Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования "Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского"
Институт информационных технологий, математики и механики

На правах рукописи

Ефремова Людмила Сергеевна

Динамика косых произведений отображений интервала

Специальность 01.01.02 — "Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление"
Диссертация на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Нижний Новгород — 2017

Оглавление

Введение

Актуальность темы. Проблематика данной работы восходит к классическим исследованиям А. Пуанкаре и Дж.Д. Биркгофа. Так, последние страницы мемуара [1, 4-й мемуар, гл.XIX] посвящены рассмотрению системы дифференциальных уравнений $\dot{x}_1 = \alpha$, $\dot{x}_2 = 1$, $\dot{y} = \varphi(x_1, x_2)$ с фазовым пространством $\mathbf{S^1} \times \mathbf{S^1} \times \mathbf{R^1}$, где $\mathbf{S^1}$ – окружность, $\mathbf{R^1}$ – прямая; α – иррациональное число, φ – некоторая функция на торе $\mathbf{S^1} \times \mathbf{S^1}$. При этом отображение последования на цилиндре $x_2 = 0$ представляет собой цилиндрический каскад, то есть косое произведение над иррациональным поворотом окружности с отображениями в слоях $\overline{y}_{x_1} = y + \widetilde{\varphi}(x_1)$, где y – произвольная точка на прямой $\mathbf{R^1}$, x_1 – произвольная точка на окружности $\mathbf{S^1}$, $\widetilde{\varphi}(x_1) = \varphi(x_1, 0)$.

А.Пуанкаре сформулировал проблемы о структуре ω-предельных множеств цилиндрических каскадов; Дж. Д. Биркгофу [2, раздел "Приложения", § 3] принадлежит постановка проблемы о глубине центра автономных систем дифференциальных уравнений на многообразиях в $\mathbf{R^n}$ $(n \geq 3)$.

В 30-е – 50-е годы XX века появились работы [3] – [7], посвященные различным аспектам топологической транзитивности цидиндрических каскадов.

К этому же периоду времени относятся исследования Н.Н. Крылова, Н.Н. Боголюбова [8] и С. Какутани [9]. В [8], по-видимому, впервые, дано описание общей конструкции косых произведений (с мерой) (хотя термин "косое произведение" введен позже в статье [10]), а в [9] отмечена взаимосвязь марковских процессов с устойчивым распределением и косых произведений.

В 60-е годы вышли основополагающие статьи В.И. Оселедца [11], А.Б. Катка и А.М. Степина [12], в первой из которых приведено детальное описание косого произведения над отображением сдвига в пространстве реализаций стационарных марковских цепей, а во второй с использованием метода аппроксимаций исследованы эргодические свойства косых произведений некоторых других классов.

К 70-м годам XX века относится цикл работ по цилиндрическим каскадам Д.В. Аносова и его учеников [13] – [16]. Так, в [13], в частности, замечено, что результаты исследования топологически транзитивных цилиндрических каскадов дают положительный ответ на вопрос второй части 5-ой проблемы Д. Гильберта о существовании аналитических функциональных уравнений, допускающих недифференцируемые решения [17], [18]. Положительный ответ связан с тем, что свойство топологической транзитивности цилиндрического каскада является необходимым и достаточным условием отсутствия непрерывных решений у соответствующего аддитивного гомологического уравнения (доказательство содержится в [7]).

Задача существования топологически транзитивных цилиндрических каскадов с аналитической функцией $\widetilde{\varphi}(x_1)$ (и непустым множеством нулевой меры, состоящим из нетранзитивных точек) решена в [14]. Отметим, что все расмотрения статьи [14] опираются на детальный анализ асимптотики членов специальных рядов. Решение проблем А. Пуанкаре о структуре ω-предельных множеств цилиндрических каскадов приведено в [15]. Влияние дифференциальных свойств цилиндрического каскада на структуру его ω-предельных множеств исследовано в [16]. Изучение цилиндрических каскадов и их обобщений продолжается и в настоящее время (см., например, работы [19] – [21]).

К концу 80-х годов XX века, в основном, завершилось формирование одномерной динамики и ее оформление в самостоятельный раздел теории динамических систем [22] – [24] (очерки исторического развития одномерной динамики приведены в монографиях [23], [24]). Этот процесс сопровождался, с одной стороны, переходом к изучению динамических систем на одномерных континуумах с более сложной топологической структурой, чем структура отрезка или окружности, таких, как, разветвленные континуумы (см., например, [25]– [27]); а, с другой стороны, переходом к рассмотрению динамических систем с фазовыми пространствами размерности, большей 1, к исследованию которых можно эффективно применять результаты одномерной динамики. Динамические системы класса косых произведений на простейших многообразиях являются наиболее естественным объектом, удовлетворяющим этому последнему условию (см., например, [28])[1]. Исторически первой работой в данном направлении является [29], где классическая теорема А.Н. Шарковского [30] обобщена на случай косых произведений на n-мерных клетках для $n \geq 2$.

К 90-м годам XX века относится начало систематических исследований нелокальных бифуркаций на границе множества обратимых динамических систем Морса-Смейла, проводимых Ю.С. Ильяшенко и его учениками [31]. Было установлено, что переход от простых динамических систем к сложным обратимым системам в размерностях ≥ 3 может сопровождаться, в частности, появлением странных аттракторов, частично гиперболических инвариантных множеств, изучение которых связано с различными аспектами динамики обратимых косых произведений, заданных на многообразиях размерности ≥ 3 [32], [33].

Укажем, что эндоморфизмы класса косых произведений с двумерным фазовым пространством могут иллюстрировать динамические эффекты, наблюдающиеся в диффеоморфизмах класса косых произведений в размерностях ≥ 3.

Таким образом, исследование динамических систем класса косых произведений представляет собой фундаментальную теоретическую проблему. Такого рода динамические системы возникают также при изучении свойств расширений групп преобразований [34], неавтономных систем дифференциальных уравнений [35], [36], случайных динамических систем [11], [12] [37], построении новых содержательных примеров аттракторов [31], [38] – [40] и др.

Вопросы интегрируемости динамических систем традиционно привлекают внимание исследователей. Мы не будем давать детальный обзор состояния этого вопроса в теории дискретных динамических систем (см., например, [41] – [43]), но обратим внимание на принадлежащее Р.И. Григорчуку определение интегрируемости полиномиальных (или рациональных) отображений [43]. Укажем, что в 2002 году Р.И. Григорчук сформулировал вопрос о приводимости интегрируемых отображений к косым произведениям.

---

[1] Ряд математиков Чехии, Испании, Италии, Украины (также, как и автор диссертации в одной из своих ранних работ) вместо термина "косое произведение" (отображений интервала) используют термин "треугольное отображение" (см. библиографию к диссертации).

Следуя [44], распространим определение интегрируемости, сформулированное в [43] для полиномиальных отображений, на случай произвольных (в том числе, и разрывных) отображений в плоскости $\mathbf{R^2}$ и дадим ответ на вопрос Р.И. Григорчука, сформулировав и доказав критерий интегрируемости для непрерывных отображений в плоскости (см. далее теорему 0.0.1).

Определение 0.0.1 [44]. Будем говорить, что отображение G, определенное в некоторой (открытой или замкнутой) области $\Pi \subseteq \mathbf{R^2}$ со значениями в Π, *интегрируемо*, если существует отображение ψ некоторого промежутка $J \subseteq \mathbf{R^1}$ в себя, полусопряженное с G с помощью некоторой непрерывной сюръекции $\widetilde{H} : \Pi \to J$, то есть

$$\widetilde{H} \circ G = \psi \circ \widetilde{H}. \tag{0.0.1}$$

Простейший пример интегрируемого отображения в плоскости доставляет отображение $F_0(x,\, y) = (xy,\, x^2)$, содержащееся в однопараметрическом семействе квадратичных отображений $F_\mu(x,\, y) = (xy,\, (x-\mu)^2)$ при $\mu = 0$ [45].

Как будет доказано в приведенной далее теореме 0.0.1, исследование интегрируемых отображений, фазовым пространством которых является плоская область типа криволинейной трапеции, сводится (при определенных условиях на функцию $\widetilde{H}$) к рассмотрению косых произведений отображений интервала.

Пусть $I = I_1 \times I_2$ – замкнутый прямоугольник в плоскости (I_1, I_2 – отрезки). *Косое произведение отображений интервала* есть динамическая система (д. с.) $F : I \to I$ вида

$$F(x,\, y) = (f(x),\, g_x(y)),\ \text{ где }\ g_x(y) = g(x,\, y),\ (x;\, y) \in I. \tag{0.0.2}$$

Здесь $f : I_1 \to I_1$ – *факторотображение (фактор)* д. с. (0.0.2), а отображение $g_x : I_2 \to I_2$ при любом $x \in I_1$ – отображение, *действующее в слое над точкой* x. Обратим внимание на то, что (0.0.2) "сохраняет" вертикальные слои в следующем естественном смысле:

$$F(\{x\} \times I_2) \subseteq \{f(x)\} \times I_2 \text{ при любом } x \in I_1.$$

Свойство сохранения вертикальных слоев приводит к тому, что для каждого натурального числа n и произвольной точки $(x;\, y) \in I$ справедливо равенство

$$F^n(x,\, y) = (f^n(x),\, g_{x,n}(y)), \text{ где } g_{x,n} = g_{f^{n-1}(x)} \circ \ldots \circ g_x. \tag{0.0.3}$$

Отметим, что в (0.0.3) для $n = 1$ выполнено $g_{x,\,1} = g_x$.

В дальнейшем будем использовать обозначение $\widetilde{g}_x$ для отображения $g_{x,n}$, если x – периодическая точка f $(x \in Per(f))$, а n – ее (наименьший) период.

Одним из важнейших свойств косых произведений является их полусопряженность со своими факторотображениями. Так, во введенных выше обозначениях для д. с. (0.0.2) имеем:

$$pr_1 \circ F = f \circ pr_1, \tag{0.0.4}$$

где $pr_1 : I \to I_1$ – естественная проекция фазового пространства I на отрезок I_1.

