На правах рукописи

Эстеров Александр Исаакович

Тропическая теория особенностей и геометрия многочленов с неопределенными коэффициентами

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва – 2017

Работа выполнена на *факультете математики Национального Исследовательского Университета "Высшая Школа экономики"*.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Лаборатории 20 Института проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук **Александров Александр Григорьевич**;

доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Российского государственного университета нефти и газа им. И. М. Губкина, доцент **Седых Вячеслав Дмитриевич**;

доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики, логики и интеллектуальных систем в гуманитарной сфере Института лингвистики Российского государственного гуманитарного университета **Шабат Георгий Борисович**.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова.

Защита состоится 5 сентября 2017г. в 16 часов на заседании диссертационного совета *Д002.077.03* при *Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем передачи информации им. А.А. Харкевича (ИППИ РАН)*, расположенном по адресу: *127051, г. Москва, Большой Каретный переулок, д. 19, стр. 1.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *ИППИ РАН.*

Автореферат разослан ______ июня 2017г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь

диссертационного совета

д.ф.-м.н. *Соболевский А. Н.*

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования.

Одна из основных задач исчислительной теории особенностей формулируется следующим образом: как перечислить все элементы некоторого семейства геометрических объектов с заданным типом особенностей. Например, как подсчитать количество кубических кривых, проходящих через восемь точек общего положения на проективной плоскости, которые имеют особенность.

К самым первым достижениям в этом направлении относятся классические формулы Плюккера (1835), которые дают число самопересечений и полукубических особенностей для проективно двойственной к комплексной плоской алгебраической кривой общего положения фиксированной степени. Сравнительно большой, но не систематизированный запас результатов такого рода был накоплен к середине XX века усилиями многих исследователей, в частности, представителей итальянской школы алгебраической геометрии. Наконец, в 1955 г. Рене Том [1] разработал универсальный подход к решению таких задач. Среди прочего, он показал, что исчислительная теория особенностей в определенном смысле сводится к своей инфинитезимальной версии – теории характеристических классов.

Всюду далее мы будем называть особенностью класс ростков аналитических или алгебраических многообразий относительно естественного отношения эквивалентности, индуцированного действием подходящей группы (например, группы аналитической замены координат). Изучаемое семейство геометрических объектов над базой T будем обозначать через M_t, $t \in T$.

В частности, пусть $f : M \to T$ – отображение общего положения гладких многообразий, и $M_t = f^{-1}(t)$ – семейство его слоев. Выделим в T страт, состоящий из всех точек t, для которых слой M_t имеет особенность данного типа S. Том доказал, что фундаментальный класс этого страта в когомологиях

[1] *Thom R.* Les singularités des applications différentiables // *Ann. Inst. Fourier.* 1955. Vol. 6. P. 43–87

базы T равен образу значения некоторого универсального многочлена (зависящего только от типа особенности S), в который подставлены характеристические классы M и прообразы характеристических классов T. В частности, для случая, когда страт нульмерен, значение универсального многочлена Тома дает количество слоев с особенностью данного типа. Оказывается, что многие важнейшие задачи исчислительной геометрии сводятся к вычислению универсальных многочленов Тома и их обобщений – см., например, обзор в [2].

Однако существуют важные классы задач исчислительной теории особенностей, к которым техника полиномов Тома не применима. В частности, она не применима для изучения особенностей многочленов с неопределенными коэффициентами в следующем смысле. Для конечного подмножества A_i решетки мономов от n переменных $\mathbb{Z}^n$, рассмотрим пространство $\mathbb{C}^{A_i}$ всех линейных комбинаций мономов из A_i с комплексными коэффициентами: например, если A_i – множество целых точек в некоторой гомотетии стандартного симплекса, то $\mathbb{C}^{A_i}$ – пространство многочленов данной степени. Пространство наборов многочленов

$$T = \mathbb{C}^{A_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_k}$$

допускает естественную стратификацию: каждый *страт мультиособенности* состоит из всех наборов многочленов $\varphi \in T$ таких, что множество нулевого уровня $\varphi = 0$ имеет заданный набор особенностей.

Пример. При $k = 1$ страт минимальной ненулевой коразмерности называется A-дискриминантом и состоит из всех $\varphi \in T$, у которых 0 является критическим значением При $k = n+1$ этот страт называется A-результантом и состоит из всех совместимых систем уравнений $\varphi = 0$ (оба понятия введены в этой общности Гельфандом, Зелевинским и Капрановым в монографии [3]). Заметим, однако, что дискриминант в настоящей диссертации рассматривается только как

[2] *Казарян М. Э.* Мультиособенности, кобордизмы и исчислительная геометрия // *УМН.* 2003. Vol. 58. P. 29–88

[3] *Gelfand I. M., Kapranov M. M., Zelevinsky. A. V.* Discriminants, Resultants, and Miltidimensional Determinants. Birkhäuser, 1994

первый из стратов мультиособенностей, имеющих различную коразмерность, а потому богатая геометрия классического дискриминанта, специфичная для коразмерности 1 (в частности, тот факт, что дискриминант является свободным дивизором в смысле Саито) остается за рамками данной работы.

Задача исчислительной теории особенностей в рассматриваемом случае "многочленов с неопределенными коэффициентами" состоит в изучении указанной стратификации: глобальной геометрии стратов пространства $T = \mathbb{C}^{A_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_k}$ (размерности, степени и т.д.), геометрии слоя общего положения $\varphi = 0$ и его вырождений вблизи общей точки данного страта (например, монодромии при обходе многочленом $\varphi \in T$ дискриминанта).

Эти проблемы изучались даже задолго до Плюккера: например, в случае $n = k = 2$ формулу для числа общих корней пары многочленов общего положения данных степеней (теорему Безу) получил Ньютон. В 1960х годах Арнольд поставил аналогичную задачу для произвольных носителей A_i, см. [4], а Кушниренко решил ее в работе [5], заложив основы новой области математики на стыке алгебраической геометрии и теории многогранников. Уже в середине XIX века Сильвестр и Кэли приступают к изучению стратов коразмерности 1 в пространстве $T = \mathbb{C}^{A_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_k}$ для случая $n = 1$ и $k \leqslant 2$, т.е. классических результанта и дискриминанта. Затем Маколей в 1902 г. вводит и исследует аналогичное понятие для произвольного n и пространства многочленов данной степени, так называемый результант Маколея, который играет сейчас важную роль в теории символьных вычислений. Гельфанд, Зелевинский и Капранов в книге [3] обобщили эти понятия на случай произвольных носителей A_i в связи с изучением многомерных гипергеометрических функций. В 1902г. Севери исследует некоторые страты бóльших коразмерностей для случая $k = 1, n = 2$ (многообразий Севери). К концу XX века они стали привлекать все большее внимание в связи с изучением инвариантов Громова-Виттена (для проективной

[4] *Арнольд В. И.* Задачи Арнольда. Фазис, 2000

[5] *Kouchnirenko A. G.* Polyèdres de Newton et nombres de Milnor // *Inv. Math.* 1976. Vol. 32. P. 1–32

плоскости эти инварианты есть степени многообразий Севери).

Заметим, однако, что описанная версия исчислительной теории особенностей не допускает применения техники полиномов Тома: рассматриваемое пространство $T = \mathbb{C}^{A_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_k}$ стягиваемо, поэтому его гомологии тривиальны, и фундаментальные классы стратов мультиособенностей в гомологиях T не представляют интереса. При этом любая попытка компактифицировать базу T и слои семейства $\varphi = 0$, $\varphi \in T$, чтобы обогатить топологию T, приводит к семействам, слишком далеким от общего положения, чтобы применять к ним технику полиномов Тома. Поэтому, чтобы развивать исчислительную теорию особенностей в этом контексте, нужно исследовать фундаментальные классы стратов мультиособенностей T не в кольце когомологий, а в более богатом – например, в так называемом кольце условий, или кольце тропических вееров, или эквивариантном кольце Чжоу относительно естественного действия комплексного тора на T. Это кольцо было введено в 1980х годах разными авторами для разных пространств с действиями редуктивных групп. Напомним конструкцию этого кольца в интересующем нас случае.

Определение. Пусть Z_k – пространство конечных формальных линейных комбинаций $\sum_i \alpha_i V_i$ с комплексными коэффициентами $\alpha_i \in \mathbb{C}$ неприводимых k-мерных алгебраических подмножеств $V_i \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$. Множество $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ является группой относительно операции покоординатного умножения. Обозначим через $g \cdot V$ сдвиг множества $V \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ на элемент $g \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n$. Определим индекс пересечения $U \circ V$ алгебраических подмножеств U и $V \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ дополнительной размерности $\dim U + \dim V = n$ как число точек пересечения U и сдвига $g \cdot V$ на элемент g общего положения (это число одно и то же для всех g из открытого по Зарисскому подмножества $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$). Индекс пересечения продолжается по линейности до спаривания $\circ : Z_k \times Z_{n-k} \to \mathbb{C}$. Назовем элемент $\mathcal{U} \in Z_k$ численно эквивалентным нулю ($\mathcal{U} \sim 0$), если $\mathcal{U} \circ \mathcal{V} = 0$ для всех $\mathcal{V} \in Z_{n-k}$. Тогда *кольцом условий* C называется прямая сумма пространств

$Z_k/\sim$ по $k = 0, 1, \ldots, n$ с естественной операцией сложения и произведением, которое для классов эквивалентности неприводимых алгебраических множеств U и V определяется как класс пересечения U и сдвига $g \cdot V$ на элемент g общего положения (этот класс один и тот же для всех g из открытого по Зарисскому подмножества $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$). Класс эквивалентности алгебраического множества V в кольце C называется его *фундаментальным классом* $[V]$.

Пример. Из определения и теоремы Кушниренко–Бернштейна (см.[6]) легко видеть, что фундаментальный класс алгебраической гиперповерхности $\varphi = 0$ в кольце условий определяется ее *многогранником Ньютона* (выпуклой оболочкой точек решетки $\mathbb{Z}^n$, соответствующих мономам, которые входят в многочлен φ с ненулевыми коэффициентами). Таким образом, фундаментальные классы двух гиперповерхностей равны, если и только если равны их многогранники Ньютона. В частности, это означает, что фундаментальный класс алгебраического множества произвольной коразмерности в кольце условий является естественным обобщением понятия многогранника Ньютона гиперповерхности.

Мы будем исследовать фундаментальные классы стратов мультиособенностей пространства $T = \mathbb{C}^{A_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_k}$ в этом кольце C, называя такую постановку задачи “аффинной теорией особенностей”.

Примечательно, что, при такой постановке задачи, анализу ее частных случаев по сути оказываются посвящены многочисленные исследования в разных областях геометрии. Прежде всего, это относится к найденному Михалкиным новому подходу к исчислительной геометрии – тропическим теоремам соответ-

[6] *Бернштейн Д. Н.* Число корней системы уравнений // *Функц. анализ и его прил.* 1975. Vol. 9. P. 1–4

ствия (см. [7, 8, 9], а также работы Шустина [10, 11], Зиберта и Нишину [12], Темкина [13], Гросса [14], Дикенштейн с соавторами [15, 16]). Эти результаты можно интерпретировать как описание фундаментальных классов некоторых стратов мультиособенностей в пространстве T.

Укажем другие известные темы исследований, которые можно рассматривать как частные случаи вышеописанной задачи "аффинной теорией особенностей".

– Многогранники Ньютона результантов и дискриминантов, изучаемые многими авторами для приложений в самом широком диапазоне: от многомерных гипергеометрических уравнений до символьной алгебры (см., например, монографию Гельфанда, Зелевинского и Капранова [3], работы Стармфелса с соавторами [17, 18, 19, 20], Анитповой и Циха [21] и других авторов [22, 23, 24]).

