ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертации Эстерова Александра Исааковича *"Тропическая теория особенностей и геометрия многочленов с неопределенными коэффициентами"*, представленной на соискание ученой степени доктора физико–математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

В последние десятилетия в топологии многообразий и алгебраической геометрии большое внимание уделяется количественным аспектам сосуществования особенностей различных дифференциально-геометрических объектов общего положения. Кратко, эту проблему можно сформулировать следующим образом: описать соотношения на топологические или алгебро-геометрические инварианты множеств точек, в которых рассматриваемое пространство или отображение имеет особенности заданных типов.

Одним из первых классических результатов, полученных в этой области, являются формулы Плюккера для числа простых двойных самопересечений и числа полукубических точек возврата двойственной кривой к алгебраической кривой общего положения на проективной плоскости. Другим примером важнейшего достижения глобальной теории особенностей является теория многочленов Тома. Построенная первоначально для локальных особенностей гладких собственных отображений, эта теория сравнительно недавно (в начале 2000-х годов) была распространена М.Э.Казаряном на мультиособенности. А именно, он получил универсальную формулу для характеристических классов, двойственных циклам мультиособенностей голоморфных отображений общего положения, через так называемые остаточные многочлены.

Диссертация А.И.Эстерова также посвящена одному из направлений глобальной теории мультиособенностей. Дело в том, что теория многочленов Тома неприменима к такому важному классу отображений, как полиномиальные. Оказывается, что почти ни для каких носителей компонент полиномиального отображения, общее отображение с заданными носителями невозможно компактифицировать так, чтобы к получившемуся собственному отображению была непосредственно применима техника многочленов Тома (в результате компактификации получаются весьма вырожденные особенности).

Тем не менее, А.И.Эстеров в своей диссертационной работе построил аналог теории многочленов Тома и в этой сложной ситуации – для полиномиальных комплексных отображений общего положения.

Основная идея состоит в следующем. Вместо того, чтобы пытаться компактифицировать такое отображение, нужно изучать фундаментальные классы стратов мультиособенностей не в кольце сингулярных когомологий области определения и множества значений отображения, а в другом кольце, которое оставалось бы нетривиальным для (некомпактифицированных) области определения и множества значений полиномиального отображения, т.е. для аффинного комплексного пространства или комплексного тора.

В качестве такого кольца в диссертации используется так называемое кольцо условий, или эквивариантное кольцо Чжоу комплексного тора. Для этого кольца в главе 5 строится исчисление характеристических классов. С помощью этих классов в кольце условий описываются универсальные выражения типа многочленов Тома для мультиособенностей коразмерности 1 и 2 (главы 4 и 5).

Строго говоря, эти универсальные выражения нельзя назвать многочленами, поскольку вычисления в кольце условий сводятся к операциям не с многочленами, а с некоторыми кусочно-линейными объектами – тропическими веерами. Соответственно, значительная часть работы посвящена развитию необходимой техники работы с тропическими веерами (глава 3) и многогранниками Ньютона (глава 2).

Например, один из важных результатов диссертации, утверждающий, что множество вырожденных в смысле Хованского систем полиномиальных уравнений является гиперповерхностью (глава 4), сводится к исследованию вопросов комбинаторики выпуклых многогранников, составляющих основное содержание главы 3. Другими замечательными приложениями разработанных методов, изложенными в главе 4, являются многомерная версия теоремы Абеля, классифицирующая неразрешимые в радикалах системы полиномиальных уравнений с неопределенными коэффициентами, и классификация двойственно невырожденных торических многообразий минимальной степени.

Более подробно я изложу здесь фрагмент из главы 5, касающийся решения одной задачи классической теории особенностей, которое стало возможным благодаря развитой Эстеровым теории.

Итак, пусть $a : \{1, \ldots, n+1\} \to \mathbb{Z}$ – неотрицательная вогнутая функция, $a(n+1) = 0$, и c_i — общий многочлен степени $a(i)$ от одной переменной $t \in \mathbb{C}$. Для скольких значений параметра t многочлен $f_t(x) = c_1(t)x + \ldots + c_n(t)x^n + x^{n+1}$ от $x \in \mathbb{C}$ не является морсовским?

Чтобы ответить на это вопрос, рассмотрим ограничение π проекции

$$(\mathbb{C} \setminus 0)^3 \to (\mathbb{C} \setminus 0)^2,\ (x, y, t) \mapsto (y, t)$$

на поверхность $M \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^3$, заданную уравнением $f_t(x) = y$. Через A_1, A_2, $2A_1$ обозначим (открытые) множества точек $(y, t) \in (\mathbb{C} \setminus 0)^2$ таких, что уравнение $f_t(x) = y$ относительно переменной x имеет ровно один корень кратности 2, ровно один корень кратности 3 и ровно два корня кратности 2, соответственно. Тогда искомое число неморсовских многочленов равно сумме $|2A_1| + |A_2|$ мощностей множеств $2A_1$ и A_2. Последние можно найти из системы трех уравнений:

$$e(A_1) + 2|2A_1| + 2|A_2| = a(1) - 2\sum_i a(i), \tag{1}$$

$$e(A_1) + 2|2A_1| + |A_2| = 3a(1) - 4\sum_i a(i), \tag{2}$$

$$e(A_1) - |A_2| = a(1) - 2\sum_i (3i-2)a(i), \tag{3}$$

где e – эйлерова характеристика.