Равенство (0.0.4) (ср. с равенством (0.0.1)) вместе с приведенным выше определением интегрируемости означает, что непрерывные косые произведения являются интегрируемыми отображениями.

Теорема 0.0.1 [44]. *Пусть* Π *– выпуклый связный компакт в плоскости* $\mathbf{R^2}$ *такой, что сечение* Π *произвольной прямой* $y = const$ *(если оно непусто) есть невырожденный отрезок;* $G : \Pi \to \Pi$ *– непрерывное отображение.*

Тогда G *интегрируемо в смысле определения 0.0.1 с непрерывной сюръекцией* $\widetilde{H} : \Pi \to J$ *(здесь* J *– отрезок прямой* $\mathbf{R^1}$*) такой, что* $\widetilde{H}$ *– инъекция по* x*,*

в том и только том случае, если G *приводимо с помощью некоторого гомеоморфизма к косому произведению отображений интервала, определенному в некотором компактном прямоугольнике плоскости.*

Доказательство. 1. Пусть непрерывное отображение $G : \Pi \to \Pi$ интегрируемо, а область $\Pi \subset \mathbf{R^2}$ удовлетворяет условиям теоремы 0.0.1. Последнее вместе с определением 0.0.1 немедленно влечет за собой справедливость следующих свойств:

(i) для любой точки $y \in pr_2(\Pi)$ множество $\Pi \bigcap (J \times \{y\})$ есть невырожденный отрезок, где pr_2 – естественная проекция плоскости $\mathbf{R^2}$ на ось ординат;

(ii) для любых двух различных точек $x',\, x'' \in J$ справедливо равенство $\widetilde{H}^{-1}(x') \bigcap \widetilde{H}^{-1}(x'') = \emptyset$;

(iii) верно равенство $\Pi = \bigcup\limits_{x' \in J} \widetilde{H}^{-1}(x')$.

Так как $\widetilde{H}$ непрерывно и инъективно по x, то при любом $y \in pr_2(\Pi)$ отображение $\widetilde{H}$ задает биекцию отрезка $\Pi \bigcap (J \times \{y\})$ на $\widetilde{H}(\Pi \bigcap (J \times \{y\}))$, причем $\widetilde{H}(\Pi \bigcap (J \times \{y\}))$ есть невырожденный отрезок в J. Свойство (iii) вместе с инъективностью $\widetilde{H}$ по переменной x влечет за собой выполнение равенства $\widetilde{H}(\Pi \bigcap (J \times \{y\})) = J$.

Таким образом, при любом $x' \in J$ множество $\widetilde{H}^{-1}(x')$ представляет собой график (обозначим его через $\gamma_{x'}$) некоторой непрерывной функции $x = \gamma_{x'}(y)$, и, следовательно, $\widetilde{H}^{-1}(x')$ – связное множество. Более того, через каждую точку (x', y') множества Π проходит единственная кривая $\gamma_{x'}$, причем $\gamma_{x'}$ пересекает отрезок $\Pi \bigcap (J \times \{y\})$ в единственной точке при любом $y \in pr_2(\Pi)$. Таким образом, в силу свойств (ii), (iii) однопараметрическое семейство графиков $\{\gamma_{x'}\}_{x' \in J}$ указанных выше функций определяет непрерывное слоение в области Π (см., например, [46, гл. 4, § 16]). Из равенства (0.0.1) и условия инвариантности отрезка J относительно ψ следует инвариантность слоения $\{\gamma_{x'}\}_{x' \in J}$: при каждом $x' \in J$ верно включение $G(\gamma_{x'}) \subseteq \gamma_{\psi(x')}$.

2. Отображение $\theta : \Pi_{xOy} \to \Pi'_{uOv}$, где θ определено в силу равенств

$$\begin{cases} u = \widetilde{H}(x,\, y), \\ v = y, \end{cases} \tag{0.0.5}$$

задает непрерывную биекцию области Π_{xOy} на область $\Pi'_{uO'v}$.

Докажем, что $\theta : \Pi_{xOy} \to \Pi'_{uO'v}$ – гомеоморфизм. В самом деле, так как Π_{xOy} – компакт, а отображение θ непрерывно, то $\Pi'_{uO'v}$ – также компакт. Более того, так как θ есть непрерывная биекция Π_{xOy} на $\Pi'_{uO'v}$, то отображение θ обладает следующим свойством: произвольное множество $A \subset \Pi'_{uO'v}$ замкнуто в том и только том случае, если замкнуто множество $\theta^{-1}(A)$. Следовательно, θ – взаимно непрерывное отображение[2]. Так как θ – взаимно непрерывное и биективное отображение, то θ – гомеоморфизм [47, гл.1, § 13, XV].

В силу формул (0.0.5) множество $\theta(\gamma_{x'})$ есть отрезок прямой $u = x'$ при любом $x' \in J$. В силу этого свойства и указанного выше свойства (i) область $\Pi'_{uO'v}$ есть замкнутый прямоугольник в плоскости.

Обозначим через G' отображение в плоскости переменных u и v, соответствующее

---

[2] Напомним, что непрерывное отображение $\theta : X \to Y$ называется взаимно непрерывным, если θ – сюръекция X на Y, и множество $A \subset Y$ замкнуто (открыто) тогда и только тогда, когда полный прообраз $\theta^{-1}(A)$ множества A при отображении θ замкнут (открыт) [47, гл. 1, §13, XV].

отображению G в плоскости переменных x и y. Тогда $G' : \Pi'_{uO'v} \to \Pi'_{uO'v}$, G' топологически сопряжено с G относительно гомеоморфизма θ, т. е.

$$G' = \theta \circ G \circ \theta^{-1}.$$

Обозначим через g'_1 и g'_2 первую и вторую координатные функции отображения G' соответственно. Убедимся в том, что g'_1 не зависит от переменной v.
Действительно, G' отображает любой вертикальный отрезок

$$\{\Pi'_{uO'v} \bigcap \{(x';\, v) : v \in \mathbf{R^1}\}$$

в вертикальный отрезок

$$\{\Pi'_{uO'v} \bigcap \{(\psi(x');\, v) : v \in \mathbf{R^1}\}.$$

Покажем, что частная производная $\frac{\partial}{\partial v} g'_1(u, v)$ существует в каждой точке $(u;\, v)$ прямоугольника $\Pi'_{uO'v}$ и равна 0. Возьмем произвольно две различные точки $(x';\, v')$, $(x';\, v)$ на вертикальном отрезке $\Pi'_{uO'v} \bigcap \{(x';\, v) : v \in \mathbf{R^1}\}$. Тогда имеем:

$$\frac{\partial}{\partial v} g'_1(u, v) = \lim_{v \to v'} \frac{g'_1(x';\, v) - g'_1(x',\, v')}{v - v'} = \lim_{v \to v'} \frac{\psi(x') - \psi(x')}{v - v'} = 0. \qquad (0.0.6)$$

Так как Π'_{uOv} – выпуклое связное множество, то в силу равенства (0.0.6) координатная функция g'_1 отображения G' не зависит[3] от переменной v. Таким образом, G' есть косое произведение в плоскости[4].
3. Так как непрерывные косые произведения отображений интервала являются интегрируемыми отображениями, то теорема 0.0.1 доказана.

Таким образом, изучая косые произведения отображений интервала, мы исследуем весьма общий класс (выделяемый условиями на функцию $\widetilde{H}$) интегрируемых (в смысле определения 0.0.1) динамических систем, заданных на специальных областях в плоскости.

Обобщение теоремы 0.0.1, дающей критерий приводимости отображений в плоскости (удовлетворяющих определенным условиям) к косым произведениям отображений интервала, позволило исследовать динамику квадратичного отображения

---

[3] Предположение о выпуклости области Π'_{uOv} опустить нельзя.

[4] Прямые произведения понимаются как элементы множества д. с. класса косых произведений.

$(x,\, y) \to (xy,\, (x-2)^2)$ плоскости в себя [44], возникающего в конкретной физической задаче нахождения коэффициентов прохождения и отражения плоской волны с заданным импульсом в поле кристаллической решетки с узлами, образующими цепь Тью-Морса [48]. Отметим также, что методы, примененные при изучении Ω-взрыва в косых произведениях с замкнутым множеством периодических точек, (при соответствующей их модификации) нашли применение при классификации взрывов во множестве решений дифференциальных уравнений с частными производными [49].

Косые произведения возникают и в таких прикладных задачах, как математическое моделирование квазикристаллов [50], изучение динамики популяций [51], сигнальных процессов [52], вполне развитой турбулентности [53] и др.

Таким образом, многосторонние теоретические исследования косых произведений различных классов и многочисленные аспекты применения полученных результатов подтверждают актуальность темы диссертации.

Цели исследования.

1. Дать описание неблуждающего множества и центра непрерывного косого произведения отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек фактороотображения, используя введенные в настоящей работе специальные многозначные функции.

2. Изучить влияние C^0- и C^1-возмущений (класса косых произведений) на неблуждающее множество C^1-гладких косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек.

3. Исследовать влияние дифференциальных свойств косого произведения отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек на структуру его ω-предельных множеств.

4. Получить разложение пространства C^1-гладких косых произведений отображений интервала с Ω-устойчивым фактороотображением типа $\succ 2^\infty$ в объединение непустых попарно непересекающихся подпространств, основанное на использовании всех возможностей сочетания свойств непрерывности/разрывности многозначных функций, связанных с косым произведением отображений интервала.

5. Дать описание неблуждающего множества произвольного C^1-гладкого косого

произведения отображений интервала с Ω-устойчивым фактороотображением типа $\succ 2^{\infty}$, используя указанное выше разложение рассматриваемого пространства.

6. Исследовать глубину центра C^1-гладких косых произведений отображений интервала с Ω-устойчивым фактороотображением типа $\succ 2^{\infty}$.

