешанных граней набора многогранников.

3) И дискриминант Эйлера, и дискриминант Бертини можно разложить на неприводимые компоненты; Начало этой главы посвящено изучению данных неприводимых компонент, и из полученных результатов следует, что разложения дискриминанта Эйлера и дискриминината Бертини в торическом случае совпадают. Таким образом, в данной ситуации дискриминанты Эйлера и Бертини совпадают, а значит совпадают и с бифуркационным множеством, которе оценивают сверху и снизу. Заметим, что поэтому в данной работе мы не обсуждаем другие известные понятия дискроиминантного множества несобственного отображения (например, множество критических значений на бесконечности в смысле Эресманна, см. [92] или [118]): все другие разумные понятия дискриминанта также очевидным образом оцениваются снизу и сверху дискриминантом Эйлера и дискриминантом Бертини соответственно, следовательно, в наших предположениях, все они совпадают.

С помощью вышеперечисленных результатов в конце этого раздела мы докажем все факты, анонсированные в прошлом разделе: теоремы 4.2.1–4.2.6 (см. раздел 4.3.5), утверждение 4.2.19 (см. раздел 4.3.6), теорему 4.2.15 и утверждение 4.2.7 (см. раздел 4.3.7).

4.3.1. Примыкания результантов

Применим результаты предыдущей главы для изучения результантных множеств. Напомним, что мы обозначаем $\bigoplus_i \mathbb{C}^{A(i)}$ через $\mathbb{C}^A$, и **результантным множеством** R_A называется замыкание множества всех таких $f \in \mathbb{C}^A$, что система уравнений $f = 0$ имеет решения в $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$.

Обозначения. Если Γ — грань набора AI и $f \in \mathbb{C}^A$ — набор $\sum_{a \in A(i)} c_{a,i} x^a$, $i = 0, \dots, k$, то набор $\sum_{a \in \Gamma(i)} c_{a,i} x^a$, $i \in I$, в $\mathbb{C}^\Gamma$ обозначается f^Γ. Для любого множества $S \subset \mathbb{C}^\Gamma$ обозначим тем же символом S множество $\{f \mid f^\Gamma \in S\} \subset \mathbb{C}^A$ (например, $R_\Gamma \subset \mathbb{C}^A$ — множество всех таких $f \in \mathbb{C}^A$, что система $f^\Gamma = 0$ имеет решение).

Лемма **4.3.1.** *1)* $\operatorname{codim} R_A = -\min \dim A$.

2) Результантное множество R_A неприводимо.

3) Если B является гранью A, то $R_B \subset R_A$.

4) Для системы общего положения $f \in R_A$ верно $\dim\{f = 0\} = -\min \dim A - 1$, *и эйлерова характеристика множества $\{f = 0\}$ отлична от 0 при условии, что $\sum A$ не содержится в аффинной гиперплоскости.*

Доказательство. Часть 1 доказана в работе [131], части 2 и 3 хорошо известны.

2 и 3. Пусть T — торическое многообразие, веер которого совместим с выпуклой оболочкой суммы $\sum A$ (т.е.подразбивает ее двойственный комплекс). Рассмотрим элементы пространства $\mathbb{C}^{A(i)}$ как сечения линейного расслоения на T, соответствующего выпуклой оболочке A (см. раздел 2.1.2). Множество $\{(f, x) \mid f(x) = 0\} \subset \mathbb{C}^A \times T$ неприводимо, так как оно является тотальным пространством векторного расслоения над T. Его проекция на $\mathbb{C}^A$ совпадает с объединением R_B по всем граням $B \prec A$. Множество $\bigcup_{B \prec A} R_B$ неприводимо, и $\operatorname{codim} R_A = -\min \dim A \leqslant -\min \dim B = \operatorname{codim} R_B$ для любого B, поэтому $R_A = \bigcup_{B \prec A} R_B$.

4. Равенство $\dim\{f = 0\} = -\min \dim A - 1$ для системы f следует из

равенств $\dim\{(f,x)\,|\,f(x)=0\}=|A|-1$ и $\dim R_A=|A|+\min\dim A$. Без ограничения общности, предположим, что $A(0),\dots,A(p)$ — максимальный существенный поднабор набора A. Обозначим векторное пространство, порожденное попарными разностями точек $A(0)+\ldots+A(p)$, через L. Для всякого $f\in\mathbb{C}^A$ множество $\{f_0=\ldots=f_p=0\}$ может быть предствлено в виде $T\cdot C_f$, где $T\subset(\mathbb{C}\backslash 0)^n$ является подтором, касательная плоскость к которому в $1\in(\mathbb{C}\backslash 0)^n$ совпадает с $L^\perp\subset(\mathbb{Z}^n)^*$, и $C_f\subset(\mathbb{C}\backslash 0)^n/T$ — алгебраическое множество. Применив первое утверждение части 4 к $R_{A(0),\dots,A(p)}$, получим, что для системы общего положения $f\in R_A$ множество C_f непусто и конечно. Более того, для любого $c\in C_f$ и элементов общего положения f_i, $i>p$, ограничения f_i, $i>p$, на $T\cdot c$ задают невырожденное полное пересечение V_c. По формуле Кушниренко-Бернштейна-Хованского, обозначив выпуклую оболочку образа $A(i)$ в $\mathbb{R}^n/L$ через $B(i)$, вычислим эйлерову характеристику V_c. Она равна

$$\chi=(-1)^{\operatorname{codim}L+p-k}\sum_{a_{p+1}+\ldots+a_k=\operatorname{codim}L}B(p+1)^{a_{p+1}}\cdot\ldots\cdot B(k)^{a_k}. \qquad (*)$$

Так как $A_0,\dots,A_p$ — максимальный существенный поднабор набора A, многогранники $B(p+1),\dots,B(k)$ в $\mathbb{R}^n/L$ линейно независимы, значит, по лемме 3.1.3, хотя бы одно из слагаемых в правой части равенства $(*)$ отлично от нуля, тогда $e\{f=0\}=|C_f|\cdot\chi$ также отлично от нуля и имеет знак $(-1)^{\operatorname{codim}L+p-k}$.
□

Следствие **4.3.2.** *1) Если AI — максимальный существенный поднабор A, то $R_A=R_{AI}$.*
2) Если $\min\dim B<\min\dim A=0$ для некоторой грани $B\prec A$, то существует другая грань $C\prec A$ такая, что $R_C\supset R_B$ является гиперповерхностью.

Доказательство. 1. По лемме 4.3.1.1, $\operatorname{codim}p^{-1}(R_{AI})=\operatorname{codim}R_A=\min\dim A$, и $p^{-1}(R_{AI})\supset R_A$, по определению. По лемме 4.3.1.2, данные множества неприводимы, что доказывает обратное включение.

2. Применив следствие 3.1.28 в случае, когда E – это существенная огранка

B, получим (в обозначениях следствия): $R_B = R_E = R_{E_k} \subset \ldots \subset R_{E_1}$, по лемме 4.3.1.3, и $\operatorname{codim} R_{E_1} = -\min \dim E_1 = 1$. $\square$

Замечание **4.3.3.** Скажем, что существенная огранка Γ набора A *алгебраически примыкает* к существенной огранке Δ и обозначим данное отношение через $\Gamma \preccurlyeq \Delta$, если $R_\Gamma \subset R_\Delta$. Тогда:

0) Отношение порядка $\preccurlyeq$ усиливает отношение $\prec$ из определения 3.1.14, т.е. $A \prec B \Rightarrow A \preccurlyeq B$.

1) $\preccurlyeq$ транзитивно,

2) $\Gamma \preccurlyeq \Delta \ \Rightarrow\ \dim \Gamma \leqslant \dim \Delta$ (по лемме 4.3.1),

3) Для любых $\Gamma_1 \preccurlyeq \Gamma \preccurlyeq \Gamma_2$ таких, что $\dim \Gamma_1 < \dim \Gamma < \dim \Gamma_2$, существуют огранки Δ_1 и Δ_2, являющиеся существенными, такие, что

$$\Gamma_1 \preccurlyeq \Delta_1 \preccurlyeq \Gamma \preccurlyeq \Delta_2 \preccurlyeq \Gamma_2 \text{ and } \dim \Delta_1 + 1 = \dim \Gamma = \dim \Delta_2 - 1$$

(по теореме 3.1.15).

В данном смысле алгебраическое примыкание существенных огранок набора многогранников ведет себя так же, как примыкание граней многогранника. Тем не менее, алгебраическое примыкание является строго более сильным условием, чем примыкание из определения 3.1.14, потому что последнее не транзитивно. Было бы интересно определить алгебраическое примыкание комбинаторно, не используя результантные множества (такое определение было бы применимо и к нецелочисленным многогранникам), например, следующим образом.

Гипотеза **4.3.4.** *Алгебраическое примыкание является транзитивным замыканием примыкания из определения 3.1.14 (в частности, если $\Gamma \preccurlyeq \Delta$ и $\dim \Gamma = \dim \Delta$, то $\Gamma = \Delta$).*

4.3.2. Компоненты коразмерности 1 бифуркационного дискриминанта

Если $\min\dim A = 0$, то результант $R_A = \mathbb{C}^A$ тривиален, и вместо него мы изучим множество

$$D_A = \{f \mid f(x) = 0 \text{ and } \sum \lambda_i df_i(x) = 0 \text{ for some } \lambda_i \neq 0 \text{ and } x \in (\mathbb{C}\setminus 0)^n\} \subset \mathbb{C}^A.$$

Данное множество поможет нам в изучении искомого множества вырожденных систем

$$B_A = \{f \mid 0 - \text{критическое значение } f^\Gamma : (\mathbb{C}\setminus 0)^n \to \mathbb{C}^{|\Gamma|} \text{ для некоторого } \Gamma\} \subset \mathbb{C}^A,$$

и устроено проще, чем B_A (например, оно, в отличие от B_A, неприводимо, и, как мы уже видели, все неприводимые компоненты B_A равны D_Γ для некоторых Γ). Работа [25] содержит более подробную информацию о множестве D_A для $k = n-1$, его замыкание в данной работе называется *смешанным дискриминантным многообразием*. Следующий факт хорошо известен.

Лемма **4.3.5.** *1) $f \in D_A \Leftrightarrow f_{\{0,\dots,k\}} \in D_{A_{\{0,\dots,k\}}}$ (в обозначениях, введенных для теоремы 4.2.6).*
2) Множество D_A неприводимо.
3) Если $k = 0$, попарные разности точек в A порождают $\mathbb{Z}^n$, и D_A является гиперповерхностью, то для общего многочлена $f \in D_A$ критическая точка отображения $f : (\mathbb{C}\setminus 0)^n \to \mathbb{C}^{k+1}$ в критическом слое $f^{-1}(0)$ единственна и невырождена.

Доказательство. Часть 1 является тавтологией и сводит часть 2 к случаю $k = 0$. В данном случае, рассмотрим множество $S = \{(x, f) \mid f(x) = df(x) = 0\} \subset (\mathbb{C}\setminus 0)^n \times \mathbb{C}^A$. Проекция $S \to (\mathbb{C}\setminus 0)^n$ является векторным расслоением ранга $|A| - \dim(\text{convex hull of } A) - 1$, следовательно S неприводимо и имеет размерность $|A| + n - \dim(\text{convex hull of } A) - 1$, таким образом, его проекция $D_A \subset \mathbb{C}^A$ неприводима, что доказывает часть 2.

Более того, если выпуклая оболочка A n-мерна и D_A — гиперповерхность, то $\dim D_A = \dim S$, и у проекци $S \to D_A$ общий слой конечен. По лемме Сарда, общий слой данной проекции конечен и невырожден. Если (x, f) — точка, принадлежащая такому слою, то прямым вычислением можно доказать, что f является гладкой точкой D_A и ковектор $\sum_{a\in A} x^a dc_a$ нормален к $T_f D_A$ (напомним, что $(c_a,\, a \in A)$ — естественная система координат на $\mathbb{C}^A$ такая, что $c_a(f)$ является коэффициентом при мономе x^a в $f \in \mathbb{C}^A$). Данное условие однозначно определяет x для данного f, принадлежащего гладкой части множества D_A, следовательно, проекция $S \to D_A$ является биекцией над гладкой частью множества D_A. $\square$

Теорема **4.3.6.** *Компонента коразмерности 1 множества B_A равна объединению множеств коразмерности 1 D_Γ по всем важным Γ (см. определение 3.1.24).*

Доказательство следует из теоремы 4.1.31 и того факта, что компонента множества B_A коразмерности 1 является объединением множеств $D^{red}_{A'} = 0$ по всем граням $A' \subset A$. $\square$

Пусть i_Γ — индекс решетки, порожденной попарными разностями точек суммы $\sum \Gamma$ (индексом решетки $L \subset \mathbb{Z}^n$ называется мощность множества $(L \otimes \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}^n)/L$). Напомним, что через e мы обозначаем эйлерову характеристику.

Теорема **4.3.7.** *Если $D_\Gamma \subset \mathbb{C}^A$ является гиперповерхностью, то для системы общего положения $\tilde f \in D_\Gamma$ и системы f общего положения в $\mathbb{C}^A$, выполнено $e\{\tilde f = 0\} - e\{f = 0\} = (-1)^{n-k} i_\Gamma c^\Gamma_A$.*

Перед доказательством заметим, что из данных двух теорем и следствия 3.1.27 мы получаем

Следствие **4.3.8.** *Для систем общего положения f в $\mathbb{C}^A$ и $\tilde f$ в компоненте коразмерности 1 множества B_A разность $e\{\tilde f = 0\} - e\{f = 0\}$ равна $(-1)^{n-k} i_\Gamma c^\Gamma_A$, и, в частности, отлична от нуля и имеет знак $(-1)^{n-k}$.*

В обозначениях, введенных для теоремы 4.2.6, множество $\{f_I = 0\} \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^I \times (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ инвариантно относительно действия $(\mathbb{C} \setminus 0)$ на $\mathbb{C}^I$ растяжениями, и мы обозначим соответствующий фактор через $\{f_I = 0\}/(\mathbb{C} \setminus 0)$.

Лемма **4.3.9.** *1) Для любого набора f многочленов Лорана на $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ верно $e\{f = 0\} = \sum_I e\{f_I = 0\}/(\mathbb{C} \setminus 0)$.*
2) Для любой грани Γ набора AI имеем $c^{\Gamma_I}_{A_{\{0,\dots,k\}}} = \sum_{J \supset I} c^{\Gamma}_{AJ}$.

Часть 2 совпадает с утверждением леммы 2.3.2, и равенство эйлеровых характеристик в его доказательстве доказывает часть 1.

Доказательство теоремы 4.3.7. По леммам 4.3.9 и 4.3.5(1), с помощью равенства $i_\Gamma = i_{\Gamma_{\{0,\dots,k\}}}$ мы можем свести утверждение к случаю $k = 0$, рассматривая гиперповерхности $\{f_I = 0\}/(\mathbb{C} \setminus 0)$ вместо полного пересечения $\{f = 0\}$. Пусть $k = 0$, а $\widetilde{M}$ и M — замыкания гиперповерхностей $\{\tilde{f} = 0\}$ и $\{f = 0\}$ в A-торическом многообразии $T \supset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$. Тогда M трансверсально всем орбитам T, и, по лемме 4.3.5(3), $\widetilde{M}$, за исключением одной особой точки x в Γ-орбите, тоже обладает данным свойством. Если система f достаточно близка к $\tilde{f}$, то M диффеоморфно $\widetilde{M}$ вне малой окрестности U точки x, и $M \cap U$ является слоем Милнора $\widetilde{M}$ в x. Таким образом, искомая разность $e\{\tilde{f} = 0\} - e\{f = 0\}$ равна произведению $(-1)^{n-k}$ на число Милнора для $\widetilde{M}$ в x. Перейдя к нормализации T, получим i_Γ точек над x, и число Милнора в каждой из них равно c^Γ_A (см. теорему 2.1.10). $\square$

4.3.3. Дискриминант Эйлера

Пусть $\pi : Q \to P$ — морфизм комплексных алгебраических многообразий. Всякий раз, когда мы формулируем утверждение о *ростке* π вблизи $p \in P$, мы подразумеваем существование комплексной окрестности p такой, что утверждение верно для ограничения π на прообраз любой меньшей окрестности. *Бифуркационным множеством* отображения π называется минимальное подмножество $B_\pi \subset P$ такое, что ограничение π на прообраз множества $P \setminus B_\pi$ является

локально тривиальным расслоением. По теореме Хардта, P можно разбить на гладкие страты P_i такие, что Эйлерова характеристика слоя $\pi^{-1}(x)$ равна одному и тому же числу e_i для всех $x \in P_i$. Пусть P_0 — плотный страт, а $P_1, \dots, P_k$ — страты коразмерности 1.

Определение **4.3.10.** Дивизор Вейля $(-1)^{\dim Q - \dim P} \sum_{i=1}^{k} (e_i - e_0)\overline{P}_i$ называется *дискриминантом Эйлера* морфизма π и обозначается E_π.

Для морфизмов $\pi : Q \to P$ и $f : R \to P$ комплексных алгебраических многообразий *расслоенным произведением* $Q \times_P R$ называется пересечение (график f) $\times Q$ и $R \times$ (график π) в $R \times P \times Q$; морфизм f *трансверсален* π, если гладкие подмногообразия (график f) $\times Q$ и $R \times$ (график π) трансверсальны. Мы напомним несколько стандартных фактов о трансверсальности:

Утверждение **4.3.11.** *1. Если $f : R \to P$ и $\pi : Q \to P$ трансверсальны, то $Q \times_P R$ также является многообразием и $f(R)$ не содержится во множестве критических значений π.*

2 (транзитивность). Если к тому же морфизм $g : S \to R$ трансверсален проекции $Q \times_P R \to R$, то композиция $f \circ g$ трансверсальна π.

Доказательство. Гладкость расслоенного произведения $Q \times_P R$ следует из определения. Без ограничения общности, транзитивность можно доказать для линейных отображений f, g, π. Данный частный случай очевиден: если $\operatorname{im}\pi + \operatorname{im} f = P$ и $\operatorname{im} g + f^{-1}(\operatorname{im}\pi) = R$, то $\operatorname{im} fg + \operatorname{im}\pi = P$. По транзитивности, утверждение о том, что $f(R)$ не содержится в дискриминанте π, сводится к случаю $\dim R = 0$, который следует из определения. □

Напомним, что для гладкого отображения $f : R \to P$ и дивизора D в P, обратный образ f^*D является дивизором в R, который аддитивно зависит от D и определяется вблизи точки $x \in R$ следующим свойством: если D локально неприводим вблизи $f(x)$ и задается уравнением $g = 0$, то $f^*D = 0$, когда $g \circ f = 0$ тождественно, и f^*D задается уравнением $g \circ f = 0$ иначе.

Теорема **4.3.12** (Замена базы). *Если отображение $f : R \to P$ и собственное отображение $\pi : Q \to P$ трансверсальны, то дискриминант Эйлера проекции $Q \times_P R \to R$ равен $f^* E_\pi$.*

I. Доказательство для ростка $f : (\mathbb{C}, 0) \to (P, p)$. Если f — росток гладкой кривой, трансверсальный стратам Хардта P_i многообразия P, то утверждение верно, по определению дискриминанта Эйлера. В общем случае, образ f пересекает дискриминант отображения π в изолированной точке p, по утверждению 4.3.11(1), и мы можем рассмотреть шевеление $F : (\mathbb{C}^2, 0) \to (P, p)$, $F(x, 0) = f(x)$, такое, что F трансверсально π и $F(\cdot, t)$ трансверсально стратам Хардта P_i при достаточно малых $t \neq 0$. Более точно, выберем произведение $D \times T \subset \mathbb{C}^2$ двух открытых дисков таким образом, чтобы ограничение f_t отображения F в диск $D_t = D \times \{t\}$ было трансверсально каждому из P_i при всех отличных от нуля $t \in T$, произведения $Q \times_P (D \times T)$ и $Q \times_P D_0$ стягивались на слой $\pi^{-1}(p)$, а пересечение $E_\pi \cap (D \times T)$ стягивалось в точку p. Из трансверсальности F и π следует, что гомеоморфный тип пространства $Q \times_P D_t$ не зависит от t, следовательно,

$$e(Q \times_P D_0) = e(Q \times_P D_t) \text{ for } t \in T.$$

Обозначим суммарную кратность нульмерного дивизора через m, тогда

$$m f_0^* E_\pi = m f_t^* E_\pi \text{ for } t \in T.$$

Так как f_t трансверсально стратам Хардта, $f_t(D)$ пересекает некоторые гиперповерхности P_i, $i \in I$, трансверсально в изолированных точках p_i и не пересекает остальные страты, таким образом, верно

$$(-1)^{\dim Q - \dim P} m f_t^* E_\pi = \sum_{i \in I} (e\pi^{-1}(p_i) - e_0),$$

где e_0 — эйлерова характеристика общего слоя отображения π. По аддитивности эйлеровой характеристики, последняя сумма равна

$$\sum_{i \in I} (e\pi^{-1}(p_i) - e_0) = e(Q \times_P D_t) - e_0.$$

В результате получим равенство

$$(-1)^{\dim Q-\dim P} m f_0^* E_\pi = (-1)^{\dim Q-\dim P} m f_t^* E_\pi = \sum_{i\in I} (e\pi^{-1}(p_i) - e_0) =$$

$$= e(Q \times_P D_t) - e_0 = e(Q \times_P D_0) - e_0 = e(\pi^{-1}(p)) - e_0,$$

из которого следует доказываемое утверждение.

II. Доказательство для произвольного f. Часть I позволяет переформулировать определение дискриминанта Эйлера следующим образом. Дискриминантом Эйлера произвольного собственного отображения $\pi : Q \to P$ называется (единственный) дивизор Вейля D в P такой, что для любого ростка $j : (\mathbb{C}, 0) \to (P, p)$, трансверсального π, индекс пересечения mj^*D равен $(-1)^{\dim Q-\dim P}(e\pi^{-1}(p) - e_0)$, где e_0 — эйлерова характеристика общего слоя отображения π. Данное определение инвариантно относительно трансверсальных замен базы, по утверждению 4.3.11(2). □

Изучение дискриминантов Эйлера полных пересечений можно свести к случаю гиперповерхностей с помощью следующей версии трюка Кэли.

Теорема **4.3.13.** *Рассмотрим π, ограничение проекции $M \to P$ на полное пересечение $\{f_0 = \ldots = f_k = 0\} \subset M$. Пусть $\lambda_0 : \ldots : \lambda_k$ образуют стандартную система координат в $\mathbb{CP}^k$, и пусть π_0 — ограничение проекции $\mathbb{CP}^k \times M \to M \xrightarrow{\pi} P$ на множество $\{\sum_i \lambda_i f_i = 0\} \subset \mathbb{CP}^k \times M$. Тогда $E_{\pi_0} = E_\pi$.*

Доказательство. По аддитивности эйлеровой характеристики, для любого $y \in P$ выполняется $e\pi^{-1}(y) = e\pi_0^{-1}(y) - ke(M)$. Постоянное слагаемое $ke(M)$ не влияет на определение дискриминанта Эйлера. □

4.3.4. Дискриминант Бертини

Пусть π — морфизм из комплексной квазипроективной схемы Q в гладкое многообразие P. Следующие понятия хорошо известны, и различные их обобщения изучались многими из упомянутых во введении авторов.

Определение **4.3.14.** Собственный морфизм $\bar{\pi} : \bar{Q} \to P$ из комплексной квазипроективной схемы $\bar{Q}$, снабженной набором дивизоров Картье D_i, называется *компактификацией* морфизма π, если Q является открытой подсхемой $\bar{Q}$ с $\pi = \bar{\pi}|_Q$, и $Q = \bar{Q} \setminus \bigcup_i D_i$ как множество. Точка $y \in P$ принадлежит *множеству негладкости* $\operatorname{sing} \bar{\pi}$, если она равна $\bar{\pi}(x)$, где x удовлетворяет одному из условий:

1) $x \in \operatorname{sing} \bar{Q}$, либо

2) дифференциалы локальных уравнений дивизоров D_i, проходящих через x, линейно зависимы в x.

Точка $y \in P$ принадлежит *дискриминанту Бертини* $\bar{B}_{\bar{\pi}}$, если она равна $\bar{\pi}(x)$, где x удовлетворяет одному из следующих условий:

1) $x \in \operatorname{sing} \bar{Q}$, либо

2) дифференциал $d\bar{\pi}$ не сюръективен в x, либо

3) дифференциалы локальных уравнений дивизоров D_i, проходящих через x, имеют линейно зависимые ограничения на $\ker d\bar{\pi}$ в x.

Компактификация $\bar{\pi}$ называется *c-гладкой*, если $\operatorname{codim} \operatorname{sing} \bar{\pi} > c$. Для отображения $F : R \to P$ *расслоенным произведением* $R \times_P \bar{Q}$ называется схемное пересечение $R \times$ (график $\bar{\pi}$) и (график F) $\times \bar{Q}$ в $R \times P \times \bar{Q}$. *Индуцированной компактификацией* $F^*\bar{\pi}$ называется проекция $R \times_P \bar{Q}$ на R, снабженная набором дивизоров Картье $R \times_P D_i$.

1-гладкие компактификации отображения π позволяют удобным образом оценить бифуркационное множество B_π сверху и снизу в смысле следующей теоремы. Для произвольного множества I обозначим (схемное) пересечение $\bigcap_{i \in I} D_i$ через $\bar{Q}_I$, а его открытую подсхему $\bigcap_{i \in I} D_i \setminus \bigcup_{j \notin I} D_j$ — через Q_I. В частности, $Q_\varnothing = Q$ и $\bar{Q}_\varnothing = \bar{Q}$.

Теорема **4.3.15.** *1. Бифуркационное множество оценивается сверхжу и снизу следующим образом:* $|E_\pi| \subset B_\pi \subset \bar{B}_{\bar{\pi}}$.

2. Если отображение $\bar{\pi}$ *является 0-гладким, то* $\bar{B}_{\bar{\pi}}$ *нигде не плотно. Если*

$\bar\pi = F^*\bar p$, *то* $\bar B_{\bar\pi} = F^{-1}\bar B_{\bar p}$.

3. Если к тому же морфизмы $\bar\pi$ *и* $\bar p$ *являются 1-гладкими, то* $E_\pi = F^*E_p$.

4. Если морфизм $\bar\pi$ *является 0-гладким и* $\bar Q$ *— локально полное пересечение, то* $\operatorname{codim}\bar B_{\bar\pi} = 1$ *при условии, что*

a) для любого множества I *такого, что* $\bar\pi(\bar Q_I)$ *имеет положительную размерность, существует такое* J*, что* $\bar\pi(\bar Q_J)$ *имеет коразмерность 1 и содержит* $\bar\pi(\bar Q_I)$.

b) для любого I*, множество* Q_I *аффинно.*

Мы будем использовать данную теорему в случае, когда Q — полное пересечение в комплексном торе, π — его проекция на подтор, а $\bar Q$ — его послойная торическая компактификация. В этой ситуации она позволит нам доказать, что в случае общего положения обе оценки части (1) обращаются в равенство.

Доказательство части 1. Первое из включений означает, что все слои локально тривиального расслоения имеют одинаковую эйлерову характеристику. Второе включение следует из того, что вне дискриминанта Бертини $\bar\pi^{-1}(\bar B_{\bar\pi})$, проекция $\bar\pi$ задает стратифицированное локально тривиальное расслоение стратифицированного пространства $\bar Q = \bigsqcup_I Q_I$.

Доказательство части 2. Разность $\bar B_{\bar\pi} \setminus \operatorname{sing}\bar\pi$ нигде не плотна, по теореме Бертини-Сарда, следовательно таково и $\operatorname{sing}\bar\pi$, по 0-гладкости. Пусть $\hat F$ — индуцированное отображение области определения $\bar\pi = F^*\bar p$ в область определения $\bar p$. Так как $\hat F$ индуцирует изоморфизм между (схемными) слоями $\bar\pi^{-1}(y)$ и $\bar p^{-1}(F(y))$, оно сохраняет условия (1) и (2) определения дискриминанта Бертини. Более того, если данные слои регулярны в некоторой точке x, то $\hat F$ сохраняет ограничения локальных уравнений дивизоров D_i, ограниченных на $T_x\bar\pi^{-1}(y)$, и, в частности, сохраняет условие (3)определения дискриминанта Бертини.

Доказательство части 3. Обозначим ограничение $\bar\pi$ на $\bar Q_I$ через π_I (так что $\pi_\varnothing = \bar\pi$), тогда $E_\pi = \sum_I (-1)^I E_{\pi_I}$, по формуле включений-исключений

и аддитивности эйлеровой характеристики. Для ограничения E_{π_I} на $P \setminus \operatorname{sing}\bar{\pi}$ получим доказываемое равенство $E_{\pi_I} = F^* E_{p_I}$ для любого I, по теореме 4.3.12, потому что F и p_I трансверсальны вне $\operatorname{sing}\bar{\pi}$. Так как $\operatorname{codim}\operatorname{sing}\bar{\pi} > 1$, равенство $E_{\pi_I} = F^* E_{p_I}$ верно также на P. Применим его к каждому из слагаемых суммы $E_\pi = \sum_I (-1)^I E_{\pi_I}$.

Доказательство части 4. Докажем, что через каждую точку y дискриминанта Бертини проходит его компонента коразмерности 1.

I. Рассмотрим $\Sigma_{I,y}$, множество всех точек $x \in \bar{\pi}_I^{-1}(y)$ таких, что $\bar{Q}$ не регулярно в x, либо дифференциал $d\bar{\pi}$ не сюръективен в x, либо дифференциалы локальных уравнений дивизоров D_i, $i \in I$, линейно зависимы на $\ker d\bar{\pi}$. Выберем максимальное I такое, что $\Sigma_{I,y}$ непусто. Так как $\Sigma_{I,y} \cap D_j \subset \Sigma_{I\cup\{j\},y}$ для любого j, из максимальности I следует, что $\Sigma_{I,y} \cap D_j = \varnothing$ для всех $j \notin I$, т. е. компактное множество $\Sigma_{I,y}$ содержится в Q_I. Так как, по условию b, множество Q_I аффинно, то множество $\Sigma_{I,y}$ конечно.

II. Без ограничения общности, мы можем предположить, что $|I| \leqslant \dim Q - \dim P$. Иначе точка y содержится во множестве $\bar{\pi}(\bar{Q}_I)$ положительной размерности, следовательно, по условию a, она также содержится в $\bar{\pi}(\bar{Q}_J)$ коразмерности 1, которое, в свою очередь, содержится в $\bar{B}_{\bar{\pi}}$.

III. Вблизи точки $x \in \Sigma_{I,y}$ локально полное пересечение Q_I задается локальными уравнениями $h_1 = \ldots = h_k = 0$ в объемлющем пространстве C^N, дивизор D_i задается уравнением $g_i = 0$, слой $\bar{\pi}_I^{-1}(y)$ задается уравнениями $u_1 \circ \bar{\pi} = \ldots = u_p \circ \bar{\pi} = 0$, где $(u_1, \ldots, u_p)$ — система координат вблизи $y \in P$. Система уравнений

$$h_j = 0,\ j = 1, \ldots, k,\ g_i = 0,\ i \in I,\ u_l \circ \pi = \varepsilon_l,\ l = 1, \ldots, p, \qquad (*)$$

задает семейство схем C_ϵ, параметризованное $\epsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$. Схема C_0 имеет имеют изолированную особенность, являющуюся полным пересечением, потому что x изолирована в $\Sigma_{I,y}$, согласно (I), и число уравнений в $(*)$ не превосходит N, согласно (II). Таким образом, семейство C_ϵ индуцировано из версальной де-

формации изолированной особенности полного пересечения C_0, следовательно, его дискриминант $\{\epsilon \,|\, C_\epsilon \text{ особо }\} \subset \bar{B}_{\bar{\pi}}$, содержащий y, является гиперповерхностью, так как дискриминант версальной деформации изолированной особенности полного пересечения является гиперповерхностью. $\square$

Замечание **4.3.16.** Если каждый слой отображения π содержит лишь конечное множество критических точек и все слои имеют одинаковую размерность, то определен дискриминант π в смысле Тессье (см. [135]), и дискриминант Эйлера E_π совпадает с его компонентой коразмерности 1. Было бы интересно построить совместное обобщение дискриминанта Эйлера и компоненты коразмерности 1 дискриминанта Тессье, которое было бы определено при ослабленных условиях на 1-гладкость отображения π и конечность его ограничения на множество критических точек и при этом было бы инвариантно относительно замен базы.

Допустим, например, что Q имеет только изолированные особенности, являющиеся полными пересечениями, а P одномерно, тогда в определении 4.3.10 эйлерову характеристику слоя $\pi^{-1}(x)$ следует заменить суммой эйлеровых характеристик множества $\pi^{-1}(x) \setminus \operatorname{sing} Q$ и локальных слоев Милнора Q в точках $\pi^{-1}(x) \cap \operatorname{sing} Q$. Данная версия дискриминанта Эйлера инвариантна относительно произвольных одномерных замен базы. Аналогично, используя интегрирование по эйлеровой характеристике, можно определить E_π для Q с необязательно изолированными особыми точками. Например, предположим, что Q — гиперповерхность со сколь угодно сложными особенностями, и обозначим эйлерову характеристику локального слоя Милнора Q в x через $\mu(x)$. Определим E_π, заменив в его определении 4.3.10 эйлерову характеристику слоя $\pi^{-1}(x)$ интегралом в смысле эйлеровой характеристики функции $\mu : Q \to \mathbb{Z}$ по слою. Тогда E_π инвариантно относительно одномерных замен базы, но в такой степени общности уже теряет смысл предмет исследования данной работы: пример, построенный в работе [11], показывает, что мы уже не можем ожидать, вообще

говоря, что включения из теоремы 4.3.15.1 будут равенствами.

4.3.5. Универсальный случай

В данном разделе мы докажем теоремы 4.2.1–4.2.6. Все они следуют из теоремы 4.3.17 ниже. Пусть $Q \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n \times \mathbb{C}^A$ состоит из всех пар (x, f) таких, что $f(x) = 0$, и обозначим проекцию Q на $\mathbb{C}^A$ через p. Выберем гладкую торическую компактификацию T тора $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ такую, что ее веер Γ совместим с выпуклыми оболочками множеств $A_0, \dots, A_k$, обозначим замыкание Q в $T \times \mathbb{C}^A$ через $\bar{Q}$, проекцию $\bar{Q}$ на $\mathbb{C}^A$ — через $\bar{p}$, а пересечения $\bar{Q}$ с замыканиями орбит коразмерности 1 многообразия T — через $D_1, D_2, \dots$. Рассмотрим дискриминант Эйлера E_p (см. определение 4.3.10), бифуркационное множество B_p проекции p и дискриминант Бертини $\bar{B}_{\bar{p}}$ (см. определение 4.3.14) компактификации $(\pi, D_1, D_2, \dots)$.

Теорема **4.3.17.** *Если набор A существенен, то $E_p = E_A$ (см. определение 4.2.5) и $|E_p| = B_p = \bar{B}_{\bar{p}}$ (в частности, все они являются гиперповерхностями).*

Доказательство. Равенство $E_p = E_A$ следует из определения. По следствию 4.3.2.2, компактификация $(p, D_1, D_2, \dots)$ удовлетворяет условию 3а теоремы 4.3.15, остальные условия выполняются по определению, таким образом, по теореме 4.3.15.4, $\bar{B}_{\bar{p}}$ — гиперповерхность. По следствию 4.3.8, каждая компонента коразмерности 1 гиперповерхности $B_A = \bar{B}_{\bar{p}}$ входит в E_p с ненулевой кратностью, значит, $|E_p| = \bar{B}_{\bar{p}}$. Оставшееся равенство следует из теоремы 4.3.15.1. □.

Теперь из доказанной теоремы мы выведем все три теоремы, сформулированные во введении.

Доказательство теоремы 4.2.1. Если $\min \dim A < 0$, то условие $f \in R_A$ очевидно эквивалентно утверждениям (1) и (3) и эквивалентно утверждению (2), по лемме 4.3.1.4. Иначе, по определению дискриминанта Бертини, $\bar{B}_{\bar{p}}$

состоит из всех f, удовлетворяющих условию (3).

Если f принадлежит $\bar{B}_{\bar{p}}$, то свойство (2) выполнено, потому что существуют сколь угодно малые $\tilde{f}$ и $\tilde{f}'$ такие, что $f+\tilde{f}$ является точкой общего положения в $|E_p|$ и $f+\tilde{f}'$ находится вне $|E_p|$, следовательно, эйлеровы характеристики множеств $\{f+\tilde{f}=0\}$ и $\{f+\tilde{f}'=0\}$ различны, по определению E_p. Таким образом, хотя бы одна из них отличается от $e\{f=0\}$. Так как f удовлетворяет свойству (2), она также удовлетворяет свойству (1).

Если f не принадлежит $\bar{B}_{\bar{p}}$, то условия (1) и (2) не выполнены, потому что f не принадлежит B_p. □

Доказательство теоремы 4.2.3. B_p – носитель дивизора E_p. □

Доказательство теоремы 4.2.6. Если $k=0$, то, по теореме 4.3.7, левая часть задает дивизор $\sum_\Gamma i_\Gamma c_A^\Gamma D_\Gamma$, где Γ пробегает множество всех граней A, а правая часть задает тот же дивизор, по теореме о разложении на простые, см. утверждение 4.1.13. Случай произвольного k сводится к $k=0$ с помощью равенства $E_A=\prod_{I\subset\{0,\dots,k\}} E_{A_I}^{(-1)^{k+1-|I|}}$, которое следует из теоремы 4.3.13. □

4.3.6. Общий случай для незначимых A

Мы возвращаемся к ситуации и обозначениям главы 4.2.4. Мы ограничимся рассмотрением случая (I. многочлены Лорана), другой рассматриваются аналогично. Напомним, что $\min\dim A$ обозначает минимум $p-\dim(\text{convex hull of } A_{i_1}+\ldots+A_{i_p})$ по всем последовательностям $i_1<\ldots<i_p$ (включая пустую).

