

ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации А.И. Эстерава "Тропическая теория особенностей и геометрия многочленов с неопределёнными коэффициентами", представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук.

Алгебраическая геометрия – раздел математики, в котором конкретное и абстрактное соотносится весьма своеобразно. Конкретны (и иногда почти элементарны) постановки многих естественных вопросов – как классических, так и современных; абстрактны концепции, владение которыми необходимо для ответов на эти вопросы.

С упомянутым соотношением конкретного и абстрактного связана и эволюция оснований алгебраической геометрии. Само определение объектов её исследования совершенствуется и усложняется в течение уже нескольких столетий – от плоских аффинных вещественных кривых времён Ньютона до сегодняшних схем, топосов и орбиобразий: параллельно с этим процессом происходит углубление нашего понимания чисел, пространств, кохомологических теорий, производных функторов и т. п. Пересмотр оснований происходил столько раз, что даже, если в какое-то время объекты кажутся фиксировавшимися (как, например, комплексные проективные многообразия в конце 19-го века), трудно быть уверенными в окончательности сложившихся взглядов на предмет.

В настоящее время алгебраическая геометрия, возможно, находится на пороге очередного расширения класса рассматриваемых объектов. Появившаяся несколько десятилетий назад *тропическая геометрия* обнаруживает поразительную эффективность в рассмотрении конструкций, параллельных классическим алгебро-геометрическим, и в применении этих конструкций к решению классических алгебро-геометрических задач. Одному из классов таких задач и посвящена обсуждаемая диссертация А.И. Эстерава.

Этот класс задач под общим названием *исчислительной геометрии* в большой степени обладает упомянутым выше свойством конкретности; решённые задачи, как правило, отвечают на вопрос

о количестве некоторого семейства геометрических объектов. В диссертации исследуется геометрия так называемых *многочленов с неопределёнными коэффициентами* в рамках исчислительной теории особенностей. Связь с тропической геометрией основывается на *теореме тропического соответствия*, сформулированной в работах ряда авторов в начале века и утверждающей совпадение некоторых инвариантов (например, Громова-Виттена) над полем $\mathbb{C}$ и над полукольцом $(\mathbb{R} \amalg \{-\infty\}, \max, +)$.

Изучаемые автором задачи исчислительной теории особенностей состоят в изучении особенностей, определяемой системой комплексных многочленов, лежащих в линейных оболочках фиксированных конечных множеств мономов. Многие задачи этого класса не решаются с помощью традиционной техники универсальных многочленов Тома, и автором разработаны альтернативные, более мощные средства.

Перечислим центральные результаты диссертации.

1. Построена теория характеристических классов алгебраических подмножеств тора $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$, аналогичная классической теории характеристических классов.
2. Описаны страты коразмерности 1 и 2 в линейных оболочках конечных множеств мономов.
3. Классифицированы системы полиномиальных уравнений с неопределёнными коэффициентами, разрешимые в радикалах.
4. Классифицированы торические многообразия, проективно двойственные к которым являются гиперповерхностями.
5. Доказано, что бифуркационное множество *общего* полиномиального отображения $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^k$ является гиперповерхностью.
6. Вычислен тропический всер множества двойных касательных гиперплоскостей к данному торическому многообразию.

Для получения указанных результатов диссертантом разработаны методы, представляющие значительную самостоятельную ценность. Среди них, помимо упомянутой выше конструкции характеристических классов алгебраических подмногообразий комплексных торов – развитие и использование следующих концепций геометрии решёток, многогранников и выпуклых тел.

(а) Понятие *смешанного расслоённого тела*, обобщающего известные понятия смешанного объёма и расслоённого тела:

при изучении этих объектов использовались общие выпукло-аналитические методы, расширившие ранее использовавшиеся средства геометрии многогранников.

(б) Дифференциальное кольцо *тропических вееров* с полиномиальными весами. Это понятие существенно обобщает известные – например, "тропические дивизоры Картье".

(в) Классификация целочисленных многогранников объема ≤ 4 .

Все приведенные результаты диссертации являются новыми. Они тщательно обоснованы и своевременно, в течение 12 лет, опубликованы в известных изданиях.

Работа завершается весьма впечатляющим заключением, содержащим обзор недавних публикаций, использующих результаты автора (в том числе весьма нетривиально – например, в неархимедовой математике), и намечающим дальнейшие исследования.

Диссертация оформлена очень тщательно. Незначительные мелкие шероховатости (вроде не вполне последовательного использования слов "раздел" и "глава") никак не снижают этой оценки.

Исходя из вышесказанного, я считаю, что рецензируемая работа А.И. Эстерова удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени доктора физико-математических наук, а её автор заслуживает присуждения ему этой степени.

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук,
профессор РГГУ

16 июня 2017

Шабат

Г.Б.Шабат
Москва 125267, Миусская пл.
д. 6, корп. 2, каб. 213
8(495) 250 63 29

Подпись Г.Б. Шабата

Заместитель начальника