---

[7] *Mikhalkin G.* Enumerative tropical algebraic geometry in $\mathbb{R}^2$ // *J. Amer. Math. Soc.* 2005. Vol. 18. P. 313–377. arXiv:math/0312530

[8] *Mikhalkin G.* Tropical geometry and its applications // Proceedings of the ICM. 2006. arXiv:math/0601041

[9] *Bertrand B., Brugalle E., Mikhalkin G.* Genus 0 characteristic numbers of the tropical projective plane // *Compositio Math.* 2014. Vol. 150. P. 46–104. arXiv:1105.2004

[10] *Shustin E.* A tropical approach to enumerative geometry // *St. Petersburg Math. J.* 2006. Vol. 17. P. 343–375. arXiv:math/0211278

[11] *Shustin E.* Tropical and algebraic curves with multiple points // *Progr. in Math.* 2012. Vol. 296. P. 431–464. arXiv:0904.2834

[12] *Siebert B., Nishinou T.* Toric degenerations of toric varieties and tropical curves // *Duke Math J.* 2006. Vol. 135. P. 1–51. arXiv:math/0409060

[13] *Tyomkin I.* Tropical geometry and correspondence theorems via toric stacks // *Math. Ann.* 2012. Vol. 353. P. 945–995. arXiv:1001.1554

[14] *Gross A.* Correspondence Theorems via Tropicalizations of Moduli Spaces // *Commun. Contemp. Math.* 2016. Vol. 18, no. 1550043. arXiv:1406.1999

[15] *Dickenstein A., di Rocco S., Piene R.* Higher order duality and toric embeddings // *Annales de l'Institut Fourier.* 2014. Vol. 64. P. 375–400. arXiv:1111.4641

[16] *Dickenstein A., Herrero M. I., Tabera L. F.* Arithmetics and combinatorics of tropical Severi varieties of univariate polynomials // *Israel Journal of Mathematics.* 2017. arXiv:1601.05479

[17] *Sturmfels B.* On the Newton polytope of the resultant // *J. Algebraic Combin.* 1994. Vol. 3. P. 207–236

[18] *Dickenstein A., Feichtner E. M., Sturmfels B.* Tropical discriminants // *J. Amer Math Soc.* 2007. Vol. 20. P. 1111–1133. arXiv:math/0510126

[19] *Cattani E., Cueto M. A., Dickenstein A. et al.* Mixed Discriminants // *Math Z.* 2013. Vol. 274. P. 761–778. arXiv:1112.1012

[20] *Sturmfels B., Tevelev E. A., Yu. J.* The Newton polytope of the implicit equation // *Mosc. Math. J.* 2007. Vol. 7. P. 327–346. arXiv:math/0607368

[21] *Антипова И. А., Цих А. К.* Дискриминантное множество системы n полиномов Лорана от n переменных // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2012. Vol. 76. P. 29–56

[22] *Gonzalez Perez P. D.* Singularites quasi-ordinaires toriques et polyedre de Newton du discriminant // *Canad. J. Math.* 2000. Vol. 52. P. 348–368

[23] *Benoist O.* Degrés d'homogénéité de l'ensemble des intersections complètes singulières // *Annales de l'Institut Fourier.* 2012. Vol. 62. P. 1189–1214. arXiv:1009.0704

[24] *Dickenstein A., Emiris I., Karasoulou A.* Plane mixed discriminants and toric jacobians // *Geometry and computing.* 2014. Vol. 10. P. 105–121. arXiv:1304.5809

– Двойственно вырожденные проективные многообразия (т.е.такие, для которых проективно двойственное многообразие не является гиперповерхностью) для случая торических многообразий (см. [25, 26, 27, 28]).

– Топология полиномиальных отображений и их особенностей на бесконечности.

Настоящая диссертация посвящена разработке эффективных методов исследования геометрии многочленов с неопределенными коэффициентами в рамках исчислительной теории особенностей и их приложениям к перечисленным выше вопросам.

Степень разработанности темы исследования. Развивая теорию многомерных гипергеометрических уравнений, Гельфанд, Зелевинский и Капранов описали в монографии [3] многогранники Ньютона классических дискриминанта и результанта и их обобщений на многочлены старших степеней. Затем Стармфелс в [17] в связи с приложениями к символьным вычислениям приступил к изучению многогранников Ньютона результанта $n+1$ многочлена от n переменных с произвольными носителями. В работах [22] и [29] эти результаты о дискриминантах и результантах соответственно перенесены со случая многочленов с неопределенными коэффициентами на случай многочленов, коэффициенты которых полиномиально зависят от параметров. В работах [21, 19] и [24] изучен многогранник Ньютона для дискриминанта системы n полиномиальных уравнений от n неизвестных.

В недавних работах [15] и [16] начаты аналогичные исследования для следующих по сложности стратов мультиособенностей пространства $\mathbb{C}^A$ после A-дискриминанта. Так как их коразмерность больше 1, для них вместо многогранника

---

[25] *Curran R., Cattani E.* Restriction of A-Discriminants and Dual Defect Varieties // *Journal of Symbolic Computation.* 2007. Vol. 42. P. 115–135. arXiv:math/0510615

[26] *Di Rocco S.* Projective duality of toric manifolds and defect polytopes // *Proc. LMS.* 2006. Vol. 3. P. 85–104. arXiv:math/0305150

[27] *Casagrande C., Di Rocco S.* Projective Q-factorial toric varieties covered by lines // *Comm. in Contemporary Mathematics.* 2008. Vol. 10. P. 363–389. arXiv:math/0512385

[28] *Furukawa K., Ito A.* A combinatorial description of dual defects of toric varieties. 2016. arXiv:1605.05801

[29] *Esterov A. I., Khovanskii A. G.* Elimination theory and Newton polytopes // *Func. An and Other Math.* 2008. Vol. 2. P. 45–71. arXiv:math/0611107

Ньютона изучается фундаментальный класс в кольце условий.

Более того, даже простейший страт мультиособенностей, A-дискриминант $D_A \subset \mathbb{C}^A$, в случае многочленов нескольких переменных при некоторых носителях $A \subset \mathbb{Z}^n$ имеет коразмерность больше 1. Такие носители называются *двойственно вырожденными*, потому что A-дискриминант является аффинным конусом над проективно двойственным к торическому многообразию, соответствующему A. Для таких A фундаментальный класс $[D_A]$ вычислен в работе [18]. Задача классификации двойственно вырожденных A, поставленная в [3], решена в работах [26] и [27] для гладких торических многообразий, и только совсем недавно в [28] для общего случая.

Оказывается, описанное направление исследований тесно связано также с исчислительной геометрией. Классический подход к исчислительной геометрии опирается на теорию пересечений, характеристические классы и полиномы Тома. Ответы на упомянутые выше перечислительные задачи, как правило, могут быть выражены в терминах некоторых универсальных многочленов, напоминающих полиномы Тома. Примером может служить задача подсчета рациональных кривых, проходящих через данный набор точек общего положения на данной поверхности, см., например, работы [30] и [31].

В 2003г Михалкин в работе [7] предложил новый подход к исчислительной алгебраической геометрии: он построил версию алгебраической геометрии кривых над полуполем $\mathbb{T} = (\mathbb{R} \sqcup \{-\infty\}, \max, +)$, в которой ответы на важные исчислительные вопросы совпадают с таковыми для классической алгебраической геометрии над $\mathbb{C}$. Например, инварианты Громова-Виттена проективной плоскости (число алгебраических кривых данной степени с данным числом простых самопересечений, проходящих через данный набор точек общего положения), оказались одинаковы над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{T}$. Этот факт (*теорема тропического*

[30] *Göttsche L.* A conjectural generating function for numbers of curves on surfaces // *Comm. Math. Phys.* 1998. Vol. 196. P. 523–533. arXiv:alg-geom/9711012

[31] *Tzeng Y.-J.* A proof of Gottsche-Yau-Zaslow formula // *J. Differential Geom.* 2012. Vol. 90. P. 439–472. arXiv:1009.5371

соответствия) сам по себе можно рассматривать как комбинаторное вычисление инвариантов Громова-Виттена проективной плоскости, поскольку задачи исчислительной геометрии над $\mathbb{T}$ – чисто комбинаторные.

Позднее принцип тропического соответствия был перенесен на более широкие классы кривых и условий инцидентности. В частности, Шустин распространил его на кривые с более сложными особенностями, чем простые самопересечения (см. [10, 11], с приложениями к исчислительной геометрии поверхностей дель Пеццо), Зиберт и Нишиноу – на рациональные кривые в пространствах произвольной размерности (см. [12]), Михалкин с соавторами – на исчисление кривых, проходящих через данный набор точек и касающихся данного набора прямых общего положения (см. работу [9], в которой предложены новый подход и далекое обобщение классической задачи о числе коник, касающихся пяти прямых).

В доказательствах тропических теорем соответствия обычно используются методы теории деформаций. Каждое такое доказательство, помимо установления желаемого равенства между количествами комплексных и тропических объектов, неявным образом содержит алгоритм построения целого однопараметрического семейства комплексных объектов, которое можно в некотором смысле продеформировать в тропический объект. Например, для данного однопараметрического семейства $P(t)$ точек на проективной прямой и данной рациональной тропической кривой T, проходящей через точки тропикализации семейства $P(t)$, доказательство теоремы соответствия, использующее теорию деформаций (см. [10, 12, 13]), неявно содержит алгоритм вычисления (с точностью до произвольной степени параметра t) однопараметрического семейства рациональных кривых, проходящих через $P(t)$ и стремящихся к T. Естественно надеяться, что другой подход, в котором получение ответа не сопряжено с получением такой избыточной информации, мог бы оказаться применимым в более общих условиях.

Один такой подход предложен в работе [14]. Он ориентирован на применение к рациональным кривым.

Обсуждаемая нами аффинная теория особенностей предлагает другой подход, адаптированный к изучению кривых и гиперповерхностей, которые заданы неявно. Оказывается, что если нам известен фундаментальный класс страта мультиособенности S в аффинных когомологиях, то мы можем получить тропические теоремы соответствия для гиперповерхностей с мультиособенностью S и различными условиями инцидентности. Таким образом, тропические теоремы соответствия могут интерпретироваться как классический подход к исчислительной геометрии, в котором вместо когомологий и классических полиномов Тома используется кольцо условий и "аффинная теория особенностей" в нашем смысле. Данный факт объясняется тем, что фундаментальный класс подмножества тора в кольце условий кодируется его *тропикализацией* (см. работы Казарновского [32] и [33], Стармфелса [34], Марквиг [35]). Подробности проиллюстрированы во введении, где мы выводим теорему тропического соответствия Михалкина для кривых с одним простым самопересечением из описания многогранника Ньютона A-дискриминанта (т.е. фундаментального класса универсального страта мультиособенности коразмерности 1).

Цели и задачи диссертационной работы: Цель диссертации – разработка аппарата, который дает возможность развить теорию многочленов Тома для "аффинной теории особенностей" в вышеописанном смысле, а также его применение для анализа стратов мультиособенностей малых коразмерностей. В рамках диссертации решены следующие задачи:

— построена теория характеристических классов алгебраических подмножеств тора $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ со значениями в кольце условий, которая играет для аффинной теории особенностей ту же роль, что классические характеристические классы для теории полиномов Тома.

[32] *Казарновский Б. Я.* Укорочения систем уравнений, идеалов и многообразий // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1999. Т. 63. С. 119–132

[33] *Казарновский Б. Я.* c-вееры и многогранники Ньютона алгебраических многообразий // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2003. Т. 67. С. 23–44

[34] *Sturmfels B., Tevelev J.* Elimination theory for tropical varieties // *Math. Res. Lett.* 2008. Vol. 15. P. 543–562. arXiv:0704.3471

[35] *Gathmann A., Kerber M., Markwig H.* Tropical fans and the moduli spaces of tropical curves // *Compos. Math.* 2009. Vol. 145. P. 173–195. arXiv:0708.2268

— исследован вопрос чистоты размерности для простейших (т.е.имеющих малую коразмерность) стратов мультиособенностей $\Sigma \subset T = \mathbb{C}^{A_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_k}$.

— описаны фундаментальные классы в кольце условий для таких стратов Σ.

— изучена геометрия вырождения гиперповерхности $\varphi = 0$, когда $\varphi \in T$ стремится к общей точке страта Σ.

— получены примеры приложений разработанного аппарата к другим областям.

Научная новизна. Результаты работы новые и получены автором самостоятельно. Перечислим здесь основные.

— Полностью описаны фундаментальные классы стратов коразмерности 1 и 2 в пространстве $\mathbb{C}^A$.

— Получено многомерное обобщение теоремы Абеля о неразрешимости – классифицированы системы полиномиальных уравнений с неопределенными коэффициентами, разрешимые в радикалах. До сих пор результаты о теории Галуа систем уравнений практически отсутствовали – возможно, во многом из-за того, что имеющийся аппарат теории конечных групп недостаточен для этой цели. Например, наш результат опирается на совсем недавнее важное достижение в этой области [36].

— Классифицированы торические многообразия, проективно двойственные к которым являются гиперповерхностями (противоположная задача – классификация остальных, т.н. двойственно-вырожденных торических многообразий – являлась давней открытой проблемой и решена совсем недавно, после публикации наших результатов).

— Доказано существование “дискриминанта системы уравнений” – показано, что множество всех систем уравнений $\varphi_1 = \ldots = \varphi_k = 0$, $\varphi_i \in \mathbb{C}^{A_i}$, у которых множество решений топологически нестабильно относительно возмущений

[36] *Jones G. A.* Primitive permutation groups containing a cycle // *Bull. Aust. Math. Soc.* 2014. Vol. 89. P. 159–165. arXiv:1209.5169

коэффициентов уравнений, образует гиперповерхность в пространстве систем уравнений $\mathbb{C}^{A_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_k}$ (при некоторых очевидных необходимых условиях на A_i). В качестве приложения показано, что бифуркационное множество общего полиномиального отображения является гиперповерхностью, и исследована ее степень. Изучение степени бифуркационного множества полиномиального отображения $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ и топологии вырождения слоев вдоль бифуркационного множества – классическая тематика, но большинство известных результатов охватывает только случаи $k = 1$ и $k = n$, а для произвольного k пока мало что известно.