Утверждение **4.3.18.** *1) Если* $\min\dim A\leqslant -c<0$ *и* f $(c-1)$*-невырождена (см. определение 4.2.17), то общий слой проекции* $\pi: Q\to(\mathbb{C}\setminus 0)^m$ *пуст, а бифуркационное множество совпадает с замыканием* $\pi(Q)$ *и имеет коразмерность не меньше* c.

2) Если $\min\dim A=-c<0$, *и* f c*-невырождена, то, более того, коразмерность равна* c. *В данном случае, если сумма* $A_0+\ldots+A_k$ *не содержится в аффинной гиперплоскости, то общий непустой слой имеет ненулевую эйлеро-*

ву характеристику.

Если мы не поскупимся на условия общего положения f, то утверждение части 2 будет почти очевидным. Цель данного утвеждения — сформулировать минимальное достаточное условие общего положения Данное утверждение можно вывести из результатов предыдущих глав (или их версий для $\min\dim A < -1$) тем же способом, как это проделано для значимых наборов A ниже, однако, мы предпочтем привести прямое (почти) независимое доказательство, иллюстрирующее некоторые идеи, стоящие за сложным доказательством в случае значимого A.

Лемма **4.3.19.** *Пусть* $\Sigma \subset (\mathbb{C}\setminus 0)^n \times (\mathbb{C}\setminus 0)^n$ *— алгебраическое многообразие такое, что* $\operatorname{codim}\pi(\Sigma) = c$. *Тогда тропический веер многообразия* Σ *содержит линейную функцию* $v : \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}$ *размерности не больше* c *(см. определение 4.2.17).*

Доказательство. Пусть $\int H \subset \mathbb{Z}^m$ — расслоенный многогранник выпуклой оболочки H суммы $H_0 + \ldots + H_m \subset \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}^m$. Без ограничения общности, мы можем предположить, что $\int H$ не содержится в гиперплоскости. Тропический веер образа $\pi(\Sigma)$ содержит линейную функцию $u : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}$, опорная грань которой в $\int H$ имеет размерность не больше c, потому что множество линейных функций с опорными гранями более высоких размерностей имеет коразмерность $c-1 < \operatorname{codim}\pi(\Sigma)$. Тропический веер $\pi(\Sigma)$ является проекцией тропического веера многообразия Σ (см. [162], [133]), следовательно, u можно продолжить до линейной функции $v : \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}$, принадлежащей тропическому вееру многообразия Σ. Размерность v не превышает размерность $(\int H)^u$, которая, в свою очередь, не превышает c. □

Доказательство утверждения 4.3.18.

I. Если $\min\dim A \leqslant -c < 0$, то $(c-1)$-невырожденность означает, что множество $\{f_0^v = \ldots = f_k^v = 0\}$ пусто для любой линейной функции $v : \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}$, размерность которой меньше c, т.е. тропический веер Q не содержит

линейных функций размерности меньше c. Применив лемму 4.3.19 при $\Sigma = Q$, получим $\operatorname{codim} \pi(Q) \geqslant c > 0$. Таким образом, общий слой $\pi : Q \to (\mathbb{C} \setminus 0)^m$ пуст, и замыкание $\pi(Q)$ совпадает с бифуркационным множеством.

II. Если, более того, f c-невырождена, то, для аффинных линейных функций общего положения $l_1, \dots, l_{m-c}$ на $(\mathbb{C}\setminus 0)^m$ и $l_{m-c+1}, \dots, l_{n+m-k-1}$ на $(\mathbb{C}\setminus 0)^n \times (\mathbb{C} \setminus 0)^m$ система

$$f_0 = \ldots = f_k = l_1 = \ldots = l_{n+m-k-1} = 0 \qquad (*)$$

$m+n$ уравнений от $m+n$ переменных удовлетворяет предположению об общем положении теоремы Кушниренко-Бернштейна. Таким образом, число ее решений равно смешанному объему выпуклых оболочек множеств $H_0, \dots, H_k$, $m-c$ копий стандартного симплекса в $\mathbb{Z}^m$ и $c+n-k-1$ копий стандартного симплекса в $\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}^m$. Из условия $\min \dim A = -c$ следует линейная независимость данных многогранников, значит, их смешанный объем V строго положителен (см. лемму 3.1.3), следовательно, система $f_0 = \ldots = f_k = l_1 = \ldots = l_{m-c} = 0$ совместна для функций $l_1, \dots, l_{m-c}$ общего положения на $(\mathbb{C}\setminus 0)^m$. Другими словами, $\pi(Q)$ пересекает c-мерное аффинное подпространство общего положения в $(\mathbb{C} \setminus 0)^m$, поэтому оно имеет компоненту коразмерности не выше c. Остается доказать, что $\pi(Q)$ не имеет компонент более высокой коразмерности.

III. Обозначим плоскость $l_1 = \ldots = l_{m-c} = 0$ через $L \subset (\mathbb{C}\setminus 0)^m$ и рассмотрим множество Z пар $(z, \tilde{f})$ таких, что $\tilde{f} \in \mathbb{C}^{H_0} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{H_k}$ и z принадлежит пересечению $\pi\{x \mid \tilde{f}(x) = 0\}$ с L. Тогда проекция Z на $\mathbb{C}^{H_0} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{H_k}$ является собственной в f. Чтобы доказать это, рассмотрим множество $\hat{Z}$ всех пар $(y, \tilde{f})$ таких, что $\tilde{f} \in \mathbb{C}^{H_0} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{H_k}$ и $y \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n \times (\mathbb{C} \setminus 0)^m$ — решение системы $\tilde{f}_0 = \ldots = \tilde{f}_k = l_1 = \ldots = l_{n+m-k-1} = 0$. Доказываемое свойство следует из двух наблюдений ниже.

1) Проекция $\hat{Z}$ на $\mathbb{C}^{H_0} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{H_k}$ является собственной в f, так как система $(*)$ удовлетворяет условию общего положения теоремы Кушниренко-Бернштейна, которое гарантирует, что система $\tilde{f}_0 = \ldots = \tilde{f}_k = l_1 = \ldots = l_{n+m-k-1} = 0$

имеет одинаковое число решений для любой системы $\tilde{f}$ вблизи f.

2) Проекция $\hat{Z}$ на Z эпиморфна вблизи f. Чтобы доказать данное свойство в точке (z, f), заметим, что точка z содержится в компоненте коразмерности c множества $\pi(Q)$, потому что оно не имеет компонент более низкой коразмерности, а компоненты более высокой коразмернсти не пересекают плоскость общего положения L. Таким образом, слой $Q \to \pi(Q)$ над z имеет размерность не меньше $(c+n-k-1)$, иначе $\operatorname{codim} Q > k+1$ в этом слое, что противоречит определению $Q = \{f_0 = \ldots = f_k = 0\}$. Следовательно, плоскость общего положения $l_{m-c+1} = \ldots = l_{n-m-k-1} = 0$ дополнительной размерности пересекает данный слой в некоторой точке y. Значит, $(z, f) \subset Z$ совпадает с проекцией $(y, f) \subset \hat{Z}$.

IV. Предположим противное утверждению, которое нам осталось доказать: пусть замыкание $\pi(Q)$ содержит компоненту R коразмерности выше c. Рассмотрим множество S всех совместных систем уравнений $h_0 = \ldots = h_k = 0$, $h_i \in \mathbb{C}^{A_i}$, обозначим замыкание S через $\bar{S}$, а разность $\bar{S} \setminus S$ — через ∂S. Множество $\pi(Q)$ является прообразом S при отображении $F : (\mathbb{C} \setminus 0)^m \to \mathbb{C}^{A_0} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_k}$, определение которого предшествует определению 4.2.14, и прообраз замыкания $\bar{S}$ имеет чистую коразмерность c по следующим двум причинам.

1) $\operatorname{codim} F^{-1}(\bar{S}) \geqslant c$, потому что $F^{-1}(\bar{S})$ совпадает с объединением $\pi\{f_0^v = \ldots = f_k^v = 0\}$ по всем линейным функциям $v : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ и $\operatorname{codim} \pi\{f_0^v = \ldots = f_k^v = 0\}$ оценивается с помощью утверждения 4.3.18.1.

2) $\operatorname{codim} F^{-1}(\bar{S}) \leqslant c$, так как $\operatorname{codim} \bar{S} = c$, по лемме 4.3.1.1.

Таким образом, замыкание $\overline{\pi(Q)}$ строго меньше прообраза замыкания $\bar{S}$, потому что компонента R' множества $F^{-1}(\bar{S})$ чистой коразмерности c содержит компоненту $R \subset \overline{\pi(Q)}$ более высокой коразмерности.

Рассмотрим достаточно малое шевеление $\tilde{f}_0, \ldots, \tilde{f}_k$ системы $f_0, \ldots, f_k$ и соответствующее шевеление $\tilde{F}$ отображения F и обозначим $\{\tilde{f}_0 = \ldots = \tilde{f}_k = 0\}$ через $\tilde{Q}$. Для общего $\tilde{F}$ его образ пересекает $\bar{S}$ и замыкание ∂S собственно

(детали см. [41]), таким образом, замыкание множества $\pi(\tilde{Q})$ равно $\tilde{F}^{-1}(\bar{S})$. Подытожим:

– Индексы пересечения $\pi(Q)$ и $\pi(\tilde{Q})$ с L (с учетом кратностей) равны (по результату шага III).

– Индексы пересечения $\tilde{F}^{-1}(\bar{S})$ и $F^{-1}(\bar{S})$ с L равны (применим (1) к $\pi\{f_0^v = \ldots = f_k^v = 0\}$ для любого v и напомним, что $F^{-1}(\bar{S})$ совпадает с их объединением).

– Множество $\tilde{F}^{-1}(\bar{S})$ совпадает с замыканием множества $\pi(\tilde{Q})$, в то время как $F^{-1}(\bar{S})$ содержит $\pi(Q)$ и подмножество R' коразмерности c, не содержащееся в замыкании множества $\pi(Q)$.

Таким образом, обозначив индекс пересечения (с учетом кратностей) через "$\circ$", получим:

$$R' \circ L \leqslant F^{-1}(\bar{S}) \circ L - \pi(Q) \circ L =$$
$$= \tilde{F}^{-1}(\bar{S}) \circ L - \pi(Q) \circ L = \pi(\tilde{Q}) \circ L - \pi(Q) \circ L = 0,$$

т.е. индекс пересечения R' с общей плоскостью дополнительной размерности равно 0, противоречие. Таким образом, все компоненты замыкания $\pi(Q)$ имеют коразмерность c. $\square$

По утверждению 4.3.18.2, при $\min\dim A < -1$ бифуркационное множество отображения π равно замыканию множества $\pi(Q)$ коразмерности выше 1, тропикализация которого была описана в работах [133], [162], и т.д. (оно равно проекции тропического пересечения двойственных комплексов выпуклых оболочек множеств $H_0, \ldots, H_k$). Таким образом, случай $\min\dim A < -1$ не представляет интереса в рамках нашего изучения бифуркационных множеств, и в дальнейшем мы всюду предполагаем значимость набора A.

4.3.7. Общий случай для значимых A

Выберем гладкую торическую компактификацию T тора $(\mathbb{C}\backslash 0)^n$, веер Γ которой совместим с выпуклыми оболочками множеств $A_0, \ldots, A_k$. Тогда каждое

f_i задает сечение $\tilde{f}_i$ A_i-линейного расслоения на $T \times (\mathbb{C} \setminus 0)^m$ (см. раздел 2.1.2). Обозначим орбиты коразмерности 1 многообразия T через T_j, $j = 1, 2, \ldots$, и рассмотрим дискриминант Бертини $\bar{B}_{\bar{\pi}}$ (см. определение 4.3.14) проекции $\bar{\pi}$ множества $\bar{Q} = \{\tilde{f}_0 = \ldots \tilde{f}_k = 0\}$ на $(\mathbb{C} \setminus 0)^m$, снабженно дивизорами $D_j = (T_j \times (\mathbb{C} \setminus 0)^m) \cap \bar{Q}$.

Теорема **4.3.20.** *1) Если* $\min \dim A \geqslant -1$ *и система* f 0*-невырождена, то дискриминант Бертини* $\bar{B}_{\bar{\pi}}$ *является гиперповерхностью.*
2) Если, более того, набор A *является значимым, а система* f 1*-невырождена, то* $E_\pi = F \circ E_A$ *и* $|E_\pi| = B_\pi = \bar{B}_{\bar{\pi}}$ *(в частности, данные множества являются гиперповерхностями), и многогранник Ньютона* E_π *равен*

$$\sum_{a_0+\ldots+a_k=n+1} \mathrm{MP}(\underbrace{H_0, \ldots, H_0}_{a_0}, \ldots, \underbrace{H_k, \ldots, H_k}_{a_k}).$$

Заметим, что в работе [159] приведены примеры вычисления эйлеровой характеристики бифуркационного множества B_π в некоторых простых случаях.

Лемма **4.3.21.** *Если система* f c*-невырождена, то* $\bar{\pi}$ *является* c*-гладким (см. определение 4.3.14).*

Доказательство. Нам нужно доказать, что $\operatorname{codim} \bar{\pi}(\bigcup_I \operatorname{sing} Q_I) > c$. Для любого I множество Q_I имеет вид $\{f^u = 0\}$, где $u : \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}$ — некоторая линейная функция, обращающаяся в 0 на $\{0\} \times \mathbb{Z}^m$. Применив лемму 4.3.19 к $\Sigma = \operatorname{sing} Q_I$, получим $\operatorname{codim} \pi \operatorname{sing} Q_I \geqslant c$, иначе тропический веер множества Q_I содержит c-мерную линейную функцию v, следовательно, множество $\{f^v = 0\}$ не является гладким, что противоречит c-невырожденности f. □

Доказательство теоремы 4.3.20. Применяя теорему 4.3.15.2 к описанным здесь π и F и к проекции p, описанной в разделе 4.3.5, получим $\bar{B}_{\bar{\pi}} = F^{-1}(\bar{B}_{\bar{p}})$. По теореме 4.2.3, $\bar{B}_{\bar{p}}$ является гиперповерхностью. Таким образом, $\bar{B}_{\bar{\pi}}$ имеет коразмерность 1 или 0, и остается исключить случай нулевой коразмерности. По определению, множество $\bar{B}_{\bar{\pi}}$ равно объединению проекций множеств

$$\Sigma_v = \operatorname{sing}\{f^v = 0\} \cup \left\{ \text{ критические точки проекции } \{f^v = 0\} \text{ на } (\mathbb{C} \setminus 0)^m \right\}$$

по всем линейным функциям $v : \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}$, которые обращаются в 0 на $\{0\} \times \mathbb{Z}^m$. Применив лемму 4.3.19 к $\Sigma = \Sigma_v$, получим $\operatorname{codim} \pi\Sigma_v > 0$ для любого v, иначе тропический веер множества Σ_v содержит 0-мерную линейную функцию u, следовательно, множество Σ_u непусто, т.е. проекция $\{f^u = 0\}$ на $(\mathbb{C} \setminus 0)^m$ является локально тривиальным расслоением гладких многообразий. Данная проекция является локально тривиальным расслоением, потому что $\dim u = 0$, следовательно, множество $\{f^u = 0\}$ не является гладким для некоторого 0-мерного u, что противоречит 0-гладкости.

Если, более того, $\bar{\pi}$ является 1-гладким, по лемме 4.3.21, мы можем применить теорему 4.3.15.2 и 3 к описанным здесь π и F и к проекции p, описанной в разделе 4.3.5. Получим: $E_\pi = F \circ E_A$ и $\bar{B}_{\bar{\pi}} = F^{-1}\bar{B}_{\bar{p}}$. Так как $\bar{B}_{\bar{p}} = |E_A|$, по теореме 4.3.17, доказываемое равенство следует из теоремы 4.3.15.1.

Многогранник Ньютона. Выберем конечные подмножества $B_1, \dots,$ $B_{m-1} \subset \mathbb{Z}^m$ и многочлены общего положения $g_i \in \mathbb{C}^{B_i}$. Вычислим эйлерову характеристику множества $f_0 = \ldots = f_k = g_1 = \ldots = g_{m-1} = 0$ следующими двумя способами.

I. Вычислим искомую эйлерову характеристику послойно, для каждого слоя проекции $\{f_0 = \ldots = f_k = g_1 = \ldots = g_{m-1} = 0\} \to \{g_1 = \ldots = g_{m-1} = 0\}$. Тогда, по определению дискриминанта Эйлера, полученному на шаге II доказательства теоремы 4.3.12, эйлерова характеристика равна

$$e\{g_1 = \ldots = g_{m-1} = 0\} \cdot e\{ \text{ общий слой } \pi\} + \{g_1 = \ldots = g_{m-1} = 0\} \circ E_\pi$$

(напомним, что $\circ$ обозначает индекс пересечения с учетом кратностей в $(\mathbb{C}\setminus 0)^m$). Обозначим многогранник Ньютона E_π через X. Вычисляя обе эйлеровы характеристики по формуле Кушниренко-Бернштейна-Хованского, а индекс пересечения — по формуле Кушниренко-Бернштейна, получим (с точностью до знака

$(-1)^{n-k}$)

$$\mathrm{MV}(B_1,\dots,B_{m-1},B_1+\dots+B_{m-1})\cdot\sum_{a_0+\dots+a_k=n}\mathrm{MV}(\underbrace{A_0,\dots,A_0}_{a_0},\dots,\underbrace{A_k,\dots,A_k}_{a_k})+$$

$$+\mathrm{MV}(X,B_1,\dots,B_{m-1}).$$

Здесь мы допускаем небольшую вольность в обозначениях, записывая смешанный объем выпуклых оболочек конечных множеств как смешанный объем самих конечных множеств.

II. Применив формулу Кушниренко-Бернштейна-Хованского к системе $f_0=\dots=f_k=g_1=\dots=g_{m-1}=0$ и сократив все слагаемые, равные 0, по лемме 3.1.3, получим (с точностью до знака $(-1)^{n-k}$):

$$\sum_{a_0+\dots+a_k=n}\mathrm{MV}(B_1,\dots,B_{m-1},B_1+\dots+B_{m-1},\underbrace{H_0,\dots,H_0}_{a_0},\dots,\underbrace{H_k,\dots,H_k}_{a_k})+$$

$$+\sum_{a_0+\dots+a_k=n+1}\mathrm{MV}(B_1,\dots,B_{m-1},\underbrace{H_0,\dots,H_0}_{a_0},\dots,\underbrace{H_k,\dots,H_k}_{a_k}).$$

Первое слагаемое равно

$$\mathrm{MV}(B_1,\dots,B_{m-1},B_1+\dots+B_{m-1})\cdot\sum_{a_0+\dots+a_k=n}\mathrm{MV}(\underbrace{A_0,\dots,A_0}_{a_0},\dots,\underbrace{A_k,\dots,A_k}_{a_k}),$$

по лемме 3.1.8. Сравнивая (I) и (II), получаем:

$$\mathrm{MV}(X,B_1,\dots,B_{m-1})=\sum_{a_0+\dots+a_k=n+1}\mathrm{MV}(B_1,\dots,B_{m-1},\underbrace{H_0,\dots,H_0}_{a_0},\dots,\underbrace{H_k,\dots,H_k}_{a_k}).$$

По теореме 2.2.36, искомая сумма смешанных расслоенных многогранников удовлетворяет данному уравнению для всех $B_1,\dots,B_{m-1}$ и однозначно им задается. $\square$

Утверждение **4.3.22.** *Предположим, что* $\min\dim A=-c$ *и система* f *c-невырождена.*

1) Предположим, к тому же, что $c>0$. *Бифуркационное множество* B_π *пусто, если для некоторого непустого существенного поднабора* $A_{i_1},\dots,A_{i_p}$

of A (см. определение 3.1.9), проекция $H_{i_1}+\ldots+H_{i_p}\to\mathbb{R}^n$ инъективна. Иначе бифуркационное множество непусто и имеет чистую коразмерность c.
2) Пусть $c=0$ (т.е. A линейно независим). Бифуркационное множество пусто, если проекция $H_0+\ldots+H_k\to\mathbb{R}^n$ инъективна, и является непустой гиперповерхностью иначе.

Заметим, что из условия пустоты бифуркационного множества $\{f=0\}\to(\mathbb{C}\setminus 0)^m$ в случае $c>0$ следует, что само множество $\{f=0\}$ пусто.

Доказательство. Коразмерность вычислена в утверждении 4.3.18.2 и теореме 4.3.20.2 для $c>0$ и $c=0$ соответственно. Чтобы проверить пустоту при $c\leqslant 1$, применим критерий тривиальности смешанного расслоенного многогранника (см. теорему 3.1.12) к многограннику Ньютона дискриминанта, вычисленному в теореме 4.3.20.2. Чтобы свести случай $c>1$ к случаю $c=1$, возьмем стандатный симплекс $C\subset\mathbb{Z}^{c-1}$ и рассмотрим $A'_i=C\times A_i$, $H'_i=C\times H_i\in\mathbb{Z}^{c-1}\oplus\mathbb{Z}^n\oplus\mathbb{Z}^m$ и $f'_i\in\mathbb{C}^{H'_i}$ общего положения. Тогда $\min\dim A'=-1$, и доказываемое утверждение о пустоте для f следует из аналогичного утверждения для f'. $\square$

4.4. Многомерная теорема Абеля о неразрешимости

Классическая теорема Абеля — Руффини утверждает, что общее уравнение степени d с одной переменной разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда число его решений строго меньше пяти, что, по основной теореме алгебры, эквивалентно $d<5$. Для многочлена многих переменных естественным обобщением понятия степени является его многогранник Ньютона. Обобщением основной теоремы алгебры является теорема Кушниренко-Бернштейна: общая квадратная система полиномиальных уравнений, многогранники Ньютона которых совпадают и равны A, имеет $\operatorname{Vol}A$ решений, где Vol — целочисленный объем, нормированный по объему стандартного симплекса.

Мы опишем все целочисленные многогранники A такие, что общая квад-

ратная система уравнений с многогранником Ньютона A разрешима в радикалах. Ответ состоит из всех многогранников, целочисленный объем которых строго меньше 5 (см. теорему 4.4.4). В частности мы классифицируем все целочисленные многогранники, объем которых не превышает 4 (см. главу 4.4.2).

Классификация разрешимых систем, многогранники Ньютона уравнений которых не предполагаются равными, устроена сложнее: существуют разрешимые общие системы уравнений, имеющие больше 4 решений. В данной общности мы предлагаем лишь гипотетический ответ (см. гипотезу 4.4.7) и доказываем эту гипотезу только в нескольких частных случаях (см. теоремы 4.4.10, 4.4.14, и 4.4.15).

Наши результаты основаны на вычислении группы монодромии квадратной системы уравнений, или, более общо, ζ-функции монодромии произвольной системы (см. главы 4.4.3 и 4.4.4). После этого мы устанавливаем связь между разрешимостью системы и группы ее монодромии посредством топологической теории Галуа. Для многочлена $f \in \mathbb{C}[x]$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, группа монодромии обычно интерпретируется как группа Галуа многочлена $f(x) - t \in \mathbb{C}(t)[x]$ (см.например [89]), так что одномерная версия нашего подхода укладывается в рамки классической теории Галуа над функциональными полями. Но для систем более чем двух уравнений мы не можем указать естественной алгебраической интерпретации для нашего топологического подхода.

4.4.1. Теорема Абеля — Руффини для многочленов многих переменных

Напомним обозначения, которые будут использоваться в этом разделе. Пусть $\mathbf{A}$ — набор конечных множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \mathbb{Z}^n$. Для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$ обозначим набор комплексных чисел $(c_{j,a},\ a \in A_j)$ через c_{A_j}, а пространство всех таких наборов — через $\mathbb{C}^{A_j}$. В данной работе мы рассматриваем пространство $\mathbb{C}^{\mathbf{A}} := \mathbb{C}^{A_1} \oplus \mathbb{C}^{A_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_n}$ наборов $c_{\mathbf{A}} = (c_{A_1}, c_{A_2}, \ldots, c_{A_n})$, которое является конфигурационным пространством систем многочленов (Лорана)

$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n),\ f_j(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in A_j} c_{j,a}\mathbf{x}^{\mathbf{k}}$.

Определение **4.4.1.** 1. *Решением общей системы уравнений с носителями* $A_1, A_2 \ldots, A_n$, называется (многозначная) функция $F : \mathbb{C}^{\mathbf{A}} \to (\mathbb{C} \setminus 0)^n$, которая на каждом наборе $c_{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^{\mathbf{A}}$ равна множеству решений системы полиномиальных уравнений

$$\sum\nolimits_{\mathbf{k}\in A_j} c_{j,a}\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (*)$$

где $\mathbf{x}^{\mathbf{k}}$ обозначает моном $x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$.

2. Общая система *разрешима в радикалах*, если для каждой точки $c_{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^{\mathbf{A}}$ такой, что множество $F(c_{\mathbf{A}})$ конечно, существуют открытая по Зарискому окрестность U и многозначная функция $G\colon U \to (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ на ней такие, что $F(c) \subset G(c)$ для всех $c \in U$ и G является композицией рациональных функций и извлечений корня произвольной степени. Система *разрешима в квадратурах*, если функция G является композицией рациональных функций, экспонент, извлечений корня произвольной степени и взятия неопределенных интегралов.

Замечание **4.4.2.** Функция G, вообще говоря, определена не на всем пространстве $\mathbb{C}^{\mathbf{A}} = \mathbb{C}^{A_1} \oplus \mathbb{C}^{A_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_n}$: при $n = 1$ и $A_1 = \{0, 1, 2\}$ стандартное выражение $\frac{-c_1 \pm \sqrt{D}}{2c_2}$ для корней уравнения $c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0$ определено вне плоскости $\{c_2 = 0\} \subset \mathbb{C}^{\mathbf{A}}$, существует также другое выражение для корней, определенное на данной плоскости вне $\{c_0 = 0\}$, а именно, $\frac{2c_0}{-c_1 \pm \sqrt{D}}$. Мы также не можем ожидать, что $F(c) = G(c)$: формула Кардано корней общего кубического уравнения дает шесть значений, лишь три из которых являются корнями.

Замечание **4.4.3.** Разрешимость удовлетворяет следующему свойству монотонности: если общая система уравнений с носителями $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \mathbb{Z}^n$ разрешима в радикалах или квадратурах, то таковой являетя и общая система с произвольными носителями $B_1 \subset A_1$, $B_2 \subset A_2$, $\ldots$, $B_n \subset A_n$.

Набор $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \mathbb{Z}^n$ называется *неприводимым*, если $0 \in \bigcap_j A_j$, и $\bigcup_j A_j$ порождает $\mathbb{Z}^n$. В дальнейшем мы будем рассматривать только неприводимые наборы, так как общая система уравнений $\{f_1(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) = \ldots = f_n(\mathbf{x}) = 0\}$ с произвольными носителями $A_1, A_2, \ldots, A_n$ эквивалентна некоторой системе с неприводимым набором носителей. Действительно, пусть $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ — набор множеств, содержащих 0, полученный параллельными сдвигами множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Предположим, что они порождают подрешетку $L \subset \mathbb{Z}^n$. Если $\operatorname{rk} L < n$, тогда система $\{f_j(\mathbf{x}) = 0\}$ несовместна. Иначе L является образом вложения $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ заданного матрицей (φ_{ik}), и система $\{f_j(\mathbf{x}) = 0\}$ эквивалентна общей системе $\{g_j(\mathbf{y}) = 0\}$ с носителями в $\varphi^{-1}(A'_1), \ldots, \varphi^{-1}(A'_n)$ от переменных $y_i = \prod_k x_k^{\varphi_{ki}}$.

Уравнения с одинаковыми носителями

Теорема **4.4.4.** *Общая система уравнений с неприводимым набором носителей $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A \subset \mathbb{Z}^n$ разрешима в радикалах ($\Leftrightarrow$ в квадратурах) тогда и только тогда, когда она имеет не более 4 решений, т.е. объем выпуклой оболочки $\operatorname{conv} A$ многогранника A не превышает 4. Каждое множество A, удовлетворяющее данному условию, содержится либо в одном из следующих 34 множеств, либо во множестве, полученном из одного из них последовательным применением следующих двух процедур: (1) взятие стандартного конуса $B \rightsquigarrow \{0, \ldots, 0, 1\} \cup B \times \{0\} \subset \mathbb{Z}^{m+1}$ над множеством $B \in \mathbb{Z}^m$, (2) взятие образа множества при аффинном автоморфизме решетки.*

- $n = 6, \quad \operatorname{Vol}(\operatorname{conv} A) = 4$: *контур $S_6 \cup \{(-1, -1, -1, 1, 1, 1)\}$, где S_n — множество вершин стандартного n-мерного симплекса.*

- $n = 5, \quad \operatorname{Vol}(\operatorname{conv} A) = 4$: *контур $S_5 \cup \{(-2, -1, 1, 1, 1)\}$ и джоин $(S_1 \times S_1) \star (S_1 \times S_1)$, где $A \star B$ для $A \subset \mathbb{Z}^m$ и $B \subset \mathbb{Z}^n$ обозначает объединение $A \times \{0\} \times \{0\} \cup \{0\} \times B \times \{1\} \subset \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}$.*

- $n = 4,\ \operatorname{Vol}(\operatorname{conv} A) = 4$:
  - *контуры* $S_4 \cup \{(-2,-1,1,1)\},\ \ S_4 \cup \{(-1,-1,-1,1)\},$ $S_4 \cup \{(-1,-1,-1,2)\}$,
  - *призма* $S_1 \times S_3$,
  - *джоин* $(2S_1) \star (S_1 \times S_1)$,
  - *сумма* $(S_1 \times S_1) \oplus (S_1 \times S_1)$, *где* $A \oplus B$ *для* $A \subset \mathbb{Z}^m$ *и* $B \subset \mathbb{Z}^n$ *обозначает объединение* $A \times \{0\} \cup \{0\} \times B \subset \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n$.
- $n = 4,\ \operatorname{Vol}(\operatorname{conv} A) = 3$: *контур* $S_4 \cup \{(-1,-1,1,1)\}$.
- $n = 3,\ \operatorname{Vol}(\operatorname{conv} A) = 4$ *и* 3*: контуры* $S_3 \cup \{(-1,-1,-1)\}$, $S_3 \cup \{(1,1,-3)\}$, $S_3 \cup \{(1,1,-2)\}$, *призма* $P = S_2 \times S_1$ *и множества* $P \cup \{(0,0,2)\}$, $\{-1,0,1\} \star \{-1,0,1\}$, $D \cup \{(0,0,-1)\}$, $D \cup \{(0,0,2)\}$, $D \cup \{(1,1,1)\}$ *и* $D \cup \{(1,1,-1)\}$, *где* D *— квадратная пирамида* $S_3 \cup \{(1,1,0)\}$.
- $n = 2,\ \operatorname{Vol}(\operatorname{conv} A) \leqslant 4$*:*

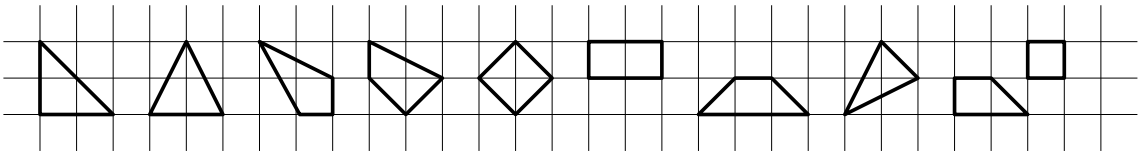


Рисунок 9: целочисленные многоугольники объема 4.

- $n = 1,\ \operatorname{Vol}(\operatorname{conv} A) \leqslant 4 : S_1,\ 2S_1,\ 3S_1,\ 4S_1$.

Утверждение “только тогда” в этой теореме сводится к нижеследующей теореме 4.4.14 при помощи примера 4.4.12 и свойства монотонности разрешимости. Связь между числом решений и объемом следует из формулы Кушниренко-Бернштейна. Классификация целочисленных многогранников объема 4 доказана в разделе 4.4.2. Утверждение “тогда” в теореме следует из того, что каждая из вышеперечисленных 34 систем разрешима (мы опустим 34 очевидные явные формулы, решшающие эти системы).

Замечание **4.4.5.** Приведенный выше список включает лишь неприводимые подмножества решетки, объем выпуклой оболочки которых не превышает 4. Чтобы перечислить все целочисленные многогранники, объем которых не превышает 4 (с точностью до аффинных автоморфизмов решетки и надстройки стандартных конусов) следует добавить к перечисленным все пустые симплексы объема не больше 4 и все пирамиды $D_n \oplus (S_1 \times S_1)$, $D_n \star (S_1 \times S_1)$, $D_n \oplus (2S_1)$, $D_n \star (2S_1)$, где при $n \geqslant 3$ D_n — (единственный) n-мерный пустой симплекс объема 2, не являющийся стандартным конусом над другим симплексом объема 2. Напомним, что пустым называется симплекс, все целочисленные точки которого являются его вершинами. Классификация пустых симплексов малого объема – интересная задача, лежащая вне рамок тематики данной работы; подходы к классификации многомерных пустых симплексов описаны, например, в [69].

Уравнения с произвольными носителями

В данном разделе мы попытаемся избавиться от предположения $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$. Рассмотрим неприводимый набор

$$A_1 = \{0, 1, 2, 3, 4\} \times \{0\},\ A_2 = \{0\} \times \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Тогда общая система уравнений соответствующего вида имеет 16 решений, но, тем не менее, разрешима в радикалах. Дело в том, что данный набор не является приведенным в следующем смысле.

Определение **4.4.6.** Неприводимый набор $A_1, A_2 \ldots, A_n \subset \mathbb{Z}^n$ называется *приведенным*, если размерность выпуклой оболочки объединения $\cup_{j \in I} A_j$ больше $|I|$ для любого $I \subsetneq \{1, 2, \ldots, n\}$.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением приведенных наборов, так как вопрос о разрешимости общей системы с не приведенным набором носителей следующим образом сводится к аналогичному вопросу для систем с меньшим числом переменных. Для неприводимого набора множеств $A_1, A_2 \ldots, A_n \subset$

$\mathbb{Z}^n$, который не является приведенным, подходящий автоморфизм решетки $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ отображает A_j в A'_j таким образом, что $A'_1, A'_2, \ldots, A'_k$ содержатся в первой координатной плоскости $\mathbb{Z}^k \times \{0, \ldots, 0\} \subset \mathbb{Z}^n$, $k < n$. Соответствующая замена переменных $y_i = \prod_m x_m^{\varphi_{mi}}$, где (φ_{im}) — матрица φ, переводит общую систему $f_j(\mathbf{x}) = 0$ с носителями в $\mathbf{A}$ в общую систему $g_j(\mathbf{y}) = 0$ с носителями $\mathbf{A}' := (A'_1, A'_2, \ldots, A'_k)$, и последняя решается в два шага: сначала решим систему $g_1(y_1, y_2, \ldots, y_k) = g_2(y_1, y_2, \ldots, y_k) = \ldots = g_k(y_1, y_2 \ldots, y_k) = 0$, затем для каждого решения $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_k^0)$ решим систему $g_j(y_1^0, \ldots, y_k^0, y_{k+1}, \ldots, y_n) = 0$, $j = k+1, k+2, \ldots, n$. Первая система является общей системой с носителями $A'_1, A'_2, \ldots, A'_k \subset \mathbb{Z}^k$, а вторая эквивалентна общей системе с носителями в образах множеств $A'_{k+1}, A'_{k+2}, \ldots, A'_n$ при проекции $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^k \times \{0, 0, \ldots, 0\}$.

Гипотеза **4.4.7.** *Общая система полиномиальных уравнений с носителями в приведенном наборе $A_1, A_2, \ldots, A_n$ разрешима в радикалах ($\Leftrightarrow$ в квадратурах) тогда и только тогда, когда она имеет не более 4 решений.*

Замечание **4.4.8.** Напомним формулу Кушниренко – Бернштейна (см. [158]): число решений общей системы уравнений с носителями в наборе $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равно *смешанному объему* выпуклых оболочек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, коотрый определяется как единственная симметричная функция от n многогранников в $\mathbb{R}^n$, мультилинейная относительно сложения по Минковскому $A + B = \{a + b \,|\, a \in A,\, b \in B\}$ и равная $\mathrm{Vol}(A)$ для каждого набора вида $(A, A, \ldots, A)$. Таким образом, гипотеза 4.4.7 поднимает вопрос классификации приведенных наборов многогранников смешанного объема 4. Приведенные наборы смешанного объема 1 классифицированы в работе [48]. Приведенные наборы объема $\leqslant 4$ в $\mathbb{R}^2$ и объема $\leqslant 2$ в $\mathbb{R}^3$ классифицированы ниже.

Замечание **4.4.9.** Разрешимость общей системы уравнений, имеющей не более 4 решений, следует из общих соображений теории исключения: пусть $\{f_j(\mathbf{x}) = 0\}$ — общая система уравнений с носителями в $\mathbf{A}$, рассмотрим f_j как многочлен Лорана F_j от переменных $x_2, x_3, \ldots, x_n$ с коэффициентами в

$\mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}]$, тогда смешанный результант многочленов $F_2, F_3, \ldots, F_n$ равен $R \in \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}]$. Корни R совпадают с первыми координатами корней системы $\{f_j(\mathbf{x}) = 0\}$; если их не более 4, то уравнение $R = 0$ можно решить с помощью формулы Феррари. В работе [48] описан более явный алгоритм, позволяющий за полиномиальное время найти решение общей системы уравнений при условии, что оно единственно.

Теорема **4.4.10.** *Гипотеза 4.4.7 верна в случае $n = 2$. Более того, общая система двух полиномиальных уравнений с приведенной парой носителей $A, B \subset \mathbb{Z}^2$ имеет менее 5 решений тогда и только тогда, когда существуют $G \in SL(\mathbb{Z}^2)$ и a и $b \in \mathbb{Z}^2$ такие, что множества $GA+a$ и $GB+b$ содержатся в одной из 14 следующих пар многоугольников:*

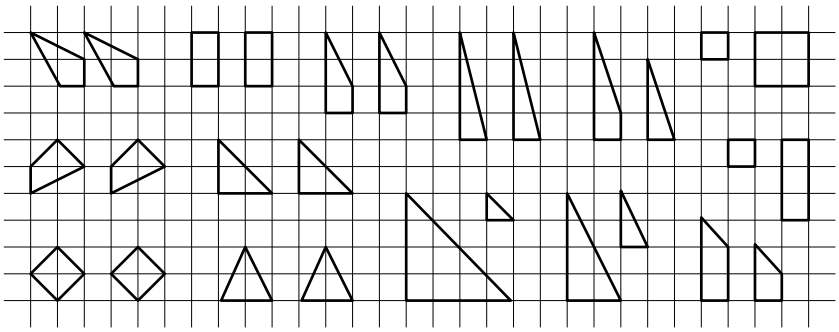


Рисунок 10: максимальные пары многоугольников смешанного объема 4.