7. Доказать критерий C^1- Ω-устойчивости (относительно гомеоморфизмов – косых произведений) и исследовать аппроксимационные свойства C^1-гладких Ω-устойчивых косых произведений отображений интервала с фактором типа $\succ 2^{\infty}$, используя введенные в работе понятия устойчивости в целом и плотной устойчивости в целом в C^1-норме семейства отображений в слоях.

Методы исследования. В диссертации используются методы топологической и дифференциальной динамики, теории многозначных функций, функционального анализа, топологии, одномерной динамики.

Научная новизна.

1. Доказаны теоремы о структуре неблуждающего множества и центра, во-первых, непрерывных косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек фактороотображения и, во-вторых, C^1-гладких косых произведений отображений интервала с Ω-устойчивым фактороотображением типа $\succ 2^{\infty}$. Доказательства основаны на использовании специальных многозначных функций, введенных в работе для произвольного непрерывного косого произведения отображений интервала.

2. Доказан критерий C^0- Ω-взрыва в C^1-гладких косых произведениях отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек. Доказана теорема о том, что такого рода косые произведения отображений интервала не допускают C^1-Ω-взрыв.

3. Доказаны теоремы, устанавливающие влияние дифференциальных свойств косого произведения отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек на структуру его ω-предельных множеств.

4. Доказана теорема о разложении пространства C^1-гладких косых произведений отображений интервала с Ω-устойчивым фактороотображением типа $\succ 2^{\infty}$ в объединение непустых попарно не пересекающихся подпространств $T^1_{*,j}(I)$, где $j = 1, 2, 3, 4$.

5. С использованием понятия устойчивости в целом в C^1-норме семейства отображений в слоях C^1-гладкого косого произведения отображений интервала с Ω-устойчивым фактором типа $\succ 2^\infty$ доказан критерий C^1- Ω-устойчивости (относительно гомеоморфизмов - косых произведений). Доказана теорема о том что C^1-гладкие Ω-устойчивые косые произведения отображений интервала с фактором типа $\succ 2^\infty$ содержатся в подпространстве $T^1_{*,1}(I)$, но не образуют в нем всюду плотного подмножества.

6. Доказан критерий аппроксимируемости (в C^1-норме) C^1-гладкого косого произведения отображений интервала с Ω-устойчивым фактором типа $\succ 2^\infty$ и плотно устойчивым в целом семейством отображений в слоях Ω-устойчивыми косыми произведениями отображений интервала.

7. Доказана теорема об аппроксимационных свойствах косых произведений из пространства $T^1_{*,4}(I)$ с плотно устойчивым в целом семейством отображений в слоях.

Теоретическая и практическая ценность.

Результаты диссертации имеют теоретический характер. Развитые в работе методы и полученные результаты представляют самостоятельный интерес с точки зрения создания общей теории дискретных динамических систем класса косых произведений. Они могут быть использованы специалистами по теории динамических систем, работающими в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, в ИППИ им. А.А. Харкевича РАН, в МГУ им. М.В. Ломоносова, Национальном исследовательском Санкт-Петербургском государственном университете, Национальном исследовательском университете "Высшая школа экономики", Национальном исследовательском Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского, а также в других ведущих российских и зарубежных научных центрах.

Результаты диссертации могут применяться в решении прикладных задач таких, как изучение математических моделей квазикристаллов, динамики популяций, вполне развитой турбулентности и др..

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" в 2009 - 2013 г.г. (проект НК-13П/13 в 2009 - 2011 г.г.; проект № 14.B37.21.0361 в

2012 - 2013 г.г.), гранта Министерства образования и науки РФ (проект № 14-10 в 2014 - 2016 г.г.), гранта Министерства образования и науки РФ № 1.3287.2017/ПЧ.

На защиту выносятся следующие положения диссертации:

1. Результаты о структуре неблуждающего множества и центра непрерывных косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек фактороотображения.

2. Результаты о возможности C^0- Ω-взрыва и невозможности C^1- Ω-взрыва в C^1-гладких косых произведениях отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек.

3. Теоремы о влиянии дифференциальных свойств косого произведения отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек на структуру его ω-предельных множеств.

4. Теорема о разложении пространства C^1-гладких косых произведений отображений интервала с Ω-устойчивым фактороотображением типа $\succ 2^\infty$ в объединение четырех непустых попарно не пересекающихся подпространств в зависимости от всех возможных сочетаний свойств непрерывности/разрывности основных многозначных функций, связанных с косым произведением отображений интервала.

5. Теоремы о структуре неблуждающего множества косых произведений отображений интервала каждого из четырех классов, выделенных теоремой о разложении пространства C^1-гладких косых произведений отображений интервала с Ω-устойчивым фактороотображением типа $\succ 2^\infty$.

6. Теоремы о глубине множества центральных движений косых произведений отображений интервала каждого из четырех классов, выделенных теоремой о разложении пространства C^1-гладких косых произведений отображений интервала с Ω-устойчивым фактороотображением типа $\succ 2^\infty$.

7. Теоремы об аппроксимационных свойстах C^1-гладких Ω-устойчивых косых произведений отображений интервала с фактором типа $\succ 2^\infty$ и косых произведений отображений интервала с плотно устойчивым в целом семейством отображений в слоях.

Апробация диссертационной работы. Результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа механико-математического факультета ННГУ им. Н.И. Лобачевского под руководством профессора М.В. Долова (1992 - 2002 г.г.); под руководством профессора Л.М. Лермана и профессора А.Д. Морозова (2005 - 2010 г.г.); на семинарах отдела дифференциальных уравнений Института прикладной математики и кибернетики при ННГУ им. Н.И.Лобачевского под руководством профессора Л.П. Шильникова (1998 г., 2001 г.); на семинарах кафедры высшей математики МФТИ под руководством профессора Г.Н. Яковлева (2006 г.) под руководством профессора Е.С. Половинкина (2007 г); на семинарах по математической физике ИПМ им. М.В. Келдыша РАН под руководством д.ф.-м.н. М.В. Масленникова, д.ф.-м.н. В.В. Веденяпина, д.ф.-м.н. В.А. Дородницына, д.ф.-м.н. Ю.Н. Орлова (2010 - 2014 г.г.); на семинаре по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям в РУДН под руководством профессора А.Л. Скубачевского (2013 г.); на семинаре кафедры дифференциальных уравнений математико-механического факультета Национального исследовательского Санкт-Петербургского государственного университета под руководством члена-корреспондента РАН В.А. Плисса (2013 г.); на семинарах по бесконечномерному анализу на механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством профессора О.Г. Смолянова и профессора Е.Т. Шавгулидзе (2012 г., 2015 г.); на семинарах "Эргодическая теория и динамические системы” под руководством академика РАН Д.В. Аносова и профессора А.М. Степина (2009 - 2014 г.г.); на семинарах "Динамические системы и дифференциальные уравнения” под руководством профессора А.М. Степина и профессора А.А. Давыдова (2015 - 2017 г.г); Добрушинской математической лаборатории ИППИ им. А.А. Харкевича РАН под руководством профессора М.Л. Бланка и профессора Р.А. Минлоса (2017 г.); кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Института информационных технологий, математики и механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского под руководством профессора Д.В. Баландина (2017 г.).

Результаты диссертации регулярно докладывались на крупных международных конференциях, проводимых в нашей стране и зарубежом таких, как VII Международная конференция по качественной теории дифференциальных уравнений, Рига, Латвия - 1989 г.; Международная конференция "Современные проблемы теории динамических систем", Нижний Новгород, Россия - 1996 г.; Международная конференция, посвященная 90-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина, Москва, Россия - 1998 г.; "Прогресс в нелинейной науке", Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А.А. Андронова, Нижний Новгород, Россия - 2001 г.; Международная конференция "Колмогоров и современная математика", посвященная 100-летию со дня рождения А.Н. Колмогорова, Москва, Россия - 2003 г.; регулярные Международные конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, Россия, 2000 - 2016 г.г.; Международная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", Москва, Россия - 2007 г.; Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Н.Н. Боголюбова, Москва - Дубна, Россия - 2009 г.; VII Международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям, Москва, Россия - 2014 г.; Международные конференции "Динамика, бифуркации и странные аттракторы", Нижний Новгород, Россия, 2013-2016 г.г.; Международная конференция "Системы Аносова и современная динамика", посвященная 80-летию со дня рождения Д.В. Аносова, Москва, Россия - 2016 г.; Европейская конференция по теории итераций, Нант, Франция - 2010 г.; Понта Дельгада, Португалия - 2012 г.; Европейская конференция "Нелинейные отображения и их применения", Евора, Португалия - 2011 г.; Сарагоса, Испания - 2013 г. Дублин, Ирландия - 2015 г. и др..

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы из 171 наименования. Содержание изложено на 263 страницах (включающих 8 рисунков).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 28 работах, из них 17 статей в научных журналах, входящих в список ВАК изданий, рекомендуемых для публикации результатов диссертаций, 8 тезисов докладов на международных конференциях. Все результаты совместных статей с Е.В. Блиновой и С.С. Бельмесовой, включенные в диссертацию, получены лично автором.

Содержание работы. Во **введении** приведен очерк исторического развития различных направлений исследования динамических систем класса косых произведений, дан библиографический обзор, изложено краткое содержание диссертации, сформулированы основные результаты, выносимые на защиту.

Диссертационная работа посвящена вопросам топологической и дифференциальной динамики косых произведений отображений интервала. При рассмотрении указанных вопросов существенно используются результаты по динамике непрерывных или гладких отображений отрезка в себя.

Основное внимание в работе уделено, во-первых, проблеме описания неблуждающего множества и центра (множества центральных движений) непрерывных или C^1-гладких косых произведений отображений интервала и, во-вторых, задаче описания пространства C^1-гладких косых произведений отображений интервала со сложной динамикой факторотображения.

Начнем с описания функциональных пространств косых произведений отображений интервала, рассматриваемых в данной работе.