— Вычислен тропический веер множества многочленов с двумя особенностями множества нулей, т.е. множества двойных касательных гиперплоскостей к данному торическому многообразию. В качестве приложения описан многогранник Ньютона "дискриминанта Морса" – многочлена на $\mathbb{C}^A$, который обращается в ноль на многочленах $\varphi \in \mathbb{C}^A$, не являющихся морсовскими функциями. (Точнее, описан двойственный веер этого многогранника, что однозначно его характеризует, хотя пока не дает замкнутого описания его вершин и комбинаторики.) На уровне степеней (т.е. когда $A = d \cdot$ (стандартный симплекс), и мы интересуемся степенью дискриминанта Морса) эта задача исследовалась, например, в работах [37], а также [38] и [39] (для $n = 1$).

Не менее значимыми, чем перечисленные результаты, представляются разработанные в диссертации методы – в первую очередь, конструкция характеристических классов алгебраических подмногообразий комплексного тора со значениями в кольце условий C. Для нашего исследования этот инструмент играет ту же роль, что и обычные характеристические классы в теории многочленов Тома. Также разработаны некоторые инструменты из области геометрии решеток, многогранников и выпуклых тел:

---

[37] *Aluffi P.* Characteristic classes of discriminants and enumerative geometry // *Comm. in algebra.* 1998. Vol. 26. P. 3165–3193

[38] *Lando S., Zvonkin K.* Graphs on Surfaces and Their Applications. Springer, 2004

[39] *Казарян М. Э., Ландо С. К.* Многочлены Тома для отображений кривых с изолированными особенностями // *Тр. МИАН.* 2007. Т. 258. С. 93–106. arXiv:0706.1523

— Доказано существование смешанного расслоенного тела, обобщающего понятия смешанного объема и расслоенного тела. Введенные относительно недавно смешанные расслоенные многогранники до сих пор изучались только средствами геометрии многогранников (см., например, [40]), а общие выпукло-аналитические подходы разработаны не были.

— Построено дифференциальное кольцо тропических вееров с полиномиальными весами, элементы которого обобщают понятие тропического веера, а дифференцирование – понятие множества изломов кусочно-линейной функции. Конструкции, похожие на весьма частные случаи нашей (например, “тропические дивизоры Картье”), уже использовались разными авторами, но для целей диссертации недостаточны.

— Классифицированы целочисленные многогранники объема не больше четырех (в связи с классификацией систем уравнений, разрешимых в радикалах).

— Для набора многогранников построен смешанный аналог частично упорядоченного множества граней одного многогранника, важный для изучения комбинаторики примыканий результантов.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Разработанные методы и полученные результаты могут быть использованы в исследованиях в области исчислительной, тропической и выпуклой геометрии, а также могут упростить и прояснить изложение некоторых сюжетов в учебной литературе и спецкурсах, посвященных указанным областям. Результаты и конструкции диссертации использованы, в частности, в работах А. Ито, В. Гублера, К. Д’Андреа, А. Дикенштейн, С. Ди Рокко, Б. Казарновского, А. Карасулу, Э. Каттани, М. Куэто, К. Кюннеманна, М. Сомбра, Б. Стармфелса, Л. Табера, Г. Франсуа, К. Фурукава, М. Хелмера, М. Херреро, И. Эмириса и др.

[40] *McMullen P.* Mixed fibre polytopes // *Discrete Comput. Geom.* 2004. Vol. 32. P. 521–532

Методология и методы исследования. Работа основана на методах алгебраической геометрии и топологии, геометрии торических многообразий, теории характеристических классов, топологической теории Галуа, теории конечных групп, теории пересечений, выпуклой и тропической геометрии. Оригинальные методы, разработанные в рамках диссертации, включают исчисление характеристических классов со значениями в кольце условий и тропических вееров с полиномиальными весами, а также инструменты из области геометрии многогранников и решеток, кратко описанные в разделе "Научная новизна".

Положения, выносимые на защиту. Глава 1 содержит обзор текущего состояния областей, связанных с нашей работой, и кратко напоминает основные понятия и конструкции. Она не содержит новых результатов.

В главе 2 изучается геометрия целочисленных многогранников и выпуклых тел и ее связи с алгебраической геометрией: вводится относительная версия смешанного объема и соответствующая относительная версия формулы Кушниренко–Бернштейна–Хованского, с ее помощью вводятся новые инварианты (числа Милнора и эйлеровы препятствия) целочисленных многогранников, которые нам в дальнейшем понадобятся. Также строятся и изучаются смешанные расслоенные тела и изучаются смешанные объемы некоторых специальных многогранников (призм, или конфигураций Кэли), которые встретятся нам в дальнейшем. Основные результаты этой главы изложены в работах [1], [2], [3], [4], [5].

В главе 3 развивается геометрия тропических вееров: вводятся и изучаются понятия смешанной грани и смешанного числа Милнора для набора многогранников, обобщающие аналогичные понятия для одного многогранника, а также дифференциальное кольцо тропических вееров с полиномиальными весами. Основные результаты этой главы изложены в работах [6] и [7].

Эти две главы почти независимы, результаты каждой из них используются в последующих двух главах.

В главе 4 мы приступаем к изучению "аффинной теории особенностей" начиная со стратов минимальной положительной коразмерности – результантов и дискриминантов. Мы, в частности, классифицируем проективные торические многообразия минимальной степени, проективно двойственные к которым – гиперповерхности, а также вводим и исследуем новое понятие бифуркационного дискриминанта системы уравнений. В качестве его приложений мы получаем новые результаты о топологии полиномиальных отображений и классифицируем системы полиномиальных уравнений с неопределенными коэффициентами, разрешимые в радикалах. Основные результаты этой главы изложены в работах [8], [7] и [9].

Наконец, в главе 5 мы продолжаем изучение "аффинной теории особенностей", изучая страты коразмерности 2. Для этой цели мы строим характеристические классы подмногообразий комплексного тора со значениями в кольце условий. Основные результаты этой главы изложены в работе [10].

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации излагались автором на следующих семинарах и конференциях:

– Заседания Московского Математического Общества, МГУ, Москва.

– Семинар "Группы Ли и теория инвариантов", МГУ, Москва.

– Семинар "Топология особенностей", МГУ, Москва.

– Семинар "Узлы и теория представлений", МГУ, Москва.

– Семинар отдела геометрии и топологии МИАН "Геометрия, топология и математическая физика", Москва.

– Семинар "Римановы поверхности, алгебры Ли и математическая физика", НМУ, Москва.

– Семинар "Гомологические и гомотопические методы в геометрии, теории представлений и математической физике", НИУ ВШЭ, Москва.

– Семинар Лаборатории алгебраической геометрии НИУ ВШЭ, Москва.

– Séminaire d'algèbre, topologie et géométrie, University of Nice, France.

– Algebraic geometry seminar, Universidad Complutense de Madrid, Spain.

– Algebraic geometry seminar, Universitat de Barcelona, Spain.

– Geometry and Dynamics seminar, Tel Aviv University, Israel.

– 7th European Congress of Mathematics, 2016, Technische Universit at Berlin, Germany.

– Конференция Algebraic structures in convex geometry, 2015, НИУ ВШЭ–НМУ, Москва.

– Conference "Effective Methods in Algebraic Geometry", 2013, Goethe University, Germany.

– Конференция Algebra and Geometry, 2012, НИУ ВШЭ–НМУ, Москва.

– Second International Conference and Workshop on Valuation Theory, 2011, Segovia, Spain.

– Workshop on singularities in Geometry and applications, 2011, Bedlewo, Poland.

– Conference on Singularities, Geometry and Topology, 2010, El Escorial, Spain.

– Workshop Tropical Geometry in Combinatorics and Algebra, 2009, MSRI Berkeley, USA.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 10 печатных работах [1]–[10] в рецензируемых журналах.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Вклад диссертанта в работе с соавтором [9] был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены автором лично.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и библиографии. Объем диссертации – 332 страница, из них 315 страниц текста, включая 19 рисунков. Библиография включает 176 наименований на 14 страницах.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Глава 1 содержит обзор текущего состояния областей, связанных с нашей работой, и кратко напоминает основные понятия и конструкции. Она не содержит новых результатов.

В главе 2 изучается геометрия целочисленных многогранников и выпуклых тел и ее связи с алгебраической геометрией.

В разделе 2.1 вводится понятие относительного смешанного объема и соответствующая относительная версия формулы Кушниренко-Бернштейна-Хованского. Для выпуклого многогранного m-мерного конуса $\tau \subset (\mathbb{R}^m)^*$ обозначим через $\tau^\vee$ его двойственный конус $\{x \in \mathbb{R}^m \mid \gamma(x) > 0 \text{ для } \gamma \in \tau\}$. Пусть $\mathcal{M}_{\tau^\vee}$ — полугруппа всех (неограниченных) многогранников вида

$$\tau^\vee + \text{ некоторый ограниченный многогранник.}$$

Рассмотрим множество $\mathcal{P}_{\tau^\vee} \subset \mathcal{M}_{\tau^\vee} \times \mathcal{M}_{\tau^\vee}$ всех упорядоченных пар многогранников (P, Q) таких, что симметрическая разность $P \bigtriangleup Q$ ограничена. $\mathcal{P}_{\tau^\vee}$ является полугруппой относительно сложения по Минковскому пар: $(P, Q) + (C, D) = (P + C, Q + D)$.

Определение. Определим *объем* $V(P, Q)$ пары многогранников $(P, Q) \in \mathcal{P}_\Gamma$ как разность $\mathrm{Vol}(P \setminus Q) - \mathrm{Vol}(Q \setminus P)$. *Смешанный объем* пар многогранников определяется как симметричная мультилинейная функция $\mathrm{MV} : \underbrace{\mathcal{P}_{\tau^\vee} \times \ldots \times \mathcal{P}_{\tau^\vee}}_{m} \to \mathbb{R}$ такая, что $\mathrm{MV}\big((P, Q), \ldots, (P, Q)\big) = m! V(P, Q)$ для любой пары $(P, Q) \in \mathcal{P}_{\tau^\vee}$.

Утверждение. *Смешанный объем пар существует и единственен.*

Заметим, что в случае, когда конус $\tau^\vee$ нульмерен, построенный смешанный объем совпадает с классическим и, в частности, удовлетворяет неравенству Александрова–Фенхеля. В случае же, когда конус $\tau^\vee$ имеет полную размерность, смешанный объем пар удовлетворяет обратному неравенству Александрова–Фенхеля, см. [41]. Было бы интересно обобщить эти неравенства на случаи промежуточной размерности $\tau^\vee$.

Торические многообразия. Для рационального веера Σ в $(\mathbb{R}^m)^*$ соответствующее торическое многообразие обозначается через X_Σ. Для любой орбиты T коразмерности 1 торического многообразия X_Σ примитивная образующая соответствующего одномерного конуса в Σ обозначается $\gamma(T)$. Предположим, что объединение конусов веера Σ является замкнутым выпуклым конусом τ, обозначим через $\tau^\vee \subset \mathbb{R}^m$ ему двойственный.

Если I — очень обильное линейное расслоение на X_Σ, а мероморфное сечение s расслоения I не имеет нулей и полюсов в максимальном торе многообразия X_Σ, то существует многогранник $\Delta \in \mathcal{M}_{\tau^\vee}$, такой что его двойственный веер равен Σ, а кратность любой орбиты T коразмерности 1 многообразия X_Σ в дивизоре нулей и полюсов сечения s равно максимальному значению ковектора $\gamma(T) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ на многограннике Δ. Так как пара (I, s) однозначно определяется указанным многогранником Δ, мы обозначим линейное расслоение I через I_Δ, а сечение s — через s_Δ.

Многогранники Ньютона. Объединение всех предкомпактных орбит торического многообразия X_Σ (т.е. орбит, соответствующих конусам веера Σ, принадлежащим внутренности τ) обозначается X_Σ^{comp} и называется *компактной частью* X_Σ (это множество действительно компактно).