Утверждение “только тогда” в этой теореме сводится к теореме 4.4.14 при помощи примера 4.4.13, классификация доказана в главе 4.4.2, а утверждение “тогда” следует из того очевидного наблюдения, что все 14 перечисленных систем явно решаются.

Мы не умеем доказывать гипотезу 1 в полной общности при $n > 2$, и не умеем классифицировать наборы целочисленных многогранников смешанного объема 4 в $\mathbb{Z}^n$, $n > 2$. Оставшаяся часть данной главы посвящена решению данных задач в определенных частных случаях.

Определение **4.4.11.** Точка $a \in A_1$ называется *удачной* точкой набора $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \mathbb{Z}^n$, если каждый набор граней Γ_j выпуклых оболочек мно-

жеств A_j такой, что $a \in \Gamma_1$, $\dim \Gamma_1 > 0$, и $\Gamma = \sum_j \Gamma_j$ является гранью выпуклой оболочки $\sum_j A_j$, удовлетворяет следующим двум условиям:

1. если существует такое подмножество $I \subsetneq \{1, 2, \ldots, n\}$, что $\dim \sum_{j \in I} \Gamma_j < |I|$, то I можно выбрать так, чтобы $1 \notin I$.

2. если не существует такого I, то целочисленное расстояние от аффинной гиперплоскости L, содержащей Γ, до множества $\left(\sum_j A_j\right) \setminus L$ меньше, чем половина смешанного объема выпуклых оболочек $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Пример **4.4.12.** Если объем выпуклой оболочки неприводимого множества $A \subset \mathbb{Z}^n$ больше 2, то каждая точка $a \in A$ является удачной точкой набора $(A, A \setminus \{a\}, \ldots, A \setminus \{a\})$. Более того, смешанный объем выпуклых оболочек множеств этого набора равен объему выпуклой оболочки множества A.

Доказательство. Равенство объемов сразу же следует из формулы Кушниренко—Бернштейна. Для любого набора $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n$ из определения удачной точки, верно $\Gamma_2 = \Gamma_3 = \ldots = \Gamma_n$ и $\Gamma_1 = \operatorname{conv}(\Gamma_2 \cup \{a\})$. Следовательно, условие 1 выполнено всегда: для подмножества $I \subsetneq \{1, 2, \ldots, n\}$ такого, что $\dim \sum_{j \in I} \Gamma_j < |I|$, это неравенство остается верным и при замене I на $I' = I \setminus \{1\} \neq \emptyset$. Проверим условие 2 в случае, когда $\Gamma_1 = F \ni a$ является гранью коразмерности 1 многогранника $\operatorname{conv} A$: если Γ_2 также является гранью коразмерности 1, то целочисленное расстояние d между $A \setminus F$ и гиперплоскостью, содержащей F, меньше $\frac{1}{2} \operatorname{Vol} \operatorname{conv} A$. Заметим, что $d \operatorname{Vol} F \leqslant \operatorname{Vol} \operatorname{conv} A$.

- Предположим, что $\operatorname{Vol} F = 1$. Тогда a — вершина, и $\dim \sum_{j \in I} \Gamma_j = \dim \Gamma_2 = n - 2 < |I|$ для $I = \{2, 3, \ldots, n\}$.

- Пусть $\operatorname{Vol} F = 2$, и выполнено равенство $d \operatorname{Vol} F = \operatorname{Vol} \operatorname{conv} A$. Данный случай невозможен: из последнего равенства следует, что $A \setminus F$ состоит из одной точки, находящейся на расстоянии d от аффинной оболочки F. Так как $\operatorname{Vol} A > 2$, имеем $d > 1$, следовательно, множество A приводимо.

- Допустим, что $\operatorname{Vol} F > 2$ либо $\operatorname{Vol} F = 2$, и верно строгое неравенство $d \operatorname{Vol} F < \operatorname{Vol} \operatorname{conv} A$. В таком случае $d < 1/2 \operatorname{Vol} \operatorname{conv} A$. $\square$

Пример **4.4.13.** Для любой приведенной пары $A, B \subset \mathbb{Z}^2$ и любой точки $a \in A$, существует такое подмножество $\tilde{B} \subset B$, что a является удачной точкой пары $(A, \tilde{B})$, и смешанный объем выпуклых оболочек A и $\tilde{B}$ совпадает со смешанным объемом выпуклых оболочек A и B.

Доказательство элементарно и следует из тех же рассуждений, что и в предыдущем примере.

Теорема **4.4.14.** *Гипотеза 1 верна для любого набора, имеющего удачную точку. Более того, предположим без ограничения общности, что точка* $0 \in A_1$ *является удачной. Тогда решение системы*

$$\sum_{a \in A_1} c_{1,a} x^a = c, \sum_{a \in A_2} c_{2,a} x^a = \ldots = \sum_{a \in A_n} c_{n,a} x^a = 0 \tag{1}$$

с коэффициентами в общем положении $c_{j,a} \in \mathbb{C}$ *не выражается в квадратурах через* c *в правой части.*

В предыдущем предложении слово “решение” означет многозначную функцию $F_{c_{\mathbf{A}}} \colon \mathbb{C} \to (\mathbb{C} \setminus 0)^n$, значением которой в каждой точке $c \in \mathbb{C}$ является множество решений системы (1). Можно также доказать следующее родственное утверждение:

Теорема **4.4.15.** *Гипотеза 1 верна для набора* $A_1, A_2 \ldots, A_n$, *если в* A_1 *найдется пара точек таких, что отрезок, соединяющий данные точки, не лежит на границе выпуклой оболочки множества* A_1.

Замечание **4.4.16.** Уже в размерности 3 теоремы 4.4.14 и 4.4.15 не достаточны для доказательства гипотезы 1, т.к. не любая приведенная тройка подмножеств $\mathbb{Z}^3$, смешанный объем которой больше либо равен 5, имеет удачную вершину или целочисленный внутренний отрезок.

4.4.2. Классификация маленьких целочисленных многогранников

Доказательство классификации, фигурирующей в утверждении теоремы 4.4.4, основано на понятии контура.

Определение **4.4.17.** Множество $A \subset \mathbb{Z}^n$ называется *аффинно зависимым*, если существуют коэффициенты $c_a \in \mathbb{R}$ такие, что $\sum_{a\in A} c_a = 1$ и $\sum_{a\in A} c_a a = 0$. *Контуром* называется минимальное (по включению) аффинно зависимое множество.

Любой контур A единственным образом представим в виде дизъюнктного объединения $A = A_+ \sqcup A_-$ множеств A_+ и A_- вершин двух симплексов с общей внутренней точкой (данное разложение индуцировано знаками коэффициентов c_a в единственном аффинном соотношении между точками A).

Целочисленный объем выпуклой оболочки $\operatorname{conv} A$ равен произведению целочисленных объемов $\operatorname{conv} A_+$ и проекции $\operatorname{conv} A_-$ вдоль аффинной оболочки множества A_+. Так как последняя имеет внутреннюю целую точку, ее объем равен по крайней мере $|A_-|$. В частности, из $\operatorname{Vol}\operatorname{conv} A \leqslant 4$ следует $|A_\pm| \leqslant 4$, таким образом, размерность аффинной оболочки множества A, равная $|A| - 2$, не превышает 6. Данное наблюдение приводит к следующей классификации:

Лемма **4.4.18.** *Каждый контур A такой, что $\operatorname{Vol}\operatorname{conv} A \leqslant 4$, совпадает (с точностью до аффинного автоморфизма решетки) с одним из контуров, перечисленных в теореме 4.4.4, либо $\{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$, либо $\{0, 2, 4\}$.*

Рассмотрим теперь произвольное неприводимое множество $A \subset \mathbb{Z}^n$ такое, что $\operatorname{Vol}\operatorname{conv} A \leqslant 4$. Среди всех контуров максимального объема, содержащихся в A, выберем контур $B \subset A$ максимальной мощности. Данный контур нетривиален, если A не является множеством вершин симплекса, и мы можем предположить без ограничения общности, что $0 \in B$. Классифицируем все возможные множества A с данным контуром B, где B пробегает множество всех контуров, перечисленных в лемме 4.4.18.

Если $\operatorname{Vol}\operatorname{conv} B = 4$, то A, очевидно, является многократным стандартным конусом над B (с точностью до аффинного автоморфизма $\mathbb{Z}^n$).

Если $\operatorname{Vol}\operatorname{conv} B = 3$, рассмотрим образ A' множества A при проекции вдоль линейной оболочки контура B. Нам понадобится следующее наблюдение:

Лемма **4.4.19.** *Для любого неприводимого множества $M \subset \mathbb{Z}^m$ такого, что $0 \in M$, имеет место ровно один из следующих случаев:*

1) Существуют не имеющие общих внутренних точек симплексы суммарного объема 3 с общей вершиной в нуле, все вершины которых содержатся в M.

2) $\operatorname{conv} M$ является многократным стандартным конусм над отрезком целочисленной длины 2 либо над параллелограммом целочисленной площади 2. В этом случае существуют не имеющие общих внутренних точек симплексы суммарного объема 2 с общей вершиной в нуле, все вершины которых содержатся в M.

3) M — множество вершин единичного симплекса.

Применив данное наблюдение к $M = A'$, мы получим, что только третий случай может иметь место, иначе объем $\operatorname{conv} A$ был бы равен по крайней мере $3 \cdot 2 = 6$. Так как A' является множеством вершин единичного симплекса, и $\operatorname{Vol}\operatorname{conv} A' = 3 < \operatorname{Vol}\operatorname{conv} A = 4$, хотя бы одна из точек в $A' \setminus \{0\}$ является образом по крайней мере двух точек множества A, разность b которых содержится в линейной оболочке контура B. Таким образом, A содержит многократный стандартный конус над множеством $B' = B \times \{0\} \cup \{0, b\} \times \{1\}$. Из неравенства $\operatorname{Vol}\operatorname{conv} B' \geqslant 4$ следует, что A является многократным стандартным конусом над B', и $\operatorname{Vol}\operatorname{conv} B' = 4$. Для каждого B из леммы 4.4.18, перечисление всех подходящих b таких, что $\operatorname{Vol}\operatorname{conv} B' = 4$, является задачей элементарной геометрии.

Наконец, в случае $\operatorname{Vol}\operatorname{conv} B = 2$, рассмотрим также образ A' множества A при проекции вдоль линейной оболочки контура B. Если A' является множе-

ством вершин единичного симплекса, то, аналогично случаю $\operatorname{Vol}\operatorname{conv} B = 3$, не более двух точек в $A' \setminus \{0\}$ являются образами более одной точки множества A, и A является многократным стандартным конусом над $B' = B \times \{(0,0)\} \cup B_1 \times \{(0,1)\} \cup B_2 \times \{(1,0)\}$, где контур B равен $\{0,1,2\}$ либо $\{0,1\} \times \{0,1\}$, и множества $B_1, B_2 \subset \mathbb{Z}^2$ нетрудно классифицировать в случае $\operatorname{Vol}\operatorname{conv} B' \leqslant 4$. Если же A' не совпадает с множеством вершин единичного симплекса, то, по лемме 4.4.19, получим $\operatorname{Vol}\operatorname{conv} A' = 2$, и каждая точка множества $A' \setminus \{0\}$ является образом единственной точки множества A, следовательно, A однозначно задается множествами B и A'. □

Доказательство классификации, приведенное в теореме 4.4.10 основано на следующей хорошо известной формуле смешанной площади многоугольников:

Лемма **4.4.20.** *Рассмотрим $L_i(x,y) < c_i$, минимальное множество неравенств, задающее целочисленный многоугольник A, где $L_i : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ — сюръективные линейные функции. Обозначим целочисленную длину ребра многоугольника A, лежащего на прямой $L_i(x,y) = c_i$, через a_i, а максимальное значение функции L_i на многоугольнике B — через b_i, тогда смешанный объем A и B равен $\sum_i a_i b_i$.*

Предположим, что $\operatorname{Vol}(A) \leqslant \operatorname{Vol}(B)$, тогда, по неравенству Александрова—Фенхеля $\operatorname{MV}(A,B)^2 \geq \operatorname{Vol}(A)\operatorname{Vol}(B)$, получим $\operatorname{Vol}(A) \leqslant 4$. Классификация всех многоугольников A площади ≤ 4 приведена выше. Пусть A совпадает с одним из таких многоугольников. Определим функции L_i и числа a_i как в предыдущей лемме. Тогда существует конечное число наборов неотрицательных целых чисел (b_i) таких, что $\sum_i a_i b_i \leqslant 4$. С точностью до параллельного сдвига, каждый многоугольник B такой, что $\operatorname{MV}(A,B) \leqslant 4$, содержится в пересечении полуплоскостей $L_i < b_i$ для одного из данных наборов (b_i). □

4.4.3. Монодромия общей системы уравнений: предварительные сведения

Доказательство основных результатов данной работы основано на поиске общих систем уравнений, обладающих разрешимой группой монодромии. Данное условие эквивалентно разрешимости самой системы (см. [89]):

Теорема **4.4.21.** *Пусть $C \subset \mathbb{C}^2$ — алгебраическая кривая, (x, y) — стандартные координаты, и π — ограничение x на C. Многозначная функция $y \circ \pi^{-1}$ выражается в квадратурах тогда и только тогда, когда группа монодромии разветвленного накрытия π разрешима.*

Нам понадобится следующая версия данного факта.

Утверждение **4.4.22.** *Рассмотрим кривую $C \subset \mathbb{C}^n$ и полиномиальную функцию $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. Координаты точек $x \in C$, $f(x) = c$ выражаются в квадратурах через c тогда и только тогда, когда группа монодромии разветвленного накрытия $f : C \to \mathbb{C}$ разрешима.*

Доказательство. Пусть $C' \subset \mathbb{C}^2$ — образ отображения $(f, x_j) : C \to \mathbb{C}^2$, где $(x_1, \ldots, x_n)$ — стандартная система координат в $\mathbb{C}^n$. Обозначив ограничение f на C' через π', получим, что группы монодромий отображений π' и $f : C \to \mathbb{C}$ совпадают. Следовательно, применяя теорему 4.4.21 к C' и π', получим доказываемое утверждение для j-ой координаты. □

Поэтому мы начнем с подсчета монодромии общей системы уравнений. Для $i = 0, \ldots, m$ пусть A_i — конечное множество в $\mathbb{Z}_{\geqslant 0} \times \mathbb{Z}^m$, $0 \in A_i$, и пусть $\mathbb{C}^{A_i}$ — пространство многочленов Лорана вида $f(t, x) = \sum_{a \in A_i} c_a t^{a_0} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_m^{a_m}$, $t \in \mathbb{C}$, $x \in (\mathbb{C} \setminus 0)^m$. Обозначим проекцию $\mathbb{Z}_{\geqslant 0} \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ через μ, а (непустое) пересечение $A_i \cap \ker \mu$ — через B_i. Тогда для набора общего положения $(f_0, f_1, \ldots, f_n) \in \prod_{i=0}^m \mathbb{C}^{A_i}$ мы положим c_0 равным значению $f_0(0, x)$ в одной из тех точек x, в которых $f_1(0, x) = f_2(0, x) = \ldots = f_n(0, x) = 0$, и будем интересоваться монодромией конечного множества $\{f_0 = c, f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0\}$

при обходе параметром c маленькой окружности вокруг c_0. Ответ выражается через числа $m_i = \min \mu|_{A_i \setminus B_i}$ и может быть получен из следующего важного факта.

Лемма **4.4.23.** *В условиях предыдущего абзаца, предположим, что размерность линейной оболочки $\bigcup_{i\in I} B_i$ равна по крайней мере $|I|$ для любого подмножества $I \subsetneq \{0, 1, \dots, m\}$. Выберем набор общего положения $(f_0, f_1, \dots, f_m) \in \prod_{i=0}^m \mathbb{C}^{A_i}$ среди всех наборов таких, что $f_0(0, x) = f_1(0, x) = \dots = f_m(0, x) = 0$ для данного $x \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n$, тогда кратность пересечения поверхностей $\{f_i = 0\}$, $i = 0, \dots, m$, в точке $(0, x)$ корректно определена и равна минимуму из m_i, $i = 0, \dots, m$.*

Доказательство использует следующие очевидные наблюдения.

Лемма **4.4.24.** *Если гладкие гиперповерхности $H_1, \dots, H_m$ в $\mathbb{C}^{m+1}$ взаимно трансверсальны, и гладкая кривая, проходящая через некоторую точку $x \in \bigcap_i H_i$, имеет касание порядка m_i с H_i в точке x, то она имеет касание порядка $\min_i m_i$ с кривой $\bigcap_i H_i$ в точке x.*

Лемма **4.4.25.** *Пусть прямая L параллельна оси x_0 пространства $\mathbb{C}^{m+1}$ со стандартной системой координат $(x_0, x_1, \dots, x_m)$, и пусть y — пересечение $L \cap \ker x_0$. Предположим, что гладкая функция $f : \mathbb{C}^{m+1} \to \mathbb{C}$ не имеет особенности в y, но ее ограничение на L имеет корень порядка m в y. Допустим, что гладкая кривая $C \subset \mathbb{C}^{m+1}$ имеет касание порядка $\geqslant m$ ч L ы $y \in \ker x_0$. Тогда для точки общего положения $\alpha \in \mathbb{C}$ ограничение $f(\alpha x_0, x_1, x_2, \dots, x_m)$ на C имеет корень порядка m в y.*

Доказательство леммы 4.4.23. Без ограничения общности предположим, что $m_0 \leqslant m_i$ для $i > 0$. Так как размерность векторной оболочки множества $\bigcup_{i\in I} B_i$ равна по крайней мере $|I|$ для любого $I \subsetneq \{0, 1, \dots, m\}$, гиперповерхности $f_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ и $t = 0$ трансверсальны в $(0, x)$ по предположению об

общности положения. По тому же предположению, порядок касания гиперповерхности $f_i = 0$ и прямой $L = \{(t, x) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ равен m_i. Таким образом, по лемме 4.4.24, кривая $f_1 = f_2 = \ldots = f_m = 0$ имеет порядок касания $m' = \min_{i=1}^{m} m_i$ с L. Следовательно, ограничение f_0 на эту кривую имеет корень порядка m_0, иначе f_0 не в общем положении по лемме 4.4.25. Искомый индекс пересечения равен порядку данного корня. $\square$

Чтобы избавиться от алгебро-геометрического предположения леммы 4.4.23, нам понадобятся следующие обозначения. Конечным множествам $B_i \ni 0$, $i = 0, 1, \ldots, m$, в $\mathbb{Z}^m$ сопоставим число d_B, множество $I_B \subset \{0, 1, \ldots, m\}$ и рациональное подпространство $L_B \subset \mathbb{R}^m$ следующим образом. Для каждого подмножества $I \subset \{0, 1, \ldots, m\}$ определим L_I как линейную оболочку объединения $\bigcup_{i \in I} B_i$. Если существует подмножество $I \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ такое, что $\dim L_I < |I|$, то положим $d_B = 0$, и I_B и L_B не определены. Иначе, среди всех подмножеств $I \subset \{0, 1, \ldots, m\}$ таких, что $\dim L_I < |I|$, существует минимальное по включению. Обозначим это минимальное множество через I_B, определим L_B как L_{I_B}, и положим d_B равным произведению (индекс в L_B подрешетки, порожденной $\bigcup_{i \in I_B} B_i$)$\cdot$(смешанный объем выпуклых оболочек образов B_i, $i \notin I_B$, при проекции $\mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^m / L_B$). Следующий факт хорошо известен (см..например, [41]).

Лемма **4.4.26.** *Для многочленов общего положения $g_i \in \mathbb{C}^{B_1}$ и числа c_0 таких, что система уравнений $g_0(x) = c_0$, $g_1(x) = \ldots = g_m(x) = 0$ совместна, данная система имеет d_B решений.*

Утверждение **4.4.27.** *В условиях абзаца, предшествующего лемме 4.4.23, для набора общего положения $(f_0, f_1, \ldots, f_m) \in \prod_{i=0}^{m} \mathbb{C}^{A_i}$, перестановка конечного множества $\{f_0 = c,\ f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0\}$ при обходе параметром c маленькой окружности вокруг c_0 состоит из d_B циклов длины $\min_{i \in I_B} m_i$.*

Доказательство. Ограничение f_0 на кривую $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$ имеет конечное число простых корней вне гиперплоскости $t = 0$ и d_B корней поряд-

ка $\min_{i\in I_B} m_i$ в данной гиперплоскости. Количество корней вычислено в лемме 4.4.26. Вычисление порядка каждого из данных корней можно очевидным образом свести к случаю $L_B = \mathbb{R}^m$ и затем воспользоваться леммой 4.4.23. $\square$.

Пример **4.4.28.** Для $f(x,y) = x^a + \alpha y^b - 1$ и $g(x,y) = x^c + y^d - 1$, где α находится в общем положении, перестановка корней системы $f = \varepsilon$, $g = 0$ при обходе параметра ε вокруг 0 состоит из $\gcd(a,c)$ циклов длины $\min(b,d)$.

4.4.4. Монодромия общей системы уравнений: ответ

В предыдущем разделе мы объяснили, каким образом разрешимость системы связана с разрешимостью ее группы монодромии, и описали монодромию общей системы в одной отдельной точке ветвления. В этом разделе мы полностью опишем монодромию общей квадратной системы (см. также [25]), а также наметим другой способ получения данного ответа. Этот второй способ менее элементарен, но более широко применим (в частности, к неквадратным системам уравнений).

Для приведенного набора $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$, $A_j \subset \mathbb{Z}^n$, пусть $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}^{\mathbf{A}} = \mathbb{C}^{A_1} \oplus \mathbb{C}^{A_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_n}$ — *бифуркационное множество*, т.е. замыкание множества всех таких $c \in \mathbb{C}^{\mathbf{A}}$, что система

$$\sum_{a\in A_j} c_{j,a} x^a = 0 \text{ for } j = 1, 2, \ldots, n \qquad (*)$$

имеет меньше решений, чем система, заданная коэффициентами $c \in \mathbb{C}^{\mathbf{A}}$ общего положения (т.е. строго меньше, чем смешанный объем выпуклых оболочек множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$).

Неприводимые компоненты $\mathcal{B}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с *существенными огранками* набора $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (определение см. ниже), и мы опишем циклический тип перестановки решений системы $(*)$ при обходе каждой из этих компонент параметром c.

Определение **4.4.29.** *Коразмерностью* набора множеств $B_1, B_2, \dots, B_k \subset \mathbb{Z}^n$ называется разность $k - \dim(\operatorname{conv} \sum_j B_j)$. Набор подмножеств $F_j \subset A_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, называется *гранью* набора $A_1, A_2, \dots, A_n$, если выполнены следующие эквивалентные условия:

1) $F_j = \Gamma_j \cap A_j$, где Γ_j — грань выпуклой оболочки A_j, и сумма Минковского $\sum_j \Gamma_j$ является гранью выпуклой оболочки $\sum_j A_j$.

2) Существует линейная функция $L : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$, ограничение которой на A_j достигает своего максимума на F_j (т.е. $L(x) < L(y) = \max L(A_j)$ для $y \in F_j$ и $x \in A_j \setminus F_j$).

Поднабор S грани набора $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется *существенной огранкой* набора $A_1, A_2, \dots, A_n$, если его коразмерность равна 1 и коразмерность каждого из собственных поднаборов S не превышает 0.

Для существенной огранки $S = (S_{l_1}, S_{l_2}, \dots, S_{l_p})$ набора $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, $S_{l_j} \subset A_{l_j}$, рассмотрим R_S, замыкание множества всех таких $c \in \mathbb{C}^{\mathbf{A}}$, что система уравнений $\sum_{a \in S_{l_j}} c_{l_j,a} x^a = 0$ for $j = 1, 2, \dots, p$ совместна. Пусть $D_{\mathbf{A}}$ — множество всех таких c, что уравнения $(*)$ имеют кратный корень.

Утверждение **4.4.30** (частный случай теоремы 4.3.6)**.** *Если набор A приведен, то множества D_A и R_S для всех существенных огранок S являются попарно различными неприводимыми гиперповерхностями, и их объединение $D_{\mathbf{A}} \cup \bigcup_S R_S$ совпадает с бифуркационным множеством $\mathcal{B}$.*

Опишем теперь циклический тип T_S перестановки решений системы $(*)$ при обходе c вокруг компоненты R_S. Мы будем записывать тип перестановки с a_i циклами длины i, $i \in \mathbb{N}$, в виде суммы $\sum_i a_i e_i \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, где $e_1, e_2, \dots$ — стандартный базис в $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.

Пусть $S = (S_{l_1}, S_{l_2}, \dots, S_{l_p})$ — существенная огранка набора $A = (A_1, A_2 \dots, A_n)$, содержащаяся в его грани $F = (S_1, S_2, \dots, S_n)$ коразмерности 1. Перестановками и сдвигами множеств $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \mathbb{Z}^n$ мы можем добиться того,

чтобы $S = (S_1, S_2, \dots, S_p)$ и $S_j \ni 0$ при $j = 1, 2, \dots, n$. В указанных предположениях, пусть $L(S)$ — решетка, порожденная $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_p$, и пусть $\bar{L}(S)$ — ее насыщение $L(S) \otimes \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}^n$, обозначим индекс $|\bar{L}(S)/L(S)|$ через $i(S)$, а проекцию $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n/\bar{L}(S)$ — через π_S. Существует единственный примитивный ковектор $l : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$, ограничение которого на A_j достигает своего минимального значения на S_j при $j = 1, 2, \dots, n$ (по нашим предположениям, данное минимальное значение равно 0). Обозначим минимум ковектора l на $\bigcup_{j=1}^{p}(A_j \setminus S_j)$ через $l(F) \in \mathbb{N}$, а смешанный объем выпуклых оболочек $\pi_S(S_{p+1}), \dots, \pi_S(S_n)$ в $\ker l/\bar{L}(S)$ — через $v(F)$.

Утверждение **4.4.31.** *1) Если набор A является приведенным, то, при обходе с вокруг D_A, переставляются между собой два решения системы $(*)$.*

2) Для любой существенной огранки S соответствующий тип перестановки T_S вдоль петли вокруг R_S равен $i(S)\sum_F v(F)e_{l(F)}$, где F пробегает множество всех граней коразмерности 1 набора A таких, что S — поднабор F.

Доказательство. Часть 1 очевидна, часть 2 является переформулировкой утверждения 4.4.27. □.

Следствие **4.4.32.** *Для системы общего положения $f_1 = \dots = f_n = 0$, $f_i \in \mathbb{C}^{A_i}$, множество решений $Z(c_a)$ как функция от коэффициента c_a уравнения f_1 при мономе x^a, $a \in A_1$, имеет следующие точки ветвления: некоторое число точек ветвления, тип которых – транспозиция, а также, для каждой существенной огранки $S = (S_1, S_{l_2}, \dots, S_{l_p})$ набора $A = (A_1, A_2 \dots, A_n)$, такой что $a \in S_1$, имеется $\mathrm{MV}(S_{l_2}, \dots, S_{l_p})/i(S)$ точек ветвления типа*

$$i(S)\sum_F v(F)e_{l(F)},$$

где F пробегает множество всех граней коразмерности 1 набора A таких, что S — поднабор F.

Доказательство. Точки ветвления функции Z однозначно соответствуют точкам пересечения бифуркационного множества $\mathcal{B}$ с прямой L, параллельной

c_a-координатной оси и проходящей через точку $f = (f_1, \dots, f_n)$. Если набор f в общем положении, то прямая L пересекает каждую из компонент бифуркационного множества $\mathcal{B}$, поэтому типы обхода в этих точках ветвления будут совпадать с описанными в утверждении 4.4.31. Осталось заметить, что прямая L пересечет компоненту R_S в $\mathrm{MV}(S_{l_2}, \dots, S_{l_p})/i(S)$ точках. $\square$.

Мы также получим утверждения 4.4.30 и 4.4.31 менее прямым способом как частный случай вычисления ζ-функции монодромии системы k уравнений с n переменными для произвольных $k \leqslant n$ (см. теорему 4.4.36 ниже). Несмотря на то, что случай $k < n$ не нужен для целей настоящей работы, он может представлять независимый интерес, поэтому до конца данной главы мы переходим к изучению общего случая $k \leqslant n$.

Рассмотрим график решения общей системы уравнений с многогранниками Ньютона $A_1, A_2, \dots, A_k$ in $\mathbb{Z}^n$:

$$\Gamma = \{(x, c) \mid \sum_{a \in A_j} c_{j,a} x^a = 0 \text{ for } j = 1, 2, \dots, k\} \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n \times \mathbb{C}^{\mathbf{A}}.$$

Пусть $\mathcal{B}$ — бифуркационное множество решения, т.е. множество всех точек в $\mathbb{C}^{\mathbf{A}}$, над которыми проекция Γ на $\mathbb{C}^{\mathbf{A}}$ не является локально тривиальным расслоением. Напомним описание неприводимых компонент $\mathcal{B}$, полученное в разделе 4.3.2.

Определение **4.4.33.** Поднабор набора $B_1, B_2, \dots, B_k \subset \mathbb{Z}^n$ называется *важным*, если его нельзя расширить до поднабора более высокой коразмерности.

Определение **4.4.34.** Для произвольных подмножеств ($B_{i_1} \subset A_{i_1}, \dots, B_{i_p} \subset A_{i_p}$) определим $i_{B_{i_1}, \dots, B_{i_p}}$, как индекс подрешетки в $\mathbb{Z}^{n+1}$, порожденной множествами $B_{i_j} \times \{1\}$, $j = 1, \dots, p$. Определим алгебраическое множество $D_{B_{i_1} * \dots * B_{i_p}}$ как замыкание множества всех $c \in \mathbb{C}^{A_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^{A_k}$ таких, что 0 является критическим значением многочлена $\sum_j \lambda_j \sum_{a \in B_{i_j}} c_{i_j,a} x^a$ от переменных $\lambda \in (\mathbb{C} \setminus 0)^p$ и $x \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n$.

Напомним, что алгебраическое множество $D_{B_{i_1}*\ldots*B_{i_p}}$ неприводимо.

Утверждение **4.4.35.** *Допустим, что набор $(A_1,\ldots,A_k)$ не содержит поднаборов положительной коразмерности.*

1) Неприводимыми компонентами бифуркационного множества $\mathcal{B}$ являются гиперповерхности вида $D_{B_{i_1}*\ldots*B_{i_p}}$, где $(B_{i_1}\subset A_{i_1},\ldots,B_{i_p}\subset A_{i_p})$ пробегает множество всех важных поднаборов граней $(A_1,\ldots,A_k)$.

2) В точке общего положения $c\in D_{B_{i_1}*\ldots*B_{i_p}}$ эйлерова характеристика слоя проекции $\Gamma\to\mathbb{C}^{A_1}\oplus\ldots\oplus\mathbb{C}^{A_k}$ падает на величину $i_{B_{i_1},\ldots,B_{i_p}}c_{A_1,\ldots,A_k}^{B_{i_1},\ldots,B_{i_p}}$ по сравнению с общим слоем этой проекции.

Петля вокруг неприводимой компоненты бифуркационного множества $\mathcal{B}$ индуцирует автоморфизмы $h_i:H^i\to H^i$ в когомологиях общего слоя проекции $\Gamma\to\mathbb{C}^{A_1}\oplus\ldots\oplus\mathbb{C}^{A_k}$. Мы опишем соответствующую ζ-функцию, т.е. рациональную функцию $\zeta(t)=\prod_i\det(h_i-t\cdot\mathrm{Id})^{(-1)^i}$.

Для поднабора $B=(B_{i_1}\subset A_{i_1},\ldots,B_{i_p}\subset A_{i_p})$ собственной грани набора $(A_1,\ldots,A_k)$ обозначим проекцию решетки $\mathbb{Z}^n$ вдоль аффинной оболочки суммы $B_{i_1}+\ldots+B_{i_p}$ через $\pi_B:\mathbb{Z}^n\to L_B$, сумму $A_{i_1}+\ldots+A_{i_p}$ — через B', а выпуклую оболочку суммы $(A_{i_1}\cap\mathbb{Z}^n\setminus B_{i_1})+\ldots+(A_{i_p}\cap\mathbb{Z}^n\setminus B_{i_p})$ — через B''. Набор образов $\pi_BA_1,\ldots,\pi_BA_k,\pi_BB',\pi_BB''$ имеет конечное число граней $C=(C_1,\ldots,C_k,C',C'')$ таких, что $C'\in B'$ является вершиной $\pi_B(B_{i_1}+\ldots+B_{i_p})$ и сумма $C_1+\ldots+C_k+C''$ имеет коразмерность 1 в L_B. Обозначим множество всех таких граней через F_B, и каждой грани $C\in F_B$ сопоставим пару целых чисел следующим образом:

$h_C=|l(C'')-l(C')|$, где l — сюръективная линейная функция $l:L_B\to\mathbb{Z}$, ограничение которой на $C_1+\ldots+C_k+C''$ постоянно.

$m_C=\sum\mathrm{MV}\left(\underbrace{C'',\ldots,C''}_{m_0-1},\underbrace{C_1,\ldots,C_1}_{m_1},\ldots,\underbrace{C_k,\ldots,C_k}_{m_k}\right)$, где суммирование ведется по всем положительным целым числам $m_0,\ldots,m_k$, дающим в сумме $\dim L_B$.

Теорема **4.4.36.** *1) ζ-функция монодромии проекции $\Gamma \to \mathbb{C}^{A_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_k}$, ограниченная на петлю вокруг $D_{A_1 * \ldots * A_k}$, равна*

$$(1-t^2)^{i_{A_1,\ldots,A_k}}.$$

2) Если $B = (B_{i_1} \subset A_{i_1}, \ldots, B_{i_p} \subset A_{i_p})$ является важным поднабором собственной грани набора $(A_1, \ldots, A_k)$, то ζ-функция монодромии проекции $\Gamma \to \mathbb{C}^{A_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_k}$, ограниченная на петлю вокруг $D_{B_{i_1} * \ldots * B_{i_p}}$, равна

$$\prod_{C \in F_B} (1-t^{h_C})^{i_B m_C}.$$

Заметим, что степень последней из упомянутых рациональных функций равна $i_{B_{i_1},\ldots,B_{i_p}} c^{B_{i_1},\ldots,B_{ip}}_{A_1,\ldots,A_k}$, т.е. из теоремы 4.4.36 следует теорема 4.3.7. Соответственно, и доказательство теоремы 4.4.36 такое же как для теоремы 4.3.7, с заменой подсчета чисел Милнора на подсчет ζ-функции монодромии слоев. Последующие вычисления в доказательстве теоремы 4.3.7 также буквально распространяются на ζ-функции монодромии, потому что последние удовлетворяют тем же свойствам аддитивности, что и эйлерова характеристика (см. например [67]).

4.4.5. Вариации на тему леммы Ритта и доказательство теоремы 4.4.14

Теорема **4.4.37** ([79]). *Если примитивная подгруппа в S_n содержит цикл длины, не превышающей $n-3$, то она совпадает либо с A_n, либо со всей группой S_n.*

С помощью данной усиленной версии классической теоремы Жордана мы докажем теорему 4.4.14. Выберем $c_{i,a} \in \mathbb{C}$, $a \in A_i$ общего положения, положим $c_{0,1} = 0$ и обозначим $\sum_{a \in A_i} c_{i,a} x^a$ через $f_i(x)$. Обозначим также кривую $f_2 = \ldots = f_n = 0$ через $X \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$, а смешанный объем выпуклых оболочек множеств $A_1, \ldots, A_n$ — через d. Мы предполагаем $d > 4$ и хотим доказать

неразрешимость группы монодромии M разветвленного накрытия $f_1 : X \to \mathbb{C}$ степени d; тогда решение системы $f_1(x) = c$, $f_2(x) = \ldots = f_n(x) = 0$ не выражается в квадратурах через c, по утверждению 4.4.22.

Заметим, что группа M транзитивна, так как если набор $(A_1, \ldots, A_n)$ приведен, то, по следующей лемме, кривая X связна:

Лемма **4.4.38** ([174]). *Пусть m — максимум среди коразмерностей всевозможных поднаборов в наборе $B_1, \ldots, B_k \subset \mathbb{Z}^d$, рассмотрим а полное пересечение общего положения Z, заданное уравнениями $\sum_{a \in B_i} c_{i,a} z^b = 0$, $i = 1, \ldots, k$.*

1) Если число m положительно, то Z пусто.

2) Если m равно 0, то можно выбрать максимальный (по включению) поднабор $B_{i_1}, \ldots, B_{i_p}$ коразмерности 0, и число связных компонент Z равно p-мерному смешанному объему выпуклых оболочек множеств $B_{i_1}, \ldots, B_{i_p}$.

3) Если m отрицательно, то Z связно.

Из определения удачной точки и описания монодромии (следствие 4.4.32) следует, что бифуркационное множество отображения $f_1 : X \to \mathbb{C}$ состоит из точки 0, монодромия которой может быть сколь угодно сложна, и конечного множества других точек, у каждой из которых монгодромия является циклом, длина которго меньше $d/2$.

Так как M содержит транспозиции, соответствующие критическим точкам f_1, по теореме Жордана, из примитивности M следует, что $M = S_d$ или A_d, т.е. M не разрешима. Таким образом, нам остается разобрать случай, когда группа M не является примитивной. В таком случае, разветвленное накрытие $f_1 : X \to \mathbb{C}$ раскладывается в нетривиальную композицию $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} \mathbb{C}$, где отображения g и h индуцируют структуру римановой поверхности на Y. Данный факт был впервые замечен Риттом в работе [120] в предположении, что род кривой X равен 0, но остается верным и для произвольного рода. Более того, без ограничения общности, мы можем предположить, что группа монодромии

M' разветвленного накрытия $h : Y \to \mathbb{C}$ примитивна, иначе мы могли бы аналогичным образом разложить в композицию отображение h. Кроме того, M' является факторгруппой группы M, следовательно, неразрешимость M' влечет неразрешимость M. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда M' разрешима.