Обозначим через $T^0(I)$ $(T^1(I))$ пространство непрерывных (C^1-гладких) косых произведений отображений интервала с C^0-нормой $||\cdot||_0$ (с C^1-нормой $||\cdot||_1$), индуцированной стандартной C^0-нормой (C^1-нормой) пространства всех непрерывных (всех C^1-гладких) отображений прямоугольника I в себя.

База топологии в пространстве $T^r(I)$ ($r = 0$ или 1), задается множеством ε-шаров $B^r_\varepsilon(F)$ с центром F для всех $\varepsilon > 0$ и всех $F \in T^r(I)$.

С произвольным косым произведением $F \in T^r(I)$ связаны различные функциональные пространства. Так, будем использовать пространство $C^r(I_k)$ $(k = 1,\, 2)$ при $r = 0$ всех непрерывных отображений отрезка I_k в себя с C^0-нормой $||\cdot||_{0,\,k}$ и при $r = 1$ всех C^1-гладких отображений отрезка I_k в себя с C^1-нормой $||\cdot||_{1,\,k}$ При этом база стандартной топологии в $C^r(I_k)$ задается множеством ε-шаров $B^r_{k,\,\varepsilon}(f)$ для любых $\varepsilon > 0$ и любых $f \in C^r(I_k)$.

Нам потребуются также пространства $C^r(I,\, I_2)$ при $r = 0$ непрерывных отображений прямоугольника I в отрезок I_2 с C^0-нормой $||\cdot||_{0,\,(1,\,2)}$, а при $r = 1$ – C^1-гладких отображений из I в I_2 с C^1-нормой $||\cdot||_{1,\,(1,\,2)}$.

Напомним, что

$$||g||_{0,\,(1,\,2)} = \sup_{(x;\,y)\in I} |g_x(y)|,$$

$$||Dg||_{0,\,(1,\,2)} = \sup_{(x,\,y)\in I} (|\frac{\partial g_x(y)}{\partial x}| + |\frac{\partial g_x(y)}{\partial y}|),$$

где $Dg : I \to I_2$ – дифференциал отображения $g \in C^1(I,\, I_2)$;

$$||g||_{1,\,(1,\,2)} = \max\{||g||_{0,\,(1,\,2)},\ ||Dg||_{0,\,(1,\,2)}\}.$$

База топологии в пространстве $C^r(I,\, I_2)$ задается множеством ε-шаров

$$B^r_{(1,\,2),\,\varepsilon}(g) = \{\psi \in C^r(I,\, I_2) : ||g - \psi||_{r,\,(1,\,2)} < \varepsilon\}$$

при любых $g \in C^r(I,\, I_2)$ и любых $\varepsilon > 0$.

Указанные выше C^1-нормы связаны неравенством

$$\max\{||f||_{1,\,1},\ ||g_x||_{1,\,2}\} \le \max\{||f||_{1,\,1},\ ||g_x||_{1,\,(1,\,2}\} = ||F||_1 \qquad (0.0.7)$$

при любом $x \in I_1$.

Сопоставим косому произведению отображений интервала $F \in T^r(I)$ и произвольной его итерации функциональное отображение $\rho_n : I_1 \to C^r(I_2)$, называемое C^r-представлением (здесь $r = 0$ или 1), такое, что

$$\rho_n(x) = g_{x,\,n} \text{ для всех } x \in I_1,\ n \ge 1. \qquad (0.0.8)$$

С отображением ρ_n тесно связано отображение взятия значений $ev_{\rho_n} : I \to I_2$, где

$$ev_{\rho_n}(x,\, y) = ev_{\rho_n,\,x}(y) = g_{x,\,n}(y), \qquad (0.0.9)$$

которое является отображением класса $C^r(I,\, I_2)$ [54, гл. 0, § 0.3].

Важно заметить, что $F \in T^r(I)$ в том и только том случае, если одновременно выполнено $f \in C^r(I_1)$, и $ev_{\rho_1} \in C^r(I,\, I_2)$.

Определение 0.0.2. C^r-представление $\rho_n : I_1 \to C^r(I_2)$ *непрерывно* в точке $x' \in I_1$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta_n = \delta_n(x',\, \varepsilon)$ такое, что для каждого $x \in I_1$, удовлетворяющего неравенству $|x - x'| < \delta_n$, выполнено неравенство

$$||g_{x,\,n} - g_{x',\,n}||_{r,\,2} < \varepsilon.$$

Как обычно, непрерывность C^r-представления ρ_n на каком-либо множестве $A_1 \subseteq I_1$ означает непрерывность ρ_n в каждой точке множества A_1 в указанном выше смысле.

Определяющая роль в свойствах динамической системы вида (0.0.2) (как, впрочем, и произвольной д. с. с компактным фазовым пространством) принадлежит множеству ее неблуждающих точек и содержащемуся в нем множеству центральных движений [2, гл. VII, §§ 2, 3] [55, гл.V, §5], [56, гл. 2 § 4], [57, часть I, гл.3, §3.3].

Определение 0.0.3. Точка $z^0(x^0; y^0) \in I$ называется *неблуждающей точкой* отображения $F \in T^0(I)$, если для любой ее окрестности $U(z^0)$ в I найдется натуральное число $n = n(z^0)$ такое, что

$$U(z^0) \cap F^n(U(z^0)) \neq \emptyset.$$

Множество всех неблуждающих точек д. с. (0.0.2) называется *неблуждающим* и обозначается символом $\Omega(F)$.

Точки фазового пространства, неявляющиеся неблуждающими, называются *блуждающими.*

Продолжая следовать Дж. Биркгофу, опишем процедуру построения множества центральных движений (центра) отображения $F \in T^0(I)$.

Положим $\Omega_1(F) = \Omega(F)$. По индукции для любого натурального числа n определим множества $\Omega_{n+1}(F) = \Omega(F_{|\Omega_n(F)})$, где $F_{|(\cdot)}$ означает сужение отображения F на множество. Таким способом получена вложенная последовательность непустых замкнутых F-инвариантных (т. е. удовлетворяющих включению $F(\Omega_n(F)) \subset \Omega_n(F)$ $(n \geq 1)$) множеств

$$\Omega_1(F) \supset \Omega_2(F) \supset \ldots \supset \Omega_n(F) \supset \ldots$$

В силу компактности I множество $\Omega_\omega(F) = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \Omega_n(F)$ непусто, причем $\Omega_\omega(F)$ замкнуто и инвариантно.

Для того, чтобы продолжить указанную процедуру на все счетные ординалы, воспользуемся принципом трансфинитной индукции. Так, если счетный ординал $\alpha + 1$ не является предельным, а множество $\Omega_\alpha(F)$ определено, то положим $\Omega_{\alpha+1}(F) = \Omega(F_{|\Omega_\alpha(F)})$; если же β – предельный счетный ординал, а множества $\Omega_\alpha(F)$ определены при всех $\alpha < \beta$, то определим непустое замкнутое F-инвариантное множество

$\Omega_\beta(F)$, полагая $\Omega_\beta(F) = \bigcap\limits_{\alpha<\beta} \Omega_\alpha(F)$.
Таким образом, получена трансфинитная последовательность непустых замкнутых, вложенных друг в друга F-инвариантных множеств

$$\Omega_1(F) \supset \ldots \supset \Omega_n(F) \supset \ldots \supset \Omega_\omega(F) \supset \Omega_{\omega+1}(F) \supset \ldots \supset \Omega_\alpha(F) \supset \ldots \qquad (0.0.10)$$

Так как I – компакт, то в силу теоремы Бэра-Хаусдорфа [58, гл.4, §7] существует не более, чем счетный ординал γ, начиная с которого все множества системы (0.0.10) совпадают, т. е. $\Omega_\gamma(F) = \Omega_{\gamma+1}(F)$.

Определение 0.0.4. Множество $\Omega_\gamma(F)$, обозначаемое в дальнейшем символом $C(F)$, называется *центром* (*множеством центральных движений*) д. с. (0.0.2), а не более, чем счетный ординал $\gamma = \gamma(F)$, начиная с которого все множества системы (0.0.10) совпадают, называется *порядковым числом (глубиной) центра* д. с. (0.0.2).

Таким образом, множество центральных движений $C(F)$ есть максимальное замкнутое инвариантное множество, целиком состоящее из неблуждающих в нем точек[5].

Понятие устойчивости по Пуассону принадлежит А.Пуанкаре (см. [59, гл. XXVI, п.п. 290-295], [55, гл.V, §4], [56, гл. I, § 1]).

Определение 0.0.5. Точка $z^0(x^0; y^0) \in I$ называется *устойчивой по Пуассону* точкой отображения $F \in T^0(I)$, если найдется последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots$ такая, что выполнено равенство

$$\lim_{i\to+\infty} F^{n_i}(z^0) = z^0.$$

Точки, устойчивые по Пуассону, играют важную роль во множестве $C(F)$. Так как I – компакт, то $C(F) = \overline{P(F)}$ [55, гл.V, §5], [56, гл. III, § 1], где $P(\cdot)$ – множество точек отображения, устойчивых по Пуассону, $\overline{(\cdot)}$ означает замыкание множества.

Несколько забегая вперед, отметим, что важную роль в рассмотрениях данной работы (см. главы 3 – 4) играют квазиминимальные множества (в смысле Г.Ф. Хильми), понимаемые как замыкания бесконечных устойчивых по Пуассону траекторий (см. [55, гл. 5,§5]).

---

[5] Свойство максимальности множества $C(F)$ означает, что любое замкнутое инвариантное множество $C'(F)$, содержащее $C(F)$ и целиком состоящее из неблуждающих в $C'(F)$ точек, совпадает с $C(F)$.

В диссертации предложен новый оригинальный способ изучения неблуждающего множества и центра произвольной непрерывной д. с. (0.0.2), основанный на использовании техники "срезов" множеств.