Пусть f — произвольный росток некоторого голоморфного сечения расслоения I_Δ вблизи компактного множества X_Σ^{comp}, тогда функцию f/s_Δ можно разложить в степенной ряд $\sum_{a\in\Delta} c_a x^a$, где x принадлежит максимальному

---

[41] *Khovanskii A., Timorin V.* On the theory of coconvex bodies // *Discrete Comput. Geom.* 2014. Vol. 52. P. 806–823

тору $(\mathbb{C}\setminus 0)^m$ торического многообразия X_Σ. Выпуклая оболочка множества $\{a \mid c_a \neq 0\} + \tau^\vee$ является целочисленным многогранником, принадлежащим $\mathcal{M}_{\tau^\vee}$. Он называется *многогранником Ньютона* f и обозначается Δ_f. Для любого ограниченного многогранника $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ многочлен $\sum_{a\in\Gamma} c_a x^a$, рассматриваемый как функция на комплексном торе $(\mathbb{C}\setminus 0)^m$, обозначается f^Γ. Если a содержится в ограниченной грани многогранника Ньютона Δ_f, то коэффициент c_a называется *старшим коэффициентом* f. Каждое сечение имеет конечное число старших коэффициентов.

Пусть $\Delta_1,\ldots,\Delta_m$ — целочисленные многогранники, принадлежащие $\mathcal{M}_{\tau^\vee}$, и пусть $\widetilde{\Delta}_1,\ldots,\widetilde{\Delta}_m$ — многогранники Ньютона сечений $f_1,\ldots,f_m$ линейных расслоений $I_{\Delta_1},\ldots,I_{\Delta_m}$, соответствующих многогранникам $\Delta_1,\ldots,\Delta_m$ на торическом многообразии X_Σ, причем первое из линейных расслоений $\mathcal{I}_{\Delta_1}$ тривиально, т.е. $\Delta_1 = \tau^\vee$. Относительная версия формулы Кушниренко-Бернштейна-Хованского (теорема 1.2.4) позволяет вычислить эйлерову характеристику слоя Милнора функции f_1 на полном пересечении $f_2 = \ldots = f_k = 0$ для $k \leqslant m$ в терминах многогранников Ньютона сечений $f_1,\ldots,f_k$.

Чтобы определить слой Милнора функции f_1, удобно зафиксировать семейство окрестностей для компактной части торического многообразия X_Σ. Например, выберем целочисленную точку a_i на каждой бесконечной грани многогранника Δ_1, и пусть B_ε — множество всех $x\in(\mathbb{C}\setminus 0)^m$ таких, что $\sum_i |x^{a_i}| \leqslant \varepsilon$. Тогда его замыкание в торическом многообразии X_Σ является окрестностью компактной части X_Σ^{comp}.

Определение. Слоем Милнора функции f_1 на полном пересечении $f_2 = \ldots = f_k = 0$ называется многообразие $\{f_1-\delta = f_2 = \ldots = f_k = 0\}\cap B_\varepsilon$, где $|\delta| \ll \varepsilon \ll 1$.

Заметим, что коммутативно-алгебраическая интерпретация данного инварианта, видимо, неизвестна, что препятствует его вычислению в терминах многогранников Ньютона методами оригинальной работы [5].

Определение. Старшие коэффициенты сечений $f_1, \ldots, f_k$ находятся в общем положении, если для любого совместного набора ограниченных граней $\widetilde{\Gamma}_1, \ldots, \widetilde{\Gamma}_k$ многогранников $\widetilde{\Delta}_1, \ldots, \widetilde{\Delta}_k$, системы полиномиальных уравнений $f_1^{\widetilde{\Gamma}_1} = \ldots = f_k^{\widetilde{\Gamma}_k} = 0$ и $f_2^{\widetilde{\Gamma}_2} = \ldots = f_k^{\widetilde{\Gamma}_k} = 0$ определяют регулярные многообразия в максимальном торе $(\mathbb{C} \setminus 0)^m$.

Мы обозначаем смешанный объем пар многогранников $(P_1, Q_1), \ldots, (P_m, Q_m)$ в $\mathbb{R}^m$ через моном $(P_1, Q_1) \cdot \ldots \cdot (P_m, Q_m)$.

Теорема. *В описанной выше ситуации, эйлерова характеристика слоя Милнора функции f_1 на полном пересечении $\{f_2 = \ldots = f_k = 0\}$ равна*

$$(-1)^{m-k} \sum_{\substack{a_1>0,\ldots,a_k>0 \\ a_1+\ldots+a_k=m}} (\Delta_1, \widetilde{\Delta}_1)^{a_1} \cdot \ldots \cdot (\Delta_k, \widetilde{\Delta}_k)^{a_k}$$

при условии, что старшие коэффициенты сечений $f_1, \ldots, f_k$ находятся в общем положении.

В разделе 2.2 доказывается существование смешанного расслоенного тела, и в терминах относительного смешанного объема описывается его опорная функция.

Рассмотрим L и M, вещественные векторные пространства размерностей l и m соответственно, и пусть μ — форма объема на пространстве M. Обозначим проекции прямой суммы $L \oplus M$ на слагаемые L и M через u и v соответственно. Пусть $\Delta \subset L \oplus M$ — выпуклое тело, т. е. компактное множество, которое вместе с любой парой своих точек содержит соединяющий их отрезок. Для выпуклого тела и произвольной точки $a \in M$, обозначим *слой* $u\big(\Delta \cap v^{(-1)}(a)\big)$ выпуклого тела Δ через Δ_a. Напомним, что *опорная функция* $B(\cdot) : L^* \to \mathbb{R}$ выпуклого тела $B \subset L$ определяется как $B(\gamma) = \max\limits_{b \in B} \langle \gamma, b \rangle$ для любого ковектора $\gamma \in L^*$.

Определение. Для выпуклого тела $\Delta \subset L \oplus M$ его *интеграл Минковского* — выпуклое тело $B \subset L$, опорная функция которого равна интегралу опорных функций слоев Δ_a, где a пробегает множество $v(\Delta)$:

$$B(\gamma) = \int_{v(\Delta)} \Delta_a(\gamma)\, \mu \ \text{ для каждого } \gamma \in L^*.$$

Интеграл Минковского обозначается $\int \Delta\, \mu$.

Через $\mathcal{C}(K)$ обозначим множество всех выпуклых тел в вещественном векторном пространстве K. Данное множество является полугруппой относительно сложения по Минковскому: $A + B = \{a + b \,|\, a \in A, b \in B\}$.

Теорема. *Существует единственное симметричное мультилинейное относительно сложения по Минковскому отображение*

$$\mathrm{MP}_\mu : \underbrace{\mathcal{C}(L \oplus M) \times \ldots \times \mathcal{C}(L \oplus M)}_{m+1} \to \mathcal{C}(L)$$

такое, что $\mathrm{MP}_\mu(\Delta, \ldots, \Delta) = \int \Delta\, \mu$ *для любого выпуклого тела* $\Delta \subset L \oplus M$.

Существование вытекает из следующей более конструктивной версии этой теоремы.

Определение. Выпуклое тело $\mathrm{MP}_\mu(\Delta_0, \ldots, \Delta_m)$ называется *смешанным расслоенным телом* тел $\Delta_0, \ldots, \Delta_m$.

Для ковектора $\gamma \in L^*$ и выпуклого тела $\Delta \subset L \oplus M$ обозначим образ Δ при проекции $(\gamma, \mathrm{id}) : L \oplus M \to \mathbb{R} \oplus M$ через $\Gamma_\Delta(\gamma)$. Для тела $\Gamma \subset \mathbb{R} \oplus M$ обозначим через $\widetilde{\Gamma}$ пару тел $(\pi\Gamma + l, \Gamma + l)$, где $\pi : \mathbb{R} \oplus M \to \{0\} \times M$ – проекция на второе слагаемое, и $l \subset \mathbb{R} \oplus M$ – луч $(-\infty, 0] \times \{0\}$. Напомним, что положительно однородной назвается функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, такая что $\lambda f(x) = f(\lambda x)$ для любого $\lambda > 0$.

Теорема. *Для любого набора выпуклых тел* $\Delta_0, \ldots, \Delta_m \subset L \oplus M$*, выражение*

$$\mathrm{MV}\big(\widetilde{\Gamma}_{\Delta_0}(\gamma), \ldots, \widetilde{\Gamma}_{\Delta_m}(\gamma)\big)$$

задает выпуклую положительно однородную функцию от ковектора $\gamma \in L^*$, *и тело, опорной функцией которого она является, удовлетворяет определению смешанного расслоенного тела тел* $\Delta_0, \ldots, \Delta_m$.

В разделе 2.3 доказывается формула типа Пика для смешанного объема призм и показывается роль смешанных объемов призм в изучении детерминантных многообразий в терминах многогранников Ньютона.

Определение. Пусть векторы $e_1, \ldots, e_l$ образуют стандартный базис $\mathbb{R}^l$, а e_0 равен $0 \in \mathbb{R}^l$. Для ограниченных многогранников $P_0, \ldots, P_l$ in $\mathbb{R}^m$ и подмножества $I \subset \{0, \ldots, l\}$, через P_I обозначим выпуклую оболочку объединения многогранников $P_i \times \{e_i\} \subset \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^l$, $i \in I$. Будем называть такой многогранник **призмой** или **конфигурацией Кэли**. Призму $P_{\{0,\ldots,l\}}$ будем также обозначать $P_0 * \ldots * P_l$.

Обозначим через $I(A)$ число точек решетки в целочисленном многограннике $A \subset \mathbb{R}^n$.

Определение. *Тропическим полукольцом* P многогранников называется множество всех выпуклых многогранников в $\mathbb{R}^n$ (включая пустой) с операцией сложения

$$A \vee B = \text{ выпуклая оболочка } A \cup B$$

и суммой Минковского в качестве операции умножения

$$A + B = \{a + b \,|\, a \in A,\, b \in B\}.$$

Название обосновано следующим фактом: опорные функции многогранников $A \vee B$ и $A + B$ равны соответственно максимуму и сумме опорных функций многогранников A и B соответственно. Нулем и единицей в этом полукольце являются многогранники $\varnothing$ и $\{0\}$ соответственно. В частности, если суммирование многогранников $A_j \in P$ ведется по пустому множеству индексов $J = \varnothing$, положим $\sum_{j \in J} A_\alpha = \{0\}$, по определению.

Теорема. *Пусть* $m = k - n + 1$, *и* $\Delta_{i,j} \subset \mathbb{R}^m$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, – *целочисленные многогранники. Тогда смешанный объем призм* $\Delta_{1,j} * \ldots * \Delta_{n,j} \subset \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-1}$, $j = 1, \ldots, k$, *равен*

$$\sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,k\} \\ b_1+\ldots+b_n=|J|}} (-1)^{k-|J|} I\Big(\bigvee_{\substack{J_1 \sqcup \ldots \sqcup J_n = J \\ |J_1|=b_1,\ldots,|J_n|=b_n}} \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j \in J_i}} \Delta_{i,j} \Big). \qquad (**)$$

Здесь первое суммирование ведется по всем непустым $J \subset \{1, \ldots, k\}$ *и всем наборам неотрицательных чисел* b_i, *сумма которых равна* $|J|$, *и* $\bigvee$ *берется по всем разложениям* J *в дизъюнктное объединение множеств* J_i *размера* b_i.

Заметим, что некоторые из $\Delta_{i,j}$ могут быть пустыми. Эта теорема, очевидно, допускает относительную версию: в качестве $\Delta_{i,j}$ можно брать многогранники в $\mathbb{R}^m_+$, а $I(A)$ определять как число целых точек в разности замкнутых многогранников $\mathbb{R}^m_+ \setminus A$, тогда смешанный объем пар многогранников $(\mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^{n-1}, \Delta_{1,j} * \ldots * \Delta_{n,j})$, $j = 1, \ldots, k$, также равен $(**)$.

В разделе 2.3 приводится также пример вычисления топологического инварианта детерминантной особенности в терминах смешанного объема призм, построенных по многогранникам Ньютона функций, задающих особенность. Этот результат получен путем построения торических разрешений детерминантных особенностей. Заметим, что другим авторам удавалось получить аналогичные результаты методами коммутативной алгебры только при существенных ограничениях на многогранники Ньютона (например, в случае совпадающих многогранников Ньютона, см., например, [42]).

Здесь уместно будет отметить, что в самом общем контексте вычисление смешанных объемов многогранников Ньютона в различных ситуациях есть не что иное как вычисление гомологий (когомологий) подходящих комплексов, причем условие невырожденности соответствующих многогранников Ньютона обеспечивает конечномерность этих гомологий, а величина смешанного объема

[42] *Bivià-Ausina C.* The integral closure of modules, Buchsbaum-Rim multiplicities and Newton polyhedra // *J. London Math Soc.* 2004. Vol. 69. P. 407–427

дает размерность соответствующих пространств гомологий.

Например, число Милнора изолированной особенности гиперповерхности X выражается через эйлерову характеристику комплекса де Рама $(\Omega^\bullet_X, d)$, т.е. через альтернированную сумму размерностей групп его когомологий. Для вычисления целочисленных локальных инвариантов торических многообразий в качестве такого комплекса удобно использовать бидуальный комплекс де Рама $(\omega^\bullet_X, d)$, который можно описать в стандартных терминах конусов и их граней (см. [43]), взвешенные смешанные объемы [44] и т.д. Таким образом, весьма вероятно, что полученные в настоящей диссертации результаты могут быть полезным предметом изучения в рамках общей коммутативной и гомологической алгебры, а также традиционной аналитической геометрии [45, 46].