Так как M' примитивна и разрешима, монодромия в критическом значении h не может быть циклом длины меньшей, чем половина степени d' отображения h: иначе степень h больше 4, длина цикла меньше по крайней мере на 3, и M' не разрешима, по теореме 4.4.37.

С другой стороны, монодромия в ненулевом критическом значении h не может быть циклом длины большей или равной $d'/2$, а также не может не быть циклом, иначе бы монодромия в том же критическом значении f_1 была бы циклом длины большей или равной $d/2$, либо и вовсе не была бы циклом.

Таким образом, мы получили, что $h : Y \to \mathbb{C}$ не имеет других критических значений, кроме 0, т.е. $Y = \mathbb{C}$, и $h(z) = z^{d'}$, т.е. $f = g^d$. Следовательно, одномерное полное пересечение общего положения $f_1 - y^d = f_2 = \ldots = f_n = 0$ в $(\mathbb{C} \setminus 0)^{n+1}$ имеет d связных компонент, что противоречит части 3 леммы 4.4.38.

5. Тропическая теория особенностей

Перечислительные задачи на многообразии V обычно решаются сведением к теории пересечений в когомологиях некоторой компактификации V. Однако в случае, когда задача инвариантна относительно “хорошего” (сферического) действия группы на V, многие авторы указывали более подходящую среду обитания для теории пересечений прямой предел колец когомологий всех эквивариантных компактификаций многообразия V. Назовем этот предел *аффинными когомологиями* многообразия V. Мы построим *аффинные характеристические классы* подмногообразий комплексного тора со значениями в аффинных когомологиях тора.

Это позволяет нам сделать первые шаги в вычислении *аффинных полиномов Тома*. Классические полиномы Тома вычисляют количество слоев общего собственного отображения гладкого многообразия, имеющих данный набор особенностей, а наша аффинная версия будет делать то же самое для общих полиномиальных отображений аффинных алгебраических многообразий. Данное понятие мотивировано также развитием подхода к тропическим теоремам соответствия, основанного на теории пересечений: теоремы соответствия могут быть сведены к вычислению аффинных полиномов Тома, так как фундаментальный класс многообразия в аффинных когомологиях кодируется его тропическим веером.

Первый конкретный ответ, который мы получаем – аффинная версия трех исторически самых первых полиномов Тома – формул Плюккера для степени и числа каспов и самопересечений проективно двойственной кривой. Это, в частности, позволяет классифицировать торические многообразия, проективно двойственные к которым не являются гиперповерхностями, вычислить тропический веер многообразия двойных касательных гиперплоскостей к торическому многообразию, и описать многогранник Ньютона гиперповерхности неморсовских многочленов данной степени. Мы также сформулируем гипотезу об общем виде аффинных многочленов Тома — ключевым ингредиентом в ней является понятие n-ичного веера, обобщающее понятие вторичного многогранника.

5.1. Введение

5.1.1. Аффинные формулы Плюккера

Многочлены Тома вычисляют количество слоев общего собственного морфизма гладкого многообразия, имеющих данный набор особенностей. Более общо, они вычисляют класс когомологий страта некоторой мультиособенности (т.е. замыкания множества всех точек, прообразы которых имеют данный набор особенностей). Исторически первыми многочленами Тома являются формулы

Плюккера, выражающие степень и число каспов и двойных точек кривой $\mathcal{C}^\vee$, проективно двойственной к общей плоской кривой $\mathcal{C}$, через степень кривой $\mathcal{C}$. Чтобы распознать в этих выражениях многочлены Тома, заметим, что кривая $\mathcal{C}^\vee$ является дискриминантом тавтологической проекции

$$\pi : \{(l, x) \in \mathbb{CP}^{2\vee} \times \mathbb{CP}^2 \mid x \in l \cap \mathcal{C}\} \ \to \ \mathbb{CP}^{2\vee}, \qquad (*)$$

т.е. замыканием множества всех точек $l \in \mathbb{CP}^{2\vee}$, слой π над которыми имеет ровно одну особенность локальной степени 2 (особенность типа A_1). Аналогично, каспы и двойные точки кривой $\mathcal{C}^\vee$ в точности являются образами слоев с одной особенностью локальной степени 3 (особенностью типа A_2) или двумя особенностями типа A_1 соответственно. Таким образом, двойственная кривая $\mathcal{C}^\vee$, множество ее каспов и множество ее двойных точек являются стратами мультиособенностей проекции π.

Современными версиями формул Плюккера являются многочлены Тома, выражающие фундаментальные классы стратов мультиособенностей для общего отображения $\pi : M \to N$ произвольных компактных гладких поверхностей в терминах характеристических классов данных поверхностей: фундаментальные классы всех трех стратов мультиособенностей в $H(N)$ равны прямым образам c_1, $c_1^2+c_2$ и $-2(2c_1^2+c_2)$ соответственно, где c_i — характеристические классы виртуального векторного расслоения $\pi^*TN - TM$. (В связи с этим фактом и всеми последующими упоминаниями многочленов Тома и теории мультиособенностей мы отсылаем читателя к работе [165].) В частном случае тавтологической проекции $(*)$, характеристические классы являются функциями степени d данной кривой $\mathcal{C}$, фундаментальный класс страта $\mathcal{C}^\vee$ в $H_1(\mathbb{CP}^2;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ равен $d(d-1)$ и вычисляет степень этого страта, а фундаментальные классы 0-мерных стратов мультиособенностей в $H_0(\mathbb{CP}^2;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ равны $3d(d-2)$ и $(d-3)(d-2)d(d+3)/2$ и вычисляют их мощности.

Мы сделаем первые шаги в направлении вычисления *аффинных полиномов Тома*, которые считают количество слоев общего полиномиального отображе-

ния аффинного алгебраического многообразия, имеющих заданный набор особенностей. Рассмотрим следующий пример аффинной версии формул Плюккера.

Пример **5.1.1.** Пусть $a : \{1, \dots, n+1\} \to \mathbb{Z}$ — неотрицательная вогнутая функция, $a(n+1) = 0$, и c_i — общий многочлен степени $a(i)$ от одной переменной. Для скольких значений параметра $t \in \mathbb{C}$ многочлен $f_t(x) = c_1(t)x + \ldots + c_n(t)x^n + x^{n+1}$ не является морсовским?

Чтобы ответить на данный вопрос, рассмотрим ограничение π проекции $(\mathbb{C} \setminus 0)^3 \to (\mathbb{C} \setminus 0)^2$, $(x, y, t) \mapsto (x, t)$ на график $M = \{(x, y, t) \,|\, f_t(x) = y\}$, пусть A_1, A_2 и $2A_1$ — его открытые страты мультиособенностей (т.е. множества точек $(y, t) \in (\mathbb{C} \setminus 0)^2$ таких, что уравнение $f_t(x) = y$ имеет ровно один корень кратности 2, ровно один корень кратности 3 и ровно два корня кратности 2 соответственно). Искомое число неморсовских многочленов равно мощности $|2A_1| + |A_2|$, которую можно найти с помощью следующих трех уравнений. Через e обозначим эйлерову характеристику, тогда

$$e(A_1) + 2|2A_1| + 2|A_2| = a(1) - 2\sum_i a(i),$$

$$e(A_1) + 2|2A_1| + |A_1| = 3a(1) - 4\sum_i a(i),$$

$$e(A_1) - |A_2| = a(1) - 2\sum_i (3i-2)a(i).$$

Доказательство. Пусть $N \subset \mathbb{R}^3$ — многогранник Ньютона многочлена $F(x, y, t) = y - f_t(x)$, а $D \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^2$ — множество критических значений π (т.е. объединение стратов A_1, A_2 и $2A_1$). Тогда, по формуле Кушниренко-Бернштейна-Хованского, эйлерова характеристика поверхности $F = 0$ в $(\mathbb{C} \setminus 0)^3$ равна целочисленному объему многогранника N. Таким образом, получено первое из искомых уравнений, так как вычисляя $e(F = 0)$ послойно, мы получим

$e(F=0) = n \cdot e\big((\mathbb{C}\setminus 0)^2 \setminus D\big) + (n-1)e(A_1) + (n-2)e(2A_1) + (n-2)e(A_2) = n \cdot e(\mathbb{C}\setminus 0)^2 - e(A_1) - 2|2A_1| + 2|A_2| = -e(A_1) - 2|2A_1| + 2|A_2|$, по аддитивности эйлеровой характеристики. Множество критических значений отображения π задается уравнениями $F = y\frac{\partial F}{\partial x} = 0$. Данные уравнения вырождены относительно многогранника Ньютона N, так как замыкание C данной кривой в N-торическом многообразии пересекает одномерную орбиту, соответствующую ребру $[(1,0,0),\ (1,0,a(1))]$, в $a(1)$ точках. Тем не менее, нетрудно проверить, что в каждой из этих точек C трансверсально пересекает каждую из примыкающих двумерных орбит. Следовательно, эйлерова характеристика $F = y\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ на $a(1)$ превышает эйлерову характеристику шевеления $F = y\frac{\partial F}{\partial x} + G = 0$, где G — достаточно малый многочлен общего положения с многогранником Ньютона N. Последняя система уравнений невырождена относительно N, поэтому эйлерова характеристика ее решений равна $-2\operatorname{Vol}(N)$ по формуле работы Кушниренко-Бернштейна-Хованского. Таким образом получено второе из искомых уравнений, так как эйлерова характеристика отображения π равна $e(A_1)+2|2A_1|+|A_1|$, по аддитивности эйлеровой характеристики.

Наконец, согласно теореме 2.2.36, многоугольник Ньютона N_D множества критических значений D является расслоенным многогранником N, который имеет вершины в точках $(0,0)$, $(n,0)$ и $\big(i-1, 2a(n)+2a(n-1)+\ldots+2a(i)\big)$, $i=1,\ldots,n$. Замыкание D в N_D-торической поверхности имеет три типа особенностей: $|2A_1|$ трансверсальных самопересечений, $|A_2|$ простых каспов и $a(1)$ простых касаний с одномерной орбитой $y=0$. Переход от множества D к его общему шевелению с тем же многоугольником Ньютона N_D приводит к разрешению данных трех типов особенностей, которое уменьшает эйлерову характеристику кривой на $|2A_1|$, $2|A_2|$ и $a(1)$ соответственно. Эйлерова характеристика множества $\tilde{D}$ равна $-\operatorname{Vol} N_D$, таким образом получено третье искомое уравнение. $\square$

Утверждения о трансверсальности и типах особенностей в приведенном

рассуждении обоснованы результатами глав 5.2.7 и 5.3.4. Аналогичное вычисление может быть использовано при подсчете мультиособенностей проекции $M \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^3 \to (\mathbb{C} \setminus 0)^2$ для общей поверхности M с произвольным многогранником Ньютона N, хотя общий ответ слишком громоздкий, чтобы его приводить.

Замечание **5.1.2.** Важно отметить, что мы данный пример нельзя свести к классическим полиномам Тома, рассмотрев компактификации объемлющих торов $(\mathbb{C}\setminus 0)^3 \supset M$ и $(\mathbb{C}\setminus 0)^2$: любая такая компактификация дала бы проекцию замыкания M, не удовлетворяющую условиям общего положения, необходимым для применения классических полиномов Тома. Например, если M — общая поверхность с многогранником Ньютона $\mathrm{conv}\{(-2,0,0), (2,0,1), (0,1,0), (2k-1,1,1), (2k,1,1)\}$, а $D \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^2$ — множество критических значений проекции $M \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^3_{x,y,t} \to (\mathbb{C} \setminus 0)^2_{y,t}$, то замыкание множества D в произвольной торической компактификации $(\mathbb{C} \setminus 0)^2$ имеет весьма вырожденный касп с числом Милнора $2k-6$. Цель настоящей работы – разработать вариант теории многочленов Тома, применимый в таких условиях.

5.1.2. Аффинное кольцо когомологий

Чтобы получить аффинную версию формулы Плюккера для степени, нужно сначала выбрать кольцо когомологической природы, в котором мы будем вычислять фундаментальный класс дискриминанта отображения π. Из замечания 5.1.2 следует, что кольцо Чжоу какой-либо конкретной компактификации компактификации тора $(\mathbb{C} \setminus 0)^2$ не будет хорошим выбором с точки зрения классических полиномов Тома. Поэтому мы перейдем к прямому пределу колец когомологий всех торических компактификаций комплексного тора $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$. Назовем данное градуированное кольцо *аффинными когомологиями* и обозначим его через C. Кольцо C отвечает за все перечислительные проблемы в $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ в следующем смысле: подмногообразия $U, V \subset (\mathbb{C}\setminus 0)^n$ имеют один и тот же фун-

даментальный класс в C тогда и только тогда, когда когда любое подмногообразие дополнительной коразмерности, сдвинутое на общий элемент комплексного тора, имеет равные индексы пересечения с U и V. Данный факт был впервые обнаружен в работе [29] для определенных однородных пространств, отличных от комплексных торов, но все рассуждения важнейшей работы на самом деле применимы к произвольным сферическим однородным пространствам, в том числе и к $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ (см., в частности, [17]).

Аффинное кольцо когомологий комплексного тора изоморфно алгебре многогранников, которая была введена в работе [100] и уже широко изучена (см. [108], [168]) к тому времени, как в [56] и [18] эти два кольца были отождествлены. В частности, фундаментальный класс алгебраической гиперповерхности $H \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ в аффинных когомологиях тора $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ кодируется многогранником Ньютона уравнения, задающего H.

Пример **5.1.3.** Обозначим через N многогранник Ньютона графика M из примера 5.1.1, тогда фундаментальный класс дискриминанта A_1 (т.е. многоугольник Ньютона данной плоской кривой) — это расслоенный многогранник N, см. [62]. Как пояснено выше, данное равенство можно рассматривать как аффинную версию формулы Плюккера для степени в условиях примера 5.1.1.

Замечание **5.1.4.** Более общо, фундаментальный класс произвольного подмногообразия $H \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ в аффинных когомологиях $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ кодируется *тропическим веером* H (см. [161] и [162], [133], [59]). Тем не менее, в этой главе мы предпочитаем думать в терминах аффинных классов когомологий, а не тропических вееров, так как некоторые из наших конструкций и рассуждений работают и в случае произвольных сферических пространств, на подмногообразия котонрых пока не обобщено понятие тропического веера.

5.1.3. Аффинная теория мультиособенностей

Условия примера 5.1.1 можно изменять различными способами: рассматривая устроенное более сложным образом множество $M \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^3$, увеличивая размерности комплексных торов, заменяя проекцию торов общим полиномиальным отображением, вычисляя фундаментальные классы стратов более сложных особенностей, и т.д. Однако все перечисленные вариации сводятся к сформулированной ниже универсальной Задаче 5.1.5, см. подробности в [47]. Зафиксируем конечное множество A в решетке характеров $\mathbb{Z}^n$ тора $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ и рассмотрим пространство $\mathbb{C}^A$ всех линейных комбинаций характеров из A. Для любого конечного набора S изолированных особенностей гиперповерхности рассмотрим *универсальный страт S-мультиособенности* $\{S\} \subset \mathbb{C}^A$, т.е. множество всех таких $f \in \mathbb{C}^A$, что особенности гиперповерхности $f = 0$ в $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ находятся во взаимно однозначном соответствии с особенностями набора S и эквивалентны им; более точное определение см. в разделе 5.3.1.

Problem **5.1.5.** Вычислить фундаментальный класс универсального страта
S-мультиособенности $\{S\} \subset \mathbb{C}^A$ в аффинных когомологиях тора $(\mathbb{C} \setminus 0)^A$.

Множество недавних работ можно рассматривать как решение этой проблемы для разных A и S, обзор приведен в разделе 5.3.1. Опишем наши результаты в этом направлении и некоторые их очевидные приложения.

Следствие 5.3.20 решает задачу 5.1.5 для универсального страта коразмерности 1: оно описывает многогранник Ньютона A-дискриминанта. Несмотря на то, что данный многогранник Ньютона был широко изучен (см. работы [60], [62], [35], [44], [25], [34], [156], и т.д.), даже в этом частном случае наш подход позволяет получить новый результат: следствие 5.3.20 — положительная формула для многогранника Ньютона A-дискриминанта, отличная от уже известной (см. работу [35]) и достаточная для классификации двойственно невырожденных торических многообразий.

Напомним, что проективное многообразие называется двойственно вырожденным, если его проективно двойственное многообразие не является гиперповерхностью. Мы классифицируем двойственно невырожденные торические многообразия. Напомним, что множество $B \subset \mathbb{Z}^n$ называется *контуром*, если оно состоит из $n+2$ точек, любые $n+1$ из которых аффинно независимы. Множество называется *многократным контуром*, если существует флаг

$$\varnothing = L_0 \subset \{0\} = L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_k = \mathbb{Z}^n$$

такой, что для любого $i = 1, \ldots, k$ множество $B \cap L_i \setminus L_{i-1}$ состоит из $\dim L_i - \dim L_{i-1} + 1$ точек, образы которых при проекции $L_i \to L_i/L_{i-1}$ вместе с 0 образуют контур.

Теорема **5.1.6.** *(Следствие 5.3.20.2 ниже) A-торическое многообразие двойственно невырождено если и только если, с точностью до сдвига, A содержит многократный контур.*

Решение задачи 5.1.5 для универсальных стратов A_2 и $2A_1$ коразмерности 2 следует из теорем 5.3.23, 5.3.24 и 5.3.28, обобщающих три уравнения из примера 5.1.1. Ответ проиллюстрирован для конкретного простого $A \subset \mathbb{Z}^2$ в разделе 5.3.8, другой пример см. в работе [81].

В частности, это позволяет описать многогранник Ньютона гиперповерхности $H \subset (\mathbb{C}\backslash 0)^A$ всех многочленов $f : (\mathbb{C}\backslash 0)^n \to \mathbb{C}$, не являющихся морсовскими функциями (т.е. имеющих два равных критических значения или вырожденное критическое значение), см. замечание 5.3.34. На уровне степеней (т.е. когда $A = d \cdot$ (стандартный симплекс), и мы выражаем степени множеств A_2, $2A_1$ и H через d) данные задачи решены в работах [5], а также [166] и [93] (для $n = 1$) соответственно, для квазиоднородных особенностей – в [144].

5.1.4. Аффинные характеристические классы

Теория мультиособенностей основывается на характеристических классах, и доказательства упомянутых результатов используют *аффинные характери-*

стические классы подмногообразий комплексного тора, принимающие значения в аффинном кольце когомологий C.

Теорема **5.1.7.** *Для любого алгебраического множества $V \subset (\mathbb{C}\setminus 0)^n$ характеристические классы Шварц-Макферсона множества V в торических компактификациях $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$ сходятся к некоторому классу $\alpha \in C$: существует такая торическая компактификация $X_0 \supset (\mathbb{C}\setminus 0)^n$, что ограничение α на когомологии любой более богатой гладкой торической компактификации $X \mapsto X_0$ является двойственным по Пуанкаре к характеристическому классу Шварц-Макферсона множества V в X.*

Основные сведения о классах Шварц-Макферсона см. в оригинальных статьях [94] и [122], а также, например, в обзоре [6].

Определение **5.1.8.** Предел из теоремы 5.1.7 называется *аффинным характеристическим классом* множества V и в дальнейшем будет обозначаться $\langle V\rangle$.

Данный класс наследует замечательные свойства функториальности классов Шварц-Макферсона: например, $\langle U\cap V\rangle + \langle U\cup V\rangle = \langle U\rangle + \langle V\rangle$ и $\langle U\cap gV\rangle = \langle U\rangle\langle V\rangle$ для точки $g \in (\mathbb{C}\setminus 0)^n$ общего положения. Обозначив компоненту коразмерности i множества $\langle V\rangle$ через $\langle V\rangle_i$, получим $\langle V\rangle_n = e(V)$, $\langle V\rangle_i = 0$ для $i < \operatorname{codim} V$, и $\langle V\rangle_{\operatorname{codim} V}$ является фундаментальным классом V в C.

Пример **5.1.9.** Формальная рациональная функция $\frac{N_1\dots N_k}{(N_1+1)\dots(N_k+1)}$ от многогранников Ньютона многочленов $f_1,\dots,f_k$, рассматриваемая в работе [173] и последующей литературе в связи с невырожденным полным пересечением $f_1 = \dots = f_k = 0$ в комплексном торе, оказывается равной аффиному характеристическому классу данного полного пересечения (если вычислить ее значение в аффинном кольце когомологий), подробности см. в примерах 5.2.8 и 5.2.13.

Замечание **5.1.10.** Аффинные характеристические классы, видимо, окажутся необходимы при любом подходе к решению проблемы 5.1.5, так как они

возникают сами собой уже в ответе для универсальных стратов A_2 и $2A_1$ коразмерности 2. Более точно, ответ, который дают теоремы 5.3.23, 5.3.24 и 5.3.28, представляет собой систему трех независимых линейных уравнений на фундаментальные классы стратов A_2 и $2A_1$ и ещё один неизвестный класс, который оказывается равным второму аффинному характеристическому классу дискриминанта A_1. Заметим, что уже в примере 5.1.1 третья неизвестная $e(A_1)$ может быть интерпретирована как второй аффинный характеристический класс дискриминанта.

Замечание **5.1.11.** Заметим, что в теореме 5.1.7 мы рассматриваем классы Шварц-Макферсона самого множества V, а не его замыкания в X. Утверждение теоремы очевидным образом обобщается на произвольное сферическое однородное пространство, хотя я не умею доказывать его в такой общности. В торическом случае, доказательство занимает раздел 5.2.6 и является непрямым: сначала аффинные характеристические классы строятся некоторым другим образом, и для них доказываются свойства функториальности, аналогичные таковым для классов Шварц-Макферсона. Далее, из совпадения этих свойств выводится равенство между ограничением аффинного характеристического класса на кольцо когомологий достаточно богатой компактификации и классом Шварц-Макферсона.

5.2. Аффинные характеристические классы

В разделе 5.2.1 вводятся аффинная теория пересечений и аффинные характеристические классы для произвольных сферических однородных пространств, в разделах 5.2.2 и 5.2.3 соответственно напоминается их комбинаторная модель для торического случая. Оставшаяся часть раздела 5.2 более техническая: разделы 5.2.4—5.2.6 посвящены доказательству существования аффинных характеристических классов в торическом случае, а раздел 5.2.7 посвящен характеристическим классам вырожденных полных пересечений определенного вида,

который окажется важен для нас в следующем разделе.

5.2.1. Аффинная теория пересечений и характеристические классы

Пусть G — редуктивная алгебраическая группа (т.е. комплексификация вещественой компактной связной группы), и пусть X — n-мерное сферическое однородное G-пространство (т.е. пространство с транзитивным действием G такое, что некоторая борелевская подгруппа группы G имеет плотную орбиту в X). Для алгебраических подмножеств P и $Q \subset X$ дополнительных размерностей $p+q=n$, множество $gQ = \{gq \,|\, q \in Q\}$, сдвиг Q на общий элемент $g \in G$, пересекается с P в конечном числе точек, обозначим через $|P \cdot Q|$ количество этих точек.

Обозначим пространство линейных комбинаций неприводимых алебраических подмножеств коразмерности k пространства X через Z^k; тогда упомянутое выше спаривание продолжается по линейности до спаривания $|\cdot| : Z^p \times Z^q \to \mathbb{Z}$, и пространство $C = \bigoplus_k C_k = \bigoplus_k Z_k / \{P \,|\, \forall Q \; |P \cdot Q| = 0\}$ обладает естественной структурой кольца, совместимого с данным спариванием (см. [29],[17], [55]): для алгебраических подмножеств R и $S \subset X$ произвольных размерностей, пересечения R и gS представляют один и тот же элемент пространства C для почти всех $g \in G$, и данный элемент называется *произведением* $R \cdot S$. Назовем данное кольцо **аффинными когомологиями**, или, следуя [29], **кольцом условий** пространства X.

Замечание **5.2.1.** Напомним, что для пространств, не являющихся сферическими, такого умножения не существует: например, если $G = X = \mathbb{C}^3$, то две прямые представляют один и тот же класс в C тогда и только тогда, когда они параллельны, тем не менее, поверхность $z = xy$ и прямая $x = 0$, сдвинутая на $g \in \mathbb{R}^3$, пересекаются по прямой, направление которой зависит от g.

Определение **5.2.2. Аффинный характеристический класс** — отображение, сопоставляющее каждому алгебраическому подмножеству $V \subset X$ эле-

мент $\langle V\rangle = \langle V\rangle_0 + \ldots + \langle V\rangle_n \in C$, $\langle V\rangle_i \in C_i$ и обладающее следующими свойствами:

(1) Если подмножество $V \subset X$ имеет коразмерность k, то $\langle V\rangle_i = 0$ для $i < k$, $\langle V\rangle_k$ – класс эквивалентности V в пространстве C_k, а $\langle V\rangle_n \in C_0 = \mathbb{Z}$ совпадает с эйлеровой характеристикой $e(V)$.

(2) Для произвольных U и $V \subset X$ и общего $g \in G$ верно $\langle U \cap gV\rangle = \langle U\rangle\langle V\rangle/\langle X\rangle$. Заметим, что обратимость $\langle X\rangle$ следует из свойства (1).

(3) Для любых сферических однородных пространств X и Y и любых алгебраических подмножеств $U \subset X$ и $V \subset Y$ выполняется $\langle U \times V\rangle = \langle U\rangle \times \langle V\rangle$.

(4) Отображение, которое сопоставляет элемент $\langle V\rangle$ характеристической функции V, продолжается по линейности на пространство всех конструктивных функций $X \to \mathbb{Z}$ таким образом, что $\langle U \cap V\rangle + \langle U \cup V\rangle = \langle U\rangle + \langle V\rangle$. Напомним, что *констуктивной функцией* называется линейная комбинация характеристических функций алгебраических множеств.

(5) Для морфизма $p : X \to Y$ сферических однородных пространств и алгебраического подмножества $V \subset X$ верно $p_*\langle V\rangle = \langle p_*V\rangle$. Здесь $p_*V : Y \to \mathbb{Z}$ обозначает *прямой образ в смысле Макферсона* подмножества V, значение которого в каждой точке $y \in Y$ определяется как $e\Big(p^{-1}(y) \cap V\Big)$.

(6) Для гладкой эквивариантной компактификации $\overline{X} \supset X$ такой, что аффинный характеристический класс $\langle V\rangle$ содержится в когомологиях $H^\bullet(\overline{X}) \subset C$, данный класс является двойственным по Пуанкаре к *классу Шварц-Макферсона* множества V в $\overline{X}$, см. [94] и [122]. Напомним, что естественные вложения $H^\bullet(\overline{X}) \subset C$ возникают из того факта, что C является прямым пределом $H^\bullet(\overline{X})$ по всем эквивариантным компактификациям $\overline{X} \supset X$.

Заметим, что аффинный характеристический класс однозначно определяется свойством (6) и свойствами (1–5).

Теорема **5.2.3.** *В торическом случае $G = X = (\mathbb{C} \setminus 0)^n$, аффинный характеристический класс существует, и свойство (2) имеет вид $\langle U \cap gV \rangle = \langle U \rangle \langle V \rangle$, так как $\langle X \rangle = 1$.*

Доказательство приводится в разделе 5.2.6 и использует явную комбинаторную модель кольца условий C комплексного тора. Данная комбинаторная модель широко известна как **кольцо тропических вееров** ([133], [59]), причем последние по сути – то же самое, что веса Минковского из [56] и с-веера из [162]. Аффинный характеристический класс, рассматриваемый как элемент кольца тропических вееров, мы будем всюду далее называть **тропическим характеристическим классом**.

Замечание **5.2.4.** Я не умею доказывать теорему 5.2.3 для произвольного сферического пространства X, причем эта формальная проблема – не главное препятствие к работе с аффинными характеристическими классами на произвольном X. Например, класс $\langle X \rangle$, который критически важен в связи со свойством (2), уже рассматривался в [90] под названием *некомпактного характеристического класса* X (см.также [21] и [20] о его эквивариантной версии), но даже этот класс до сих пор не вычислен для $X = SL_n$ при больших n.

Таким образом, далее мы ограничимся торическим случаем, сперва напомнив определение тропического веера с полиномиальными весами в достаточной здесь общности, и разовьем технику вычисления тропических характеристических классов до уровня, необходимого для данной работы.

5.2.2. Торическая теория пересечений и тропические вееры

Комплексный тор $G = X = (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ — единственное сферическое однородное пространство, структура кольца условий которого полностью изучена. Точнее, определение произведения-пересечения как класса $U \cap gV$ для общего $g \in G$ не конструктивно из-за слова ‘общий’. Тем не менее, для $G = X = (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ нам известен способ явно проверить, равен ли индекс пересечения алгебраических

подмножеств U и $V \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ дополнительных размерностей произведению классов U и V в кольце условий. Всюду далее мы записываем это равенство как $\langle U \cap V \rangle = \langle U \rangle \langle V \rangle$ в соответствии с нашими обозначениями для аффинных характеристических классов.

Пусть L — решетка характеров комплексного тора, а I, $J \subset \mathbb{C}[L]$ — радикальные идеалы, задающие U и V. Для линейной функции $\gamma : L \to \mathbb{Z}$ определим $\mathrm{in}_\gamma I$ как идеал, порожденный начальными членами многочленов из I в смысле частичного порядка γ на решетке мономов. Данный идеал $\mathrm{in}_\gamma I$ определяет многообразие, обозначим его $\mathrm{in}_\gamma U$.

Утверждение **5.2.5** ([162]). *Если* $\mathrm{in}_\gamma U \cap \mathrm{in}_\gamma V$ *пусто для любого отличного от нуля* $\gamma \in L^*$, *то* $\langle U \cap V \rangle = \langle U \rangle \langle V \rangle$.

В частности тот факт, что множество $\{\gamma \mid \mathrm{in}_\gamma U \neq \varnothing\}$ является полиэдральным веером, позволяет получить комбинаторное представление кольца C в виде пространства тропических вееров.

Пусть L — n-мерная целочисленная решетка. Рассмотрим пару (P, φ), где

1) $P \subset L \otimes \mathbb{R}$ — объединение конечного числа непересекающихся выпуклых относительно открытых полиэдральных конусов коразмерности k, обладающее следующим свойством: у каждой точки $p \in P$ существует окрестность, в которой P совпадает с плоскостью коразмерности k (данная плоскость обозначается $T_p P$);

2) Функция $\varphi : P \to \mathbb{R}$ представляется многочленом с рациональными коэффициентами $\varphi_p : T_p P \to \mathbb{R}$ в некоторой достаточно малой окрестности каждой точки $p \in P$.

Две такие пары (P, φ) и (Q, ψ) назовем **эквивалентными**, если $\varphi(p) = \psi(p)$ для любых точек $p \in P \cap Q$ таких, что $T_p P = T_p Q$, и $\varphi = 0$ на $P \setminus \overline{Q}$ и $\psi = 0$ на $Q \setminus \overline{P}$.

Для рациональной k-мерной плоскости $R \subset L \otimes \mathbb{R}$ и точки $x \in L \otimes \mathbb{R}$ скажем, что аффинная плоскость $R + x$ **трансверсальна** к (P, φ), если она

пересекает P в конечном множестве точек и не пересекает $\overline{P} \setminus P$. Тогда **тропический индекс пересечения** $(R+x)\cdot(P,\varphi)$ определяется как

$$\sum_{p\in(R+x)\cap P} \varphi(p)\left|\frac{L}{(R\cap L)+(T_pP\cap L)}\right|.$$

Данный индекс пересечения является локально-полиномиальной функцией от x, определенной на открытом плотном подмножестве $L\otimes\mathbb{R}$. Если данная функция продолжается до непрерывной функции $i_R : L\otimes\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ для любого R, то пара (P,φ) называется **тропической**, и **тропический индекс пересечения** $(R+x)\cdot(P,\varphi)$ определяется по непрерывности как $i_R(x)$ для любых значений x, даже если плоскость $R+x$ не трансверсальна (P,φ).

Классы эквивалентности тропических пар коразмерности k называются тропическими веерами и образуют множество $\mathcal{K}_k(L)$. Для любых двух вееров $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, существует единственный (с точностью до эквивалентности) веер $\mathcal{S}$ такой, что $\mathcal{P}\cdot R+\mathcal{Q}\cdot R=\mathcal{S}\cdot R$ для любой аффинной плоскости R. Данный веер $\mathcal{S}$ называется суммой $\mathcal{P}+\mathcal{Q}$.

Множество $\mathcal{K}_k(L)$ образует $\mathbb{Q}$-векторное пространство относительно данной операции сложения. Оно разлагается в прямую сумму $\bigoplus_d \mathcal{K}_k^d(L)$, где каждая из компонент $\mathcal{K}_k^d(L)$ состоит из пар $(P,\varphi)\in\mathcal{K}_k(L)$ таких, что φ локально является однородным многочленом степени d. Прямая сумма $\bigoplus_k \mathcal{K}_k(L)$ обозначается $\mathcal{K}(L)$ и всюду далее будет называться **пространством тропических вееров с полиномиальными весами**.

Для тропических пар $(P,\varphi)\in\mathcal{K}(L)$ и $(Q,\psi)\in\mathcal{K}(M)$, их **прямое произведение** определяется как $(P\times Q,\varphi+\psi)\in\mathcal{K}(L\oplus M)$. Для эпиморфизма решеток $f : L\to M$ размерностей n и m соответственно, **прямой образ** $f_*(\mathcal{P})$ тропического веера $\mathcal{P}\in\mathcal{K}_k(L)$, $k\geqslant n-m$, определяется как единственный веер $\mathcal{S}\in\mathcal{K}_{k-n+m}(M)$ такой, что $\mathcal{P}\cdot f^{-1}(R)=\mathcal{S}\cdot R$ для любой $(k-n+m)$-мерной плоскости $R\subset M\otimes\mathbb{Q}$.

Утверждение **5.2.6.** *Образ тропического веера $\mathcal{P}$, состоящего из $(n-k)$-мерных конусов $C_i\subset L\otimes\mathbb{R}$ с весами $m_i : C_i\to\mathbb{R}$, является тропическим*

веером $f_*\mathcal{P}$, *который состоит из всех* $(n-k)$*-мерных конусов* $f(C_i)$ *с весами* $(m_i \circ f^{-1}) \cdot \big|L/(C_i + \ker f)\big|$.

Векторное пространство $\mathcal{K}(L)$ обладает естественной структурой дифференциального кольца: **произведение-пересечение** вееров $\mathcal{P} \in \mathcal{K}_k(L)$ и $\mathcal{Q} \in \mathcal{K}_m(L)$ — единственный веер $\mathcal{S} \in \mathcal{K}_{k+m}(L)$ такой, что $\mathcal{S} \cdot R = (\mathcal{P} \times \mathcal{Q} \times R) \cdot$ (диагональ) в $(L \oplus L \oplus L) \otimes \mathbb{Q}$ для любой $(k+m)$-мерной аффинной плоскости $R \subset L \otimes \mathbb{Q}$. **дифференцированием изломов** $\delta : \mathcal{K}_k^d(L) \to \mathcal{K}_{k+1}^{d-1}(L)$ называется единственное дифференцирование в кольце $\mathcal{K}(L)$ такое, что $\delta(\mathcal{P}) \in \mathcal{K}_1^0(L)$ является многообразием углов непрерывной кусочно-линейной функции $\mathcal{P} \in \mathcal{K}_0^1(L)$.

Обозначим подкольца $\bigoplus_k \mathcal{K}_k^0(L)$ и $\bigoplus_d \mathcal{K}_0^d(L)$ кольца $\mathcal{K}(L)$ через $\mathcal{K}^0(L)$ и $\mathcal{K}_0(L)$ соответственно. Первое из них также известно как **кольцо тропических вееров** (более явное описание операций сложения и умножения в данном кольце см., например, в работах [56], [162], [133], [59]), последнее же в точности является кольцом всех непрерывных кусочно-линейных полиномиальных функций на $L \otimes \mathbb{Q}$ (относительно обычных операций сложения и умножения). Подкольца $\mathcal{K}_0(L^*)$ and $\mathcal{K}^0(L^*)$ дают хорошо известные комбинаторные модели для кольца условий C комплексного тора $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ с решеткой условий L:

$$C = \mathcal{K}^0(L^*) = \mathcal{K}_0(L^*)/I,$$

где I — идеал, порожденный линейными функциями на $\mathbb{Q}^n$. Первая из данных моделей была обнаружена в работах [56], [101] и [162], а вторая — в работах [130] и [18]. Изоморфизм между данными моделями устанавливается отображениями $\delta^k : \mathcal{K}_0^k(L^*) \to \mathcal{K}_k^0(L^*)$ (другие описания данного изоморфизма приведены в работах [19] и [83]). Элемент $\mathcal{K}^0(L^*)$, соответствующий классу подмногообразия $V \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ в кольце условий C, называется **тропическим веером** $\operatorname{Trop} V$ и допускает следующее описание:

Утверждение **5.2.7** ([162]). *Пусть* V *задано радикальным идеалом* $I \in \mathbb{C}[L]$, *тогда его тропический веер представлен парой* $(P, \varphi) \in \mathcal{K}^0\big(L^*\big)$, $P \subset$

$\mathbb{Q}^n$, $\varphi : P \to \mathbb{Q}$, *где* $P = \{\gamma \,|\, \mathbb{C}[L] \neq \mathrm{in}_\gamma I\}$, *и значение* $\varphi(\gamma)$ *равно кратности Гильберта-Самюэля идеала* $\mathrm{in}_\gamma I \subset \mathbb{C}[L]$.

Пример **5.2.8.** Если N — многогранник Ньютона полинома Лорана на комплексном торе $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$, то тропический веер гиперповерхности $f = 0$ равен многообразию углов опорной функции многогранника N. Обозначим данный веер через $[N] \in \mathcal{K}_1^0(\mathbb{Z}^n)$ и назовем его **двойственным веером** многогранника N.