Любое непустое множество $A \subset I$ можно описать, используя его естественную проекцию $pr_1 : A \to pr_1 A$ на ось Ox и срезы $(A)(x)$ вертикальными слоями над произвольными точками $x \in pr_1 A$.

Срез $(A)(x)$ представляет собой проекцию сечения множества A слоем $x \times I_2$ на ось Oy и определяется в сиду равенства

$$(A)(x) = \{y \in I_2 : (x;\, y) \in A\}. \tag{0.0.11}$$

Использование "срезов" позволяет ввести многозначные функции (прежде всего, это – Ω-функция и C-функция, а также вспомогательные и подходящие многозначные функции для Ω-функции и вспомогательные фукции для C-функции), которые являются главным инструментом изучения важнейших предельных множеств: неблуждающего множества и центра косого произведения отображений интервала (соответственно).

Идея техники "срезов" представляет собой приспособленную к рассматриваемому случаю модификацию идеи А. Пуанкаре, предложившего изучать ω-предельные множества цилиндрических каскадов с использованием свойств множества точек пересечения ω-предельного множества положительной полутраектории произвольной начальной точки $(x^0;\, y^0)$ на цилиндре с образующей $\{x^0\} \times \mathbf{R^1}$, проходящей через начальную точку [1, мемуар 4, гл. XIX] (см. также статьи [15], [16]).

Прежде, чем сформулировать определения Ω-функции и C-функции, обратим внимание на "свойство первой проекции"неблуждающего множества и центра произвольного отображения $F \in T^0(I)$, доказанное в §1.1 (см. [60], [61]):

$$\Omega(f) = pr_1(\Omega(F)), \quad C(f) = pr_1(C(F)), \tag{0.0.12}$$

здесь $\Omega(f)$ $(C(f))$ – множество неблуждающих точек (множество центральных движений) факторотображения f д. с. (0.0.2).

В [62], в частности, показано, что и другие динамически предельные множества (например, ω-предельные множества) непрерывных косых произведений отображений интервала обладают свойством первой проекции.

Для определения многозначных функций, связанных с косым произведением отображений интервала, нам потребуется топологическое пространство 2^{I_2} всех замкнутых подмножеств отрезка I_2 с экспоненциальной топологией, т. е. слабейшей топологией, в которой множества 2^A открыты в 2^{I_2} для открытых A и замкнуты в 2^{I_2} для замкнутых A, здесь 2^A означает множество всех замкнутых подмножеств произвольного множества $A \subset I_2$ [47, гл.1, §17, I].

Определение 0.0.6 [63] - [66]. *Ω-функцией (C-функцией)* отображения $F \in T^0(I)$ называется функция $\Omega^F : \Omega(f) \to 2^{I_2}$ ($C^F : C(f) \to 2^{I_2}$) такая, что при любом $x \in \Omega(f)$ ($x \in C(f)$) выполнено равенство

$$\Omega^F(x) = (\Omega(F))(x) \quad (C^F(x) = (C(F))(x)),$$

где $(\Omega(F))(x)$ – срез неблуждающего множества $\Omega(F)$ вертикальным слоем над точкой x ($(C(F))(x)$ – срез центра $C(F)$ вертикальным слоем над x) (см. формулу (0.0.11)).

Из определения 0.0.6 и равенства (0.0.12) следует, что Ω-функция (C-функция) имеет естественный динамический смысл: ее график в фазовом пространстве I совпадает с неблуждающим множеством $\Omega(F)$ (центром $C(F)$) косого произведения $F \in T^0(I)$.

Традиционно в теории динамических систем используются другие многозначные функции, которые определены или на функциональных пространствах рассматриваемых динамических систем, как, например, в [67], [68], или на всем фазовом пространстве системы, как, например, в [69].

В [70] для косых произведений на цилиндре со сжимающими отображениями в слоях определена специальная многозначная функция, обобщение которой в статье [71] положено в основу определения странного нехаотического аттрактора косого произведения над иррациональным поворотом окружности на двумерном цилиндре с монотонными (в широком смысле) отображениями в слоях. Если неблуждающее множество косого произведения является аттрактором, срезы которого всевозможными вертикальными слоями представляют собой отрезки, то многозначная функция, использованная в [71], совпадает с Ω-функцией (с точностью до рассматриваемого фазового пространства и заданного на нем косого произведения).

Важную роль в изучении косых произведений играет приведенное ниже разложение произвольной итерации косого произведения $F \in T^0(I)$ на более простые отображения. Так, для любого $n \geq 1$ введем в рассмотрение более простое, чем F, косое произведение $F_n : I \to I$, "останавливающее движение в базе":

$$F_n(x,\, y) = (id(x),\, g_{x,\, n}(y)) \tag{0.0.13}$$

и прямое произведение $F_{n,\, 1} : I \to I$, "останавливающее движение в вертикальных слоях":

$$F_{n,\, 1}(x,\, y) = (f^n(x),\, id(y)). \tag{0.0.14}$$

Здесь $id(x)$ и $id(y)$ – тождественные отображения отрезков I_1 и I_2 соответственно. Важно заметить, что

$$F^n = F_{n,\, 1} \circ F_n. \tag{0.0.15}$$

Для описания неблуждающего множества и центра д. с. $F \in T^0(I)$ наряду с Ω-функцией и C-функцией требуются и другие многозначные функции. Так, в подпараграфе 1.1.2 введены вспомогательные и подходящие функции для Ω-функции, и вспомогательные функции для C-функции, соответствующие итерациям отображения F и участвующие в формировании неблуждающего множества и центра косого произведения отображений интервала (см. подпараграф 1.1.2 и работы [63] – [66], [72] – [75]).

Предположим, что для факторотображения f косого произведения отображений интервала $F \in T^r(I)$ ($r = 0$ или 1) выполнено равенство $\Omega(f^n) = \Omega(f)$. Это равенство верно, во-первых, для непрерывных отображений отрезка с замкнутым множеством периодических точек и, во-вторых, для C^1-гладких Ω-устойчивых отображений отрезка (в пространстве отображений отрезка I_1 в себя с инвариантной границей). Косые произведения отображений интервала с факторами такого рода рассматриваются в настоящей диссертации. Обратим внимание на то, что для эндоморфизмов отрезка указанное выше равенство может нарушаться (см. подпараграф 1.1.2).

Определение 0.0.7 [63] - [66], [72] – [75]. *Вспомогательными функциями для Ω-функции (для C-функции)* косого произведения $F \in T^0(I)$ будем называть многозначные функции $\Omega_n^F : \Omega(f) \to 2^{I_2}$ ($C_n^F : C(f) \to 2^{I_2}$) такие, что при любом $x \in \Omega(f)$

$(x \in C(f))$ верно равенство

$$\Omega_n^F(x) = \Omega(g_{x,n}) \quad (C_n^F(x) = C(g_{x,n})) \tag{0.0.16}$$

где $\Omega(g_{x,n})$ $(C(g_{x,n}))$ – неблуждающее множество (центр) отображения $g_{x,n} : I_2 \to I_2$ при всех $x \in \Omega(f)$ $(x \in C(g_{x,n}))$, $n \geq 1$.

Подходящими функциями к Ω*-функции*[6] *отображения* $F \in T^0(I)$ будем называть многозначные функции $\overline{\Omega}_n^F : \Omega(f) \to 2^{I_2}$ $n \geq 1$, графиками которых в I служат замыкания графиков вспомогательных функций Ω_n^F; при этом

$$\overline{\Omega}_n^F(x) = (\overline{\Omega}_n^F)(x) \text{ для каждого } x \in \Omega(f)$$

Здесь $(\overline{\Omega}_n^F)(x)$ – срез графика функции $\overline{\Omega}_n^F$ (или, что то же самое, срез замыкания графика функции Ω_n^F) слоем над точкой x.

Подобно тому, как это было сделано при определении подходящих функций (к Ω-функции) в дальнейшем для обозначения многозначных функций, графиками которых в I служат замыкания (в I) графиков соответствующих функций, будет использоваться черта вверху над обозначениями соответствующих функций.

Для описания неблуждающего множества косых произведений отображений интервала нам потребуется выяснить взаимосвязь между Ω-функцией рассматриваемого косого произведения и вспомогательными (подходящими) функциями; а для понимания закона формирования центра косых произведений будет полезно указать взаимосвязь C-функции с вспомогательными функциями для C-функции. С этой целью будем использовать указанные выше прямые произведения $F_{n,1}$.

Действительно, после того, как при всех $n \geq 1$ определены вспомогательные функции Ω_n^F (C_n^F) и подходящие к Ω-функции многозначные функции $\overline{\Omega}_n^F$, каждую точку $(x; y)$, принадлежащую графику Ω_n^F (C_n^F) и графику $\overline{\Omega}_n^F$, следует переместить в точку $(f^n(x); y)$ с помощью прямого произведения $F_{n,1}$ (см. равенство (0.0.15)). Таким образом, естественно возникают многозначные функции $\Omega_{n,1}^F : \Omega(f) \to 2^{I_2}$ $(C_{n,1}^F : C(f) \to 2^{I_2})$, а также $\overline{\Omega}_{n,1}^F : \Omega(f) \to 2^{I_2}$ $(n \geq 1)$, определенные в силу равенств

$$\Omega_{n,1}^F(x) = (F_{n,1}(\Omega_n^F))(x) \quad (C_{n,1}^F(x) = (F_{n,1}(C_n^F))(x))$$

---

[6] Нам не потребуются функции, подходящие к C-функции.

для любого $x \in \Omega(f)$ $(x \in C(f))$, и

$$\overline{\Omega}^F_{n,1}(x) = (F_{n,1}(\overline{\Omega}^F_n))(x)$$

для любого $x \in \Omega(f)$; здесь Ω^F_n (C^F_n) и $\overline{\Omega}^F_n$ – графики соответствующих многозначных функций в I; $(F_{n,1}(\Omega^F_n))(x)$ $((F_{n,1}(C^F_n))(x))$ – срез множества $F_{n,1}(\Omega^F_n)$ $(F_{n,1}(C^F_n))$ слоем над точкой $x \in \Omega(f)$ $(x \in C(f))$, и $(F_{n,1}(\overline{\Omega}^F_n))(x)$ – срез множества $F_{n,1}(\overline{\Omega}^F_n)$ слоем над точкой $x \in \Omega(f)$.