Основные результаты главы 2 изложены в работах [1], [2], [3], [4], [5].

В главе 3 развивается геометрия тропических вееров: вводятся и изучаются понятия смешанной грани и смешанного числа Милнора для набора многогранников, обобщающие аналогичные понятия для одного многогранника, а также дифференциальное кольцо тропических вееров с полиномиальными весами.

В разделе 3.1 строится и изучается некоторый аналог частичного порядка примыкания на множестве граней многогранника для случая, когда вместо одного многогранника имеется набор многогранников. Цель – последующее исследование примыканий A-результантов; именно связь с A-результантами, описанная в разделе 4.3.1, проясняет естественность вводимых ниже понятий. Доказательство основных результатов основано на методах тропической геометрии.

Гранью конечного множества $H \subset \mathbb{Z}^n$ называется пересечение множества H с гранью его выпуклой оболочки. Размерность $\dim H$ множества $H \subset \mathbb{Z}^n$ —

---

[43] *Данилов В. И.* Геометрия торических многообразий // *УМН.* 1978. Vol. 33. P. 85–134

[44] *Aleksandrov A. G.* L'indice topologique des champs de vecteurs sur les intersections complètes quasi-homogènes // *C. R. Math. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 2012. Vol. 350. P. 911–916

[45] *Александров А. Г.* Индекс дифференциальных форм на полных пересечениях // *Функциональный анализ и его приложения.* 2015. Vol. 49. P. 1–17

[46] *Aleksandrov A. G.* The Poincare index and the χ_y-characteristic of Hirzebruch // *Complex Variables and Elliptic Equations.* 2016. Vol. 61. P. 166–212

размерность его выпуклой оболочки.

K-набором конечных множеств называется отображение A из конечного множества K во множество конечных подмножеств в $\mathbb{Z}^n$, его *I-поднабор* для $I \subset K$ обозначается AI, сумма Минковского его элементов $\{\sum_{k\in K} a_k \,|\, a_k \in A_k\}$ обозначается $\sum A$ (и равна $\{0\}$ при $K = \varnothing$), а через $\dim A$ обозначается разность $\dim(\sum A) - |K|$. K-набор Γ является *гранью* K-набора A (обозначение – $\Gamma \prec A$), если $\Gamma(k)$ — грань множества $A(k)$ для любого $k \in K$ и $\sum \Gamma$ — грань множества $\sum A$.

Определение. Назовем грань $\Gamma \prec AI$ огранкой исходного набора A. Назовем огранку *важной*, если существует грань $\Gamma' \prec A$ такая, что $\Gamma = \Gamma' I$ и $\dim \Gamma \leqslant \dim \Gamma' J$ для любого $J \supset I$. Она называется *существенной*, если к тому же $\dim \Gamma < \dim \Gamma' J$ для любого $J \subsetneq I$.

Грань Γ' с указанными свойствами называется *расширением* огранки Γ. Огранка Γ *примыкает* к огранке B, если у них существуют расширения $\Gamma' \prec B'$.

Если Γ — грань набора AI, то обозначим проекцию $\mathbb{Z}^n$ вдоль выпуклой оболочки суммы $\sum \Gamma$ через p, выпуклые оболочки образов $pA(i)$, $i \notin I$, — через $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$, выпуклые оболочки $p(\sum AI)$ и $p(\sum AI \setminus \sum \Gamma)$ — через Ψ_0 и Ψ, соответственно. Пусть ψ_0 — вершина $p(\sum \Gamma)$ многогранника Ψ_0, и пусть

$$C = \{\lambda(\psi - \psi_0) \,|\, \lambda > 0,\, \psi \in \Psi_0\}$$

— конус, который в малой окрестности 0 совмещается параллельным переносом с многогранником Ψ_0 в малой окрестности своей вершины ψ_0. Обозначим пару (неограниченных) многогранников $(\Psi_0 + C, \Psi + C)$ через Φ_0, а $(\Psi_i + C, \Psi_i + C)$ — через Φ_i для $i > 0$. Напомним, что через Φ_I обозначаются призмы с основаниями Φ_i, $i \in I$.

Определение. *Числом Милнора* набора A в грани Γ называется

$$\sum_{a_0+\ldots+a_m=d} \Phi_0^{a_0}\cdot\Phi_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot\Phi_m^{a_m} = \sum_{I\subset\{0,\ldots,m\}} (-1)^{m+1-|I|}(d+|I|-1)!\operatorname{Vol}\Phi_I,$$

где $(a_0,\ldots,a_m)$ пробегает множество всех наборов натуральных чисел, дающих в сумме $d=\dim\sum A-\dim\sum\Gamma$, и смешанный объем пар многогранников $P_1,\ldots,P_k$ в k-мерном векторном пространстве записывается в виде $P_1\cdot\ldots\cdot P_k$.

Утверждение. *Верно $c_A^\Gamma \geqslant 0$. Более того, грань Γ важна тогда и только тогда, когда $c_A^\Gamma > 0$.*

Определение. Набор A называется *значимым*, если размерность выпуклой оболочки $A_{i_0}+\ldots+A_{i_p}$ не меньше p для любой последовательности $0\leq i_0<\ldots<i_p\leq k$ и равна n при $p=k$.

Утверждение. *Если $\dim E=-k<0$ для существенной огранки E значимого набора A, то существует цепочка существенных огранок E_i размерностей $-i$ при $i=1,\ldots,k$ такая, что $E=E_k$, и E_i примыкает к E_{i-1} для любого i.*

Заметим, что примыкание не транзитивно, и мы не можем утверждать, что E_k примыкает к E_1.

В разделе 3.2 строится дифференциальное кольцо тропических вееров с полиномиальными коэффициентами. Пусть L — n-мерная целочисленная решетка. Рассмотрим пару (P,φ), где

1) $P\subset L\otimes\mathbb{R}$ — объединение конечного числа непересекающихся выпуклых относительно открытых полиэдральных конусов коразмерности k, обладающее следующим свойством: у каждой точки $p\in P$ существует окрестность, в которой P совпадает с плоскостью коразмерности k (данная плоскость обозначается T_pP);

2) Функция $\varphi: P\to\mathbb{R}$ представляется многочленом с рациональными

коэффициентами $\varphi_p : T_pP \to \mathbb{R}$ в некоторой достаточно малой окрестности каждой точки $p \in P$.

Две такие пары (P, φ) и (Q, ψ) назовем **эквивалентными**, если $\varphi(p) = \psi(p)$ для любых точек $p \in P \cap Q$ таких, что $T_pP = T_pQ$, и $\varphi = 0$ на $P \setminus \overline{Q}$ и $\psi = 0$ на $Q \setminus \overline{P}$.

Для рациональной k-мерной плоскости $R \subset L \otimes \mathbb{R}$ и точки $x \in L \otimes \mathbb{R}$ скажем, что аффинная плоскость $R + x$ **трансверсальна** к (P, φ), если она пересекает P в конечном множестве точек и не пересекает $\overline{P} \setminus P$. Тогда **тропический индекс пересечения** $(R + x) \cdot (P, \varphi)$ определяется как

$$\sum_{p \in (R+x) \cap P} \varphi(p) \left| \frac{L}{(R \cap L) + (T_pP \cap L)} \right|.$$

Данный индекс пересечения является локально-полиномиальной функцией от x, определенной на открытом плотном подмножестве $L \otimes \mathbb{R}$. Если данная функция продолжается до непрерывной функции $i_R : L \otimes \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ для любого R, то пара (P, φ) называется **тропической**, и **тропический индекс пересечения** $(R + x) \cdot (P, \varphi)$ определяется по непрерывности как $i_R(x)$ для любых значений x, даже если плоскость $R + x$ не трансверсальна (P, φ).

Классы эквивалентности тропических пар коразмерности k называются тропическими веерами и образуют множество $\mathcal{K}_k(L)$. Для любых двух вееров $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, существует единственный (с точностью до эквивалентности) веер $\mathcal{S}$ такой, что $\mathcal{P} \cdot R + \mathcal{Q} \cdot R = \mathcal{S} \cdot R$ для любой аффинной плоскости R. Данный веер $\mathcal{S}$ называется суммой $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$.

Множество $\mathcal{K}_k(L)$ образует $\mathbb{Q}$-векторное пространство относительно данной операции сложения. Оно разлагается в прямую сумму $\bigoplus_d \mathcal{K}_k^d(L)$, где каждая из компонент $\mathcal{K}_k^d(L)$ состоит из пар $(P, \varphi) \in \mathcal{K}_k(L)$ таких, что φ локально является однородным многочленом степени d. Прямая сумма $\bigoplus_k \mathcal{K}_k(L)$ обозначается $\mathcal{K}(L)$ и всюду далее будет называться **пространством тропических вееров с полиномиальными весами**.

Для тропических пар $(P, \varphi) \in \mathcal{K}(L)$ и $(Q, \psi) \in \mathcal{K}(M)$, их **прямое произведение** определяется как $(P \times Q, \varphi + \psi) \in \mathcal{K}(L \oplus M)$. Для эпиморфизма решеток $f : L \to M$ размерностей n и m соответственно, **прямой образ** $f_*(\mathcal{P})$ тропического веера $\mathcal{P} \in \mathcal{K}_k(L)$, $k \geqslant n - m$, определяется как единственный веер $\mathcal{S} \in \mathcal{K}_{k-n+m}(M)$ такой, что $\mathcal{P} \cdot f^{-1}(R) = \mathcal{S} \cdot R$ для любой $(k - n + m)$-мерной плоскости $R \subset M \otimes \mathbb{Q}$.

Утверждение. *Образ тропического веера $\mathcal{P}$, состоящего из $(n-k)$-мерных конусов $C_i \subset L \otimes \mathbb{R}$ с весами $m_i : C_i \to \mathbb{R}$, является тропическим веером $f_*\mathcal{P}$, который состоит из всех $(n - k)$-мерных конусов $f(C_i)$ с весами* $(m_i \circ f^{-1}) \cdot \big|L/(C_i + \ker f)\big|$.

Векторное пространство $\mathcal{K}(L)$ обладает естественной структурой дифференциального кольца: **произведение-пересечение** вееров $\mathcal{P} \in \mathcal{K}_k(L)$ и $\mathcal{Q} \in \mathcal{K}_m(L)$ — единственный веер $\mathcal{S} \in \mathcal{K}_{k+m}(L)$ такой, что $\mathcal{S} \cdot R = (\mathcal{P} \times \mathcal{Q} \times R) \cdot$ (диагональ) в $(L \oplus L \oplus L) \otimes \mathbb{Q}$ для любой $(k + m)$-мерной аффинной плоскости $R \subset L \otimes \mathbb{Q}$. **Дифференцированием изломов** $\delta : \mathcal{K}_k^d(L) \to \mathcal{K}_{k+1}^{d-1}(L)$ называется единственное дифференцирование в кольце $\mathcal{K}(L)$ такое, что $\delta(\mathcal{P}) \in \mathcal{K}_1^0(L)$ является многообразием углов непрерывной кусочно-линейной функции $\mathcal{P} \in \mathcal{K}_0^1(L)$.

Обозначим подкольца $\bigoplus_k \mathcal{K}_k^0(L)$ и $\bigoplus_d \mathcal{K}_0^d(L)$ кольца $\mathcal{K}(L)$ через $\mathcal{K}^0(L)$ и $\mathcal{K}_0(L)$ соответственно. Первое из них также известно как **кольцо тропических вееров** (более явное описание операций сложения и умножения в данном кольце см., например, в работах [47, 33, 34, 35]), последнее же в точности является кольцом всех непрерывных кусочно-линейных полиномиальных функций на $L \otimes \mathbb{Q}$ (относительно обычных операций сложения и умножения). Подкольца $\mathcal{K}_0(L^*)$ and $\mathcal{K}^0(L^*)$ дают хорошо известные комбинаторные модели для (определенного в начале введения) кольца условий C комплексного тора $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ с

[47] *Fulton W., Sturmfels B.* Intersection theory on toric varieties // *Topology.* 1997. Vol. 36. P. 335–353. arXiv:alg-geom/9403002

решеткой условий L:

$$C = \mathcal{K}^0(L^*) = \mathcal{K}_0(L^*)/I,$$

где I — идеал, порожденный линейными функциями на $\mathbb{Q}^n$. Первая из данных моделей была обнаружена в работах [47, 48, 33], а вторая — в работах [49] и [50]. Изоморфизм между данными моделями устанавливается отображениями $\delta^k : \mathcal{K}_0^k(L^*) \to \mathcal{K}_k^0(L^*)$ (это описание отлично от ранее известного, приведенного в работах [51] и [52]). Элемент $\mathcal{K}^0(L^*)$, соответствующий классу подмногообразия $V \subset (\mathbb{C}\backslash 0)^n$ в кольце условий C, называется **тропическим веером** $\operatorname{Trop} V$ и допускает следующее описание: пусть V задано радикальным идеалом $I \in \mathbb{C}[L]$, тогда его тропический веер представлен парой $(P, \varphi) \in \mathcal{K}^0\big(L^*\big)$, $P \subset \mathbb{Q}^n$, $\varphi : P \to \mathbb{Q}$, где $P = \{\gamma \,|\, \mathbb{C}[L] \neq \operatorname{in}_\gamma I\}$, и значение $\varphi(\gamma)$ равно кратности Гильберта-Самюэля идеала $\operatorname{in}_\gamma I \subset \mathbb{C}[L]$.