Замечание **5.2.9.** Данный изоморфизм между $\mathcal{K}^0(L^*)$ и C согласован с эпиморфизмами торов ([162], [133]): эпиморфизм колец условий, индуцированный эпиморфизмом $(\mathbb{C} \setminus 0)^n \to (\mathbb{C} \setminus 0)^m$, отображается в эпиморфизм $\mathcal{K}^0(L^*) \to \mathcal{K}^0(M^*)$, индуцированный соответствующим эпиморфизмом двойственных решеток характеров $L \to M$.

5.2.3. Тропические характеристические классы

Определение **5.2.10.** Элемент кольца тропических вееров $\mathcal{K}^0\big(L^*\big)$, соответствующий аффинному характеристическому классу подмногообразия $V \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$, называется **тропическим характеристическим классом** V.

Замечание **5.2.11.** Ниже сформулированы естественные интересные вопросы о тропических характеристических классах, которые мы не рассматриваем в настоящей работе:

1. Построить "высшие многогранники Ньютона" многообразия V коразмерности k, т.е. тропические веера $B_1, B_2, \ldots$ коразмерности 1 такие, что $\langle V \rangle_{k+i} = \langle V \rangle_k B_1 \ldots B_i$. Являются ли они двойственными к выпуклым многогранникам, если многообразие V гладкое?

2. Выразить $\langle V \rangle$ в терминах произвольной (не обязательно торической!) компактификации $C \supset (\mathbb{C}\setminus 0)^n$ такой, что замыкание V трансверсально стратам C.

3. Определить и изучить “обобщенное многообразие Севери”,точками которого параметризованы все подмногообразия $V \subset (\mathbb{C}\setminus 0)^n$ с данным тропическим характеристическим классом. Классические многообразия Севери являются такими многообразиями для плоских кривых. Первый шаг в этом направлении на уровне фундаментальных классов уже сделан в [84].

4. Получить линейно-алгебраическое описание для тропического характеристического класса многообразия в терминах задающего его идеала, аналогично утверждению 5.2.7.

5. Попробовать применить тропические характеристические классы к гипотезам, сформулированным в работе [71].

Вычислим $\langle V\rangle$ в предположении, что V является **schön** многообразием, т.е. существует такой веер Σ, что замыкание V в соответствующей торической компактификации $X_\Sigma \supset (\mathbb{C}\setminus 0)^n$ гладкое и пересекает орбиты X_Σ трансверсально. Заметим, что наше определение schön многообразий содержит чуть более сильное требование, чем в оригинальной статье [136].

Для любого конуса $\Gamma \in \Sigma$ через V_Γ обозначим пересечение замыкания V с Γ-орбитой X_Σ.

Утверждение **5.2.12.** *Если V — schön многообразие, то класс $\langle V\rangle_i \in \mathcal{K}^0_i(L^*)$ представлен парой (P,φ), $P \subset \mathbb{Q}^n$, $\varphi : P \to \mathbb{Q}$, где P — объединение всех конусов коразмерности i в Σ, а значение φ на каждом таком конусе Γ равно эйлеровой характеристике $e(V_\Gamma)$.*

Доказательство мы приведем в разделе 5.2.6 – оно окажется побочным результатом нашего доказательства существования аффинных характеристических классов.

Пример **5.2.13.** В частности, если V — гиперповерхность общего положения с многогранником Ньютона Δ, то, вычисляя $e(V_\Gamma)$ по формуле Кушниренко, получим $\langle V\rangle = \frac{[\Delta]}{1+[\Delta]}$, или $\langle V\rangle_i = -(-[\Delta])^i$. Напомним, что $[B]$ — **двойственный веер** многогранника B, см. пример 5.2.8.

Далее, если $V_1, \ldots, V_k$ — набор гиперповерхностей общего положения с многогранниками Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, то, по мультипликативности аффинных характеристических классов, имеем

$$\langle V_1 \cap \ldots \cap V_k \rangle = \frac{[\Delta_1\rangle \ldots [\Delta_k]}{(1+[\Delta_1]) \ldots (1+[\Delta_k])}. \tag{1}$$

В частности, отсюда следует формула Хованского (см. [173]) для эйлеровой характеристики невырожденного полного пересечения, а правая часть равенства (1), которая возникала в [173] и последующей литературе на правах формального выражения, обретает геометрический смысл.

5.2.4. Полиномиальные функции от многогранников

В этом разделе мы подготовим инструменты из области геометрии многогранников, которые позволят нам доказать существование тропических характеристических классов. Пусть Let $P(L)$ — полугруппа выпуклых многогранников в l-мерной решетке L, а $[\cdot] : P(L) \to \mathcal{K}_1^0(L^*)$ — вложение, сопоставляющее многограннику его двойственный веер (см. пример 5.2.8). В соответствии с данными обозначениями, обозначим смешанный объем многогранников $B_1, \ldots, B_n$ в $\mathbb{Q}^n$ через $[B_1] \cdot \ldots \cdot [B_n]$.

Пусть $e_0, \ldots, e_m$ — вершины стандартного симплекса в $\mathbb{Q}^m$, $B_0, \ldots, B_m$ и $A_1, \ldots, A_k$ — многогранники в $\mathbb{Q}^n$. Рассмотрим выпуклую оболочку B объединения $\bigcup B_i \times \{e_i\}$ в $\mathbb{Q}^m$. Объем многогранника Кэли B выражается через смешанные объемы многогранников $B_0, \ldots, B_m$ – выражение дается следующим утверждением при $k = 0$:

Лемма **5.2.14.** *Для любых многогранников $A_1, \ldots, A_k \subset \mathbb{Q}^m$ верно следующее равенство:*

$$[A_1] \ldots [A_k] \sum_{\substack{b_0+\ldots+b_m=n-k \\ b_0 \geqslant 0, \ldots, b_m \geqslant 0}} [B_0]^{b_0} \ldots [B_m]^{b_m} = [A_1] \ldots [A_k][B]^{n+m-k}.$$

Доказательство следует из леммы 2.3.3 и теоремы 2.2.36.

Определение **5.2.15.** Назовем функцию $f : P(L) \to \mathbb{Q}$ полиномиальной начиная с $S \in P(L)$, если существуют тропические веера $F_i \in \mathcal{K}_i^0(L^*)$ такие, что $f(B) = \sum_i F_i[B]^{n-i}$ для любого B, содержащего S.

Замечание **5.2.16.** Коэффициенты многочлена однозначно определяются значениями функции f.

Пусть C — стандартный m-мерный симплекс в $\mathbb{Q}^m$. Для многогранника $B \subset \mathbb{Q}^n$ обозначим выпуклую оболочку объединения $B \times \{0\}$ и $\{0\} \times C$ через $C(B) \subset \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^m$. Рассмотрим $\Sigma \subset (\mathbb{Q}^m)^* \subset (\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^m)^*$, множество ковекторов, имеющих хотя бы одну строго положительную координату, т.е. все такие γ, что опорная грань C^γ не содержит 0. Напомним, что опорной гранью Δ^γ многогранника Δ относительно линейной функции γ называется множество точек, в которых ограничение $\gamma : \Delta \to \mathbb{R}$ достигает своего максимального значения. Напомним также, что грани двух многогранников называются совместимыми, если они являются опорными для одного и того же вектора.

Лемма **5.2.17.** *Для любого многогранника $\Delta \subset \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^m$ существует многогранник $S \subset \mathbb{Q}^n$ такой, что для всякого большего многогранника $B \supset S$ выполнено следующее свойство: Если грань многогранника $C(B)$, не имеющая общих точек с B, совместима с гранью $F \subset \Delta$, то $F = \Delta^\gamma$ для некоторого ковектора $\gamma \in \Sigma$.*

Доказательство. Перейдя к проекциям многогранников вдоль $(\delta, \gamma) : \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^m \to \mathbb{Q}^2$ для конечного множества пар $\delta \subset (\mathbb{Q}^m)^*$ и $\gamma \in \Sigma$, мы можем свести утверждение к случаю $m = n = 1$. Данный случай очевиден: достаточно выбрать такой S, что стороны треугольника $C(S)$ параллельны ребрам Δ, смежным с ребром $\Delta^{(0,1)}$. $\square$

Пусть $A \in \mathcal{K}_{n-k}^0(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^m)$ — тропический веер, $k \geqslant 0$.

Утверждение **5.2.18.** *Величина $A[C(B)]^{m+k}$, $k \geqslant 0$, является многочленом $P_A(B) = \sum_i P_{A,i}[B]^{n-i}$, $P_{A,i} \in \mathcal{K}_i^0(\mathbb{Z}^n)$ начиная с некоторого S. Данный*

полином мультипликативен по A: если $A \in \mathcal{K}^0(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^m)$ и $A' \in \mathcal{K}^0(\mathbb{Z}^{n'} \times \mathbb{Z}^{m'})$, то $P_{A\times A',i} = \sum_j P_{A,j} \times P_{A,i-j}$.

Доказательство. Так как кольцо $\mathcal{K}^0$ изоморфно алгебре многогранников, оно порождается своей компонентой $\mathcal{K}^0_1$ порядка 1, т.е. любой веер A представляется в виде линейной комбинации полных пересечений вида $[A_1]\dots[A_{n-k}]$ для многогранников $A_i \subset \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^m$. Тогда без ограничения общности предположим, что $A = [A_1]\dots[A_{n-k}]$. Пусть T_i — проекция A_i на $\mathbb{Q}^m$. Для любой грани F суммы $T = \sum_i T_i$ представим F в виде суммы $\sum_i \widetilde{F}_i$ граней $\widetilde{F}_i \subset T_i$ и обозначим прообраз $\widetilde{F}_i$ при проекции $A_i \to T_i$ через F_i.

Рассмотрим стандартный $|I|$-мерный симплекс C_I в $\mathbb{Q}^I \subset \mathbb{Q}^m$, где $\mathbb{Q}^I$ — координатная плоскость, заданная обращением в ноль координат с номерами $i \notin I \subset \{1,\dots,m\}$. Пусть C^0_I — его гипергрань, не содержащая 0, а $C_I(B) \subset C(B)$ — выпуклая оболочка объединения B и C_I. Для каждой грани $F \subset T$ через I_F обозначим максимальный набор I такой, что грани $C^0_I \subset C$ и $F \subset T$ совместимы (т.е. $F + C^0_I$ являтся гранью $T + C$).

Выберем произвольные $i_1 < \dots < i_p$ и j, тогда множества внутренних точек сумм $A^{\bar\imath,j}_F = F_{i_1} + \dots + F_{i_p} + jC_{I_F}(B)$ для любых двух граней $F \subset T$ не пересекаются. Ключевое наблюдение состоит в следующем: по лемме 5.2.17, существует многогранник $S \subset \mathbb{Q}^n$ такой, что для $B \supset S$ объединение $A^{\bar\imath,j}_F$ по всем граням $F \subset T$ равно $A_{i_1} + \dots + A_{i_p} + jC(B)$, таким образом, объем $A_{i_1} + \dots + A_{i_p} + jC(B)$ равен сумме объемов $A^{\bar\imath,j}_F$. Используя данное наблюдение совместно с формулой $[B_1]\dots[B_q] = \sum_{i_1<\dots<i_p} (-1)^p \operatorname{Vol}(B_{i_1} + \dots + B_{i_p})$ для любых многогранников $B_1,\dots,B_k \subset \mathbb{R}^q$, получим, что $[A_1]\dots[A_{n-k}][C(B)]^{m+k}$ равно сумме $[F_1]\dots[F_{n-k}][C_{I_F}(B)]^{m+k}$ по всем граням $F \subset T$ для $B \supset S$.

Каждое из слагаемых $[F_1]\dots[F_{n-k}][C_{I_F}(B)]^{m+k}$ является полиномом от B, потому что мы можем его вычислить, используя лемму 5.2.14 для $B_0 = B$, $B_1 = C^0_{I_F}$ и $B_{0,1} = C_{I_F}(B)$. Таким образом, мы получим явную полиномиальную формулу $\sum_i P_{A_1,\dots,A_{n-k},i}[B]^i$ для

$[A_1]\dots[A_{n-k}][C(B)]^{m+k}$. Также, используя лемму 5.2.14, можно проверить, что $P_{A_1,\dots,A_{n-k},A'_1,\dots,A'_{n'-k'},i} = \sum_j P_{A_1,\dots,A_{n-k},j} \times P_{A'_1,\dots,A'_{n'-k'},i-j}$ для $A_1,\dots,A_{n-k} \subset \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^m$ и
$A'_1,\dots,A'_{n'-k'} \subset \mathbb{Q}^{n'} \times \mathbb{Q}^{m'}$. $\square$

5.2.5. Базисные точки на бесконечности

В данном разделе мы рассмотрим семейства подмногообразий $B_s \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$, являющихся плоскими на бесконечности в следующем смысле: для любого многообразия V дополнительной коразмерности почти все B_s "не пересекаются с V на бесконечности" (т.е. V и B_s удовлетворяют предположению утверждения 5.2.5).

Пусть A и B — неприводимые алгебраические многообразия размерностей a и b, а $X \subset A \times B$ — неприводимое подмногообразие коразмерности k, проекции $\pi_A : X \to A$ и $\pi_B : X \to B$ которого сюръективны. Для любой точки $s \in A$ обозначим $\pi_B \pi_A^{-1}(s)$ через B_s.

Определение **5.2.19.** Многообразие X называется семейством подмногообразий $B_s \subset B$ (элементов семейства), параметризованное точками $s \in A$. Точка $y \in B$ называется *базисной* для семейства, если $\dim A_y > a - k$.

Следующий факт очевиден.

Лемма **5.2.20.** *Если семейство $X \subset A \times B$ не имеет base points, то любое подмногообразие $V \subset B$, коразмерность которого меньше k, имеет пустое пересечение с общим элементом семейства.*

Нам интересен следующий частный случай: $A = (\mathbb{C} \setminus 0)^a$ и $B = (\mathbb{C} \setminus 0)^b$.

Определение **5.2.21.** Говорят, что семейство $X \subset A \times B$ не имеет base points на бесконечности, если для любого ненулевого $\gamma \in \{0\} \times \mathbb{Q}^b \subset \mathbb{Q}^a \times \mathbb{Q}^b$ семейство $\mathrm{in}_\gamma X \subset A \times B$ не имеет базисных точек (обозначение in_γ введено перед утверждением 5.2.5).

Обозначим произведение-пересечение тропического веера многообразия X и $\{0\} \times \mathbb{Q}^b \subset \mathbb{Q}^a \times \mathbb{Q}^b$ через L_X.

Утверждение **5.2.22.** *1) Тропический веер общего элемента семейства $X \subset A \times B$ равен L_X.*

2) Если $X \subset A \times B$ не имеет базисных точек на бесконечности, и $V \subset B$ — k-мерное подмногообразие, тогда индекс пересечения V с общим элементом семейства корректно определен и равен тропическому индексу пересечения тропического веера V и L_X.

Доказательство. Часть (1) в точности является определением произведения в кольце условий для X и слоя π_A. Если X не имеет base points не бесконечности, то для точки $s \in A$ общего положения и любого ненулевого $\gamma \in \mathbb{Q}^b$ множество $\mathrm{in}_\gamma B_s$ либо пусто (при $\gamma \notin L_X$), либо не пересекается с $\mathrm{in}_\gamma V$, по лемме 5.2.20 (при $\gamma \in L_X$, так как X не имеет base points на бесконечности). Таким образом, утверждение 5.2.5 применимо к B_s и V. □

Особый интерес для нас представляют следующие два частных случая. Напомним, что для конечного подмножества A решетки характеров комплексного тора мы обозначаем пространство линейных комбинаций характеров из A через $\mathbb{C}^A$.

Пример **5.2.23.** Очевидно, что семейство плоскостей $\{f \in \mathbb{C}^A \mid f(g) = 0\}$ при любых $g \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ не имеет базисных точек на бсконечности.

Определение **5.2.24.** a-логарифмическим дифференциалом $f \in \mathbb{C}^A$, $A \subset \mathbb{Z}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$, называется отображение $\mathrm{dlog}_a f = (x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - a_1 f, \dots, x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} - a_n f)$.

Лемма **5.2.25.** *Графики $\mathrm{dlog}_a f$ для $a \in \mathbb{C}^n \setminus$ (объединение аффинных оболочек гиперграней A) и $f \in \mathbb{C}^A$ образуют семейство $(\mathbb{C} \setminus 0)^n \times (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ без базисных точек на бесконечности.*

Доказательство. Для любых $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ и любой нетривиальной грани $F \subset A$ размерность множества всех пар $\Big(a = (a_1, \dots, a_n),$

$f = \sum_{b\in A} c_b x^b\Big)$, удовлетворяющих равенствам $y_i = \sum_{b\in F}(b_i - a_i)c_b x^b$, $i = 1,\dots,n$, не зависит от (x,y). $\square$

5.2.6. Существование характеристических классов

Допуская некоторую вольность в обозначениях, для произвольного ограниченного подмножества $B \subset \mathbb{R}^n$ пространство полиномов Лорана вида $\sum_{b\in B} c_b x^b$ мы будем обозначать через $\mathbb{C}^B$ вместо $\mathbb{C}^{B\cap\mathbb{Z}^n}$. Рассмотрим гладкое подмногообразие $V \subset (\mathbb{C}\setminus 0)^n$.

Определение **5.2.26. логарифмически конормальным многообразием** $\mathcal{V} \subset (\mathbb{C}\setminus 0)^n \times (\mathbb{C}\setminus 0)^n \subset T^*(\mathbb{C}\setminus 0)^n$ многообразия V называется множество всех пар (x,l), где $x \in V$, а ограничение $\sum l_i \frac{dx_i}{x_i}$ на $T_x V$ равно 0.

Наша идея — доказать, что коэффициенты многочлена $P_{\operatorname{Trop}\mathcal{V}}$ (данное обозначение см. в утверждении 5.2.18) удовлетворяют свойствам тропических характеристических классов многообразия V. Для начала заметим, что следующая лемма является следствием утверждения 5.2.22 и леммы 5.2.25.

Лемма **5.2.27.** *Индекс пересечения $\mathcal{V}$ с графиком $\operatorname{dlog}_a f$ в $(\mathbb{C}\setminus 0)^n\times(\mathbb{C}\setminus 0)^n$ равен тропическому индексу пересечения $\operatorname{Trop}\mathcal{V}$ с $[C(B)]^n$.*

Определение **5.2.28.** Обозначим эйлерову характеристику $e(V \cap \{f_1 = \dots = f_i = 0\})$ для $f_1 \in \mathbb{C}^{B_1},\dots,f_i \in \mathbb{C}^{B_i}$ общего положения через $e(V, B_1,\dots,B_i)$.

Здесь достаточно следующего явного условия общего полоежния на $f_1,\dots,f_i$ (доказательство стандартно).

Лемма **5.2.29.** *Выберем гладкую торическую компактификацию $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$, веер которой совместим с целочисленными многогранниками $B_1,\dots,B_k$ в $\mathbb{Q}^n$, так чтобы пересечение замыкания $\overline{M}$ многообразия M с орбитами было собственным (см., например, [161] или [136]). Пусть* $\mathbf{M}$ *— стратификация Уитни $\overline{M}$, совместимая с разбиением на орбиты объемлющего торического мно-*

гообразия. Наборы $(f_1, \dots, f_k) \in \mathbb{C}^{B_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^{B_k}$ *такие, что замыкание множества* $f_{i_1} = \dots = f_{i_p} = 0$ *гладко и трансверсально всем стратам* $\mathbf{M}$ *для любой последовательности* $i_1 < \dots < i_p$*, образуют непустое открытое по Зарисскому подмножество в* $\mathbb{C}^{B_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^{B_k}$*. Эйлерова характеристика* $e(M \cap \{f_1 = \dots = f_k = 0\})$ *одинакова для всех наборов* $(f_1, \dots, f_k)$ *в данном открытом по Зарисскому множестве.*

Числа $e(V, B_1, \dots, B_i)$ удовлетворяют следующему свойству высшей аддитивности (ср. с высшей аддидивностью для многогранинков Ньютона дискриминантов в [44]).

Лемма **5.2.30.** *Верно следующее равенство:*

$$e(M, B_0 + B_0', B_1, \dots, B_k) + 2e(M, B_0, B_0', B_1, \dots, B_k) =$$

$$= e(M, B_0, B_1, \dots, B_k) + e(M, B_0', B_1, \dots, B_k) + e(M, B_0 + B_0', B_0, B_0', B_1, \dots, B_k).$$

Доказательство. Сравним эйлеровы характеристики аффинного многообразия $M \cap \{gh = f_1 = \dots = f_k = 0\}$ и его сглаживания $M \cap \{gh + \varepsilon f = f_1 = \dots = f_k = 0\}$ для $g \in \mathbb{C}^{B_0}$, $h \in \mathbb{C}^{B_0'}$, $f \in \mathbb{C}^{B_0 + B_0'}$ общего положения. □

Утверждение **5.2.31.** *Если* $\mathcal{V}$ *непусто, то существует такой многогранник* $S \subset \mathbb{Q}^n$*, что для любого* n*-мерного многогранника* $B \supset S$*, верно следующее равенство:*

$$e(V, B) = e(V) - (-1)^{\dim V} P_{\mathrm{Trop}\,\mathcal{V}}(B) = e(V) - (-1)^{\dim V} \sum_j P_{\mathrm{Trop}\,\mathcal{V},j}[B]^{n-j}.$$

Доказательство. Для $f \in \mathbb{C}^B$ общего положения в смысле леммы 5.2.29 и внутренней точки a многообразия B, стандартное применение теории Морса для функции $h : V \to \mathbb{R}$, $h(x) = |f(x)/x^a|$ дает $e(V, B) = e(V) - (-1)^{\dim V} \cdot$ (количество критических точек h). Клюбевое наблюдение заключается в том, что количество критических точек равно индексу пересечения $\mathcal{V}$ и графика $\mathrm{dlog}_a f$. Последний, по лемме 5.2.27, равен тропическому индексу пересечения

$\operatorname{Trop}\mathcal{V}$ и $[C(B)]^n$, который, в свою очередь, равен $P_{\operatorname{Trop}\mathcal{V}}(B)$ начиная с некоторого многогранника по утверждению 5.2.18. $\square$

Мы можем избавиться от предположения о непустоте конормального многообразия следующим образом.

Утверждение **5.2.32.** *1) Если $\mathcal{V}$ пусто, то V сохраняется под действием некоторого нетривиального подтора в $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$.*

2) Пусть $(\mathbb{C}\setminus 0)^k$ — подтор максимальной размерности в $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$, сохраняющий V, так что $V = V'\times(\mathbb{C}\setminus 0)^k$, тогда существует такой многогранник $S\subset\mathbb{Q}^{n-k}$, что для любого n-мерного $B\supset S$ верно

$$e(V,B) = -(-1)^{\dim V+k}P_{\operatorname{Trop}\mathcal{V}'}(B).$$

Доказательство такое же, как для утверждения 5.2.31: пусть $x_1,\dots,x_n$ — мономиальные координаты на $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$ такие, что $(\mathbb{C}\setminus 0)^k = \{x_{k+1} = \dots = x_n = 1\}$, тогда множество критических точек h может быть представлено как пересечение $\mathcal{V}'\times(\mathbb{C}\setminus 0)^k$ и множества $\{(x,y)\,|\,y_i = x_i\frac{\partial f}{\partial x_i} - a_i f$ для $i\leqslant k$ и $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ для $i>k\}$.

Утверждение **5.2.33.** *Существует многогранник $S\subset\mathbb{Q}^n$ такой, что для многогранников $B_0,\dots,B_m\supset S$ верно $e(V,B_0,\dots,B_m) =$*

$$e(V) - (-1)^{\dim V}\Big(P_{\operatorname{Trop}\mathcal{V},n} + (-1)^m\textstyle\sum_{j<n-m}P_{\operatorname{Trop}\mathcal{V},j}\sum\limits_{\substack{b_0+\dots+b_m=n-j\\ b_0\in\mathbb{N},\dots,b_m\in\mathbb{N}}}[B_0]^{b_0}\dots[B_m]^{b_m}\Big).$$

Доказательство. В обозначениях леммы 5.2.14, пусть f_I — многочлен $\sum_{i\in I}\lambda_i f_i$ на $(\mathbb{C}\setminus 0)^n\times(\mathbb{C}\setminus 0)^I$, и пусть B_I — его многогранник Ньютона. Рассмотрим действие комплексной окружности $(\mathbb{C}\setminus 0)$ на $(\mathbb{C}\setminus 0)^I$ покомпонентным умножением и проекцию $\pi_I : (\mathbb{C}\setminus 0)^n\times(\mathbb{C}\setminus 0)^I\to(\mathbb{C}\setminus 0)^n$. По аддитивности эйлеровой характеристики, искомая эйлерова характеристика $e(V\cap\{f_0=\dots=f_m=0\})$ равна $\sum_I e\Big(\{f_I=0\}\cap(V\times(\mathbb{C}\setminus 0)^n)/(\mathbb{C}\setminus 0)\Big) - me(V)$, так как ограничение проекции $\mathbb{CP}^m\times V\to V$ на $\{\sum_i\lambda_i f_i\}/(\mathbb{C}\setminus 0)$ имеет слои $\mathbb{CP}^{m-1}$ над точками из $\{f_0=\dots=f_m=0\}$ и $\mathbb{CP}^m$ над остальными точками V.

Используя утверждение 5.2.31 или 5.2.32, выразим $e\Big(\{f_I=0\}\cap(V\times(\mathbb{C}\setminus 0)^n)/(\mathbb{C}\setminus 0)\Big)$ для каждого I через $P_{\operatorname{Trop}\mathcal{V}}(B_I)$ и упростим ответ с помощью леммы 5.2.14. □

Утверждение **5.2.34.** *Если $\mathcal{V}$ непусто (т.е. $V\subset(\mathbb{C}\setminus 0)^n$ не сохраняется под действием нетривиальных торов), то старший моном многочлена $P_{\operatorname{Trop}\mathcal{V}}(B)$ равен $\operatorname{Trop}(V)[B]^{\dim V}$, а постоянный член равен $(-1)^{\dim V}e(V)$.*

Доказательство. Равенства $P_{\operatorname{Trop}\mathcal{V},j}=0$, $j<n-\dim V$, $P_{\operatorname{Trop}\mathcal{V},n-\dim V}=\operatorname{Trop}V$ и $P_{\operatorname{Trop}\mathcal{V},n}=(-1)^{\dim V}e(V)$ следуют из утверждения 5.2.33 для $m=\dim V-1$, так как $e(V,B_0,\dots,B_m)$ равна $[B_0]\dots[B_m]\operatorname{Trop}V$ для всех $B_0,\dots,B_m$. □

Утверждение **5.2.35.** *Равенство в утверждении 5.2.33 выполняется без предположений $\dim B=n$ и $B\supset S$.*

Доказательство. Для $m=\dim V-1$ утверждение следует из утверждения 5.2.34. Предположим, что для всех m, больших некоторого m_0, утверждение доказано. Тогда мы можем доказать его для $m=m_0$ индукцией по числу p многогранников B_i, не содержащих S или имеющих размерность меньше n. В случае $p=0$ доказываемое утверждение совпадает с утверждением 5.2.33. Если $p>0$, применим лемму 5.2.30 для $k=m$, $B_0,\dots,B_{p-1}$, содержащих S и имеющих размерность n, и произвольных $B_0',B_p,\dots,B_m$. Заметим, что сумма B_0+B_0' также n-мерна и содержит S, следовательно, все слагаемые в равенстве леммы 5.2.30, кроме $e(M,B_0',B_1,\dots,B_m)$, могут быть вычислены по предположению индукции. Используя данное наблюдение, вычислим $e(M,B_0',B_1,\dots,B_m)$ и получим искомую формулу. □

Определение **5.2.36.** Пусть $V:(\mathbb{C}\setminus 0)^n\to\mathbb{R}$ — конструктивная функция (т.е. линейная комбинация характеристических функций алгебраических подмножеств). Определим ее характеристический класс $\langle V\rangle=\sum_i\langle V\rangle_i$, $\langle V\rangle_i\in\mathcal{K}_i^0(\mathbb{Z}^k)$, следующим образом.

1) Если V — гладкое подмногообразие (или его характеристическая функция) $W \subset (\mathbb{C}\setminus 0)^n$, то определим $\langle W\rangle_i$ как $(-1)^{i+n+\dim W} P_{\operatorname{Trop} \mathcal{W},i}$.

2) Если V – гладкое подмножество в $\{f \neq 0\}$, $f : (\mathbb{C}\setminus 0)^n \to \mathbb{C}$ (или его характеристическая функция), то определим $\langle W\rangle_i$ как образ $\langle V \times (\mathbb{C}\setminus 0) \cap ($ график $f)\rangle_i$ при проекции $(\mathbb{C}\setminus 0)^n \times (\mathbb{C}\setminus 0) \to (\mathbb{C}\setminus 0)^n$.

3) Произвольную конструктивную функцию V представим в виде линейной комбинации $\sum_i \alpha_j V_j$ функций V_i вида (2) и положим $\langle V\rangle_i$ равным $\sum_j \alpha_j \langle V_i\rangle_j$.

Теорема **5.2.37.** *1) Для любых целочисленных многогранников $B_1, \dots, B_k$ в $\mathbb{Q}^n$ и $f_i \in \mathbb{C}^{B_i}$ общего положения интеграл эйлеровой характеристики V по $\{f_1 = \dots = f_k = 0\}$ (см., например, [94] и [145]) равен*

$$(-1)^{\dim V+k} \sum_{j\leqslant n-k} \langle V\rangle_j \sum_{\substack{b_1+\dots+b_k=n-j\\ b_1\in\mathbb{N},\dots,b_k\in\mathbb{N}}} [B_1]^{b_1}\dots[B_k]^{b_k}.$$

2) Верно равенство $\langle U\times V\rangle = \langle U\rangle \times \langle V\rangle$.

3) $\langle V\rangle_n$ равен интегралу эйлеровой характеристики V.

4) $\langle V\rangle$ не зависит от разложения V в линейную комбинацию характеристических функций, выбранного в определении 5.2.36.

5) Для $c \in (\mathbb{C}\setminus 0)^n$ общего положения, верно $\langle U \cap (cV)\rangle = \langle U\rangle\langle V\rangle$.

6) Для общей гиперповерхности V с многогранником Ньютона Δ верно равенство $\langle V\rangle = \frac{[\Delta]}{1+[\Delta]}$.

Доказательство. Для характеристических функций гладких подмногообразий торов (1) совпадает с утверждением 5.2.35, (3) — с утверждением 5.2.34, а (2) следует из мультипликативности $P_A(B)$ (см. утверждение 5.2.18). Для произвольных характеристических функций (1,2,3) следуют из аддитивности эйлеровой характеристики. Из них следует (4), так как $\langle V\rangle_i$, $i < n$, определяются однозначно условием (1) для $k = 1$, и $\langle V\rangle_n$ однозначно определяется условием (3). Чтобы доказать (5), представим $U\cap(cV)$ в виде $U\times V\cap\{(x,y)\,|\,x_i - c_i y_i = 0\}$, тогда доказываеоме равенство следует из (1,2). Часть (6) следует из утвержде-

ния 5.2.31, так как вычислив $e(V,B)$ из его формулировки по формуле Кушниренко-Бернштейна-Хованского [173], получим $P_{\mathrm{Trop}\,\nu,j} = [\Delta]^j$. $\square$

Докажем теперь связь между тропическими характеристическими классами и классами Шварц-Макферсона (см. часть 6 определения 5.2.2 и утверждение 5.2.12). Для этого напомним описание кольца когомологий гладкого торического многообразия через тропические веера. Пусть Σ — $\mathbb{Z}$-простой веер, и пусть X_Σ — соответствующая гладкая торическая компактификация тора $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$. Мы говорим, что k-мерный тропический веер (P,φ) **совместим** с Σ, если его носитель P содержится в объединении k-мерных конусов Σ.

Утверждение **5.2.38** ([18], [56]). *Кольцо когомологий X_Σ естественно изоморфно кольцу тропических вееров, совместимых с Σ. Данный изоморфизм отображает класс когомологий α коразмерности k в тропический веер (P,φ), где P — объединение k-мерных конусов Σ, а значение φ на каждом из этих конусов C равно ограничению α на замыкание C-орбиты многообразия X_Σ.*

Мы отождествляем когомологии и гомологии многообразия X_Σ, по двойственности Пуанкаре. Для подмногообразия $V \subset (\mathbb{C}\setminus 0)^n$ мы рассматриваем класс Шварц-Макферсона $c^{SM}_{i,\Sigma}(V) \subset H^i(X_\Sigma)$ незамкнутого множества $V \subset X_\Sigma$ как тропический веер, совместимый с Σ.

Теорема **5.2.39.** *1) Если замыкание V в X_Σ гладко и трансверсально орбитам, то кратность каждого конуса $C \in \Sigma$ в тропическом веере $c^{SM}_{i,\Sigma}(V)$ равна эйлеровой характеристике* (замыкание V) $\cap$ (C-орбита).

2) Для произвольного $U \subset (\mathbb{C}\setminus 0)^n$ и полного пересечения общего положения $V \subset (\mathbb{C}\setminus 0)^n$, заданного уравнениями с многогранниками Ньютона $N_1,\dots,N_k$, двойственные веера $[N_1],\dots,[N_k]$ которых совместимы с Σ, верно $c^{SM}_\Sigma(U\cap V) = c^{SM}_\Sigma(U)c^{SM}_\Sigma(V)$.

3) Для произвольного $U \subset (\mathbb{C}\setminus 0)^n$ выберем Σ, совместимое с тропическим характеристическим классом $\langle U\rangle$, построенным выше. Тогда $\langle U\rangle$ равен

$c_\Sigma^{SM}(U)$.

Лемма **5.2.40.** *(см. теорему 3.1 в [7]) Пусть M — гладкое компактное многообразие, $V \subset M$ — произвольное подмногообразие, а D —- гладкая гиперповерхность, трансверсальная V. Тогда 1) $c^{SM}(V \cap D) = c^{SM}(V) \cdot c^{SM}(D)$ в кольце когомологий $H^\bullet(M)$,*

2) $c^{SM}(V \cap D) \in H^\bullet(D)$ равен ограничению $c^{SM}(V \setminus D) \in H^\bullet(M)$.

Доказательство теоремы 5.2.39. Часть 1 следует из леммы 5.2.40(2) и утверждения 5.2.38, так как старший класс Шварц-Макфкрсона равен эйлеровой характеристике. Часть 2 следует из леммы 5.2.40(1) для гиперповерхности общего положения V и доказывается по индукции для общего полного пересечения V.

Часть 3 для общего полного пересечения следует из части теоремы 5.2.37(6). Для произвольного U выберем общее полное пересечение V такое, что двойственные веера многогранников Ньютона его уравнений совместимы с Σ. Тогда $c_\Sigma^{SM}(V) = \langle V \rangle$, и старшие компоненты $c_\Sigma^{SM}(U) \cdot c_\Sigma^{SM}(V)$ и $\langle U \rangle \cdot \langle V \rangle$ равны эйлеровой характеристике $U \cap V$ (по части 2 и теореме 5.2.37(5) соответственно). Данное равенство для поизвольного V влечет $\langle U \rangle = c_\Sigma^{SM}(U)$, так как кольцо когомологий многообразия X_Σ порождается полными пересечениями, и умножение когомологий дополнительных размерностей является невырожденной билинейной формой. □

5.2.7. Характеристические классы критических полных пересечений

Невырожденные полные пересечения представляют собой наиболее простой пример schön многообразий. Нам понадобится следующий по сложности пример: множество критических точек проекции $\{f = 0\} \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n \xrightarrow{p} (\mathbb{C} \setminus 0)^k$, где f — полином Лорана с коэффициентами общего положения, а p — морфизм комплексных торов. Данное полное пересечение является вырожденным и, тем не менее, schön, как мы докажем ниже.

Обозначим $(n+1)$-мерное пространство аффинных линейных функций на $\mathbb{Z}^n$ через $(\mathbb{Z}^n)^\star$, во избежание путаницы с двойственным пространством $(\mathbb{Z}^n)^*$. Каждому подпространству $L \subset \mathbb{Z}^n$ сопоставим множество $L^\perp \subset (\mathbb{Z}^n)^\star$ всех аффинных функций на $\mathbb{Z}^n$, обращающихся в ноль на L. Для полинома Лорана $f(x) = \sum_{b\in\mathbb{Z}^n} c_b x^b$ на $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$ со стандартными координатами $x = (x_1, \dots, x_n)$ и элемента $\alpha \in (\mathbb{Z}^n)^\star$ обозначим полином $\sum_{b\in\mathbb{Z}^n} \alpha(b) c_b x^b$ через $\partial_\alpha f$.

Пример **5.2.41.** Если α — i-ая координатная функция, то $\partial_\alpha f = x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Определение **5.2.42.** Множество $\{\partial_D f = 0\} \subset (\mathbb{C}\setminus 0)^n$, заданное уравнениями $\partial_\alpha f = 0$, $\alpha \in D$, называется **критическим полным пересечением**.

Утверждение **5.2.43.** *1) Для любого конечного подмножества $B \subset \mathbb{Z}^n$, любого векторного подпространства $D \subset (\mathbb{Z}^n)^\star$ и полинома Лорана общего положения $f(x) = \sum_{b\in B} c_b x^b$ критическое полное пересечение $\{\partial_D f = 0\}$ действительно является регулярным полным пересечением.*

2) Более того, оно является schön.

Заметим, что schön полное пересечение $\{\partial_D f = 0\}$, вообще говоря, не является невырожденным относительно своего многогранника Ньютона даже для f общего положения: например, если $f \in \mathbb{C}[x, y]$ — многочлен общего положения с даннным многоугольником Ньютона N, то ограничения уравнений $f = y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ на каждое из горизонтальных ребер многоугольника N совместны, так как ограничение $y\frac{\partial f}{\partial y}$ пропорционально ограничению f.

Часть 1 утверждения 5.2.43 является стандартным следствием теоремы Бертини–Сарда, см. следующий абзац. Доказательство части 2, включающее в себя явную конструкцию schön компактификации, занимает оставшуюся часть данного раздела.