Если $\Omega(f) \neq I_1$, то многозначные функции Ω^F_n и $\Omega^F_{n,1}$ допускают естественные расширения $(\Omega^F_n)^{ex}$ на отрезок I_1 и $(\Omega^F_{n,1})^{ex}$ на отрезок $f^n(I_1)$ $(n \geq 1)$ соответственно (для многозначных функций C^F_n и $C^F_{n,1}$ подобных рассмотрений не требуется). Так, для любого $x \in I_1$ выполнено

$$(\Omega^F_n)^{ex}(x) = \Omega(g_{x,n});$$

а для любого $x \in f^n(I_1)$ –

$$(\Omega^F_{n,1})^{ex}(x) = (F_{n,1}((\Omega^F_n)^{ex}))(x).$$

Основное содержание **первой главы** диссертации составляют теоремы о структуре неблуждающего множества и центра непрерывных косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек факторотображения. Структура неблуждающего множества непрерывных косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек в базе изучалась в работах [61], [66], [76]. Та же задача для непрерывных косых произведений с замкнутым множеством периодических точек решалась в [77], в случае гладких косых произведений отображений интервала – в [76], а в частном случае гладких косых произведений с гиперболическими периодическими точками – в [78] (общий завершенный результат не только о структуре неблуждающего множества, но и о структуре центра непрерывных косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек содержат приведенные далее теоремы 1.2.1 и 1.3.1).

Хотя статьи [61], [66] содержат примеры косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек в базе, которые демонстрируют влияние Ω-взрывов в отображениях, действующих в слоях над периодическими точками фактора, тем не менее, автор не обратила внимания на влияние отображений в слоях над блуждающими точками фактора на структуру неблуждающего множества рассматриваемого косого произведения. В заметках [79], [80] приведены примеры непрерывных косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек в базе, иллюстрирующие влияние отображений в слоях над блуждающими точками факторотображения на структуру неблуждающего множества косого произведения. Статья [76] является ответом автора на заметки [79], [80]. В [76] приведены корректные формулировка и доказательство теоремы о неблуждающем множестве непрерывных косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек в базе.

Рассмотрим отображение $F \in T^0(I)$ такое, что его фактор f имеет замкнутое множество периодических точек $Per(f)$. Тогда для множества (наименьших) периодов $\tau(f)$ периодических точек f выполнено равенство $\tau(f) = \{1,\, 2,\, 2^2, \dots,\, 2^\nu\}$, где $0 \le \nu \le +\infty$, $\Omega(f) = Per(f)$ (см. предложения 1.2.1, 1.2.2).
Обозначим $Per(f,\, l_n)$ множество f-периодических точек, (наименьшие) периоды которых делят $l_n = 2^n,\ n \ge 0$ (т. е. $\tau(f|_{Per(f,l_n)}) = \{1,\, 2,\, 2^2,\, \dots, 2^n\}$).

Определим многозначные функции

$$(\Omega^F_{l_n})'_{|Per(f,\,l_n)} = \bigcup_{i=0}^{n} \Omega^F_{l_i\,|Per(f,\,l_i)}; \quad (\Omega^F_{l_n,\,1})'_{|Per(f,\,l_n)} = \bigcup_{i=0}^{n} \Omega^F_{l_i,\,1|Per(f,\,l_i)}. \tag{0.0.17}$$

Положим $(\Omega^F_{l_n,1})^{ex'} = \bigcup\limits_{i=0}^{n} (\Omega^F_{l_i,1})^{ex}$ при всех $x \in \bigcap\limits_{i=0}^{n} f^{l_i}(I_1)$.
В пояснение приведенных формул укажем, что, например, первое из равенств (0.0.17) при любом $x \in Per(f,\, l_n)$ следует понимать в естественном смысле

$$(\Omega^F_{l_n})'_{|Per(f,\,l_n)}(x) = (\bigcup_{i=0}^{n} \Omega^F_{l_i\,|Per(f,\,l_i)})(x) = \bigcup_{i=0}^{n} (\Omega^F_{l_i\,|Per(f,\,l_i)})(x) = \bigcup_{i=0}^{n} \Omega^F_{l_i\,|Per(f,\,l_i)}(x),$$

где $(\cdot)(x)$ означает, как обычно, срез множества (графика соответствующей многозначной функции) слоем над точкой x (см. равенство (0.0.11)). Если $x \notin Per(f,\, l_i)$ при некотором $1 \le i \le n-1$, то $(\Omega^F_{l_i\,|Per(f,l_i)})(x) = \Omega^F_{l_i\,|Per(f,l_i)}(x) = \emptyset$.

Теорема 1.2.1 [76]. *Пусть факторотображение f косого произведения отображений интервала $F \in T^0(I)$ имеет замкнутое множество периодических точек $Per(f)$. Тогда существуют и равны между собой топологические пределы*

$\underset{n\to+\infty}{Lim}\,(\Omega^F_{l_n,\,1})'_{|Per(f,\,l_n)}$ *и* $\underset{n\to+\infty}{Lim}\,(\Omega^F_{l_n})'_{|Per(f,\,l_n)}$ *(см. Подпараграф 1.1.1), причем справедливы равенства:*

$$\begin{aligned}\Omega^{F_{|Per(f)\times I_2}} &= \underset{n\to+\infty}{Lim}\,(\Omega^F_{l_n,1})'_{|Per(f,\,l_n)} = \underset{n\to+\infty}{Lim}\,(\Omega^F_{l_n})'_{|Per(f,\,l_n)}\\ &= \overline{\bigcup_{x\in Per(f)}\{x\}\times\Omega(\widetilde{g}_x)},\end{aligned}$$

где $(\Omega^F_{l_n,\,1})'_{|Per(f,\,l_n)}$, $(\Omega^F_{l_n})'_{|Per(f,\,l_n)}$, $\Omega^{F_{|Per(f)\times I_2}}$ *– графики соответствующих многозначных функций в* I*;*

более того, если x *– периодическая точка* f *с (наименьшим) периодом* $l(x)$*, предельная для непериодических точек* f*, то*

$$\Omega^F(x) = (\underset{n\to+\infty}{Ls}\,(\Omega^F_{l(x)n,1})^{ex'}_{|U_{1,\,\varepsilon_n}(x)})(x),$$

где $\underset{n\to+\infty}{Ls}(\cdot)_n$ *– верхний топологический предел последовательности множеств (см. Подпараграф 1.1.1),* $(\Omega^F_{l(x)n,1})^{ex'}_{|U_{1,\,\varepsilon_n}(x)}$ *– график соответствующей многозначной функции,* $U_{1,\,\varepsilon_n}(x)$ *– произвольная* ε_n*-окрестность точки* $x \in Per(f)$ *такая, что* $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$*,* $(\cdot)(x)$ *– срез множества вертикальным слоем над точкой* x*.*

Механизм формирования множества центральных движений косого произведения $F \in T^0(I)$ с замкнутым множеством $Per(f)$ факторотображения f состоит в том, что в этом случае существует топологический предел $\underset{n\to+\infty}{Lim}\,C^F_{l_n|Per(f,\,l_n)}$ последовательности графиков функций $C^F_{l_n|Per(f,\,l_n)}$ в I, причем для графика C^F C-функции в I справедливо равенство

$$C^F = \underset{n\to+\infty}{Lim}\,C^F_{l_n|Per(f,\,l_n)}.$$

Теорема 1.3.1 [61], [66]. *Пусть факторотображение* f *косого произведения отображений интервала* $F \in T^0(I)$ *имеет замкнутое множество* $Per(f)$*. Тогда центр* $C(F)$ *отображения* F *представим в следующем виде:*

$$C(F) = \overline{Per(F)} = \Omega(F_{|\Omega(F)}) = \overline{\bigcup_{x\in Per(f)}\{x\}\times\Omega(\widetilde{g}_{x|\Omega(\widetilde{g}_x)})}.$$

Прямым следствием теорем 1.2.1 и 1.3.1 является

Теорема 1.3.2 [61], [76][7]. *Если* $F \in T^0(I)$*, то следующие утверждения эквивалентны:*

---

[7] В [77] предложено доказательство эквивалентности утверждений (1) и (3), отличное от доказательства, приведенного в данной работе.

(1) *$Per(F) = \Omega(F)$;*

(2) *$Per(F) = C(F)$;*

(3) *множество F-периодических точек $Per(F)$ замкнуто.*

Теорема 1.3.2 показывает, что в непрерывных косых произведениях с замкнутым множеством периодических точек реализуется только наиболее простой тип возвращаемости траекторий: периодичность. По этой причине целесообразно ввести следующее понятие.

Определение 0.0.8 [81]. Косые произведения отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек будем называть *простейшими.*

Во второй главе дано объяснение наиболее интересных свойств простейших косых произведений отображений интервала, отличающих такого рода отображения от отображений отрезка с замкнутым множеством периодических точек.

Так, результаты § 2.1 следует рассматривать в контексте исследований по общей проблеме изучения возмущений динамических систем класса косых произведений, сформулированной Д.В. Аносовым в [82].

Явление Ω-взрыва в диффеоморфизмах было обнаружено в первое десятилетие создания гиперболической теории в связи с теоремой об Ω-устойчивости диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A (см., например, статьи [83] – [86]).

В § 2.1 приведен критерий реализуемости C^0- Ω-взрыва в C^1-гладких косых произведениях с замкнутым множеством периодических точек [87] и установлена невозможность C^1- Ω-взрыва в такого рода косых произведениях отображений интервала [88] (анонсировано в [89]). Эти последние результаты позволили указать особенности бифуркаций удвоения периода периодических точек в гладких (класса C^3) косых произведениях отображений интервала [88].