Пример. Если N — многогранник Ньютона полинома Лорана на комплексном торе $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$, то тропический веер гиперповерхности $f = 0$ равен многообразию углов опорной функции многогранника N. Обозначим данный веер через $[N] \in \mathcal{K}_1^0(\mathbb{Z}^n)$ и назовем его **двойственным веером** многогранника N.

Основные результаты главы 3 изложены в работах [6] и [7].

В главе 4 мы приступаем к изучению “аффинной теории особенностей” начиная со стратов минимальной положительной коразмерности – результантов и дискриминантов. Мы, в частности, классифицируем проективные торические многообразия минимальной степени, проективно двойственные к которым – гиперповерхности, а также вводим и исследуем новое понятие бифуркационного дискриминанта системы уравнений. В качестве его приложений мы получаем

[48] *McMullen P.* Weights on polytopes // *Discrete Comput. Geom.* 1996. Vol. 15. P. 363–388

[49] *Stanley R.* Generalized H-vectors, intersection cohomology of toric varieties, and related results // Commutative algebra and combinatorics, Kyoto, 1985, Adv. Stud. Pure Math., 11. 1987. P. 187–213

[50] *Brion M.* Piecewise polynomial functions, convex polytopes and enumerative geometry // *Banach Center Publ.* 1996. Vol. 36, Parameter spaces (Warsaw, 1994). P. 25–44

[51] *Brion M.* The structure of the polytope algebra // *Tohoku Math J.* 1997. Vol. 49. P. 1–32

[52] *Katz E., Payne S.* Piecewise polynomials, Minkowski weights, and localization on toric varieties // *Algebra Number Theory.* 2008. Vol. 2. P. 135–155. arXiv:math/0703672

новые результаты о топологии полиномиальных отображений и классифицируем системы полиномиальных уравнений с неопределенными коэффициентами, разрешимые в радикалах.

В разделе 4.1 определяются результанты и дискриминанты и исследуется их коразмерность.

Рассмотрим $A_0, \ldots, A_l$, $l \leqslant k$, конечные подмножества решетки $\mathbb{Z}^k$, и пусть $\Sigma_{A_0,\ldots,A_l} \subset \mathbb{C}^{A_0} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_l}$ — множество всех таких наборов многочленов $(\varphi_0, \ldots, \varphi_l)$, что в некоторой точке множества $\{y \in (\mathbb{C} \setminus 0)^k \mid \varphi_0(y) = \ldots = \varphi_l(y) = 0\}$ их дифференциалы линейно зависимы. Объединение всех компонент коразмерности 1 замыкания $\overline{\Sigma_{A_0,\ldots,A_l}}$ задается уравнением $G = 0$, где G — свободный от квадратов многочлен на $\mathbb{C}^{A_0} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_l}$.

Определение. Многочлен G называется *приведенным A-дискриминантом степени* $(A_0, \ldots, A_l)$ и обозначается $D^{red}_{A_0,\ldots,A_l}$.

Мы предполагаем, что $l \leqslant k$, иначе коразмерность $\Sigma_{A_0,\ldots,A_l}$ больше 1 (можно, впрочем, вместо многогранника Ньютона изучать тропикализацию множества $\Sigma_{A_0,\ldots,A_l}$, подробнее см. [18] и [34]).

Если $l = k$, то $D^{red}_{A_0,\ldots,A_k}$ — приведенный результант $R_{A_0,\ldots,A_k}$ (см. определение 4.1.1); если $l = 0$, то $D^{red}_{A_0}$ – приведенный дискриминант D_{A_0} (см. определение 4.1.9). В обоих случаях дискриминантное множество $\Sigma_{A_0,\ldots,A_l}$ неприводимо, и известен комбинаторный метод проверки равенства $\operatorname{codim} \Sigma_{A_0,\ldots,A_l} = 1$ (см. следствие 4.1.15(2) в случае $l = 0$ и предложение 4.1.5(1) для $l = k$). В общем же случае, множество $\Sigma_{A_0,\ldots,A_l}$ не всегда неприводимо и может даже не иметь чистой размерности.

Пример. Если $k = 2$, $A_0 = \{0, 1, 2\} \times \{0\}$ и $A_1 = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ (данные множества двойственно невырождены, однако $\dim A_0 < 2$), то $\overline{\Sigma_{A_0,A_1}}$ состоит из двух компонент. Одной из них является множество коразмерности 1 всех пар многочленов вида $\Big(c(x - a)^2,\ b_{11}xy + b_{01}x + b_{10}y + b_{00}\Big)$. Другая же состоит из всех пар многочленов вида $\Big(c_1(x-a_1)(x-a_2),\ c_2(x-a_1)(y-b)\Big)$ и имеет коразмерность 2.

Определение. Набор множеств $A_0,\dots,A_l$ называется *двойственно вырожденным*, если замыкание множества $\Sigma_{A_0,\dots,A_l}$ не является гиперповерхностью.

Утверждение. *Если ни одно из множеств $A_0,\dots,A_l$ не содержится в аффинной гиперплоскости и по крайней мере одно из них двойственно невырождено, то и набор $A_0,\dots,A_l$ двойственно невырожден.*

В разделе 4.2 определяется и исследуется бифуркационный дискриминант системы уравнений и его приложения к изучению топологии полиномиальных отображений.

Для конечного множества $H\subset\mathbb{Z}^n$ мы изучаем пространство $\mathbb{C}^H$ *многочленов Лорана* $h(x)=\sum_{a\in H}c_ax^a$, где x^a обозначает $x_1^{a_1}\dots x_n^{a_n}$, коэффициент c_a — комплексное число, а полином h рассматривается как функция $(\mathbb{C}\setminus 0)^n\to\mathbb{C}$. Для линейной функции $v:\mathbb{Z}^n\to\mathbb{Z}$ мы обозначаем через H^v пересечение H с границей аффинного полупространства $H+\{v<0\}$, а через h^v — компоненту наибольшей v-степени $\sum_{a\in H^v}c_ax^a$ (при $v=0$ положим $H^0=H$ и $h^0=h$). В дальнейшем набор конечных подмножеств $A_0,\dots,A_k$ в $\mathbb{Z}^n$ мы будем обозначать через A, пространство $\mathbb{C}^{A_0}\oplus\dots\oplus\mathbb{C}^{A_k}$ — через $\mathbb{C}^A$. Элемент $f=(f_0,\dots,f_k)\in\mathbb{C}^A$ мы будем рассматривать как отображение $(\mathbb{C}\setminus 0)^n\to\mathbb{C}^{k+1}$ и через f^v будем обозначать $(f_0^v,\dots,f_k^v)$.

Теорема. *Предположим, что сумма $A_0+\dots+A_k$ не содержится в аффинной гиперплоскости. Для системы уравнений $f=0$ следующие три условия эквивалентны :*

1) Существует сколь угодно малый элемент $\tilde f\in\mathbb{C}^A$ такой, что множества $\{f=0\}$ и $\{f+\tilde f=0\}$ не диффеоморфны.

2) Существует сколь угодно малый элемент $\tilde f\in\mathbb{C}^A$ такой, что множества

$\{f=0\}$ и $\{f+\tilde{f}=0\}$ имеют разные эйлеровы характеристики.
3) Существует линейная функция $v:\mathbb{Z}^n\to\mathbb{Z}$ такая, что дифференциалы $df_0^v,\ldots,df_k^v$ линейно зависимы в некоторой точке множества $\{f^v=0\}$.

Условие на $A_0+\ldots+A_k$ отбросить нельзя, потому что иначе эйлерова характеристика множества $\{f=0\}$ равнялась бы 0 для любого $f\in\mathbb{C}^A$, из соображений однородности.

Определение. Система $f\in\mathbb{C}^A$ называется *вырожденной*, если она удовлетворяет одному из вышеупомянутых условий. Множество всех вырожденных систем B назовем *бифуркационным множеством.*

Например, если $k=n$, то B — результантное множество (т.е. множество всех совместных систем уравнений в $\mathbb{C}^A$, см. [17]); Если $A_0=\ldots=A_k$ — множество вершин стандартного n-мерного симплекса, то $f_0,\ldots,f_k$ линейны, и B определяется как множество нулей произведения миноров максимального порядка матрицы коэффициентов системы $f_0,\ldots,f_k$.

Теорема. *Если набор A значимый, то множество B всех вырожденных систем в $\mathbb{C}^A$ является непустой гиперповерхностью.*

Предположение о значимости отбросить нельзя, иначе множество совместных систем всегда имеет коразмерность больше единицы. Для $f\in\mathbb{C}^A\setminus B$ и системы $\tilde{f}$ общего положения в некоторой неприводимой компоненте $B_i\subset B$, через e_i обозначим разность эйлеровых характеристик $e\{\tilde{f}=0\}-e\{f=0\}$.

Утверждение. *Если A значимо, то $e_i>0$ при четном $n-k$ и $e_i<0$ при нечетном $n-k$.*

Определение. Если набор A значимый, то уравнение эффективного дивизора $(-1)^{n-k}\sum_i e_iB_i$ называется *A-бифуркационным дискриминантом*, или *A-дискриминантом Эйлера* и обозначается $E_A=E_{A_0,\ldots,A_k}$.

Таким образом, E_A — непостоянный многочлен на $\mathbb{C}^A$, определенный с точностью до умножения на ненулевую константу, и уравнением $E_A = 0$ задается множество всех вырожденных систем уравнений в $\mathbb{C}^A$.

В разделе 4.2 указаны формулы для явного вычисления этого многочлена и его степени (а также его многогранника Ньютона). Доказательства основных фактов о бифуркационном дискриминанте даны в разделе 4.3. В качестве первого приложения бифуркационных дискриминантов получен следующий факт о топологии полиномиальных отображений.

Обозначим через $\sharp S$ число целых точек в выпуклой оболочке множества $S \subset \mathbb{R}^n$. Напомним, что *тропическая сумма Минковского* $P \vee Q$ двух множеств – это выпуклая оболочка их объединения $P \cup Q$, и тропической суммой Минковского пустого набора множеств мы считаем пустое множество. Рассмотрим невырожденный набор многочленов $g \in \mathbb{C}^A$, $g : (\mathbb{C} \setminus 0)^n \to \mathbb{C}^{k+1}$.

Утверждение. *1) Если набор A значимый, набор $g \in \mathbb{C}^A$ невырожден и любые k из $k+1$ многочленов набора g также образуют невырожденный набор, то каждая неприводимая компонента B_i бифуркационного множества отображения $g : (\mathbb{C} \setminus 0)^n \to \mathbb{C}^{k+1}$ является гиперповерхностью.*

2) Для точек общего положения $y \in \mathbb{C}^{k+1}$ и $y_i \in B_i$, разность аддитивных эйлеровых характеристик $\chi(g^{-1}(y_i)) - \chi(g^{-1}(y))$ с точностью до знака $(-1)^{n-k}$ является натуральным числом b_i.

3) Степень дивизора $\sum_i b_i B_i$ равна

$$(-1)^{n+1} \sum_{\substack{0 \leqslant q < b_0 + \ldots + b_k \leqslant n+1 \\ b_i \geqslant 0}} (-1)^{\sum_i b_i} C_{n+k+1}^{k+\sum_i b_i} \sharp\Big(\{0\} \cup \bigcup_{\substack{c_0 + \ldots + c_k = q \\ 0 \leqslant c_i \leqslant b_i}} \sum_i c_i A_i\Big). \qquad (*)$$

Исследование монодромии обходов вокруг компонент бифуркационного дискриминанта приводит в разделе 4.4 к следующему многомерному обобщению теоремы Абеля о неразрешимости в радикалах.