Уравнения (1)–(3) являются следствиями теорем 5.3.23, 5.3.24, 5.3.28 главы 5 об универсальных соотношениях между тропическими характеристическими классами (мульти)особенностей полиномиальных отображений. Автор диссертации дает и непосредственный вывод этих уравнений, из которого видны трудности, которые ему удалось преодолеть. Вот этот вывод после исправления всех опечаток.

Пусть $N \subset \mathbb{R}^3$ – многогранник Ньютона многочлена $F(x, y, t) = y - f_t(x)$, а $D \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^2$ – множество критических значений отображения π. Тогда эйлерова характеристика поверхности $F = 0$ в $(\mathbb{C} \setminus 0)^3$ равна

$$e(F = 0) = (n + 1) \cdot e((\mathbb{C} \setminus 0)^2 \setminus D) + ne(A_1) + (n - 1)e(2A_1) + (n - 1)e(A_2)$$

$$= (n + 1) \cdot e(\mathbb{C} \setminus 0)^2 - e(A_1) - 2|2A_1| - 2|A_2| = -e(A_1) - 2|2A_1| - 2|A_2|$$

в силу аддитивности эйлеровой характеристики. С другой стороны, по формуле Кушниренко-Бернштейна-Хованского, число $e(F = 0)$ равно целочисленному объему $v(N)$ многогранника N. Уравнение (1) следует теперь из того, что $v(N) = 2 \sum_i a(i) - a(1)$.

Пусть C – множество критических точек отображения π. Оно задается системой уравнений $F = x\frac{\partial F}{\partial x} = 0$. Эта система вырождена относительно многогранника Ньютона N, так как замыкание $\overline{C}$ кривой C в N-торическом многообразии пересекает одномерную орбиту, соответствующую ребру $[(1, 0, 0), (1, 0, a(1))]$, в $a(1)$ точках. Тем не менее, в каждой из этих точек кривая $\overline{C}$ трансверсально пересекает замыкание каждой из двумерных орбит, к которой примыкает указанная одномерная. Следовательно, эйлерова характеристика множества C на $a(1)$ превышает эйлерову характеристику множества $\widetilde{C}$ решений системы $F = x\frac{\partial F}{\partial x} + G = 0$, где G — достаточно малый многочлен общего положения с многогранником Ньютона N. Последняя система уравнений невырождена относительно N. Поэтому $e(\widetilde{C}) = -2v(N)$ по формуле Кушниренко-Бернштейна-Хованского. Отсюда следует уравнение (2), поскольку $e(C) = e(A_1) + 2|2A_1| + |A_2|$.

Наконец, в силу теоремы 2.2.39 главы 2, многоугольник Ньютона N_D множества критических значений D является смешанным расслоенным телом пары многогранников N, N. Поэтому N_D имеет вершины в точках

$$(0, 0), (n, 0) \text{ и } (i - 1, 2a(n) + 2a(n - 1) + \ldots + 2a(i) + (i - 1)a(i)), i = 1, \ldots, n.$$

Замыкание $\overline{D}$ кривой D в N_D-торической поверхности имеет $|2A_1|$ простых двойных самопересечений, $|A_2|$ полукубических точек возврата и $a(1)$ простых касаний с одномерной орбитой $y = 0$. Переход от множества D к его общему шевелению $\widetilde{D}$ с тем же многоугольником Ньютона N_D приводит к разрешению особенностей каждого из этих типов, которое уменьшает эйлерову характеристику кривой D на $|2A_1|$, $2|A_2|$ и $a(1)$ соответственно. Отсюда и из формул

$$e(D) = e(A_1) + |2A_1| + |A_2|, \quad e(\widetilde{D}) = -v(N_D), \quad v(N_D) = 2\sum_i (3i - 2)a(i)$$

получаем уравнение (3). Нетривиальные утверждения о трансверсальности и типах особенностей в приведенном выше рассуждении обосновываются общими результатами параграфов 5.2.7 и 5.3.4 главы 5.

Все сказанное выше показывает важность и актуальность рассматриваемых в диссертации задач, огромную значимость полученных автором результатов. Большая часть из них опубликована в российских и иностранных математических журналах (результаты последней главы 5 будут опубликованы в статье, принятой к печати в журнале Европейского математического общества). Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

К недостаткам диссертации А.И.Эстерова следует отнести слишком большой ее объем (332 страницы), а также большое количество опечаток. Имеются и некоторые неточности. Например, Vol иногда обозначает обычный объем многогранника в $\mathbb{R}^n$, а иногда его целочисленный объем, получающийся из обычного умножением на $n!$. Все это, конечно, затрудняет чтение текста, однако никоим образом не сказываются на общей оценке работы.

По моему мнению диссертационная работа А.И.Эстерова "Тропическая теория особенностей и геометрия многочленов с неопределенными коэффициентами" удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико–математических наук (согласно положению о порядке присуждения ученых степеней, утвержденным постановлением Правительства РФ №842 от 24.09.2013), а ее автор Эстеров Александр Исаакович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

14 июня 2017 г.

Официальный оппонент В. Д. Седых

доктор физико–математических наук
профессор кафедры высшей математики
ФГБОУ ВО "Российский государственный университет
нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина"
119991, г.Москва, Ленинский пр-т 65
моб.тел.: 909-150-54-08
e-mail: vdsedykh@gmail.com