Обозначим через $T^0_1(I)$ подпространство с (C^0-нормой) пространства $T^0(I)$, состоящее из C^1-гладких косых произведений отображений интервала. База топологии в пространстве $T^0_1(I)$ задается системой ε-шаров $B^{01}_\varepsilon(F) = B^0_\varepsilon(F) \bigcap T^0_1(I)$ при всех $F \in T^0_1(I)$.

Определение 0.0.9. Скажем, что отображение $F \in T^0_1(I)$ ($F \in T^1(I)$) *допускает C^0- Ω-взрыв (C^1- Ω-взрыв)*, если существует $\delta > 0$ такое, что в любой ε-окрестности

$B^{01}_{\varepsilon}(F)$ ($B^{1}_{\varepsilon}(F)$) отображения F в пространстве $T^0_1(I)$ (в пространстве $T^1(I)$) найдется отображение Φ, для которого выполнено $\Omega(\Phi) \not\subset U_{\delta}(\Omega(F))$, где $U_{\delta}(\Omega(F))$ – δ-окрестность в I неблуждающего множества $\Omega(F)$ отображения F.

Явление Ω-взрыва в пространстве $T^0_1(I)$ ($T^1(I)$) можно описать в терминах специальных многозначных функций. Действительно, рассмотрим многозначную функцию, сопоставляющую каждому $F \in T^0_1(I)$ ($F \in T^1(I)$) его неблуждающее множество $\Omega(F)$. Тогда в силу определения 0.0.9 F допускает Ω-взрыв в пространстве $T^0_1(I)$ ($T^1(I)$) в том и только том случае, если F не является точкой полунепрерывности сверху указанной многозначной функции (см. подпараграф 1.1.1)[8].

Отметим, что соответствующая модификация идей, используемых при изучении явления Ω-взрыва, позволила предложить классификацию взрывов во множестве решений дифференциальных уравнений (см. [49]).

Для того, чтобы сформулировать критерий реализуемости C^0- Ω-взрыва в C^1-гладких косых произведениях отображений интервала, нам потребуется понятие достижимости подмножеств множества периодических точек косого произведения, введенное в [90].

Определение 0.0.10 [90]. Пусть $F \in T^0(I)$, $Per(F)$ – замкнутое множество, а K_1, K_2 – различные подмножества множества $Per(F)$.
Будем говорить, что *множество* K_2 *достижимо из множества* K_1 *(*$K_1 \to^a K_2$ *)*, если найдутся точки $z_1(x,\, y_1) \in K_1$ и $z_2(x,\, y_2) \in K_2$ такие, что для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-цепь относительно сужения $F_{|E}$, где $E = Orb(x,\, f) \times I_2$, соединяющая z_1 с z_2 ($Orb(x,\, f) = \{x,\, f(x), \ldots,\, f^{n-1}(x)\}$, n - период x).

Напомним, что *ε-цепью относительно отображения F, соединяющей точки $(x_1,\, y_1)$ и $(x_2,\, y_2)$*, называется конечное множество точек $\{(u_k,\, v_k)\}^n_{k=0}$ таких, что

$$(u_0,\, v_0) = (x_1,\, y_1)\ (u_n,\, v_n) = (x_2,\, y_2) \text{ а } d(F(u_{k-1},\, v_{k-1}),\ (u_k,\, v_k)) < \varepsilon \text{ при } k = 1,\, \ldots, n$$

(см., например, [36, гл. 1, § 2]). Здесь d – метрика в I, согласованная с топологией произведения в I.

---

[8] Используемый подход к описанию Ω-взрыва является универсальным. В общей форме этот подход предложен в [67]; и, в частности, его можно применить к характеристике Ω-взрыва в пространстве $C^r(I_2)$ ($r = 0$ или 1) (см. Введение, а также гл. 2 – 4)

Теорема 2.1.1 [81], [87], [89]. *Простейшее косое произведение* $F \in T^0_1(I)$, *для которого верно равенство* $F^{-1}(Per(F)) = Per(F)$ ($F^{-1}(\cdot)$ *– полный прообраз множества), допускает* C^0- Ω*-взрыв в том и только том случае, если выполнено одно из следующих двух условий:*

(1) *либо существует связная компонента* K *множества* $Per(F)$ *такая, что при некотором* $x \in Per(f)$ *срез* $(K)(x)$ *не является связным множеством;*

(2) *либо, в противном случае, для любого* $\delta > 0$ *найдется конечный набор компонент связности* $\{K_i\}_{i=1}^{i=m}$ *(где* $m = m(\delta)$, $m > 1$*) множества* $Per(F)$ *таких, что* $K_m \to^a K_1$, *а при всех* $1 \le i \le m-1$ *выполнено одно из следующих двух свойств:* $K_i \to^a K_{i+1}$ *или* $d(K_i, K_{i+1}) < \delta$.

Изучению окрестности простейшего косого произведения отображений интервала в пространстве $T^1(I)$ посвящена статья [88]. Основным результатом этой работы является следующее утверждение.

Теорема 2.1.3 [81], [88]. *Пусть* $F \in T^1(I)$ *– простейшее отображение. Тогда* F *не допускает* Ω*-взрыв в пространстве* $T^1(I)$*; причем существует окрестность* $B^1_\varepsilon(F)$ *отображения* F *в* $T^1(I)$ *такая, что любое отображение* $\Phi \in B^1_\varepsilon(F)$ *является простейшим.*

Отметим, что теорема 2.1.3 позволяет указать оценку сверху множества (наименьших) периодов периодических точек отображений из некоторой окрестности $B^1_\varepsilon(F)$ простейшего косого произведения F в $T^1(I)$.

Предложение 2.1.7 [81], [88]. *Если отображение* $F \in T^1(I)$ *не содержит периодическую точку периода* 2^i, *то существует* ε*-окрестность* $B^1_\varepsilon(F)$ *отображения* F *в пространстве* $T^1(I)$ *такая, что любое отображение из окрестности* $B^1_\varepsilon(F)$ *не содержит периодических точек периода* 2^{i+1}, *каково бы ни было* $i \ge 1$.

Утверждение предложения 2.1.7 является распространением на случай C^1-гладких простейших косых произведений отображений интервала оценки сверху множества (наименьших) периодов периодических точек C^1-гладких отображений отрезка (см. подпараграф 2.1.1, [91]).

Теорема 2.1.3 и предложение 2.1.7 показывают, что малые C^1-возмущения простейших косых произведений в пространстве $T^1(I)$ могут приводить лишь к локальным перестройкам множества периодических точек, связанным с бифуркациями удвоения периода периодических точек.

Для определенности, укажем отличительные особенности бифуркаций удвоения периода периодических точек гладких косых произведений отображений интервала, когда и первый мультипликатор $\lambda_1((x^0;\, y^0))$ неподвижной точки $(x^0;\, y^0)$, и второй мультипликатор $\lambda_2((x^0;\, y^0))$ этой точки проходят через -1.

Теорема 2.1.5 [81], [88]. *Пусть* $F_\alpha : I \to I$ *(*$F_\alpha(x, y) = (f_\alpha(x),\, g_{\alpha,x}(y))$*) – однопараметрическое семейство* C^3*-гладких косых произведений отображений интервала,* C^1*-гладко зависящее от параметра* $\alpha \in (\alpha_1,\, \alpha_2)$*,* $(x^0;\, y^0)$ *– неподвижная точка косого произведения* F_{α_0}*, причем* $\lambda_1((x^0;\, y^0)) = -1$*, и* $\lambda_2((x^0;\, y^0)) = -1$*. Пусть при* $\alpha = \alpha_0$ *в неподвижной точке* $(x^0;\, y^0)$ *выполнены следующие неравенства*

(1) $\frac{\partial^3}{\partial x^3}(f^2_\alpha(x)) < 0$, $\frac{\partial^3}{\partial y^3}(g_{\alpha,\,x,\,2}(y)) < 0$,

(2) $\frac{\partial}{\partial \alpha}(f^2_\alpha(x)) < 0$, $\frac{\partial}{\partial \alpha}(g_{\alpha,\,x,\,2}(y)) < 0$.

Тогда существуют $\varepsilon > 0$ *и* $\delta > 0$ *такие, что*

(a) при $\alpha \in (\alpha_0 - \delta,\, \alpha_0)$ *косое произведение* F_α *имеет только одну неподвижную точку в открытом квадрате* $(x^0 - \varepsilon,\, x^0 + \varepsilon) \times (y^0 - \varepsilon,\, y^0 + \varepsilon)$*, и эта точка является стоком;*

(b) при $\alpha \in (\alpha_0,\, \alpha_0 + \delta)$ F_α *имеет в открытом квадрате* $(x^0 - \varepsilon,\, x^0 + \varepsilon) \times (y^0 - \varepsilon,\, y^0 + \varepsilon)$ *только одну неподвижную точку – источник и 4 периодические орбиты периода 2, одна из орбит периода 2 с той же проекцией, что и неподвижная точка, образована седловыми периодическими точками; одна из трех периодических орбит периода 2 отображения* F_α *с одной и той же периодической орбитой периода* 2 *факторотображения* f_α *в качестве проекции образована седловыми периодическими точками, а две другие образованы стоками.*

Условия (1), (2) теоремы 2.1.5 получены из соответствующих бифуркационных условий, содержащихся в [92].

В § 2.2 установлен допустимый топологический тип ω-предельных множеств косых произведений отображений интервала с ограниченным множеством (наименьших) периодов периодических точек, разработана техника изучения ω-предельных множеств такого рода косых произведений отображений интервала, исследовано влияние дифференциальных свойств косого произведения на структуру ω-предельных множеств.

Напомним, что в рассматриваемом случае для множества (наименьших) периодов периодических точек $F \in T^0(I)$ справедливо равенство $\tau(F) = \{1, 2, \ldots, 2^\nu\}$, где $0 \le \nu < +\infty$. Положим $M = 2^\nu$.