Пусть $\mathbf{A}$ — набор конечных множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \mathbb{Z}^n$. Для каждого

$j = 1, 2, \ldots, n$ обозначим набор комплексных чисел $(c_{j,a},\ a \in A_j)$ через c_{A_j}, а пространство всех таких наборов — через $\mathbb{C}^{A_j}$. Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^{\mathbf{A}} := \mathbb{C}^{A_1} \oplus \mathbb{C}^{A_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{A_n}$ наборов $c_{\mathbf{A}} = (c_{A_1}, c_{A_2}, \ldots, c_{A_n})$, которое является конфигурационным пространством систем многочленов (Лорана) $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $f_j(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in A_j} c_{j,a} \mathbf{x}^{\mathbf{k}}$.

Определение. 1. *Решением общей системы уравнений с носителями $A_1, A_2 \ldots, A_n$, называется* (многозначная) функция $F : \mathbb{C}^{\mathbf{A}} \to (\mathbb{C} \setminus 0)^n$, которая на каждом наборе $c_{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^{\mathbf{A}}$ равна множеству решений системы полиномиальных уравнений

$$\sum\nolimits_{\mathbf{k} \in A_j} c_{j,a} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{$*$}$$

где $\mathbf{x}^{\mathbf{k}}$ обозначает моном $x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$.

2. Общая система *разрешима в радикалах*, если для каждой точки $c_{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^{\mathbf{A}}$ такой, что множество $F(c_{\mathbf{A}})$ конечно, существуют открытая по Зарискому окрестность U и многозначная функция $G\colon U \to (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ на ней такие, что $F(c) \subset G(c)$ для всех $c \in U$ и G является композицией рациональных функций и извлечений корня произвольной степени. Система *разрешима в квадратурах*, если функция G является композицией рациональных функций, экспонент, извлечений корня произвольной степени и взятия неопределенных интегралов.

Теорема. *Общая система уравнений с носителем $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A \subset \mathbb{Z}^n$, содержащим 0 и порождающим решетку $\mathbb{Z}^n$, разрешима в радикалах ($\Leftrightarrow$ в квадратурах) тогда и только тогда, когда она имеет не более 4 решений, т.е. объем выпуклой оболочки* $\operatorname{conv} A$ *многогранника A не превышает 4. Каждое множество A, удовлетворяющее данному условию, содержится либо в одном из следующих 34 множеств, либо во множестве, полученном из одного из них последовательным применением следующих двух процедур:*

(1) взятие стандартного конуса $B \rightsquigarrow \{0,\dots,0,1\} \cup B\times\{0\} \subset \mathbb{Z}^{m+1}$ *над множеством* $B\in\mathbb{Z}^m$,

(2) взятие образа множества при аффинном автоморфизме решетки.

- $n=6$, $\operatorname{Vol}(\operatorname{conv} A)=4$: *контур* $S_6\cup\{(-1,-1,-1,1,1,1)\}$, *где* S_n *— множество вершин стандартного* n*-мерного симплекса.*

- $n=5$, $\operatorname{Vol}(\operatorname{conv} A)=4$: *контур* $S_5\cup\{(-2,-1,1,1,1)\}$ *и джоин* $(S_1\times S_1)\star(S_1\times S_1)$, *где* $A\star B$ *для* $A\subset\mathbb{Z}^m$ *и* $B\subset\mathbb{Z}^n$ *обозначает объединение* $A\times\{0\}\times\{0\}\cup\{0\}\times B\times\{1\}\subset\mathbb{Z}^m\oplus\mathbb{Z}^n\oplus\mathbb{Z}$.

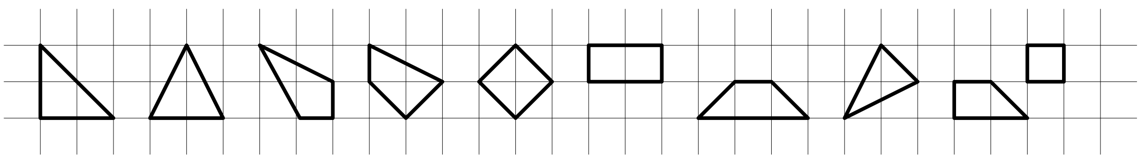
- $n=4$, $\operatorname{Vol}(\operatorname{conv} A)=4$:

  - *контуры* $S_4\cup\{(-2,-1,1,1)\}$, $S_4\cup\{(-1,-1,-1,1)\}$, $S_4\cup\{(-1,-1,-1,2)\}$,
  - *призма* $S_1\times S_3$,
  - *джоин* $(2S_1)\star(S_1\times S_1)$,
  - *сумма* $(S_1\times S_1)\oplus(S_1\times S_1)$, *где* $A\oplus B$ *для* $A\subset\mathbb{Z}^m$ *и* $B\subset\mathbb{Z}^n$ *обозначает объединение* $A\times\{0\}\cup\{0\}\times B\subset\mathbb{Z}^m\oplus\mathbb{Z}^n$.

- $n=4$, $\operatorname{Vol}(\operatorname{conv} A)=3$: *контур* $S_4\cup\{(-1,-1,1,1)\}$.

- $n=3$, $\operatorname{Vol}(\operatorname{conv} A)=4$ *и* 3*: контуры* $S_3\cup\{(-1,-1,-1)\}$, $S_3\cup\{(1,1,-3)\}$, $S_3\cup\{(1,1,-2)\}$, *призма* $P=S_2\times S_1$ *и множества* $P\cup\{(0,0,2)\}$, $\{-1,0,1\}\star\{-1,0,1\}$, $D\cup\{(0,0,-1)\}$, $D\cup\{(0,0,2)\}$, $D\cup\{(1,1,1)\}$ *и* $D\cup\{(1,1,-1)\}$, *где* D *— квадратная пирамида* $S_3\cup\{(1,1,0)\}$.

- $n=2$, $\operatorname{Vol}(\operatorname{conv} A)\leqslant 4$*:*



- $n = 1, \ \ \mathrm{Vol}(\mathrm{conv}\, A) \leqslant 4 : S_1,\ 2S_1,\ 3S_1,\ 4S_1.$

Основные результаты главы 4 изложены в работах [8], [7] и [9].

В главе 5 мы продолжаем изучение “аффинной теории особенностей”, изучая страты коразмерности 2. Для этой цели мы строим характеристические классы подмногообразий комплексного тора со значениями в кольце условий.

В разделе 5.2 доказывается существование характеристических классов алгебраических подмножеств комплексного тора $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$ со значениями в кольце условий $C = C_0 \oplus \ldots \oplus C_n$ (определение кольца условий дано в начале введения; здесь будет удобнее нумеровать компоненты этого кольца коразмерностью, а не размерностью, так что фундаментальный класс множества коразмерности k содержится в компоненте C_k).

Определение. **Аффинный характеристический класс** — отображение, сопоставляющее каждому алгебраическому подмножеству $V \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ элемент $\langle V \rangle = \langle V \rangle_0 + \ldots + \langle V \rangle_n \in C$, $\langle V \rangle_i \in C_i$ и обладающее следующими свойствами:

(1) Если подмножество $V \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ имеет коразмерность k, то $\langle V \rangle_i = 0$ для $i < k$, $\langle V \rangle_k$ – фундаментальный класс V в пространстве C_k, а $\langle V \rangle_n \in C_0 = \mathbb{Z}$ совпадает с эйлеровой характеристикой $e(V)$.

(2) Для произвольных U и $V \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ и общего $g \in G$ верно $\langle U \cap gV \rangle = \langle U \rangle \langle V \rangle$.

(3) Для двух комплексных торов X и Y и любых алгебраических подмножеств $U \subset X$ и $V \subset Y$ выполняется $\langle U \times V \rangle = \langle U \rangle \times \langle V \rangle$.

(4) Отображение, которое сопоставляет элемент $\langle V \rangle$ характеристической функции V, продолжается по линейности на пространство всех конструктивных функций $X \to \mathbb{Z}$ таким образом, что $\langle U \cap V \rangle + \langle U \cup V \rangle = \langle U \rangle + \langle V \rangle$. Напомним, что *конструктивной функцией* называется линейная комбинация характеристических функций алгебраических множеств.

(5) Для гомоморфизма $p : X \to Y$ комплексных торов и алгебраического подмножества $V \subset X$ верно $p_*\langle V\rangle = \langle p_*V\rangle$. Здесь $p_*V : Y \to \mathbb{Z}$ обозначает *прямой образ в смысле Макферсона* подмножества V, значение которого в каждой точке $y \in Y$ определяется как $e\Big(p^{-1}(y) \cap V\Big)$.

(6) Для гладкой торической компактификации $\overline{X} \supset (\mathbb{C}\setminus 0)^n$ такой, что аффинный характеристический класс $\langle V\rangle$ содержится в когомологиях $H^\bullet(\overline{X}) \subset C$, данный класс является двойственным по Пуанкаре к *классу Шварц-Макферсона* множества V в $\overline{X}$, см. [53] и [54]. Напомним, что естественные вложения $H^\bullet(\overline{X}) \subset C$ возникают из того факта, что C совпадает с прямым пределом $H^\bullet(\overline{X})$ по всем торическим компактификациям $\overline{X} \supset (\mathbb{C}\setminus 0)^n$.

Заметим, что аффинный характеристический класс однозначно определяется свойством (6) и свойствами (1–5).

В разделе 5.3 вычисляются фундаментальные классы в кольце условий для стратов мультиособенностей коразмерности 2 в пространстве $\mathbb{C}^A$, и результаты этого вычисления иллюстрируются на одном примере, допускающем также непосредственное вычисление ответа.

Пусть A — конечное подмножество в решетке характеров L комплексного тора $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$. Пусть $\{\times\}$, $\{\times\times\}$ и $\{\prec\}$ — множества всех $f \in \mathbb{C}^A$ таких, что замыкание гиперповерхности $\{f = 0\}$ в гладком торическом многообразии X_A имеет одну особенность типа $\mathcal{A}_1$, две особенности типа $\mathcal{A}_1$ и одну особенность типа $\mathcal{A}_2$ соответственно. Обозначим тропические характеристические классы данных стратов через $\langle\times\rangle$, $\langle\times\times\rangle$ и $\langle\prec\rangle$. Заметим, что в отличие от классической теории мультиособенностей мы не переходим к замыканиям множеств $\{\times\}$, $\{\times\times\}$ и $\{\prec\}$: данные множества являются гладкими (что для нас не важно), но незамкнутыми! Переход к замыканиям не повлиял бы на их фундаментальные классы (т.е. их высшие характеристические классы), однако изменил бы

[53] *MacPherson R. D.* Chern classes for singular algebraic varieties // *Ann. of Math.* 1974. Vol. 100. P. 423–432

[54] *Schwartz M.-H.* Classes et caractères de Chern-Mather des espaces linéaires // *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 1982. Vol. 295. P. 399–402

остальные их характеристические классы.

Из трех теорем ниже следуют три независимых линейных уравнения на фундаментальные классы $\langle\times\rangle_2$, $\langle\times,\times\rangle_2$ и $\langle\prec\rangle_2$. Мы можем решить эту линейную систему и вычислить $\langle\times\times\rangle_2$ и $\langle\prec\rangle_2$, искомые фундаментальные классы стратов мультиособенностей $\{\times\times\}$ и $\{\prec\}$.

Мы докажем данные результаты, наложив на A некоторые условия, напоминающие двойственную невырожденность.

Для конечного множества A в решетке характеров L комплексного тора $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$ определим **тавтологический многочлен** s на $(\mathbb{C}\setminus 0)^n \times (\mathbb{C}\setminus 0)^A$ равенством $s(x,f)=f(x)$. Полное пересечение $s=\partial s/\partial x_1=\ldots=\partial s/\partial x_n=0$, где $(x_1,\ldots,x_n)$ — стандартные координаты на торе $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$, будем обозначать через $s=\partial s/\partial x.=0$.

Определение. Множество A называется версальным в коразмерности 2, если существует такое множество коразмерности три $\Sigma\subset\mathbb{C}^A$, что каждый полином $f\in\mathbb{C}^A\setminus\Sigma$ относится к одному из следующих типов:

1) f не лежит в образе проекции $\{s=\partial s/\partial x.=0\}\to(\mathbb{C}\setminus 0)^A$. В данном случае, гиперповерхность $f=0$ не имеет особенностей.

2) f является регулярным значением проекции $\{s=\partial s/\partial x.=0\}\to(\mathbb{C}\setminus 0)^A$ с одним либо двумя прообразами $(z_{(i)},f)$. В данном случае, гиперповерхность $f=0$ не имеет никаких других особых точек, кроме $z_{(i)}$, и они обе являются особенностями типа $\mathcal{A}_1$. Более того, тавтологическая гиперповерхность $s=0$ задается уравнением $z_{(i)1}^2+\ldots+z_{(i)n}^2=y_i$ в подходящих локальных координатах $(y_1,\ldots,y_{|A|})$ вблизи $f\in\mathbb{C}^A$ и $(z_{(i)1},\ldots,z_{(i)n},y_1,\ldots,y_{|A|})$ вблизи $(z_{(i)},f)$.