Доказательство части 1. Без ограничения общности, предположим, что B не содержится в аффинной гиперплоскости. Тогда мы можем выбрать базис $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ в D и точки $b_0, \dots, b_k$ в B такие, что матрица $\alpha_i(b_j)$ является

треугольной и невырожденной, т.е. $\partial_{\alpha_i} f$ не зависит от $c_{b_{i+1}}, \dots, c_{b_k}$. Тогда, индукцией по i, мы можем доказать, что $\partial_{\alpha_0} f = \dots = \partial_{\alpha_i} f = 0$ является регулярным полным пересечением для почти всех f: для любого i положим c_{b_i} равным регулярному значению ограничения функции $-\sum_{b \in B \setminus \{b_i\}} \frac{\alpha_i(b)}{\alpha_i(b_i)} c_b x^{b-b_i}$ на регулярное множество $\partial_{\alpha_0} f = \dots = \partial_{\alpha_{i-1}} f = 0$. $\square$

Доказательство части 2 основано на явной конструкции schön компактификации для $\{\partial_D f = 0\}$. Для ее описания нам понадобятся следующие обозначения. Для любых $\gamma \in (\mathbb{Z}^n)^\star$ и $B \subset \mathbb{Z}^n$ через B^γ обозначим множество точек, в которых ограничение функции γ на B достигает своего максимума. Для любой последовательности множеств $B_k \subset \mathbb{Z}^n$ обозначим аффинную оболочку объединения $\bigcup_{i<k} B_k$ через $B_{<k}$.

Определение **5.2.44.** 1) Для произвольной функции $\gamma \in (\mathbb{Z}^n)^\star$, определим последовательность подмножеств $B^\gamma_k \subset B$ индукцией по $k \geqslant 0$следующим образом: множество B^γ_k состоит из всех точек, в которых ограничение функции γ на $B \setminus B^\gamma_{<k}$ достигает своего максимума, и так далее, пока не выполнено равенство $(B^\gamma_{<k})^\perp \cap D = 0$, в последнем случае B_k не определено.

2) Для конечной последовательности непустых непересекающихся множеств $B_k \subset B$, конус $C_{B_\bullet}$ — множество всех $\gamma \in (\mathbb{Z}^n)^*$ таких, что последовательность B^γ_k совпадает с последовательностью B_k. Обозначим веер, состоящий из конусов $C_{B_\bullet}$, где $B_\bullet$ пробегает множество всех последовательностей подмножеств множества B, через C_B.

Замечание **5.2.45.** Коразмерность непустого конуса $C_{B_\bullet}$ равна размерности $\sum_i B_i$.

Пример **5.2.46.** Пусть $B = \{0, e_1, e_2, e_3\}$ — стандартный симплекс в $\mathbb{R}^3$, а D порождается функциями 1 и $x + y$. Тогда C_B — минимальное подразбиение двойственного веера симплекса B прямой, натянутой на $x + y$. Например, одномерный конус, порожденный функцией $-x - y$, соответствует последовательности $B_\bullet = (B_0, B_1) = (\{0, e_1\}, \{e_2, e_3\})$.

Утверждение 5.2.43(2) можно подробнее переформулировать следующим образом. Для каждой последовательности непересекающихся множеств $B_k \subset \mathbb{Z}^n$ выберем разложение в прямую сумму $D = \bigoplus_i B^i$ такое, что сумма $\bigoplus_{i \geqslant k} B^i$ равна $B^\perp_{<k} \cap D$ для всех k. Для любого подмножества $B' \subset B$ и многочлена $f(x) = \sum_{b \in B} c_b x^b$ обозначим **ограничение f на B'** через $f^{B'}(x) = \sum_{b \in B'} c_b x^b$.

Выберем произвольное подразбиение $\widetilde{C}_B$ веера C_B такое, что $\widetilde{C}_B$-торическое многообразие гладко. Для каждого конуса $C_{B_\bullet}$ орбиты $\widetilde{C}_B$-торического многообразия, соответсвующие подконусам $C_{B_\bullet}$, мы будем называть $C_{B_\bullet}$-орбитами.

Утверждение **5.2.47.** *1) Для почти всех f вида $\sum_{b \in B} c_b x^b$ замыкание критического полного пересечения $\{\partial_D f = 0\}$ в $\widetilde{C}_B$-торическом многообразии гладко и пересекает его орбиты трансверсально.*

2) Замыкание $\{\partial_D f = 0\}$ пересекает $C_{B_\bullet}$-орбиту по тому же множеству, что и замыкание множества, заданного уравнениями $\partial_{B^i} f^{B_i} = 0$ для всех i.

Доказательство. Выберем базис $\alpha_{0i}, \dots, \alpha_{k_i i}$ в каждом из множеств B_i. Объединение данных базисов образует базис в D. Для любой линейной функции $l \in C_{B_\bullet}$ максимум l на многограннике Ньютона многочлена $\partial_{\alpha_{ji}} f$ достигается на его грани B_i. Таким образом, пересечение $C_{B_\bullet}$-орбиты и замыкания множества $\{\partial_D f = 0\}$ содержится в пересечении данной $C_{B_\bullet}$-орбиты и замыкания множества $\cap_{i,j}\{\partial_{\alpha_{ji}} f = 0\}$ и в то же время содержит регулярную часть второго из пересечений. С другой стороны, второе пересечение регулярно для f общего положения, так как для любого i уравнения $\partial_{B^i} f^{B_i} = 0$ задают регулярное множество S_i, по утверждению 5.2.43(1), и, для $c_i \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ общего положения, множества $c_i S_i$ пересекаются трансверсально. Таким образом, мы доказали, что пересечение замыкания множества $\{\partial_D f = 0\}$ с каждой $C_{B_\bullet}$-орбитой регулярно для любого конуса $C_{B_\bullet}$ и задается уравнениями $\partial_{B^i} f^{B_i} = 0$. Это завершает доказательство утверждений 5.2.47 и 5.2.43. □

С помощью утверждения 5.2.12 вычисление тропических характеристиче-

ских классов критических полных пересечений можно свести к вычислению эйлеровых характеристик критических полных пересечений. Для любой последовательности $B_\bullet$ через $Z_{B_\bullet}$ обозначим $\Big($множество, заданное уравнениями $\partial_{B^i} f^{B_i} = 0$ для всех $i\Big)\Big/\Big($подтор в $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$, порожденный всеми t^γ, где γ пробегает $C_{B_\bullet}\Big)$.

Следствие **5.2.48.** *j-й тропический характеристический класс $\{\partial_D f = 0\}$ состоит из конусов $C_{B_\bullet}$, соответствующих всем последовательностям $B_\bullet$, таким что $j = \dim \sum_i B_i$, с кратностями, равными Эйлеровым характеристикам множеств $Z_{B_\bullet}$.*

Замечание **5.2.49.** Для большинства последовательностей $B_\bullet$, конус $C_{B_\bullet}$ либо пуст, либо имеет кратность 0. В частности, $C_{B_\bullet}$ может оказаться непустым только в том случае, если множества B_i непустые и попарно непересекающиеся, а B_0 содержится в границе выпуклой оболочки B. Кратность $C_{B_\bullet}$ равна 0, когда $\dim D \cap B^\perp_{<k} > \dim \sum_{i<k} B_i$ для некоторого k.

В ситуации, которой посвящена данная работа, все множества вида $Z_{B_\bullet}$ устроены очень просто (точки и прямые). Однако заметим, что эйлерову характеристику такого множества можно вычислить и в общем случае. Так мы, например, вычислим ответ для 0–мерных критических полных пересечений.

Обозначения. Предположим, что $D \subset (\mathbb{Z}^n)^\star$ — гиперплоскость. Она однозначно задается, как общий ноль $z \in \mathbb{RP}^n$ всех аффинных линейных функций $\alpha \in D$. Пусть $\mathfrak{A}$ — множество $\{\Gamma \,|\, \Gamma$ — грань выпуклой оболочки множества A, и аффинная оболочка Γ содержит $z\}$. Пусть $N(A, D)$ — сумма $\sum_{\Gamma\in\mathfrak{A}} e^\Gamma_A \operatorname{Vol}\Gamma$, где e^Γ_A — эйлерово препятствие множества A в Γ.

Лемма **5.2.50.** *Если A порождает $\mathbb{Z}^n$, а D — гиперплоскость, то для полинома Лорана $f(x) = \sum_{a\in A} c_a x^a$ общего положения 0-мерное критическое полное пересечение $\{\partial_D f = 0\}$ состоит из $N(A, D)$ точек.*

Это фактически формула Кушниренко-Бернштейна в ситуации, когда некоторые корни скрылись на бесконечности (т.е. на орбитах A-торического многообразия, соответствующих граням из $\mathfrak{A}$).

5.3. Аффинные формулы Плюккера

В разделе 5.3.1 описана проблематика аффинной теории мультиособенностей. Ее связь с тропической перечислительной геометрией в общих чертах описана в разделе 5.3.2. Разделы 5.3.3—5.3.5 посвящены аффинной версии формул Плюккера: тропический веер универсального страта мультиособенности коразмерности 1 (т.е. многогранник Ньютона A-дискриминанта для двойственно невырожденного множества $A \subset \mathbb{Z}^n$) вычисляется в разделе 5.3.3; в разделе 5.3.4 сформулированы дополнительные условия на множество A (2-версальность), играющие роль двойственной невырожденности для универсальных стратов мультиособенностей коразмерности 2; тропические веера данных стратов описаны в разделе 5.3.5 (доказательство см. в разделе 5.3.7). Пример явного вычисления ответа в одном простом частном случае приведен в разделе 5.3.8.Применение аффинных формул Плюккера требует довольно утомительных вычислений, связанных с вторичными веерами; эти вычисления можно упростить с помощью формулы объема расслоенного тела, приведенной в разделе 5.3.6.

5.3.1. Аффинная теория мультиособенностей

Теория особенностей – это отношение эквивалентности на множестве ростков алгебраических многообразий. Класс эквивалентности называется особенностью.

Пример **5.3.1.** Мы изучим особенности типов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Особенность типа $\mathcal{A}_i$ — класс ростков гиперповерхностей в $\mathbb{C}^n$,которые в подходящих локальных координатах можно представить в виде $x_1^{i+1} + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0$. В частности,

при $n = 2$ особенностями типа $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ являются ноды и каспы плоских кривых, и мы в дальнейшем будем обозначать их символами $\times$ и $\prec$ соответственно. Они являются двумя простейшими особенностями при любом естественном отношении эквивалентности на множестве ростков алгебраических многообразий (топологическая, гладкая, аналитическая и т.д.)

Конечный набор изолированных особенностей $S = (S_1, \ldots, S_k)$ называется мультиособенностью. Стратом S-мультиособенности собственного морфизма алгебраических многообразий $N \to M$ называется множество всех точек $x \in M$, прообразы которых имеют в точности k особенностей $S_1, \ldots, S_k$. Одна из первоочередных целей теории мультиособенностей — описать топологию (например, класс гомологий) страта мультиособенности через топологию (например, характеристические классы) многообразий M и N при условии, что морфизм "достаточно общий".

Однако изучение классов гомологий бессодержательно при изучении стратов мультиособенностей полиномиальных отображений $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ или $(\mathbb{C} \setminus 0)^n \to (\mathbb{C} \setminus 0)^m$, как объяснялось во введении. Теорию мультиособенностей в этой аффинной ситуации можно понимать следующим образом: общее отображение $f = (f_1, \ldots, f_m)$ — отображение, компоненты f_i которого являются общими линейными комбинациями данного набора мономов. Основной целью нашей теории мультиособенностей является описание классов когомологий стратов мультиособенностей отображения f в кольце условий тора $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$, т.е. в кольце тропических вееров $\mathcal{K}^0(\mathbb{Z}^n)$.

Вместо того, чтобы изучать отдельные отображения, мы сначала изучим **универсальный случай**: отождествим элементы решетки $\mathbb{Z}^n$ с мономами от переменных $x_1, \ldots, x_n$, через $\mathbb{C}^A$ обозначим пространство линейных комбинаций мономов из конечного подмножества $A \subset \mathbb{Z}^n$, зафиксируем набор конечных множеств $A_1, \ldots, A_m$ в $\mathbb{Z}^n$. Универсальным стратом S-мультиособенности называется множество всех таких наборов многочленов $f \in \mathbb{C}^{A_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_m}$, что

многообразие $f = 0$ имеет в точности k особенностей $S_1, \dots, S_k$. Наша цель — описать тропические веера универсальных стратов мультиособенностей в терминах множеств $A_1, \dots, A_m$. Затем мы обсудим, как сводить конкретные задачи для общих отображений $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ или $(\mathbb{C}\setminus 0)^n \to (\mathbb{C}\setminus 0)^m$ к универсальному случаю. Многие недавние работы можно рассматривать как решение задач такого рода: например, многогранники Ньютона A-дискриминантов, разреженных результантов и смешанных дискриминантов, изучаемые в работах [60], [131], [62], [52], [132], [35], [133], [44], [46], [25], [34], [156], — это фактически тропические веера страта $(\times)$-особенности. Тропические веера высших двойственных торических многообразий, изучаемыми [33]) — это тропические веера страта гиперповерхностей с единственной особенностью указанного порядка.

Если множества $A_1, \dots, A_m$ "достаточно малы", то наборы изолированных особенностей вовсе не возникают в слоях $f = 0,\ f \in \mathbb{C}^{A_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^{A_m}$, и в этом случае представляют интерес, например, страты Σ_k, состоящие из всех f, у которых множество критических точек имеет данную размерность k. При $m = 1$ непустым стратом наименьшей коразмерности Σ_k является A-дискриминантное многообразие, и его тропический веер вычислен в работе [35] (для любого k). Если $A_1 = \dots = A_m$ — стандартный симплекс, то стратами Σ_k являются детерминантные многообразия. В работе [125] классифицированы все тройки (m, n, k), для которых миноры матрицы образуют тропический базис идеала детерминантного многообразия. В частности, это позволяет вычислить тропический веер Σ_k. Для других троек (m, n, k) тропический веер неизвестен.

Тропическое перечисление плоских кривых с нодами и каспами [104], [13], [126], [127] можно также рассматривать, как частный случай вычисления тропических вееров соответствующих многообразий Севери, а именно, универсального страта $(\times, \dots, \times, \prec, \dots, \prec)$-мультиособенности, подробнее см. разделы 5.3.2 и [152].

Итак, тропические вееры на данный момент полностью описаны только для

– стратов особенностей минимальной коразмерности,

– стратов одной особенности заданного порядка,

– стратов, для идеалов которых известны тропические базисы.

Мы вычислим тропический веер для простейших стратов, не входящих в данный перечень, а именно, стратов мультиособенностей коразмерности 2: $(\times\times)$-страта всех $f \in \mathbb{C}^A$ с двумя невырожденными особыми точками и $(\prec)$-страта всех $f \in \mathbb{C}^A$ с единственной минимально вырожденной особой точкой.

Многие соотношения на тропические характеристические классы стратов мультиособенностей напрямую следуют из аддитивности эйлеровой характеристики. Например, пусть X — гладкое торическое многообразие, а V подмногообразие в $X \times (\mathbb{C} \setminus 0)^N$. Для любой мультиособенности $S = (S_1, \dots, S_k)$ пусть $e(S)$ — сумма приведенных эйлеровых характеристик слоев Милнора изолированных особенностей $S_1, \dots, S_k$, $\langle S \rangle$ — тропический характеристический класс страта S-мультиособенности проекции $\pi : V \to (\mathbb{C} \setminus 0)^N$, а p — коразмерность множества всех точек $x \in (\mathbb{C} \setminus 0)^N$ таких, что слой $\pi^{-1}(x)$ имеет неизолированную особенность. Если общий слой π является гладким, то, обозначая его эйлерову характеристику через e_0, для $i < p$ получим:

Утверждение **5.3.2.**

$$e_0 \cdot \langle \pi(V) \rangle_i - \sum_S e(S) \cdot \langle S \rangle_i = \sum_{T \subset X} \pi_* \langle V \cap T \rangle_{i + \dim T}, \qquad (*)$$

где T пробегает все орбиты X, а S пробегает все (изолированные) мультиособенности.

Доказательство. Зафиксируем произвольное подмногообразие $Y \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^N$, $\dim Y < p$, и точку $g \in (\mathbb{C} \setminus 0)^N$ общего положения. Вычисляя эйлерову характеристику множества $\pi^{-1}(gY)$ послойно, получим, что она равна сумме $\sum_S \big(e_0 - e(S)\big) e(gY \cap S)$, так как эйлерова характеристика каждого слоя $\pi^{-1}(y)$, $y \in S$, равна $e_0 - e(S)$. Из равенств $e\big(\pi^{-1}(gY)\big) = \sum_T e(\pi^{-1}(gY) \cap T) =$

$\sum_{i,T}\langle Y\rangle_{N-i}\pi_*\langle V\cap T\rangle_{i+\dim T}$ и $e(gY\cap S)=\sum_i\langle Y\rangle_{N-i}\langle S\rangle_i$ следует равенство

$$\sum_i\langle Y\rangle_{N-i}\Big(e_0\cdot\langle\pi(V)\rangle_i-\sum_S e(S)\cdot\langle S\rangle_i\Big)=\sum_i\langle Y\rangle_{N-i}\Big(\sum_{T\subset X}\pi_*\langle V\cap T\rangle_{i+\dim T}\Big)$$

для произвольного Y. Так как спаривание, задаваемое индексом пересечения, невырождено в кольце тропических вееров, получившееся равенство равносильно $(*)$. $\square$

5.3.2. Связь с тропическими теоремами соответствия

В данном разделе мы переформулируем утверждения тропических теорем соответствия в терминах индексов пересечения тропических вееров стратов мультиособенностей. Это позволяет рассматривать тропическое перечисление как классический подход к перечислительной геометрии с той лишь разницей, что вместо классических колец когомологий, классов Черна и полиномов Тома рассматриваются кольцо тропических вееров, тропические характеристические классы и тропические веера стратов мультиособенностей. Напомним, что тропические объекты мы обозначаем готическими буквами. Каждый тропический веер коразмерности 1 с положительными кратностями равен гиперповерхности $\mathfrak{f}=\mathfrak{o}$ для некоторого тропического многочлена с единичными коэффициентами. Обратно, для любой тропической гиперповерхности $\{\mathfrak{x}\,|\,\mathfrak{f}(\mathfrak{x})=\mathfrak{o}\}$ и любой точки $\mathfrak{x}_0$ в $(\mathbb{T}\setminus\mathfrak{o})^m$ сдвинутая гиперповерхность $\{\mathfrak{x}\,|\,\mathfrak{f}(\mathfrak{x}/\mathfrak{x}_0)=\mathfrak{o}\}$ в достаточно малой окрестности точки $(\mathfrak{1},\dots,\mathfrak{1})$ совпадает с некоторым тропическим веером коразмерности 1, обозначим его $\{\mathfrak{f}=\mathfrak{o}\}_{\mathfrak{x}_0}\in\mathcal{K}_1^0(\mathbb{Z}^m)$.

Определение **5.3.3.** Для любого набора тропических вееров и гиперповерхностей $\mathfrak{H}_1,\dots,\mathfrak{H}_k$ в $(\mathbb{T}\setminus\mathfrak{o})^m$, сумма коразмерностей которых равна m, число $(\mathfrak{H}_1)_{\mathfrak{x}}\cdot\ldots\cdot(\mathfrak{H}_k)_{\mathfrak{x}}\in\mathcal{K}_m^0(\mathbb{Z}^m)=\mathbb{Q}$ называется **тропическим индексом пересечения** $\mathfrak{H}_1,\dots,\mathfrak{H}_k$ в точке $\mathfrak{x}\in(\mathbb{T}\setminus\mathfrak{o})^m$.

Напомним, что следующее **праввило сдвигов** позволяет вычислить тропический индекс пересечения и может быть взято за его определение. Для раци-

онального аффинного подпространства $L \subset \mathbb{R}^m$, допуская некоторую вольность в обозначениях, через $L^\perp$ обозначим решетку $\{l \in (\mathbb{Z}^m)^* \,|\, l(L) = \text{const}\}$.

Утверждение **5.3.4.** *1) Предположим, что $\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_k$ пересекаются трансверсально в $\mathfrak{x}$, т.е. $\mathfrak{H}_i \subset (\mathbb{T} \setminus \mathfrak{o})^m = \mathbb{R}^m$ совпадает в маленькой окрестности $\mathfrak{x}$ с рациональным аффинным пространством $L_i \ni \mathfrak{x}$, снабженным кратностью m_i, и $\sum_i L_i^\perp$ — m-мерная решетка $\mathcal{L}$. Тогда тропический индекс пересечения $\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_k$ в $\mathfrak{x}$ равен $m_1 \dots m_k \cdot \left|(\mathbb{Z}^m)^*/\mathcal{L}\right|$.*

2) В общем случае, пусть $\widetilde{\mathfrak{H}}_i$ — копия $\mathfrak{H}_i$, сдвинутая на малый вектор общего положения. Тогда если $\widetilde{\mathfrak{H}}_1, \dots, \widetilde{\mathfrak{H}}_k$ пересекаются, то в конечном множестве точек $\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_N$ вблизи $\mathfrak{x}$, причем в каждой из этих точек пересечение трансверсально, и индекс пересечения $\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_k$ в $\mathfrak{x}$ равен сумме индексов пересечения $\widetilde{\mathfrak{H}}_1, \dots, \widetilde{\mathfrak{H}}_k$ в точках $\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_N$.

Всюду далее $\mathbb{K}$ обозначает $\mathbb{C}$ либо $\mathbb{T}$.

Рассмотрим конечное множество $A \subset \mathbb{Z}^n$, содержащее 0. Пусть $\mathbb{K}^A$ — множество всех полиномов Лорана вида $\sum_{a \in A} c_a x^a$, $c_a \in \mathbb{K}$, а его подмножество $(\mathbb{K} \setminus 0)^A_1$ состоит из всех полиномов с постоянным членом c_0, равным 1, и остальными коэффициентами, отличными от нуля. Рассмотрим $S \subset (\mathbb{K} \setminus 0)^A_1$, страт $(S_1, \dots, S_k)$-мультиособенности, и пусть $B_{g_i} \subset (\mathbb{K} \setminus 0)^A_1$, $g_i \in G_i$, — семейство условий инцидентности, параметризованное множеством G_i. Например $g_i \in G_i = (\mathbb{K} \setminus 0)^n$, и B_{g_i} — множество всех $f \in (\mathbb{K} \setminus 0)^A_1$ таких, что $f(g_i) = 0$; либо $g_i \in G_i = \mathbb{C}^\Delta$, $\Delta \subset \mathbb{Z}^n$, и B_{g_i} — замыкание множества всех таких f, что множество $f = 0$ в некоторой точке касается $g_i = 0$.

Нас будет интересовать количество гиперповерхностей вида $f = 0$, $f \in (\mathbb{C} \setminus 0)^A_1$ с заданным набором особенностей $S_1, \dots, S_k$, удовлетворяющих предписанным условиям инцидентности $B_{g_1}, \dots, B_{g_I}$ для параметров $g_i \in G_i$ общего положения. Более аккуратно, нас будет интересовать количество *изолированных* точек пересечения страта S со связками B_{g_i} для g_i общего положения. Подобным образом можно сформулировать большинство классических задач

перечислительной геометрии.

Замечание **5.3.5.** Заметим, однако, что искомое число, вообще говоря, не равно глобальному индексу пересечения S и B_{g_i} в кольце условий, так как пересечение $S \cap \bigcap_i B_{g_i}$ может иметь неизолированные компоненты даже для g_i общего положения. Классический пример — подсчет коник, касающихся пяти прямых общего положения: пересечение соответствующих связок $\cap_{i=1}^5 B_{g_i}$ в 5-мерном пространстве коник содержит двумерную компоненту, состоящую из всех двукратных прямых.

Мы сформулируем тропическую версию подсчета гиперповерхностей с заданными особенностями и условиями инцидентности. Пусть $\mathfrak{S}$ — тропический веер страта S. Он является тропическим веером в вещественной части алгебры Ли комплексного тора $(\mathbb{C}\setminus 0)_1^A$, которая естественным образом отождествляется с тропическим тором $(\mathbb{T} \setminus \mathfrak{o})_1^A$.

Определение **5.3.6.** Говорят, что тропическая гиперповерхность $f = 0$ имеет $(S_1, \dots, S_k)$-мультиособенность, если f содержится в $\mathfrak{S}$.

Предположим, что все пространства параметров G_i являются комплексными торами, обозначим вещественные части их алгебр Ли через $\mathfrak{G}_i$ и рассмотрим тропический веер $\mathfrak{B}_i$ множества $\{(f, g) \mid f \in B_g,\ g \in G_i\}$.

Определение **5.3.7.** Для любого $\mathfrak{g}_i \in \mathfrak{G}_i$ определим **тропическое условие инцидентности** $\mathfrak{B}_{\mathfrak{g}_i}$ как тропическое пересечение $\mathfrak{B}_i$ и плоскости $(\mathbb{T} \setminus \mathfrak{o})_1^A \times \{\mathfrak{g}_i\}$.

В некоторых важных частных случаях тропическим условиям инцидентности удобно придавать более геометрический смысл. Например, если $g_i \in G_i = (\mathbb{C} \setminus 0)^n$, и B_{g_i} — множество всех $f \in (\mathbb{C} \setminus 0)_1^A$ таких, что $f(g_i) = 0$, то $\mathfrak{g}_i \in \mathfrak{G}_i = (\mathbb{T} \setminus \mathfrak{o})^n$, и $\mathfrak{B}_{g_i}$ — множество всех $\mathfrak{f} \in (\mathbb{T} \setminus \mathfrak{o})_1^A$ таких, что $\mathfrak{f}(\mathfrak{g}_i) = \mathfrak{o}$. Если же $g_i \in G_i = \mathbb{C}^\Delta$, $\Delta \in \mathbb{Z}^2$, а B_{g_i} — замыкание множества всех $f \in (\mathbb{C}\setminus 0)_1^A$,

таких, что кривые $f = 0$ и $g = 0$ касаются, то $\mathfrak{g}_i \in \mathfrak{G}_i = (\mathbb{T} \setminus \mathfrak{o})_1^A$, и $\mathfrak{B}_{g_i}$ — множество всех $\mathfrak{f} \in (\mathbb{T} \setminus \mathfrak{o})_1^A$ таких, что тропические кривые $\mathfrak{f} = 0$ и $\mathfrak{g}_i = 0$ касаются в смысле работы [13].

Определение **5.3.8.** Задача подсчета гиперповерхностей с заданным набором особенностей $S_1, \dots, S_k$, удовлетворяющих заданным условиям инцидентности $B_{g_1}, \dots, B_{g_I}$, называется **тропикализуемой**, если ответ равен количестве изолированных точек в пересечении $\mathfrak{S} \cap \bigcap_i \mathfrak{B}_{\mathfrak{g}_i}$ для $\mathfrak{g}_i \in L_i^*$ общего положения (посчитанных с кратностями пересечений, см. определение 5.3.3).

В данных терминах теорема соответствия [104] сводится к вычислению тропического веера многообразия Севери, так как задача подсчета плоских кривых с данным числом самопересечений, проходящих через заданный набор точек общего положения $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_I$, тропикализуема (см. утверждение 5.3.9 ниже). Напомним, что многообразие Севери S — замыкание множества всех $f \in (\mathbb{C} \setminus 0)^A$, $A \subset \mathbb{Z}^2$ таких, что кривая $f = 0$ является нодальной и имеет d нодов.

Аналогичным образом теорема соответствия [13] сводится к вычислению тропического веера $\mathfrak{S}$ многообразия Севери, так как задача подсчета плоских рациональных кривых, проходящих через заданный набор точек общего положения и касающихся заданного набора прямых общего положения $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_I$, тропикализуема (данное утверждение имеет сложное доказательство, но следует из рассуждений, приведенных в работе [13]). Точнее, тропические кривые, посчитанные в теоремах соответствия, заданы уравнениями $\mathfrak{f} = 0$, где $\mathfrak{f}$ имеет изолированную точку пересечения $\mathfrak{S} \cap \bigcap_i \mathfrak{B}_{\mathfrak{g}_i}$, и кратность, присвоенная такой кривой, по теореме соответствия, равна тропической кратности пересечения $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{B}_{\mathfrak{g}_i}$, $i = 1 \dots, I$, в $\mathfrak{f}$.

Однако, класс тропикализуемых перечислительных задач отнюдь не ограничивается подсчетом нодальных кривых. К примеру, подсчет гиперповерхностей с заданной произвольной мультиособенностью, проходящих через задан-

ный набор точек общего положения, также является тропикализуемой задачей:

Утверждение **5.3.9.** *Пусть S — произвольное подмножество коразмерности p в $(\mathbb{C}\setminus 0)_1^A$ (например, страт мультиособенности). Тогда для точек общего положения $g_1,\dots,g_p\in(\mathbb{C}\setminus 0)^n$ и $\mathfrak{g}_1,\dots,\mathfrak{g}_p\in(\mathbb{T}\setminus\mathfrak{o})^n$ индекс пересечения S и условий инцидентности $\{f\in(\mathbb{C}\setminus 0)_1^A \mid f(g_i)=0\}$ совпадает с тропическим индексом пересечения тропического веера $\mathfrak{S}$ и условий инцидентности $\{\mathfrak{f}\in(\mathbb{T}\setminus\mathfrak{o})_1^A\mid \mathfrak{f}(\mathfrak{g}_i)=\mathfrak{o}\}$, $i=1,\dots,p$.*

Доказательство. Условие прохождения через точку общего положения, по определению 5.2.21, не имеет базисных точек на бесконечности, поэтому искомое равенство следует из утверждения 5.2.22(2). □

Замечание **5.3.10.** Индекс пересечения S и условий инцидентности $\{f\in(\mathbb{C}\setminus 0)_1^A\mid f(g_i)=0\}$ равен количеству полиномов $f\in S$ таких, что $f(g_1)=\ldots=f(g_p)=0$, посчитанных с кратностями, равными локальным индексам пересечения. Предположительно, данные локальные кратности равны 1 (т.е. общие условия инцидентности трансверсальны S), если S — страт мультиособенности и $n>1$. И хотя хорошо известно, что данная гипотеза верна для стратов $(\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_1)$–мультиособенностей (т.е. многообразий Севери), даже в этом случае она может показаться неожиданной. Например, она не верна при $n=1$, и для любого n страт $\mathcal{A}_1$–особенности (A-дискриминант) является огибающей условий инцидентности (т.е. касается гиперплоскости $\{f\in(\mathbb{C}\setminus 0)_1^A\mid f(g)=0\}$ для всех g).

5.3.3. Тропический веер дискриминанта

Для конечного множества A в решетке характеров L комплексного тора $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$ определим **тавтологический многочлен** s на $(\mathbb{C}\setminus 0)^n\times(\mathbb{C}\setminus 0)^A$ равенством $s(x,f)=f(x)$. Мы опишем тропические характеристические классы критического полного пересечения $s=\partial s/\partial x_1=\ldots=\partial s/\partial x_n=0$, где $(x_1,\dots,x_n)$ — стандартные координаты на торе $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$. Как следствие, мы получим новое

описание многогранника Ньютона A-дискриминанта в случае, когда последний является гиперповерхностью, а также новое описание двойственно вырожденных торических многообразий (проективных торических многообразий, проективно двойственные многообразия которых не являются гиперповерхностями).

Тропический веер $s = \partial s/\partial x. = 0$ живет в двойственной решетке характеров тора $(\mathbb{C}\setminus 0)^n \times (\mathbb{C}\setminus 0)^A$, т.е. в $L^* \oplus (\mathbb{T}\setminus \mathfrak{o})^A$. Для его описания нам понадобятся следующие обозначения. Для любого $\gamma \in L^* \oplus (\mathbb{T}\setminus \mathfrak{o})^A$ рассмотрим его компоненты $\gamma' \in L^*$ и $\gamma'' \in (\mathbb{T}\setminus \mathfrak{o})^A$, $\gamma = \gamma' + \gamma''$, как функции на A: функция γ' является ограничением функции $\gamma' : L \to \mathbb{Z}$ на $A \subset L$, и значение γ'' в $a \in A$ равно коэффициенту при мономе степени a тропического многочлена $\gamma'' \in (\mathbb{T}\setminus \mathfrak{o})^A$. Для последовательности множеств $A_k \subset L$ обозначим аффинную оболочку суммы $\bigcup_{i<k} A_k$ через $A_{<k}$. Предположим, что A не содержится в аффинной гиперплоскости.

Определение **5.3.11.** 1) Для любого $\gamma \in L^* \oplus (\mathbb{T}\setminus \mathfrak{o})^A$ определим последовательность подмножеств $A^\gamma_k \subset A$ индукцией по $k \geqslant 0$ следующим образом: множество A^γ_k состоит из всех точек, в которых ограничение функции $\gamma'' - \gamma' : A \to \mathbb{Z}$ на $A \setminus A^\gamma_{<k}$ достигает своего максимального значения, при условии, что $A^\gamma_{<k} \subsetneq L$, иначе A^γ_k не определено.

2) Для конечной последовательности непустых непересекающихся подмножеств $A_k \subset A$, конус $C_{A_\bullet}$ — множество всех $\gamma \in L^* \oplus (\mathbb{T}\setminus \mathfrak{o})^A$ таких, что последовательность A^γ_k совпадает с последовательностью A_k. Через C_A обозначим веер, состоящий из конусов $C_{A_\bullet}$, где $A_\bullet$ пробегает все последовательности непустых непересекающихся подмножеств множества A.

Замечание **5.3.12.** Коразмерность конуса $C_{A_\bullet}$ равна $\sum_i (|A_i| - 1)$.

Замечание **5.3.13.** Было бы полезно доказать что веер C_A регулярен (т.е. может быть представлен в виде множества областей линейности выпуклой кусочно-линейной функции).

Для любой последовательности множеств $A_k \subset L$ разложим пространство $L^\star$ (см. раздел 5.2.7) в прямую сумму $\bigoplus_i A^k$ таким образом, чтобы сумма $\bigoplus_{i\geqslant k} A^i$ была ортогональным дополнением к $A_{<k}$ (т.е. $\{l \,|\, l(A_{<k}) = 0\}$) для любого k. Для любого подмножества $B \subset A$ и многочлена $f(x) = \sum_{a\in A} c_a x^a$ обозначим **ограничение** f **на** B через $f^B(x) = \sum_{a\in B} c_a x^a$ и определим соответствующий тавтологический многочлен s^B на $(\mathbb{C}\setminus 0)^n \times (\mathbb{C}\setminus 0)^A$ равенством $s^B(f,x) = f^B(x)$. Применяя утверждение 5.2.47(2) к критическому полному пересечению $s = \partial s/\partial x. = 0$, получим следующее.

Утверждение **5.3.14.** *1) Замыкание множества $s = \partial s/\partial x. = 0$ в C_A-торическом многообразии пересекает его орбиты трансверсально.*

2) Замыкание множества $s = \partial s/\partial x. = 0$ пересекает $C_{A_\bullet}$-орбиту по тому же множеству, что и замыкание полного пересечения, заданного уравнениями $\partial_{A^i} s^{A_i} = 0$ для всех i.

Данное утверждение влечет следующее описание характеристических классов множества $s = \partial s/\partial x. = 0$.

Определение **5.3.15.** **Ранг** $\mathrm{rk}_k B$ подмножества $B \subset A_k$ определяется как $|B| - \dim(\text{аффинная оболочка } B \cup A_{<k}) + \dim A_{<k} - 1$. Последовательность A_k называется **существенной**, если $rk_k B < rk_k A_k$ для любого k и любого $B \subsetneq A_k$. Количество минимальных подмножеств $B \subset A_k$ таких, что $rk_k B = rk_k A_k - 1$, обозначается $m(A_k)$. Число $m(A_k)$ для максимального k такого, что $\mathrm{rk}_k A_k > 0$, обозначается $m(A_\bullet)$. Если число $\left|L/\bigcup_i \{a-b \,|\, a \text{ и } b \in A_i\}\right|$ конечно, то обозначим его через $i(A_\bullet)$, иначе положим $i(A_\bullet) = 0$.

Пример **5.3.16.** Мы разберем все введенные обозначения на следующих примерах (в дальнейшем A_0 всегда будет изображаться сплошными линиями, а A_1 — пунктирными).

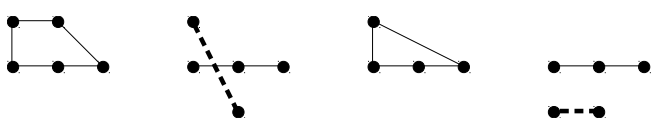


Рисунок 11: существенность.

В первом примере $i(A_\bullet) = 1$, $D_0 = L^\star$, $\operatorname{codim} C_{A_\bullet} = |A_0| - 1 = 4$, $\operatorname{rk}_0 A_0 = 2$, а все четыре минимальных множества $B \subset A_0$ ранга 1 изображены ниже (соответственно, $m(A_\bullet) = 4$):

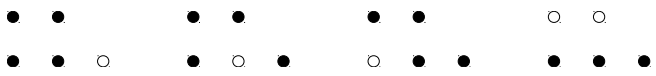


Рисунок 12: минимальные подмножества ранга 1.

Во втором примере, $i(A_\bullet) = 2$, $\operatorname{codim} C_{A_\bullet} = |A_0| - 1 + |A_1| - 1 = 3$, D_1 порождено функцией $l(x, y) = x$, а D_0 — любая плоскость такая, что $D_0 + D_1 = L^\star$. Третий пример не является существенным, а последний является существенным с $i(A_\bullet) = 0$.

Следствие **5.3.17.** *1) Носитель характеристического класса $\langle s = \partial s/\partial x. = 0\rangle_j$ содержится в объединении конусов $C_{A_\bullet}$, где $A_\bullet$ пробегает все существенные последовательности такие, что $\sum_i(|A_i| - 1) = j$.*

2) При $j \leqslant n$ имеем $\langle s = \partial s/\partial x. = 0\rangle_j = 0$.

3) Кратность конуса $C_{A_\bullet}$ в тропическом веере $\langle s = \partial s/\partial x. = 0\rangle_{n+1}$ равна 1 для любой существенной последовательности $A_\bullet$ такой, что $\sum_i(|A_i| - 1) = n + 1$.