3) f — критическое значение проекции $\{s=\partial s/\partial x.=0\}\to(\mathbb{C}\setminus 0)^A$ с одним прообразом (z,f). В данном случае, z является единственной особой точкой гиперповерхности $f=0$ и относится к типу $\mathcal{A}_2$. Более того, тавтологическая гиперповерхность $s=0$ задается уравнением $z_1^3+y_1z_1+z_2^2\ldots+z_n^2=y_2$ в подходящих локальных координатах $(y_1,\ldots,y_{|A|})$ вблизи $f\in\mathbb{C}^A$ и $(z_1,\ldots,z_n,y_1,\ldots,y_{|A|})$

вблизи (z, f).

Всюду далее множество A предполагается версальным в коразмерности 2. Например, всякое двойственно невырожденное множество в $\mathbb{Z}^2$ и любое множество, содержащее $\{0,1\}^{n-1} \times \{0,1,2\}$, является версальным в коразмерности 2.

Всюду далее мы также будем предполагать, что $A \subset L$ просто в ребрах, т.е. A — множество целых точек в целочисленном многограннике, каждое ребро которого содержится в $n-1$ гиперграни, и набор из $n-1$ внешних нормальных ковекторов к данным гиперграням может быть дополнен до базиса в $(\mathbb{Z}^n)^*$.

Первое уравнение.

Теорема. *Если A версально в коразмерности 2 и просто в ребрах, то верно следующее равенство:*

$$\langle \times \rangle_2 + 2\langle \times\times \rangle_2 + 2\langle \prec \rangle_2 = \sum_{\Gamma} \pi_* \langle \{s^\Gamma = 0\}/T_\Gamma \rangle_{\dim\Gamma+2},$$

где Γ пробегает все грани положительной размерности выпуклой оболочки множества A.

Слагаемые $\langle \{s^\Gamma = 0\}/T_\Gamma \rangle_j$ для всех j можно выразить в терминах многогранника Ньютона s^Γ, см. пример 5.2.8. Таким образом, все неизвестные слагаемые находятся в левой части.

Второе уравнение.

Теорема. *Если A версально в коразмерности 2 и просто в ребрах, то верно следующее равенство:*

$$\langle \times \rangle_2 + 2\langle \times\times \rangle_2 + \langle \prec \rangle_2 = \pi_* \langle s = \frac{\partial s}{\partial x.} = 0 \rangle_{n+2} + \sum_{\Gamma} \pi_* \langle \{s^\Gamma = s^{\Gamma'} = \frac{\partial s^\Gamma}{\partial x.} = 0\}/T_\Gamma \rangle_{n+1},$$

где Γ пробегает все гиперграни выпуклой оболочки множества A.

Слагаемые $\langle\{s^\Gamma = s^{\Gamma'} = \frac{\partial s^\Gamma}{\partial x.} = 0\}\rangle_{n+1} = \langle\{s^\Gamma = \frac{\partial s^\Gamma}{\partial x.} = 0\}\rangle_n \cdot \langle s^{\Gamma'} = 0\rangle_1$ и $\langle s = \frac{\partial s}{\partial x.} = 0\rangle_{n+2}$ вычисляются непосредственно (см.следствие 5.3.17). Таким образом, все неизвестные слагаемые находятся в левой части. Это вычисление дает также следующий критерий двойственной невырожденности.

Определение. Множество $B \subset \mathbb{R}^m$ мощности $m+2$ называется *контуром*, если ни одно из его $m+1$-элементных подмножеств не содержится ни в какой аффинной гиперплоскости.

Множество $B \subset \mathbb{R}^m$ называется *итерированным контуром*, если оно не содержится ни в какой аффинной гиперплоскости и при подходящем параллельном переносе распадается в дизъюнктное объединение $\{0\} \sqcup B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_p$ такое, что выполнено следующее условие. Обозначим через L_i линейную оболочку $\{0\} \sqcup B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_i$, $i = 0, \ldots, p$, тогда проекция $L_{i+1} \to L_{i+1}/L_i$ взаимно однозначно отображает объединение $\{0\} \sqcup B_{i+1}$ на контур в L_{i+1}/L_i.

Утверждение. *Множество $B \subset \mathbb{Z}^n$ является двойственно невырожденным если и только если содержит итерированный контур.*

Третье уравнение. Для начала определим кусочно-линейную функцию $\mathbf{l}_A$ на носителе тропического веера $\langle s = \frac{\partial s}{\partial x.} = 0\rangle_{n+1}$, которая участвует в третьем уравнении.

Для любого целочисленного $\gamma \in (\mathbb{R}^n)^* \oplus \mathbb{R}^A$ рассмотрим его компоненты $\gamma' \in (\mathbb{R}^n)^*$ и $\gamma'' \in \mathbb{R}^A$, $\gamma = \gamma' + \gamma''$, как функции на A: функция γ' является ограничением функции $\gamma' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{Z}$ на $A \subset \mathbb{Z}^n$, и значение γ'' в $a \in A$ равно a-координате вектора γ''. Для последовательности множеств $A_k \subset L$ обозначим аффинную оболочку суммы $\bigcup_{i<k} A_k$ через $A_{<k}$.

Определим последовательность подмножеств $A_k^\gamma \subset A$ индукцией по $k \geqslant 0$ следующим образом: множество A_k^γ состоит из всех точек, в которых ограничение функции $\gamma'' - \gamma' : A \to \mathbb{Z}$ на $A \setminus A_{<k}^\gamma$ достигает своего максимального значения, при условии, что $A_{<k}^\gamma \subsetneq \mathbb{R}^n$, иначе A_k^γ не определено. Если число

$\left|\mathbb{Z}^n/\bigcup_k\{a-b\,|\,a \text{ и } b\in A_k^\gamma\}\right|$ конечно, то обозначим его через $i(A_\bullet^\gamma)$, иначе положим $i(A_\bullet^\gamma)=0$.

Пусть $\gamma \in (\mathbb{R}^n)^*\oplus\mathbb{R}^A$ таков, что $i(A_\bullet^\gamma)>0$. Для любого k обозначим значение функции $\tilde\gamma=\gamma''-\gamma' : A\to\mathbb{Z}$ в точках A_k^γ через $\tilde\gamma_k$ и определим $A_k^\gamma(r)$ как множество всех таких $a\in A$, что $\tilde\gamma(a)\in[\tilde\gamma_k,\,\tilde\gamma_k+r]$. Зададим функцию

$$i_\gamma(r)=\left|\mathbb{Z}^n/\bigcup_i\{a-b\,|\,a \text{ и } b\in A_k^\gamma(r)\}\right|$$

на $\mathbb{R}$ и функцию

$$\mathbf{l}_A(\gamma)=\int\limits_0^{+\infty}(i_\gamma(r)-1)dr$$

на множестве $\{\gamma\,|\,i(A_\bullet^\gamma)>0\}$.

Функция $\mathbf{l}_A:\{\gamma\,|\,i(A_\bullet^\gamma)>0\}\to\mathbb{R}$ определена корректно, так как неравенство $i(A_\bullet^\gamma)>0$ влечет $i_\gamma(r)\leqslant i_\gamma(0)<\infty$, а из предположения о том, что A аффинно порождает $\mathbb{Z}^n$, следует равенство $i_\gamma(r)=1$ для достаточно большого r. Более того, функция $\mathbf{l}_A:\{\gamma\,|\,i(A_\bullet^\gamma)>0\}\to\mathbb{R}$ непрерывна, так как для γ_1, лежащего в достаточно малой окрестности γ, функции i_γ и i_{γ_1} совпадают вне некоторой малой окрестности множества точек разрыва функции i_γ.

Рассмотрим $\tilde{\mathbf{l}}_A$, произвольное непрерывное продолжение функции $\mathbf{l}_A$ на носитель веера $\langle s=\frac{\partial s}{\partial x.}=0\rangle_{n+1}$, тогда произведение $\tilde{\mathbf{l}}_A\cdot\langle s=\frac{\partial s}{\partial x.}=0\rangle_{n+1}$ является элементом компоненты $\mathcal{K}^1_{n+1}(\mathbb{Z}^n\oplus\mathbb{Z}^A)$ дифференциального кольца тропических вееров. Так как его образ $\pi_*(\tilde{\mathbf{l}}_A\cdot\langle s=\frac{\partial s}{\partial x.}=0\rangle_{n+1})$ при проекции $\pi:(\mathbb{C}\setminus 0)^n\times(\mathbb{C}\setminus 0)^A\to(\mathbb{C}\setminus 0)^A$ не зависит от выбора продолжения $\tilde{\mathbf{l}}_A$, мы обозначим его через

$$\pi_*(\mathbf{l}_A\cdot\langle s=\frac{\partial s}{\partial x.}=0\rangle_{n+1})\in\mathcal{K}^1_1(\mathbb{Z}^A).$$

Определение. Многообразие углов

$$\delta\pi_*(\mathbf{l}_A \cdot \langle s = \frac{\partial s}{\partial x.} = 0\rangle_{n+1}) \in \mathcal{K}_2^0\big(\mathbb{Z}^A\big)$$

является тропическим веером коразмерности 2 в $\mathbb{R}^A$, назовем его **третичным веером** множества A (по аналогии со **вторичным веером** коразмерности 1, который в качестве слагаемого содержит $\pi_*(\langle s = \frac{\partial s}{\partial x.} = 0\rangle_{n+1}) \in \mathcal{K}_1^0\big(\mathbb{Z}^A\big)$).

Теорема. *Если множество A версально в коразмерности 2 и просто в ребрах, то верно следующее равенство:*

$$\langle\times\rangle_2 - \langle\prec\rangle_2 = \delta\pi_*(\mathbf{l}\langle s = \frac{\partial s}{\partial x.} = 0\rangle_{n+1}) - (\pi_*\langle s = \frac{\partial s}{\partial x.} = 0\rangle_{n+1})^2.$$

Из трех сформулированных теорем следуют три независимых линейных уравнения на фундаментальные классы $\langle\times\rangle_2$, $\langle\times,\times\rangle_2$ и $\langle\prec\rangle_2$. Мы можем решить эту линейную систему и вычислить $\langle\times\times\rangle_2$ и $\langle\prec\rangle_2$, искомые фундаментальные классы стратов мультиособенностей $\{\times\times\}$ и $\{\prec\}$. Было бы интересно получить аналогичные соотношения для стратов старших коразмерностей в духе работы [55].

Основные результаты главы 5 изложены в работе [10].

В **Заключении** намечаются направления дальнейшего развития аффинной теории особенностей, а также дается обзор недавних публикаций разных авторов, в которых существенно используются результаты настоящей диссертации.

[55] *Седых В. Д.* О сосуществовании мультиособенностей коранга 1 устойчивого гладкого отображения многообразий одинаковой размерности // *Тр. МИАН.* 2007. Vol. 258. P. 201–226

Список публикаций по теме диссертации

1. *Эстеров А. И.* Индексы 1-форм, результанты и многогранники Ньютона // *УМН.* 2005. Vol. 60. P. 181–182.
2. *Эстеров А. И.* Индексы 1-форм, индексы пересечения и многогранники Ньютона // *Матем. сб.* 2006. Vol. 197. P. 137–160.
3. *Esterov A.* Determinantal singularities and Newton polytopes // *Proc. of the Steklov inst.* 2007. Vol. 259. P. 16–34.
4. *Esterov A.* On the existence of mixed fiber bodies // *Moscow Mathematical Journal.* 2008. Vol. 8. P. 433–442. arXiv:0810.4996.
5. *Esterov A.* Multiplicities of degenerations of matrices and mixed volumes of Cayley polyhedra // *J. of Sing.* 2012. Vol. 6. P. 27–36. arXiv:1205.4344.
6. *Esterov A. I.* Tropical varieties with polynomial weights and corner loci of piecewise polynomials // *Moscow Mathematical Journal.* 2012. Vol. 12. P. 55–76. arXiv:1012.5800.
7. *Esterov A.* The discriminant of a system of equations // *Adv. Math.* 2013. Vol. 245. P. 534–572. arXiv:1110.4060.
8. *Esterov A.* Newton polyhedra of discriminants of projections // *Discrete Comput. Geom.* 2010. Vol. 44. P. 96–148. arXiv:0810.4996.
9. *Esterov A., Gusev G.* Multivariate Abel-Ruffini // *Math. Ann.* 2016. Vol. 365. P. 1091–1110. arXiv:1405.1252.
10. *Esterov A.* Characteristic classes of affine varieties and Plücker formulas for affine morphisms. // *принято к печати в J EMS.* 2017.

Научное издание

Эстеров Александр Исаакович

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук на тему:

Тропическая теория особенностей и геометрия многочленов с неопределенными коэффициентами

Формат 60×90 1/16. Тираж 100 экз.