4) Кратность конуса $C_{A_\bullet}$ в тропическом веере $\langle s = \partial s/\partial x. = 0\rangle_{n+2}$ равна $2 - m(A_\bullet)$ для любой существенной последовательности $A_\bullet$ такой, что $\sum_i(|A_i| - 1) = n + 2$.

Доказательство. Выберем произвольную последовательность $A_\bullet$ и обозначим $\sum_i(|A_i| - 1)$ через d. Из утверждения 5.3.14.2 следует, что пересечение замыкания $s = \partial s/\partial x. = 0$ и $C_{A_\bullet}$-орбиты в C_A-торическом многообразии является $(d - n - 1)$-мерным многообразием V в d-мерном комплексном торе. Следующие факты сразу следуют из определений:

1) Если последовательность $A_\bullet$ не существенна, то V пусто.

2) Если последовательность $A_\bullet$ существенна, и $d = n + 1$, то V состоит из одной точки.

3) Если последовательность $A_\bullet$ существенна, и $d = n + 2$, то V — проективная прямая без $m(A_\bullet)$ точек.

Доказываемое утверждение следует из данных фактов и утверждений 5.3.14 и 5.2.12. $\square$

Кратности всех конусов для всех характеристических классов множества $s = \partial s/\partial x_\cdot = 0$ можно вычислить так же, как при доказательстве частей 3 и 4 для первых двух ненулевых классов. Полный ответ будет дан в другом тексте, так как для изучения мультиособенностей в коразмерности 1 и 2 он нам не понадобится.

Пример **5.3.18.** Может так случиться, что в условиях части 4, кратность $2-m(A_\bullet)$ равна 0. т.е. конус $C_{A_\bullet}$ для некоторой существенной последовательности $A_\bullet$ с $\sum_i(|A_i|-1) = n+2$ не дает вклад в $\langle s = \partial s/\partial x_\cdot = 0\rangle_{n+2}$, как, например, в случае $A_0 = \{(0,0,0),\ (0,0,\pm 1)\}$ и $A_1 = \{(0,\pm 1,0),\ (\pm 1,0,0)\}$. В частности, часть 1 не дает точную оценку на носители характеристических классов.

Целью наших вычислений является скорее образ $\pi_*\langle s = \partial s/\partial x_\cdot = 0\rangle_j$ при проекции $\pi : (\mathbb{C}\setminus 0)^n \oplus (\mathbb{C}\setminus 0)^A \to (\mathbb{C}\setminus 0)^A$, нежели сам класс $\langle s = \partial s/\partial x_\cdot = 0\rangle_j$. Пусть $w_{A_\bullet}$ — кратность конуса $C_{A_\bullet}$ в характеристическом классе $\langle s = \partial s/\partial x_\cdot = 0\rangle_j$, $\sum_i(|A_i| - 1) = j$. Тогда, из утверждения 5.2.6 и следствия 5.3.17.1 следует

Утверждение **5.3.19.** *Тропический веер $\pi_*\langle s = \partial s/\partial x_\cdot = 0\rangle_j$ состоит из конусов $\pi(C_{A_\bullet})$ с весами $w_{A_\bullet}\cdot i(A_\bullet)$, где $A_\bullet$ пробегает все существенные последовательности такие, что $\sum_i(|A_i| - 1) = j$ и $i(A_\bullet) > 0$.*

Данный факт в совокупности со следствием 5.3.17.2—4 полностью описывает $\pi_*\langle s = \partial s/\partial x_\cdot = 0\rangle_j$ для $j \leqslant n+2$. В частности, так как замыканием образа полного пересечения $s = \partial s/\partial x_\cdot = 0$ при проекции $\pi : (\mathbb{C}\setminus 0)^n \times (\mathbb{C}\setminus 0)^A \to (\mathbb{C}\setminus 0)^A$ является A-дискриминант, отсюда мы получаем новую информацию о тропических веерах A-дискриминантов. Напомним, что конечное множество в $\mathbb{Z}^n$ называется **итерированным контуром**, если его можно представить в ви-

де объединения существенной последовательности непустых непересекающихся подмножеств A_k таких, что $\sum_i(|A_i|-1)=n+1$ и $\dim\sum_i A_i=n$.

Следствие **5.3.20.** *1) Двойственный веер многогранника Ньютона A-дискриминанта равен $\pi_*\langle s=\partial s/\partial x.=0\rangle_{n+1}$.*

2) A-торическое многообразие двойственно невырождено, если и только если A содержит итерированный контур.

Доказательство. Часть 1 следует из замечания 5.2.9. Утверждение "если"в части 2 уже доказано в прошлой главе, поэтому нам остается доказать "только если": если A-торическое многообразие двойственно невырождено, то A-дискриминант является непустой гиперповерхностью. Значит, двойственный веер его многогранника Ньютона непуст. Следовательно, согласно утверждению части 1, $\langle s=\partial s/\partial x.=0\rangle_{n+1}\neq 0$. Тогда, применив следствие 5.3.17(1), получим, что существует существенная последовательность подмножеств $A_k\subset A$ таких, что $\sum_i(|A_i|-1)=n+1$. Ее объединение является многократным контуром. □

Утверждение "если"части 2, на самом деле, тоже следует из утверждения 5.3.19 и следствия 5.3.17(3), так как для любой последовательности $A_\bullet$ такой, что $\dim\sum_i A_i=n$ верно $i(A_\bullet)>0$.

5.3.4. Тропический веер стратов $(\times\times)$ и $(\prec)$: условия общего положения

Вычислим тропические веера стратов мультиособенностей коразмерности 2. Пусть A — конечное подмножество в решетке характеров L комплексного тора $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$.

Пусть $\{\times\}$, $\{\times\times\}$ и $\{\prec\}$ — множества всех $f\in\mathbb{C}^A$ таких, что замыкание гиперповерхности $\{f=0\}$ в гладком торическом многообразии X_A имеет одну особенность типа $\mathcal{A}_1$, две особенности типа $\mathcal{A}_1$ и одну особенность типа $\mathcal{A}_2$ соответственно. Обозначим тропические характеристические классы данных

стратов через $\langle\times\rangle$, $\langle\times\times\rangle$ и $\langle\prec\rangle$. Заметим, что в отличие от классической теории мультиособенностей мы не переходим к замыканиям множеств $\{\times\}$, $\{\times\times\}$ и $\{\prec\}$: данные множества являются гладкими (что для нас не важно), но незамкнутыми! Переход к замыканиям не повлиял бы на их тропические веера (т.е. их высшие характеристические классы), однако изменил бы остальные их характеристические классы.

Из теорем 5.3.23, 5.3.24 и 5.3.28 ниже следуют три независимых линейных уравнения на тропические веера $\langle\times\rangle_2$, $\langle\times,\times\rangle_2$ и $\langle\prec\rangle_2$. Мы можем решить эту линейную систему и вычислить $\langle\times\times\rangle_2$ и $\langle\prec\rangle_2$, искомые тропические веера стратов мультиособенностей $\{\times\times\}$ и $\{\prec\}$. В разделе 5.3.8 мы явно вычислим $\langle\times\rangle_2$, $\langle\times\times\rangle_2$ и $\langle\prec\rangle_2$ для конкретного множества A (т.е. перечислим все конусы и их веса в данных тропических веерах).

Мы докажем данные результаты, наложив на A некоторые условия, напоминающие двойственную невырожденность и гарантирующие, что упомянутые страты имеют ожидаемую размерность и ожидаемым образом примыкают друг к другу.

Определение **5.3.21.** Множество A называется версальным в коразмерности 2, если существует такое множество коразмерности три $\Sigma\subset\mathbb{C}^A$, что каждый полином $f\in\mathbb{C}^A\setminus\Sigma$ относится к одному из следующих типов:

1) f не лежит в образе проекции $\{s=\partial s/\partial x.=0\}\to(\mathbb{C}\setminus 0)^A$. В данном случае, гиперповерхность $f=0$ не имеет особенностей.

2) f является регулярным значением проекции $\{s=\partial s/\partial x.=0\}\to(\mathbb{C}\backslash 0)^A$ с одним либо двумя прообразами $(z_{(i)},f)$. В данном случае, гиперповерхность $f=0$ не имеет никаких других особых точек, кроме $z_{(i)}$, и они обе являются особенностями типа $\mathcal{A}_1$. Более того, тавтологическая гиперповерхность $s=0$ задается уравнением $z_{(i)1}^2+\ldots+z_{(i)n}^2=y_i$ в подходящих локальных координатах $(y_1,\ldots,y_{|A|})$ вблизи $f\in\mathbb{C}^A$ и $(z_{(i)1},\ldots,z_{(i)n},y_1,\ldots,y_{|A|})$ вблизи $(z_{(i)},f)$.

3) f — критическое значение проекции $\{s=\partial s/\partial x.=0\}\to(\mathbb{C}\backslash 0)^A$ с одним

прообразом (z, f). В данном случае, z является единственной особой точкой гиперповерхности $f = 0$ и относится к типу $\mathcal{A}_2$. Более того, тавтологическая гиперповерхность $s = 0$ задается уравнением $z_1^3 + y_1 z_1 + z_2^2 \ldots + z_n^2 = y_2$ в подходящих локальных координатах $(y_1, \ldots, y_{|A|})$ вблизи $f \in \mathbb{C}^A$ и $(z_1, \ldots, z_n, y_1, \ldots, y_{|A|})$ вблизи (z, f).

Всюду далее множество A предполагается версальным в коразмерности 2. Например, аналогично утверждению 4.1.19, можно доказать, что всякое множество в $\mathbb{Z}^n$, содержащее $\{0,1\}^{n-1} \times \{0,1,2\}$, версально в коразмерности 2. В частности, все множества в $\mathbb{Z}^2$, не содержащие $\{0,1\} \times \{0,1,2\}$, можно классифицировать с точностью до аффинной эквивалентности и, исследовав их по отдельности, получить, что все двойственно невырожденные множества в $\mathbb{Z}^2$ 2-версальны в коразмерности 2.

Всюду далее мы также будем предполагать, что $A \subset L$ просто в ребрах (см. [171]), т.е. A — множество целых точек в целочисленном многраннике, каждое ребро которого содержится в $n-1$ гиперграни и набор из $n-1$ внешних нормальных ковекторов к данным гипергранями может быть дополнен до базиса в L^*. Геометрически, это означает что A-торическое многообразие X_A имеет не более чем изолированные особенности. Данное предположение аналогично версальности A в коразмерности 2 применительно к особенностям на бесконечности см. утверждение ниже.

Для любого $B \subset L$ и любого многочлена $f = \sum_{a \in A} c_a x^a \in (\mathbb{C} \setminus 0)^A$ пусть f^B — многочлен $\sum_{a \in B} c_a x^a$, обозначим $s^B(x, f) = s(x, f^B)$. Если B — грань выпуклой оболочки A, рассмотрим $T_B \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$, подтор, заданный уравнениями $x^a = x^b$ для всех a и $b \in B$. Так мы естественным образом отождествим B-орбиту торического многообразия X_A с $(\mathbb{C} \setminus 0)^n / T_B$. Аналогично, пересечение (B-орбита) $\times (\mathbb{C} \setminus 0)^A$ с замыканием множества $\{s^B = 0\}$ естественным образом отождествляется с $\{s^B = 0\}/T_B$. Для любой гиперграни Γ выпуклой оболочки множества A пусть Γ' — грань максимальной размерности выпуклой оболочки

$A \setminus \Gamma$, параллельная Γ и "смотрящая в том же направлении" (т.е. $\Gamma' + \Gamma$ — грань множества $(A \setminus \Gamma) + A$).

Заметим, что простота в ребрах гарантирует, что целочисленное расстояние от Γ до Γ' равно 1, то есть, если выбрать аффинный изоморфизм решеток $L = \mathbb{Z}^n$ таким образом, чтобы грань Γ содержалась в координатной плоскости $x_1 = 0$, а множество A – в полуплоскости $x_1 \geqslant 0$, то Γ' будет содержаться в аффинной плоскости $x_1 = 1$. Из этого наблюдения следует, что простота в ребрах гарантирует "2-версальность на бесконечности" в следующем смысле.

Утверждение **5.3.22.** *Предположим, что A просто в ребрах. Тогда можно выбрать такое множество коразмерности 3 $\Sigma \subset \mathbb{C}^A$ такое, что каждый многочлен $f \in \mathbb{C}^A \setminus \Sigma$ принадлежит одному из следующих двух видов:*

1) f лежит в образе проекции $\{s^\Gamma = \partial s^\Gamma / \partial x. = s^{\Gamma'} = 0\}/T_\Gamma \to (\mathbb{C}\setminus 0)^A$ для некоторой гиперграни Γ выпуклой оболочки множества A. В таком случае, единственным прообразом f является точка (z, f), где $z \in$ (Γ-орбита X_A) — единственная особая точка замыкания гиперповерхности $f = 0$, причем данная особенность относится к типу $\mathcal{A}_1$. Более того, (Γ-орбита) $\times (\mathbb{C} \setminus 0)^A$ и замыкание гиперповерхности $s = 0$ задаются уравнениями $z_1 = 0$ и $(z_1 - y_1)^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2 = y_2$ соответственно в подходящих локальных координатах $(y_1, \ldots, y_{|A|})$ вблизи $f \in \mathbb{C}^A$ и $(z_1, \ldots, z_n, y_1, \ldots, y_{|A|})$ вблизи (z, f).

2) Иначе, замыкание $f = 0$ в торическом многообразии X_A является гладким в каждой точке вне $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$.

Доказательство основано на тех же рассуждениях, что и в доказательстве утверждения 5.2.47.

5.3.5. Тропический веер стратов $(\times\times)$ и $(\prec)$: ответ

Напомним, что множество $A \subset \mathbb{Z}^n$ предполагается простым в ребрах и версальным в коразмерности 2 (см. раздел 5.3.4).

Первое уравнение.

Теорема **5.3.23.** *Если A версально в коразмерности 2 и просто в ребрах, то верно следующее равенство:*

$$\langle\times\rangle_2 + 2\langle\times\times\rangle_2 + 2\langle\prec\rangle_2 = \sum_\Gamma \pi_*\langle\{s^\Gamma = 0\}/T_\Gamma\rangle_{\dim\Gamma+2},$$

где Γ пробегает все грани положительной размерности выпуклой оболочки множества A.

Слагаемые $\langle\{s^\Gamma = 0\}/T_\Gamma\rangle_j$ для всех j можно выразить в терминах многогранника Ньютона s^Γ, см. пример 5.2.8. Таким образом, все неизвестные слагаемые находятся в левой части.

Доказательство. Доказываемое равенство — частный случай утверждения 5.3.2 для $i = 2$ и проекции $\pi : X_A \times (\mathbb{C}\setminus 0)^A \to (\mathbb{C}\setminus 0)^A$, ограниченной на замыкание тавтологической гиперповерхности $\{s = 0\} \subset X_A \times (\mathbb{C}\setminus 0)^A$, $s(x, f) = f(x)$. В левой части никаких более сложных мультиособенностей возникнуть не может, что следует из версальности A в коразмерности 2 и утверждения 5.3.22. □

Второе уравнение.

Теорема **5.3.24.** *Если A версально в коразмерности 2 и прсто в ребрах, то верно следующее равенство:*

$$\langle\times\rangle_2+2\langle\times\times\rangle_2+\langle\prec\rangle_2 = \pi_*\langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+2}+\sum_\Gamma \pi_*\langle\{s^\Gamma = s^{\Gamma'} = \frac{\partial s^\Gamma}{\partial x_\cdot} = 0\}/T_\Gamma\rangle_{n+1},$$

где Γ пробегает все гиперграни выпуклой оболочки множества A.

Слагаемые $\langle\{s^\Gamma = s^{\Gamma'} = \frac{\partial s^\Gamma}{\partial x_\cdot} = 0\}\rangle_{n+1} = \langle\{s^\Gamma = \frac{\partial s^\Gamma}{\partial x_\cdot} = 0\}\rangle_n \cdot \langle s^{\Gamma'} = 0\rangle_1$ и $\langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+2}$ вычислены в следствии 5.3.17. Следовательно, все неизвестные слагаемые находятся в левой части.

Доказательство. Доказываемое равенство является частным случаем утверждения 5.3.2 для $i = 2$ и проекции $\pi : X_A \times (\mathbb{C} \setminus 0)^A \to (\mathbb{C} \setminus 0)^A$, ограниченной на замыкание первого страта Бордмана $\{s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\}$. Из версальности A в коразмерности 2 и утверждения 5.3.22 следует, что никаких более сложных особенностей в левой части возникнуть не может. Явное выражение для пересечения с орбитой в правой части следует из утверждения 5.3.14(2). □

Замечание **5.3.25.** Равенств из теорем 5.3.23 и 5.3.24 уже достаточно, чтобы вычислить тропический веер страта особенности $\{\prec\}$. Тем же способом, что и при доказательстве теорем 5.3.23 и 5.3.24, мы можем вычислить левую часть равенства в утверждении 5.3.2 для всех высших стратов Бордмана проекции $\{s = 0\} \to \mathbb{C}^A$. Тем не менее, для $(1,1)$-страта Бордмана (т.е. множества критических точек ограничения проекции π на множество ее критических точек) мы получим уравнение на $\langle \prec \rangle_2$, линейно зависимое от равенств из теорем 5.3.23 и 5.3.24, а для высших стратов Бордмана (см., например, [8]) уравнения будут тривиальны в коразмерности 2. Следовательно, утверждения 5.3.2 недостаточно для вычисления тропического веера даже для самого простого страта мультиособенности $\{\times\times\}$.

Третье уравнение. Для начала определим кусочно-линейную функцию $\mathbf{l}_A$ на носителе тропического веера $\langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0 \rangle_{n+1}$, которая участвует в третьем уравнении. Мы будем использовать определения и понятия, введенные в разделе 5.3.3.

Рассмотрим элемент $\gamma \in (\mathbb{T} \setminus \mathfrak{o})^n \oplus (\mathbb{T} \setminus \mathfrak{o})^A$ такой, что $i(A^\gamma_\bullet) > 0$. Напомним, что мы рассматриваем его компоненты $\gamma' \in (\mathbb{T} \setminus \mathfrak{o})^n$ и $\gamma'' \in (\mathbb{T} \setminus \mathfrak{o})^A$, $\gamma = \gamma' + \gamma''$, как функции на A: функция γ' является ограничением функции $\gamma' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{Z}$ на $A \subset \mathbb{Z}^n$, и значение γ'' в $a \in A$ равно коэффициенту при мономе степени a в тропическом многочлене $\gamma'' \in (\mathbb{T} \setminus \mathfrak{o})^A$. Для любого k обозначим значение функции $\tilde{\gamma} = \gamma'' - \gamma' : A \to \mathbb{Z}$ в A^γ_k через $\tilde{\gamma}_k$ и определим $A^\gamma_k(r)$ как множество

всех таких $a \in A$, что $\tilde{\gamma}(a) \in [\tilde{\gamma}_k,\, \tilde{\gamma}_k + r]$. Зададим функцию

$$i_\gamma(r) = \Big|\mathbb{Z}^n \Big/ \bigcup_i \{a - b \,|\, a \text{ и } b \in A_k^\gamma(r)\}\Big|$$

на $\mathbb{R}$ и функцию

$$\mathbf{l}_A(\gamma) = \int_0^{+\infty} (i_\gamma(r) - 1)dr$$

на множестве $\{\gamma \,|\, i(A_\bullet^\gamma) > 0\}$.

Функция $\mathbf{l}_A : \{\gamma \,|\, i(A_\bullet^\gamma) > 0\} \to \mathbb{R}$ определена корректно, так как неравенство $i(A_\bullet^\gamma) > 0$ влечет $i_\gamma(r) \leqslant i_\gamma(0) < \infty$, а из предположения о том, что A аффинно порождает $\mathbb{Z}^n$, следует равенство $i_\gamma(r) = 1$ для достаточно большого r. Более того, функция $\mathbf{l}_A : \{\gamma \,|\, i(A_\bullet^\gamma) > 0\} \to \mathbb{R}$ непрерывна, так как для γ_1, лежащего в достаточно малой окрестности γ, функции i_γ и i_{γ_1} совпадают вне некоторой малой окрестности множества точек разрыва функции i_γ.

Рассмотрим $\tilde{\mathbf{l}}_A$, произвольное непрерывное продолжение функции $\mathbf{l}_A$ на носитель веера $\langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+1}$, тогда произведение $\tilde{\mathbf{l}}_A \cdot \langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+1}$ является элементом компоненты $\mathcal{K}^1_{n+1}\big(\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}^A\big)$ дифференциального кольца тропических вееров (см. раздел 5.2.2). Так как его образ $\pi_*(\tilde{\mathbf{l}}_A \cdot \langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+1})$ при проекции $\pi : (\mathbb{C}\backslash 0)^n \times (\mathbb{C}\backslash 0)^A \to (\mathbb{C}\backslash 0)^A$ не зависит от выбора продолжения $\tilde{\mathbf{l}}_A$, по утверждению 5.3.19, мы обозначим его через

$$\pi_*(\mathbf{l}_A \cdot \langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+1}) \in \mathcal{K}^1_1\big(\mathbb{Z}^A\big).$$

Определение **5.3.26.** Многообразие углов

$$\delta\pi_*(\mathbf{l}_A \cdot \langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+1}) \in \mathcal{K}^0_2\big(\mathbb{Z}^A\big)$$

является тропическим веером коразмерности 2 в $(\mathbb{T} \setminus \mathfrak{o})^A$, назовем его **третичным веером** множества A (по аналогии со **вторичным веером** коразмерности 1, который в качестве слагаемого содержит $\pi_*(\langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+1}) \in \mathcal{K}^0_1\big(\mathbb{Z}^A\big)$).

Замечание **5.3.27.** Заметим, что многообразие углов произведения $\mathbf{f}F \in \mathcal{K}^1_1$ непрерывной кусочно-линейной функции $\mathbf{f} \in \mathcal{K}^1_0$ и тропического веера $F \in$

$\mathcal{K}_1^0$ известно как дивизор Картье $\mathbf{f}$ на F (см., например, [105]), подобным геометрическим смыслом обладает и $\delta\pi_*(\mathbf{l}\langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+1})$. Однако, элемент $\pi_*(\mathbf{l}\langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+1}) \in \mathcal{K}_1^1\big(\mathbb{Z}^A\big)$, который нам нужно дифференцировать, нельзя представить в виде произведения непрерывной кусочно-линейной функции из $\mathcal{K}_0^1\big(\mathbb{Z}^A\big)$ и тропического веера с постоянными весами из $\mathcal{K}_1^0\big(\mathbb{Z}^A\big)$.

Теорема **5.3.28.** *Если множество A версально в коразмерности 2 и просто в ребрах, то верно следующее равенство:*

$$\langle\times\rangle_2 - \langle\prec\rangle_2 = \delta\pi_*(\mathbf{l}\langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+1}) - (\pi_*\langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+1})^2.$$

Доказательство приведено в разделе 5.3.7. Все неизвестные классы в данной теореме находятся в левой части равенства. Таким образом, из теорем 5.3.23, 5.3.24 и 5.3.28 мы получаем систему из трех независимых уравнений на $\langle\times\rangle_2$, $\langle\times,\times\rangle_2$ и $\langle\prec\rangle_2$.

Замечание **5.3.29.** Геометрический смысл кусочно-линейной функции $\pi_*(\mathbf{l}_A \cdot \langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+1})$ понятен: данная функция является тропикализацией функции на A-дискриминанте $D = \pi_*\{s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\}$, сопоставляющей определитель матрицы Якоби $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(z)\right)_{i,j=1,\dots,n}$ каждому полиному $f \in D$, для которого существует единственная точка $z \in (\mathbb{C}\setminus 0)^n$ такая, что $f(z) = 0$ и $\mathrm{d}f(z) = 0$. Я, однако, не знаю как доказать теорему 5.3.28, используя такую интерпретацию.

Замечание **5.3.30.** Конусы веера $(\pi_*\langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+1})^2$ соответствуют двумерным граням многогранника, двойственного к вееру $\pi_*\langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+1}$. Кратности конусов равны площадям соответствующих граней. Каждая из этих граней является либо параллелограммом (площадь которого легко вычислить), либо вторичным многоугольником некоторого подмножества в A (площадь которого удобно вычислять, используя формулу из примера 5.3.36 ниже).

Сформулируем наши предположения о том, как может быть устроен страт $(\underbrace{\times,\dots,\times}_{m})$-мультиособенности для произвольного m.

Определение **5.3.31.** Тропический веер $\delta^k\pi_*(\mathbf{l}^k\langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+1})$ называется k-арным веером множества A и обозначается A^k.

Для любой линейной функции $\gamma : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ определим $A^\gamma = A^\gamma_1$ как множество всех точек множества A, в которых γ достигает максимального значения на этом множестве, а затем по индукции определим $A^\gamma_{k+1} = (A \setminus \bigcup_{i=1}^k A^\gamma_k)^\gamma$.

Гипотеза **5.3.32.** *Существует универсальная функция P_m от набора непересекающихся множеств $B_1, \dots, B_m \subset \mathbb{Z}^n$, принимающая значения в $\mathcal{K}^0_m\big(\mathbb{Z}^{\bigcup_i B_i}\big)$, такая, что выполнены следующие условия:*

1) Для заданных $\dim B_1, \dots, \dim B_m$ функция $P_m(B_1, \dots, B_m)$ является многочленом от k-арных вееров $(B_i)^k$ и характеристических классов $\pi_*\langle s_i = \frac{\partial s_i}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_j$ для тавтологических многочленов $s_i = \sum_{b\in B_i} c_b x^b$ на $(\mathbb{C}\setminus 0)^n \times (\mathbb{C}\setminus 0)^{B_i}$;

2) тропический веер страта $(\underbrace{\times, \dots, \times}_{m})$-мультиособенности в $(\mathbb{C}\setminus 0)^A$ равен сумме $P_m(A^\gamma_1, \dots, A^\gamma_m)$ по всем примитивным γ (в том числе $\gamma = 0$).

Неморсовские многочлены. Пусть $A \not\ni 0$ — конечное множество, порождающее $\mathbb{Z}^n$. Множество многочленов $f \in (\mathbb{C}\setminus 0)^A$ таких, что $f : (\mathbb{C}\setminus 0)^n \to \mathbb{C}$ имеет вырожденную критическую точку, называется *каустикой*; множество многочленов $f \in (\mathbb{C}\setminus 0)^A$ таких, что $f : (\mathbb{C}\setminus 0)^n \to \mathbb{C}$ принимает одно и то же значение в двух своих критических точках, называется *стратом Максвелла*, случай $n = 1$ изучен в работах [93] и [166].

Обозначим $A \cup \{0\}$ через A', а естественную проекцию $(\mathbb{C}\setminus 0)^{A'} \to (\mathbb{C}\setminus 0)^A$ — через p. Из определений следует

Утверждение **5.3.33.** *Тропический веер каустики равен $p_*(\langle\prec\rangle_2)$, а тропический веер страта Максвелла равен $p_*(\langle\times\times\rangle_2)$, где $\{\times\times\}$ и $\{\prec\}$ — страты мультиособенностей коразмерности 2 в $(\mathbb{C}\setminus 0)^{A'}$.*

Замечание **5.3.34.** Это утверждение и полученные выше описания вееров $\langle\prec\rangle_2$ и $\langle\times\times\rangle_2$ позволяют описать многогранники Ньютона уравнений кау-

стики и страта Максвелла – это многогранники, двойственные к веерам $p_*(\langle\prec\rangle_2)$ и $p_*(\langle\times\times\rangle_2)$.

5.3.6. Объем расслоенного тела

Утверждение **5.3.35.** *Пусть L — подпространство коразмерности k в $\mathbb{R}^n$, а $A_i^j \subset \mathbb{R}^n$, $i = 0,\dots,k$, $j = 1,\dots,n-k$, — выпуклые тела. Обозначим пространство $\{(v_1,\dots,v_{n-k} \,|\, v_1+\dots+v_{n-k}=0\} \subset L^{n-k}$ через K, а образ*

$$\underbrace{\{0\}\times\dots\times\{0\}}_{i-1}\times A_j^i \times \{0\}\times\dots\times\{0\} \subset (\mathbb{R}^n)^{n-k}$$

при проекции $(\mathbb{R}^n)^{n-k} \to (\mathbb{R}^n)^{n-k}/K$ — через $\widetilde{A}_j^i$. Тогда смешанный объем смешанных расслоенных тел $M_L(A_0^i,\dots,A_k^i)$, $i = 1,\dots,n-k$ равен смешанному объему тел $\widetilde{A}_i^j$, $i = 0,\dots,k$, $j = 1,\dots,n-k$.

Доказательство следует из $n-k-1$-кратного применения равенства из утверждения 2.2.36.

Важным частным случаем расслоенного тела является вторичный многогранник (см. [60]), и из утверждения 5.3.35 следует формула для его объема (одна из причин интереса к объемам двойственных многогранников объясняется, например, в работе [167]). Нам понадобится следующий частный случай этой формулы.

Пример **5.3.36.** Рассмотрим целочисленный многогранник $A \subset \mathbb{R}^n$. Для каждой из его вершин v через c_A^v обозначим объем разности A и выпуклой оболочки множества $A \cap \mathbb{Z}^n \setminus \{v\}$. Если вторичный многогранник множества A двумерен, то его целочисленная площадь равна $(n+1)!\operatorname{Vol} A - n!\sum_v c_A^v$.

Ещё одним важным частным случаем смешанного расслоенного тела является многогранник Ньютона разреженного результанта, и утверждение 5.3.35 дает положительную формулу для его объема. Это может быть интересно уже

для многогранника Ньютона простейшего многомерного результанта – определителя. Этот многогранник известен как многогранник Биркгоффа, см., например, работу [30], посвященную проблеме вычисления его объема.

5.3.7. Доказательство третьего равенства

Пусть $i = (i_1, i_2, \ldots)$ — последовательность целых чисел, стабилизирующаяся к 1, такая, что $i_r | i_{r-1}$ для любого r.

Определение **5.3.37.** ***i*-особенностью расходящихся тропок** называется плоская особенность с i_1 различными регулярными ветвями $\varphi_{q_1,q_2,\ldots} : (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C}^2,0)$, $q_r = 1, \ldots, i_r/i_{r+1}$, такая, что индекс пересечения $\varphi_{p_1,p_2,\ldots}$ и $\varphi_{q_1,q_2,\ldots}$ в точке 0 равен минимальному числу r, для которого $p_r \neq q_r$.

Лемма **5.3.38.** *Число Милнора i-особенности расходящихся тропок равно* $\mu(i) = i_1 \sum_r (i_r - 1) - (i_1 - 1)$.

Доказательство. Независимо пошевелим ветви особенности, тогда объединение U шевелений имеет ровно $N = \sum_r \frac{i_1}{i_r} \frac{i_r(i_r-1)}{2}$ нодов. Эйлерова характеристика нормализации U равна i_1 и отличается от $2N$ на искомую эйлерову характеристику слоя Милнора. □

Доказательство теоремы 5.3.28. Теперь мы можем доказать следующее равенство, эквивалентное утверждению теоремы 5.3.28. Заметим, что тропический веер $\pi_* \langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0 \rangle_{n+1}$ равен двойственному вееру многогранника Ньютона $\mathcal{N}_A$ A-дискриминанта Гельфанда–Капранова–Зелевинского D_A.

Утверждение **5.3.39.** *Для целочисленного многогранника $B \subset \mathbb{R}^A$ общего положения (т.е. лежащего в дополнении к конечному множеству гиперповерхностей в конусе многогранников), выполнено следующее равенство:*

$$-[\mathcal{N}_A]^2 [B]^{|A|-2} - (|A|-2)[\mathcal{N}_A][B]^{|A|-1} =$$

$$= \langle \times \rangle_2 [B]^{|A|-2} - (|A|-2)\langle \times \rangle_1 [B]^{|A|-1} - \langle \prec \rangle_2 [B]^{|A|-2} - \delta\pi_*(\mathbf{1}\langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0 \rangle_{n+1})[B]^{|A|-2}.$$

Данное утверждение равносильно теореме 5.3.28, так как вторые слагаемые в обеих частях равенств взаимно сокращаются: $[\mathcal{N}_A] = \langle\times\rangle_1$, и тогда множитель $[B]^{|A|-2}$ сократится, ввиду невырожденности спаривания, задаваемого индексом пересечения в кольце тропических вееров $\mathcal{K}^0(\mathbb{Z}^A)$.

Доказательство. Для $M \in \mathbb{Z}$ рассмотрим отображение $\mathcal{M} : \mathbb{C}^A \to \mathbb{C}^A$, $\mathcal{M}(\sum_a c_a x^a) = \sum_a c_a^{M!} x^a$, возводящее стандартные координаты в некоторую большую степень. Выберем многочлены общего положения $h_1, \dots, h_{|A|-2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^A \cap B}$, $g \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^A \cap M\mathcal{N}_A}$ общего положения рядом с $D_A \circ \mathcal{M} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^A \cap M\mathcal{N}_A}$, гладкую торическую компактификацию $\mathcal{X}$ многообразия $\mathbb{C}^A$, совместную с многогранниками B и $\mathcal{N}_A$, и обозначим ее большой тор через T. Обозначим замыкания множеств $h_1 = \ldots = h_{|A|-2} = 0$, $h_1 = \ldots = h_{|A|-2} = g = 0$ и $h_1 = \ldots = h_{|A|-2} = D_A \circ \mathcal{M} = 0$ в $\mathcal{X}$ через V, C и $\widetilde{C}$. Гладкая кривая $\widetilde{C}$ является сглаживанием кривой C в гладкой поверхности V, следовательно,

$$e(T \cap \widetilde{C}) = e(\text{гладкая часть } C) + \sum_{p \in \operatorname{sing} C} e\big(T \cap (\text{слой Милнора } C \text{ в } p)\big)$$

где все точки C вне тора T считаются особыми.

Кривая C имеет следующие особенности:

1) $\mathcal{A}_2$-особенности возникают в точках пересечения V со стратом особенности $\mathcal{M}^{-1}\{\prec\}$ (так как дискриминант версальной деформации $\mathcal{A}_2$-особенности также является $\mathcal{A}_2$-особенностью).

2) $\mathcal{A}_1$-особенности возникают в точках пересечения V со стратом мультиособенности $\mathcal{M}^{-1}\{\times\times\}$.

3) Для достаточно большого M все особенности C вне большого тора многообразия $\mathcal{X}$ являются особенностями расходящихся тропок (это не всегда верно для $M = 1$).

Таким образом, предыдущую формулу можно более явно переписать следующим образом:

$$e(T \cap \widetilde{C}) = e(\text{гладкая часть } C) - (\text{количество } \mathcal{A}_2\text{-особенностей } C) +$$

$$+\sum_{p\in T\cap \operatorname{sing} C} e\big(T\cap(\text{число Милнора } C \text{ в } p)\big). \qquad (1)$$

Вычисляя члены это равенства, обнаружим, что они равны соответствующим членам доказываемого равенства.

По формуле Кушниренко-Бернштейна-Хованского, левая часть (1) равна

$$-M!^2\cdot[\mathcal{N}_A]^2[B]^{|A|-2}-M!\cdot(|A|-2)[\mathcal{N}_A][B]^{|A|-1}.$$

Для первого слагаемого в правой части (1) имеем

$$e(\text{гладкая часть } C)=\langle\text{гладкая часть } C\rangle_{|A|}=(\langle h_1=0\rangle\cdot\ldots\cdot\langle h_{|A|-2}=0\rangle\cdot\langle\times\rangle)_{|A|}=$$

$$=M!^2\cdot\langle\times\rangle_2[B]^{|A|-2}-M!\cdot(|A|-2)\langle\times\rangle_1[B]^{|A|-1}.$$

Для второго слагаемого в правой части (1) особенности типа $\mathcal{A}_2$ возникают в точках пересечения V со стратом особенности $\mathcal{M}^{-1}\{\prec\}$, следовательно, количество таких точек равно $M!^2\cdot\langle\prec\rangle_2[B]^{|A|-2}$.

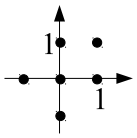
Для оставшегося слагаемого равенства (1) опишем особенности расходящихся тропок кривой C более подробно. Для целочисленного многогранника $B\subset\mathbb{Z}^n$ общего положения тропические веера $[B]^{|A|-2}$ и $[\mathcal{N}_A]$ пересекаются трансверсально (вне начала координат), и 1-мерный веер $[B]^{|A|-2}[\mathcal{N}_A]$ состоит из конечного множества лучей с весами $m_\alpha\in\mathbb{Z}$ и примитивными порождающими $\lambda_\alpha\in(\mathbb{Z}^A)^*$. Рассматривая $\lambda_\alpha\in(\mathbb{Z}^A)^*\cong\mathbb{Z}^A$ как функцию $A\to\mathbb{Z}$, мы можем найти линейную (но необязательно целочисленную!) функцию $\gamma'_\alpha:\mathbb{Z}^n\to\mathbb{Q}$ такую, что функция $\lambda_\alpha-\gamma'_\alpha:A\to\mathbb{Z}$ достигает своего максимума на некотором множестве $A_\alpha\subset A$, не являющемся множеством вершин симплекса. Более того, для многогранника B общего положения такое множество A_α единственно и является контуром. Определим $\gamma_\alpha=(\lambda_\alpha,\gamma'_\alpha)\in(\mathbb{Q}^A\oplus\mathbb{Q}^n)^*$. Для $r\in\mathbb{Z}$ определим i_r^α как $i(\frac{r-1}{M!})$, где функция $i(\cdot)$ строится, как в определении 5.3.26 для $\gamma=\gamma_\alpha$.

В данных обозначениях и при данных предположениях общего положения, для целочисленного многогранника $B\subset\mathbb{R}^A$ орбита коразмерности 1 многообразия $\mathcal{X}$, соответствующая ковектору λ_α, содержит $m_\alpha M!/i_1^\alpha$ особых точек кривой

C, и каждая из них является $(i_1^\alpha, i_2^\alpha, \ldots)$-особенностью расходящихся тропок, все ветви которой трансверсальны данной орбите. Другие орбиты многообразия $\mathcal{X}$ не содержат особых точек кривой C. Вычисляя эйлерову характеристику слоев Милнора особенностей расходящихся тропок по лемме 5.3.38, получим, что последнее слагаемое в (1) равно $-M!^2 \cdot \delta\pi_*(\mathbf{l}\langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+1})[B]^{|A|-2}$. $\square$

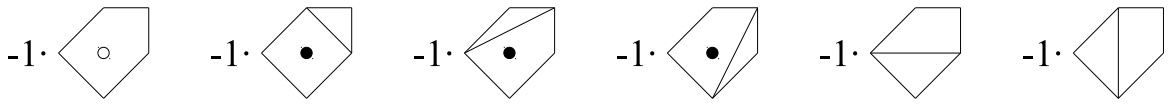
5.3.8. Пример

Вычислим тропические веера стратов особенностей $\{\times\times\}$ и $\{\prec\}$ в $\mathbb{C}^A$, для следующего множества A:

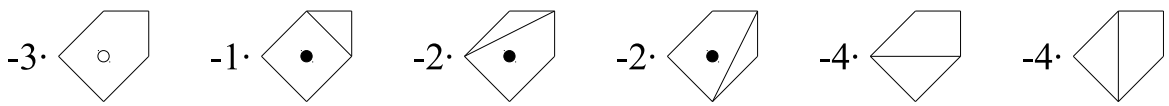


Конусы в $\mathbb{Q}^A$ которые нам встретятся в вычислении, мы будем описывать с помощью соответствующих выпуклых подразбиений выпуклой оболочки множества A: выпуклое подразбиение будет обозначать конус, состоящий из всех $\gamma \in \mathbb{Q}^A$ таких, что верхние грани F выпуклой оболочки графика $\gamma : A \to \mathbb{Q}$ образуют данное подразбиение. Точка a окрашена в черный или белый цвет в зависимости принадлежности $(\gamma(a), a)$ граням F, как в работе [60].

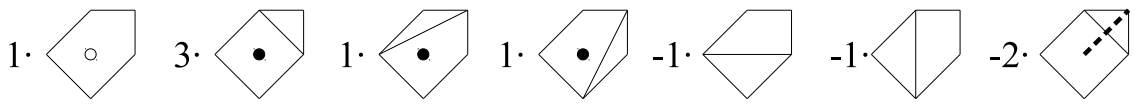
Правая часть равенства теоремы 5.3.23 состоит из конусов



Правая часть равенства теоремы 5.3.24 состоит из конусов

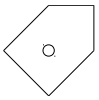
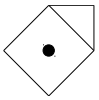
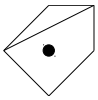
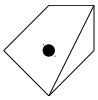
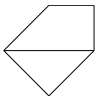
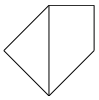
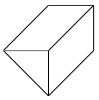


Веер $d\pi_*(\mathbf{l}\langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+1})$ состоит из конусов

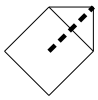
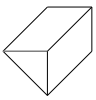


Последняя картинка обозначает конус, состоящий из всех таких γ, что A_0^γ — квадрат, а A_1^γ — отрезок, выделенный пунктиром. Это наиболее простой пример конуса страта мультиособенности, который нельзя представить в виде множества всех $\gamma \in \mathbb{Z}^A$, индуцирующих данное регулярное подразбиение множества A. В нашем примере такой конус всего один, однако для больших A таковыми являются большинство конусов. Они не входят в число конусов тропикализаций многообразий Севери, для которых кратности вычислены в [152].

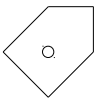
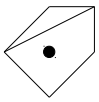
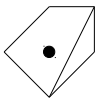
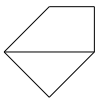
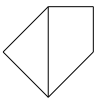
Веер $(\pi_*\langle s = \frac{\partial s}{\partial x_\cdot} = 0\rangle_{n+1})^2$ состоит из конусов

8·  4·  5·  5·  9·  9·  2· 

В замечании 5.3.30 описан способ его вычислить. В итоге, тропический веер $\{\times\times\}$-страта состоит из конусов

1·  1· 

а тропический веер $\{\prec\}$-страта состоит из конусов

2·  1·  1·  3·  3· 

что для данного примера нетрудно проверить вручную.

Заключение

Мы сделали первые продвижения в изучении аффинной теории особенностей, получили некоторые приложения, разработали необходимые для этого инструменты из выпуклой и кусочно-линейной геометрии.

Исходя из опыта этой работы, представляется интересным и дальше развивать “аффинную теорию особенностей” параллельно классической теории полиномов Тома. В частности, после публикации основного результата этой работы был независимо опубликован другой подход к его одномерному случаю – описанию тропического веера множества многочленов одной переменной с двумя кратными корнями [36]. Предложенный этими авторами подход более элементарен (основан на рациональных параметризациях многообразий Севери в одномерном случае), и не работает в многомерной ситуации, но зато дает надежду полностью вычислить тропический веер множества многочленов одной переменной с любой наперед заданной конфигурацией вырождения корней (это бы примерно соответствовало полному ответу в задаче о классических полиномах Тома для отображений коранга 1).

Помимо этого, укажем еще несколько направлений, в которых другие авторы развивают некоторые из наших результатов, и дальнейшие естественные вопросы в этих направлениях.

В работах Стармфелса и Дикенштейн с соавторами [37], [25] и [34] дискриминант системы уравнений, введенный в [44] и [46], подробно изучается в простейшем случае, не покрывающемся литературой об A-результантах и A-дискриминантах — это дискриминант “квадратной” системы уравнений (число уравнений равно числу неизвестных). Интересно было бы обобщить новые полученные там наблюдения на общий случай.

В работе Д’Андреа и Сомбра [28] кратности результантов, введенные в [41] и [44], и смешанные теневые объемы из [42] оказались естественными ингредиентами в многомерных обобщениях формулы Пуассона для результанта

в терминах произведений по корням. Эта работа исправила ошибку в известной работе [116] двадцатилетней давности и последующих (например, [106]), где указанные ингредиенты были как раз “потеряны”. Тем не менее, в многомерных формулах типа Пуассона по-прежнему остается неясным естественный выбор знаков результантов.

Результаты работ [44] и [47] о двойственно-вырожденных торических многообразиях мотивировали некоторые новые продвижения и вопросы в изучении связей между разными понятиями вырожденности целочисленных многогранников, см., например, [32] и [72]. Эйлеровы препятствия многогранников, введенные в работе [44], использованы в решении задач алгебраической геометрии, возникающих в связи с вопросами оптимизации ([70]). Исследование детерминантных особенностей в терминах многогранников Ньютона в [41] и [45] перенесено в работе [38] на случай симметричных матриц.

Исчисление тропических вееров с полиномиальными весами, предложенное в [51], получило развитие в двух направлениях. Во-первых, начиная с работы Франсуа [53], предложенное нами исчисление активно используется при изучении теории пересечения на тропических веерах, включая такие недавние достижения, как [65].

Во-вторых, с помощью языка операторов Монжа-Ампера эти конструкции были распространены Казарновским на ситуацию комплексного объемлющего пространства, комплексных экспоненциальных сумм и кусочно-плюригармонических функций вместо исходного вещественного множества изломов, многочленов и кусочно-полиномиальных функций ([164], [163], [85]), а также приложены Гублером и Кюннеманном в контексте неархимедовой теории Аракелова [66].

Некоторые естественные направления для дальнейших исследований в перечисленных направлениях намечены в гипотезах 3.2.56, 4.2.16, 4.3.4, 4.4.7, 5.3.32 и замечании 5.2.11.

Список литературы

1. *Aleksandrov A. G.* L'indice topologique des champs de vecteurs sur les intersections complètes quasi-homogènes // *C. R. Math. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* — 2012. — Vol. 350. — P. 911–916.
2. *Aleksandrov A. G.* The Poincare index and the χ_y-characteristic of Hirzebruch // *Complex Variables and Elliptic Equations.* — 2016. — Vol. 61. — P. 166–212.
3. *Allermann L.* Tropical intersection products on smooth varieties, Chapter 3: Ph. D. thesis. — 2010. — arXiv:0904.2693v2.
4. *Allermann L., Rau J.* First Steps in Tropical Intersection Theory // *Mathematische Zeitschrift.* — 2010. — Vol. 264. — P. 633–670. — arXiv:0709.3705.
5. *Aluffi P.* Characteristic classes of discriminants and enumerative geometry // *Comm. in algebra.* — 1998. — Vol. 26. — P. 3165–3193.
6. *Aluffi P.* Characteristic Classes of Singular Varieties // *Topics in Cohomological Studies of Algebraic Varieties, Trends in Mathematics.* — 2005. — P. 1–32.
7. *Aluffi P.* Chern classes of graph hypersurfaces and deletion-contraction // *Mosc. Math. J.* — 2012. — Vol. 12. — P. 671–700. — arXiv:1106.1447.
8. *Arnold V. I., Gusein-Zade S. M., Varchenko A. N.* Singularities of Differentiable Maps. — Boston, Basel, Berlin: Birkhauser, 1988. — Vol. I.
9. *Artal Bartolo E., Luengo I., Melle Hernández A.* Milnor number at infinity and topology and Newton boundary of a polynomial function // *Math. Z.* — 2000. — Vol. 233. — P. 679–696.
10. *Artal Bartolo E., Luengo I., Melle Hernández A.* On the topology of a generic fibre of a polynomial function // *Comm. Algebra.* — 2000. — Vol. 28. — P. 1767–1787.
11. *Ban C., McEwan L. J., Némethi A.* On the Milnor fiber of a quasi-ordinary surface singularity // *Canad. J. Math.* — 2002. — Vol. 54. — P. 55–70.
12. *Benoist O.* Degrés d'homogénéité de l'ensemble des intersections complètes sin-

gulières // *Annales de l'Institut Fourier.* — 2012. — Vol. 62. — P. 1189–1214. — arXiv:1009.0704.

13. *Bertrand B., Brugalle E., Mikhalkin G.* Genus 0 characteristic numbers of the tropical projective plane // *Compositio Math.* — 2014. — Vol. 150. — P. 46–104. — arXiv:1105.2004.
14. *Billera L. J., Sturmfels B.* Fiber polytopes // *Ann. of Math (2).* — 1992. — Vol. 135. — P. 527–549.
15. *Bivià-Ausina C.* The integral closure of modules, Buchsbaum-Rim multiplicities and Newton polyhedra // *J. London Math Soc.* — 2004. — Vol. 69. — P. 407–427.
16. *Bodin A.* Newton polygons and families of polynomials // *Manuscripta Math.* — 2004. — Vol. 113. — P. 371–382.
17. *Brion M.* Groupe de Picard et nombres caracteristiques des varietes spheriques // *Duke Math J.* — 1989. — Vol. 58. — P. 397–424.
18. *Brion M.* Piecewise polynomial functions, convex polytopes and enumerative geometry // *Banach Center Publ.* — 1996. — Vol. 36, Parameter spaces (Warsaw, 1994). — P. 25–44.
19. *Brion M.* The structure of the polytope algebra // *Tohoku Math J.* — 1997. — Vol. 49. — P. 1–32.
20. *Brion M., Joshua R.* Equivariant Chow ring and Chern classes of wonderful symmetric varieties of minimal rank // *Transformation groups.* — 2008. — Vol. 13. — P. 471–493. — arXiv:0705.1035.
21. *Brion M., Kausz I.* Vanishing of top equivariant Chern classes of regular embeddings // *Asian J Math.* — 2005. — Vol. 9. — P. 489–496. — arXiv:math/0503196.
22. *Broughton S.* Milnor numbers and the topology of polynomial hypersurfaces // *Inv. Math.* — 1988. — Vol. 92. — P. 217–241.
23. *Casagrande C., Di Rocco S.* Projective Q-factorial toric varieties covered by lines // *Comm. in Contemporary Mathematics.* — 2008. — Vol. 10. — P. 363–389. — arXiv:math/0512385.

24. *Catanese F.* On Severi's proof of the double point formula // *Communications in Algebra.* — 1979. — Vol. 7. — P. 763–773.

25. *Cattani E., Cueto M. A., Dickenstein A. et al.* Mixed Discriminants // *Math Z.* — 2013. — Vol. 274. — P. 761–778. — arXiv:1112.1012.

26. *Cattani E., Dickenstein A., Sturmfels B.* Rational hypergeometric functions // *Compositio Math.* — 2001. — Vol. 128. — P. 217–240.

27. *Curran R., Cattani E.* Restriction of A-Discriminants and Dual Defect Varieties // *Journal of Symbolic Computation.* — 2007. — Vol. 42. — P. 115–135. — arXiv:math/0510615.

28. *D'Andrea C., Sombra M.* A Poisson formula for the sparse resultant // *Proceedings of the LMS.* — 2015. — Vol. 110. — P. 932–964. — arXiv:1310.6617.

29. *De Concini C., Procesi C.* Complete symmetric varieties II Intersection theory // *Advanced Studies in Pure Mathematics.* — 1985. — Vol. 6, Algebraic groups and related topics. — P. 481–513.

30. *De Loera J. A., Liu F., Yoshida R.* A generating function for all semi-magic squares and the volume of the Birkhoff polytope // *J. Alg. Comb.* — 2009. — Vol. 30. — P. 113–139. — arXiv:math/0701866.

31. *Di Rocco S.* Projective duality of toric manifolds and defect polytopes // *Proc. LMS.* — 2006. — Vol. 3. — P. 85–104. — arXiv:math/0305150.

32. *Di Rocco S., Haase C., Nill B., Paffenholz A.* Polyhedral adjunction theory // *Algebra Number Theory.* — 2013. — Vol. 7. — P. 2417–2446. — arXiv:1105.2415.

33. *Dickenstein A., di Rocco S., Piene R.* Higher order duality and toric embeddings // *Annales de l'Institut Fourier.* — 2014. — Vol. 64. — P. 375–400. — arXiv:1111.4641.

34. *Dickenstein A., Emiris I., Karasoulou A.* Plane mixed discriminants and toric jacobians // *Geometry and computing.* — 2014. — Vol. 10. — P. 105–121. — arXiv:1304.5809.

35. *Dickenstein A., Feichtner E. M., Sturmfels B.* Tropical discriminants // *J. Amer Math Soc.* — 2007. — Vol. 20. — P. 1111–1133. — arXiv:math/0510126.

36. *Dickenstein A., Herrero M. I., Tabera L. F.* Arithmetics and combinatorics of tropical Severi varieties of univariate polynomials // *Israel Journal of Mathematics*. — 2017. — arXiv:1601.05479.

37. *Dickenstein A., Tabera L. F.* Singular Tropical Hypersurfaces // *Discr. and Comput. Geom.* — 2012. — Vol. 47. — P. 430–453. — arXiv:1012.5812.

38. *Dinh S. T., Pham T. S.* Lojasiewicz-type inequalities with explicit exponents for the largest eigenvalue function of real symmetric polynomial matrices // *Int. J. Math.* — 2016. — Vol. 27. — P. 1650012. — arXiv:1501.01419.

39. *Ebeling W., Gusein-Zade S. M.* Radial Index and Euler Obstruction of a 1-Form on a Singular Variety // *Geometriae Dedicata*. — 2005. — Vol. 113. — P. 231–241. — arXiv:math/0402388.

40. *Ernström L.* A Plücker formula for singular projective varieties // *Communications in algebra*. — 1997. — Vol. 25. — P. 2897–2901.

41. *Esterov A.* Determinantal singularities and Newton polytopes // *Proc. of the Steklov inst.* — 2007. — Vol. 259. — P. 16–34.

42. *Esterov A.* On the existence of mixed fiber bodies // *Moscow Mathematical Journal*. — 2008. — Vol. 8. — P. 433–442. — arXiv:0810.4996.

43. *Esterov A.* Determinantal singularities and Newton polyhedra. — 2009. — arXiv:0906.5097.

44. *Esterov A.* Newton polyhedra of discriminants of projections // *Discrete Comput. Geom.* — 2010. — Vol. 44. — P. 96–148. — arXiv:0810.4996.

45. *Esterov A.* Multiplicities of degenerations of matrices and mixed volumes of Cayley polyhedra // *J. of Sing.* — 2012. — Vol. 6. — P. 27–36. — arXiv:1205.4344.

46. *Esterov A.* The discriminant of a system of equations // *Adv. Math.* — 2013. — Vol. 245. — P. 534–572. — arXiv:1110.4060.

47. *Esterov A.* Characteristic classes of affine varieties and Plücker formulas for affine morphisms. // *принято к печати в J EMS*. — 2017.

48. *Esterov A., Gusev G.* Systems of equations with a single solution // *J. of Symb.*

Comput. — 2015. — Vol. 68, no. 6763. — P. 116–130. — arXiv:1211.6763.

49. *Esterov A., Gusev G.* Multivariate Abel-Ruffini // *Math. Ann.* — 2016. — Vol. 365. — P. 1091–1110. — arXiv:1405.1252.
50. *Esterov A., Takeuchi K.* On vanishing theorems for local systems associated to Laurent polynomials // *Nagoya Math J.* — 2017. — arXiv:0103.1403.
51. *Esterov A. I.* Tropical varieties with polynomial weights and corner loci of piecewise polynomials // *Moscow Mathematical Journal.* — 2012. — Vol. 12. — P. 55–76. — arXiv:1012.5800.
52. *Esterov A. I., Khovanskii A. G.* Elimination theory and Newton polytopes // *Func. An and Other Math.* — 2008. — Vol. 2. — P. 45–71. — arXiv:math/0611107.
53. *Francois G.* Cocycles on tropical varieties via piecewise polynomials // *Proc. Amer Math. Soc.* — 2013. — Vol. 141. — P. 481–497. — arXiv:1102.4783.
54. *Francois G., Rau J.* The diagonal of tropical matroid varieties and cycle intersections // *Collectanea Mathematica.* — 2013. — Vol. 64. — P. 185–210. — arXiv:1012.3260v1.
55. *Fulton W., MacPherson R., Sottile F., Sturmfels B.* Intersection theory on spherical varieties // *J. of alg. geom.* — 1995. — Vol. 4. — P. 181–194.
56. *Fulton W., Sturmfels B.* Intersection theory on toric varieties // *Topology.* — 1997. — Vol. 36. — P. 335–353. — arXiv:alg-geom/9403002.
57. *Furukawa K., Ito A.* A combinatorial description of dual defects of toric varieties. — 2016. — arXiv:1605.05801.
58. *Gaffney T.* Fibers of polynomial mappings at infinity and a generalized Malgrange condition // *Compositio Math.* — 1999. — Vol. 119. — P. 157–167.
59. *Gathmann A., Kerber M., Markwig H.* Tropical fans and the moduli spaces of tropical curves // *Compos. Math.* — 2009. — Vol. 145. — P. 173–195. — arXiv:0708.2268.
60. *Gelfand I. M., Kapranov M. M., Zelevinsky. A. V.* Discriminants, Resultants, and Miltidimensional Determinants. — Birkhäuser, 1994.

61. *Gelfond O. A., Khovanskii A. G.* Toric geometry and Grothendieck residues // *Mosc. Math J.* — 2002. — Vol. 2. — P. 99–112.

62. *Gonzalez Perez P. D.* Singularites quasi-ordinaires toriques et polyedre de Newton du discriminant // *Canad. J. Math.* — 2000. — Vol. 52. — P. 348–368.

63. *Göttsche L.* A conjectural generating function for numbers of curves on surfaces // *Comm. Math. Phys.* — 1998. — Vol. 196. — P. 523–533. — arXiv:alg-geom/9711012.

64. *Greuel G.-M., Lossen C., Shustin E.* Singular Algebraic Curves. — Springer, 2015.

65. *Gross A.* Correspondence Theorems via Tropicalizations of Moduli Spaces // *Commun. Contemp. Math.* — 2016. — Vol. 18, no. 1550043. — arXiv:1406.1999.

66. *Gubler W., Kuennemann K.* A tropical approach to non-archimedean Arakelov theory // *Alg. Number Th.* — 2017. — Vol. 11. — P. 77–180. — arXiv:1406.7637.

67. *Gusein-Zade S. M., Luengo I., Melle Hernández A.* Partial resolutions and the zeta-function of a singularity // *Comment. Math. Helv.* — 1997. — Vol. 72. — P. 244–256.

68. *Gusev G.* Euler characteristic of the bifurcation set for a polynomial of degree 2 or 3. Перевод диссертации "Зета-функции монодромии и диаграммы Ньютона".: Ph. D. thesis / МГУ, Москва, Россия. — 2008. — arXiv:1011.1390v1.

69. *Haase C., Ziegler G. M.* On the Maximal Width of Empty Lattice Simplices // *European Journal of Combinatorics.* — 2000. — Vol. 21. — P. 111–119.

70. *Helmer M., Sturmfels B.* Nearest Points on Toric Varieties // *To appear in Mathematica Scandinavica.* — 2016. — arXiv:1603.06544.

71. *Huh J., Sturmfels B.* Likelihood Geometry // *Combinatorial Algebraic Geometry, Lecture Notes in Mathematics.* — 2014. — P. 63–117. — arXiv:1307.7765.

72. *Ito A.* Algebro-geometric characterization of Cayley polytopes // *Adv. in Math.* — 2015. — Vol. 270. — P. 598–608. — arXiv:1202.6663.

73. *Jelonek Z.* The set of points at which the polynomial mapping is not proper //

Ann. Polon. Math. — 1993. — Vol. 58. — P. 259–266.

74. *Jelonek Z.* Testing sets for properness of polynomial mappings // *Math. Ann.* — 1999. — Vol. 315. — P. 1–35.
75. *Jelonek Z.* On bifurcation points of a complex polynomial // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 2003. — Vol. 131. — P. 1361–1367.
76. *Jelonek Z.* On the generalized critical values of a polynomial mapping // *Manuscripta Math.* — 2003. — Vol. 110. — P. 145–157.
77. *Jelonek Z., Kurdyka K.* On asymptotic critical values of a complex polynomial // *J. Reine Angew. Math.* — 2003. — Vol. 565. — P. 1–11.
78. *Jelonek Z., Kurdyka K.* Quantitative generalized Bertini-Sard theorem for smooth affine varieties // *Discrete Comput. Geom.* — 2005. — Vol. 34. — P. 659–678.
79. *Jones G. A.* Primitive permutation groups containing a cycle // *Bull. Aust. Math. Soc.* — 2014. — Vol. 89. — P. 159–165. — arXiv:1209.5169.
80. *Karpenkov O.* Completely empty pyramids on integer lattices and two-dimensional faces of multidimensional continued fractions // *Monatsh. Math.* — 2007. — Vol. 152. — P. 217–249.
81. *Katz E.* Tropical Invariants from the Secondary Fan // *Adv. Geom.* — 2009. — Vol. 9. — P. 153–180. — arXiv:math/0604290.
82. *Katz E.* Tropical Intersection Theory from Toric Varieties // *Collect. Math.* — 2012. — Vol. 63. — P. 29–44.
83. *Katz E., Payne S.* Piecewise polynomials, Minkowski weights, and localization on toric varieties // *Algebra Number Theory.* — 2008. — Vol. 2. — P. 135–155. — arXiv:math/0703672.
84. *Katz E., Payne S.* Realization spaces for tropical fans // Proceedings of the Abel Symposium, vol.6. — 2011. — P. 73–88. — arXiv:0909.4582.
85. *Kazarnovskii B.* On piecewise pluriharmonic functions. — arXiv:1206.3741.
86. *Kazarnovskii B., Khovanskii A.* Mixed volumes and tropical geometry. — preprint.

87. *Kempf G., Knudsen F., Munford D., Saint-Donat B.* Toroidal Embeddings I. — Springer-Verlag, 1973. — Vol. 339 of *Lecture Notes in Math.*

88. *Khovanskii A., Timorin V.* On the theory of coconvex bodies // *Discrete Comput. Geom.* — 2014. — Vol. 52. — P. 806–823.

89. *Khovanskii A. G.* Topological Galois theory. Springer Monographs in Mathematics. — Springer, 2015.

90. *Kiritchenko V.* Chern classes for reductive groups and an adjunction formula // *Annales de l'Institut Fourier.* — 2006. — Vol. 56. — P. 1225–1256. — arXiv:math/0411331.

91. *Kouchnirenko A. G.* Polyèdres de Newton et nombres de Milnor // *Inv. Math.* — 1976. — Vol. 32. — P. 1–32.

92. *Kurdyka K., Orro P., Simon S.* Semialgebraic Sard Theorem for Generalized Critical Values // *J. Differential Geom.* — 2000. — Vol. 56. — P. 67–92.

93. *Lando S., Zvonkin K.* Graphs on Surfaces and Their Applications. — Springer, 2004.

94. *MacPherson R. D.* Chern classes for singular algebraic varieties // *Ann. of Math.* — 1974. — Vol. 100. — P. 423–432.

95. *Matsui Y., Takeuchi K.* A geometric degree formula for A-discriminants and Euler obstructions of toric varieties // *Adv. Math.* — 2011. — Vol. 226. — P. 2040–2064. — arXiv:0807.3163.

96. *Matsui Y., Takeuchi K.* Milnor fibers over singular toric varieties and nearby cycle sheaves // *Tohoku Math J.* — 2011. — Vol. 63. — P. 1–147. — arXiv:0809.3148.

97. *Mazin M.* Piecewise polynomial functions on fans, and an algorithm for computation of the mixed volume. — preprint.

98. *McDonald J.* Fractional power series solutions for systems of equations // *Discrete Comput. Geom.* — 2002. — Vol. 27. — P. 501–529.

99. *McMullen P.* Valuations and tensor weights on polytopes (in preparation).

100. *McMullen P.* The polytope algebra // *Adv. Math.* — 1989. — Vol. 78. —

P. 76–130.

101. *McMullen P.* Weights on polytopes // *Discrete Comput. Geom.* — 1996. — Vol. 15. — P. 363–388.
102. *McMullen P.* Mixed fibre polytopes // *Discrete Comput. Geom.* — 2004. — Vol. 32. — P. 521–532.
103. *M. Hall.* Combinatorial Theory. — Second edition edition. — John Wiley & Sons, 1986.
104. *Mikhalkin G.* Enumerative tropical algebraic geometry in $\mathbb{R}^2$ // *J. Amer. Math. Soc.* — 2005. — Vol. 18. — P. 313–377. — arXiv:math/0312530.
105. *Mikhalkin G.* Tropical geometry and its applications // Proceedings of the ICM. — 2006. — arXiv:math/0601041.
106. *Minimair M.* Sparse resultant under vanishing coefficients, // *J. Algebraic Combin.* — 2003. — Vol. 18. — P. 53–73.
107. *Minkowski H.* Theorie der konvexen Körpern, insbesonder der Begründung ihres Oberflöchenbegriffs, Gesammelte Abhandlungen // *Teubner.* — 1911. — Vol. 2. — P. 131–229.
108. *Morelli R.* A theory of polyhedra // *Adv. Math.* — 1993. — Vol. 97. — P. 1–73.
109. *Némethi A., Zaharia A.* On the bifurcation set of a polynomial function and Newton boundary // *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* — 1990. — Vol. 26. — P. 681–689.
110. *Nie J.* Discriminants and nonnegative polynomials // *J. Symbolic Comput.* — 2012. — Vol. 47. — P. 167–191.
111. *Oda T.* Problems on Minkowski sums of convex lattice polytopes. — 1997. — arXiv:0812.1418.
112. *Oka M.* Principal zeta-function of non-degenerate complete intersection singularity // *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.* — 1990. — Vol. 37. — P. 11–32.
113. *Parusinski A.* A note on singularities at infinity of complex polynomials // Symplectic singularities and geometry of gauge fields, Warsaw. — 1995. — P. 131–141.

114. *Parusinski A.* On the bifurcation set of complex polynomial with isolated singularities at infinity // *Compositio Math.* — 1995. — Vol. 97. — P. 369–384.

115. *Payne S.* Equivariant Chow cohomology of toric varieties // *Math. Res. Lett.* — 2006. — Vol. 13. — P. 29–41.

116. *Pedersen P., Sturmfels B.* Product formulas for resultants and Chow forms, // *Math. Z.* — 1993. — Vol. 214. — P. 377–396.

117. *Plücker J.* System der analytischen Geometrie. — Berlin, 1835.

118. *Rabier P. J.* Ehresmann fibrations and Palais-Smale conditions for morphisms of Finsler manifolds // *Ann. of Math.* — 1997. — Vol. 146. — P. 647–691.

119. *Raibaut M.* Singularités à l'infini et intégration motivique // *Bulletin de la SMF.* — 2012. — Vol. 140. — P. 51–100.

120. *Ritt J. F.* Prime and composite polynomials // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1922. — Vol. 23. — P. 51–66.

121. *Schneider R.* A Formula for Mixed Volumes // Geometric Aspects of Functional Analysis, Lecture Notes in Mathematics 2116. — 2014. — P. 423–426.

122. *Schwartz M.-H.* Classes et caractères de Chern-Mather des espaces linéaires // *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* — 1982. — Vol. 295. — P. 399–402.

123. *Severi F.* Sulle intersezioni delle varietá algebriche e sopra i loro caratteri e singolarita proiettive, Mem // *Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* — 1902. — Vol. 52. — P. 61–118.

124. *Shaw K. M.* A tropical intersection product in matroidal fans // *SIAM J Discrete Math.* — 2013. — Vol. 27. — P. 459–491. — arxiv:1010.3967.

125. *Shitov Y.* When do the r-by-r minors of a matrix form a tropical basis? // *J. of Comb. Th. A.* — 2013. — Vol. 120. — P. 1166–1201. — arXiv:1109.2240.

126. *Shustin E.* A tropical approach to enumerative geometry // *St. Petersburg Math. J.* — 2006. — Vol. 17. — P. 343–375. — arXiv:math/0211278.

127. *Shustin E.* Tropical and algebraic curves with multiple points // *Progr. in Math.* — 2012. — Vol. 296. — P. 431–464. — arXiv:0904.2834.

128. *Siebert B., Nishinou T.* Toric degenerations of toric varieties and tropical

curves // *Duke Math J.* — 2006. — Vol. 135. — P. 1–51. — arXiv:math/0409060.

129. *Siersma D., Tibar M.* Singularities at infinity and their vanishing cycles // *Duke Math Journal.* — 1995. — Vol. 80. — P. 771–783.
130. *Stanley R.* Generalized H-vectors, intersection cohomology of toric varieties, and related results // Commutative algebra and combinatorics, Kyoto, 1985, Adv. Stud. Pure Math., 11. — 1987. — P. 187–213.
131. *Sturmfels B.* On the Newton polytope of the resultant // *J. Algebraic Combin.* — 1994. — Vol. 3. — P. 207–236.
132. *Sturmfels B., Tevelev E. A., Yu. J.* The Newton polytope of the implicit equation // *Mosc. Math. J.* — 2007. — Vol. 7. — P. 327–346. — arXiv:math/0607368.
133. *Sturmfels B., Tevelev J.* Elimination theory for tropical varieties // *Math. Res. Lett.* — 2008. — Vol. 15. — P. 543–562. — arXiv:0704.3471.
134. *Sturmfels B., Yu J.* Tropical Implicitization and Mixed Fiber Polytopes // The IMA Volumes in Mathematics and its Applications Vol. 148 (Software for Algebraic Geometry). — Springer New York, 2008. — P. 111–131.
135. *Teissier B.* The hunting of invariants in the geometry of discriminants // Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976). — Sijthoff and Noordhoff, 1977. — P. 565–678.
136. *Tevelev E.* Compactifications of Subvarieties of Tori // *Amer. J. Math.* — 2007. — Vol. 129. — P. 1087–1104. — arXiv:math/0412329.
137. *Thanh L., Oka M.* Note on estimation of the number of the critical values at infinity // *Kodai Math J.* — 1994. — Vol. 17. — P. 409–419.
138. *Thanh L., Oka M.* Estimation of the number of the critical values at infinity of a polynomial function $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ // *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* — 1995. — Vol. 31. — P. 577–598.
139. *Thom R.* Les singularités des applications différentiables // *Ann. Inst. Fourier.* — 1955. — Vol. 6. — P. 43–87.
140. *Tibar M.* Topology at infinity of polynomial maps and Thom regularity condition // *Compositio Math.* — 1998. — Vol. 1. — P. 89–109.

141. *Tyomkin I.* Tropical geometry and correspondence theorems via toric stacks // *Math. Ann.* — 2012. — Vol. 353. — P. 945–995. — arXiv:1001.1554.

142. *Tzeng Y.-J.* A proof of Gottsche-Yau-Zaslow formula // *J. Differential Geom.* — 2012. — Vol. 90. — P. 439–472. — arXiv:1009.5371.

143. *Varchenko A. N.* Zeta-Function of Monodromy and Newton's Diagram // *Inventiones math.* — 1976. — Vol. 37. — P. 253–262.

144. *Vassiliev V.* Multiplicities of bifurcation sets of Pham singularities. — 2017. — arXiv:1701.03909.

145. *Viro O.* Some integral calculus based on Euler characteristic // *Lect Notes Math.* — 1988. — Vol. 1346. — P. 127–138.

146. *Viro O.* Hyperfields for tropical geometry I: hyperfields and dequantization. — 2010. — arXiv:1006.3034.

147. *Vui H. H.* Sur la fibration globale des polynômes de deux variables complexes // *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* — 1989. — Vol. 309. — P. 231–234.

148. *Vui H. H.* Bifurcation set of the global Milnor fibration // Polynomial automorphisms and related topics. — Publishing House for Science and Technology, Hanoi, 2007. — P. 137–158.

149. *Vui H. H., Thang N. T.* On the topology of polynomial functions on algebraic surfaces in $\mathbb{C}^n$ // Singularities II, Contemp. Math. 475. — Amer. Math. Soc., 2008. — P. 61–67.

150. *Vui H. H., Thang N. T.* On the topology of polynomial mappings from $\mathbb{C}^n$ to C^{n-1} // *Internat. J. Math.* — 2011. — Vol. 22. — P. 435–448.

151. *Vui H. H., Tráng L. D.* Sur la topologie des polynômes complexes // *Acta Math. Vietnam.* — 1985. — Vol. 9. — P. 21–32.

152. *Yang J. J.* Tropical Severi Varieties // *Portugal. Math.* — 2013. — Vol. 70. — P. 59–91. — arXiv:1108.5839.

153. *Zaharia A.* On the bifurcation set of a polynomial function and Newton boundary. II. Kodai Math // *J.* — 1996. — Vol. 19. — P. 218–233.

154. *Ziegler G.* Lectures on polytopes. Graduate texts in mathematics. — Springer,

New York, 1995.

155. *Александров А. Г.* Индекс дифференциальных форм на полных пересечениях // *Функциональный анализ и его приложения.* — 2015. — Vol. 49. — P. 1–17.

156. *Антипова И. А., Цих А. К.* Дискриминантное множество системы n полиномов Лорана от n переменных // *Изв. РАН. Сер. матем.* — 2012. — Vol. 76. — P. 29–56.

157. *Арнольд В. И.* Задачи Арнольда. — Фазис, 2000.

158. *Бернштейн Д. Н.* Число корней системы уравнений // *Функц. анализ и его прил.* — 1975. — Vol. 9. — P. 1–4.

159. *Гусев Г. Г.* Эйлерова характеристика многообразия бифуркаций для многочлена степени 2 // *УМН.* — 2008. — Vol. 63. — P. 167–168.

160. *Данилов В. И.* Геометрия торических многообразий // *УМН.* — 1978. — Vol. 33. — P. 85–134.

161. *Казарновский Б. Я.* Укорочения систем уравнений, идеалов и многообразий // *Изв. РАН. Сер. матем.* — 1999. — Т. 63. — С. 119–132.

162. *Казарновский Б. Я.* c-вееры и многогранники Ньютона алгебраических многообразий // *Изв. РАН. Сер. матем.* — 2003. — Т. 67. — С. 23–44.

163. *Казарновский Б. Я.* Действие комплексного оператора Монжа–Ампера на кусочно линейных функциях и экспоненциальные тропические многообразия // *Изв. РАН. Сер. матем.* — 2014. — Т. 78. — С. 53–74.

164. *Казарновский Б. Я.* О действии комплексного оператора Монжа–Ампера на кусочно линейных функциях // *Функц. анализ и его прил.* — 2014. — Т. 48. — С. 19–29.

165. *Казарян М. Э.* Мультиособенности, кобордизмы и исчислительная геометрия // *УМН.* — 2003. — Vol. 58. — P. 29–88.

166. *Казарян М. Э., Ландо С. К.* Многочлены Тома для отображений кривых с изолированными особенностями // *Тр. МИАН.* — 2007. — Т. 258. — С. 93–106. — arXiv:0706.1523.

167. *Оревков С. Ю.* Объем многогранника Ньютона дискриминанта // *УМН.* — 1999. — Vol. 54. — P. 165–166.

168. *Пухликов А. В., Хованский А. Г.* Конечно-аддитивные меры виртуальных многогранников // *Алгебра и анализ.* — 1992. — Vol. 4. — P. 161–185.

169. *Пухликов А. В., Хованский А. Г.* Теорема Римана–Роха для интегралов и сумм квазиполиномов по виртуальным многогранникам // *Алгебра и анализ.* — 1992. — Vol. 4. — P. 188–216.

170. *Седых В. Д.* О сосуществовании мультиособенностей коранга 1 устойчивого гладкого отображения многообразий одинаковой размерности // *Тр. МИАН.* — 2007. — Vol. 258. — P. 201–226.

171. *Тиморин В. А.* О многогранниках, простых в ребрах // *Функц. анализ и его прил.* — 2001. — Vol. 35. — P. 36–47. — arXiv:math/0010213.

172. *Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона и торические многообразия // *Функц. анализ и его прил.* — 1977. — Vol. 11. — P. 56–64.

173. *Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона и род полных пересечений // *Функц. анализ и его прил.* — 1978. — Vol. 12. — P. 51–61.

174. *Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона и неприводимые компоненты полных пересечений // *Изв. РАН. Сер. матем.* — 2016. — Vol. 80. — P. 281–304.

175. *Эстеров А. И.* Индексы 1-форм, результанты и многогранники Ньютона // *УМН.* — 2005. — Vol. 60. — P. 181–182.

176. *Эстеров А. И.* Индексы 1-форм, индексы пересечения и многогранники Ньютона // *Матем. сб.* — 2006. — Vol. 197. — P. 137–160.