Предложение 2.2.1 [93]. *Пусть $F \in T^0(I)$, а множество $\tau(F)$ ограничено. Тогда для любой точки $(x;\, y) \in I$ ω-предельное множество $\omega_{F^M}((x;\, y))$ ее траектории относительно отображения F^M есть вертикальный отрезок (возможно, вырожденный), состоящий из неподвижных точек F^M.*

Первые примеры непрерывных косых произведений отображений интервала, имеющих только лишь неподвижные точки и содержащих траекторию, ω-предельным множеством которой служит невырожденный вертикальный отрезок, указаны в [62], [94] – [96]. В [97] приведено обобщение конструкции примера из [95] и построен пример непрерывного косого произведения на стандартном единичном кубе, одна из граней которого состоит из неподвижных точек отображения и является ω-предельным множеством траектории любой точки, непринадлежащей этой грани.

Определение 0.0.11 [93]. Пусть $F \in T^0(I)$, $Per(F)$ – замкнутое множество. Периодическую точку x^0 факторотображения f ($x^0 \in Per(f)$) будем называть *исключительной периодической точкой факторотображения f отображения F*, если хотя бы одна связная компонента множества $(Per(F))(x^0)$ представляет собой невырожденный отрезок ($(Per(F))(x^0)$ – срез множества $Per(F)$ слоем над x^0).

Обозначим через $Per_e(f)$ множество исключительных периодических точек факторотображения f отображения $F \in T^0(I)$. Символом $W^s(x^0,\, f^M)$, как обычно, будем обозначать устойчивое многообразие точки $x^0 \in Per(f)$ относительно отображения f^M, то есть множество точек $\{x \in I_1 : \lim\limits_{n\to+\infty} f^{Mn}(x) = x^0\}$.

Теорема 2.2.1 [93]. *Пусть отображение $F \in T^0(I)$ имеет ограниченное множество $\tau(F)$, а $g_x(y)$ дифференцируемо по x на I. Тогда для произвольной точки $(x';\, y') \in I$ следующие утверждения эквивалентны:*

(1) ω-предельное множество $\omega_{F^M}((x';\, y'))$ – невырожденный вертикальный отрезок;

(2) существуют точка $x^0 \in Per_e(f)$, связная компонента $[\alpha, \beta]$ ($\alpha < \beta$) среза $(Per(F))(x^0)$ и счетное подмножество $N_{[\alpha, \beta]}$ множества $\mathbf{N}$ *натуральных чисел такие, что $x' \in W^s(x^0, f^M) \setminus \{f^{-Mn}(x^0)\}_{n \geq 0}$ (здесь $f^{-Mn}(\cdot)$ – полный прообраз точки относительно отображения f^{Mn}, $W^s(x^0, f^M)$ – устойчивое многообразие точки $x^0 \in Per_e(f)$ относительно отображения f^M);*

$$N_{[\alpha, \beta]} = \{n \in \mathbf{N} : g_{x', Mn}(y'), \, g_{x', M(n+1)}(y') \in [\alpha, \beta]\};$$

а ряд

$$\sum_{k \in N_{[\alpha, \beta]}} (f^{Mk}(x') - x^0)\psi(f^{Mk}(x'), \; g_{x', Mk}(y')) \tag{0.0.18}$$

расходится. Здесь функция ψ определена на прямоугольнике $I_1 \times [\alpha, \beta]$ для отображений $g_{x, M}(y)$ по отношению к точке x^0 так, что $g_{x, M}(y) = y + (x - x^0)\psi(x, y)$.

Теорема 2.2.1 показывает, что свойство простейшего косого произведения отображений интервала иметь одномерные ω-предельные множества связано с расходимостью некоторых специальных рядов, построенных по исследуемой траектории и содержащих информацию о ее асимптотическом поведении. Этот подход следует рассматривать в контексте сформулированной Д.В. Аносовым в статье [82] глобальной задачи нахождения движений, занимающих промежуточное положение между (простыми) квазипериодическими и (сложными) гиперболическими движениями. В [82] в качестве начального этапа решения указанной задачи предлагается развить теорию расходящихся рядов.

Обратим внимание на то, что расходящиеся ряды являются также и эффективным инструментом построения инвариантных мер в негиперболических динамических системах (см., например, [98], [99]).

Исследования влияния дифференциальных свойств динамической системы на структуру ее предельных множеств восходят к классическим работам А.Данжуа [100], [101]. Влияние дифференциальных свойств цилиндрического каскада на структуру его ω-предельных множеств изучалось в [16]. Такого рода рассмотрения для простейших косых произведений отображений интервала были начаты еще в [61] и завершены в [93].

Обозначим через $T_d(I)$ подпространство пространства $T^0(I)$, состоящее из отображений, каждое из которых имеет C^1-гладкое на отрезке I_1 факторотображение f

и отображения в слоях $g_x(y)$ со следующими свойствами:

(i) частная производная $\frac{\partial}{\partial y} g_x(y)$ непрерывна на I,

(ii) в каждой точке $(x;\, y) \in I$ существует конечная частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$, непрерывная всюду, за исключением, быть может, точек множества $Per_e(f) \times I_2$.

Во множестве $T_d(I)$ выделим подмножество простейших отображений, удовлетворяющих следующему естественному дополнительному условию:

(iii) для любой точки $(\overline{x};\, \overline{y}) \in I$ такой, что $\overline{x}$ – непериодическая точка f из некоторого интервала $J^* \subset I_1$, а $\overline{y}$ –неподвижная точка отображения $g_{\overline{x},\, M} : I_2 \to I_2$, существует окрестность $U_\delta((\overline{x};\, \overline{y})) = U_{1,\, \delta}(\overline{x}) \times U_{2,\, \delta}(\overline{y})$, обладающая следующим свойством: для каждой точки $(x;\, y) \in U_\delta((\overline{x};\, \overline{y}))$ верно

$$\frac{\partial}{\partial x} g_{x,\, M}(y) \geq 0 \;\; (\frac{\partial}{\partial x} g_{x,\, M}(y) \leq 0),$$

причем, каково бы ни было $y \in U_{2,\, \delta}(\overline{y})$, промежуток $U_{1,\, \delta}(\overline{x}) \times \{y\}$ не содержит невырожденного подотрезка, на котором верно тождество $\frac{\partial}{\partial x} g_{x,\, M}(y) \equiv 0$.

В § 2.3 построен пример простейшего отображения $F \in T_d(I)$, удовлетворяющего условию (iii) и имеющего одномерное ω-предельное множество – отрезок $\{0\} \times [0,\, 1]$. При этом факторотображение косого произведения F имеет единственную негиперболическую неподвижную точку 0 (не имеет других периодических точек), а каждый из рядов (0.0.18),

$$\sum_{k \in N_{[\alpha,\, \beta]}} |f^{Mk}(x') - x^0|, \quad \text{и} \quad \sum_{k \in N_{[\alpha,\, \beta]}} |\psi(f^{Mk}(x'),\; g_{x',\, Mk}(y'))|$$

расходится. Отображение, построенное в § 2.3, обладает максимальными дифференциальными свойствами по переменной x и является C^1-гладким по переменной y.

В § 2.4 исследовано влияние дифференциальных свойств постейших косых произведений отображений интервала на структуру ω-предельных множеств.

Теорема 2.4.1 [93]. *Пусть $F \in T_d(I)$ – простейшее отображение, удовлетворяющее условию (iii) и такое, что траектория некоторой точки $(x';\, y')$ имеет одномерное ω-предельное множество, представляющее собой орбиту невырожденного вертикального периодического отрезка. Тогда частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ не ограничена в произвольной окрестности каждой точки множества $\omega_F((x';\, y'))$.*

Из теоремы 2.4.1 следует, что если косое произведение отображений интервала $F \in T_d(I)$ является простейшим, удовлетворяющим условию (iii), а частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ ограничена на I, то ω-предельное множество произвольной траектории есть периодическая орбита. Последнее означает, что простейшие отображения из пространства $T_d(I)$, удовлетворяющие условию (iii), обладают, в некотором естественном смысле, максимальными дифференциальными свойствами по переменной x среди простейших косых произведений, имеющих одномерные ω-предельные множества. Таким образом, причиной существования одномерных ω-предельных множеств у простейших косых произведений отображений интервала является "низкая регулярность" таких отображений.

Теорема 2.4.2 [93]. *Пусть $F \in T^1(I)$ удовлетворяет условию (iii) . Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *множество $Per(F)$ периодических точек F замкнуто;*

(2) *ω-предельное множество траектории произвольной точки из I есть периодическая орбита.*

В третьей главе (как и в двух следующих за ней главах), в отличие от двух предыдущих глав, рассмотрены C^1-гладкие косые произведения отображений интервала, факторотображения которых являются отображениями типа $\succ 2^\infty$ (то есть содержат периодические точки периодов, непринадлежащих множеству $\{2^i\}_{i\geq 0}$) и удовлетворяют дополнительному условию Ω-устойчивости в пространстве C^1-гладких отображений отрезка в себя с инвариантной границей.

Обозначим через $C^1_{\partial_k}(I_k)$ $(k = 1,\, 2)$ подпространство пространства $C^1(I_k)$, состоящее из всех тех отображений $\psi \in C^1(I_k)$, каждое из которых удовлетворяет условию ψ-инвариантности границы ∂I_k отрезка I_k:

$$\psi(\partial I_k) \subset \partial I_k.$$

Определение 0.0.12. Будем говорить, что отображение $f \in C^1_{\partial_k}(I_k)$ $(k = 1,\, 2)$ *Ω-устойчиво в C^1-норме (в пространстве $C^1_{\partial_k}(I_k)$)*[9], если для любого $\delta > 0$ найдется

---

[9] Анализ особенностей определения Ω-устойчивости отображений на многообразиях с краем содержится, например, в работе [102]. Для того, чтобы избежать возможных осложнений, связанных с "краевым эффектом,"мы, следуя монографии [24, гл.3, § 2], рассматриваем отображения, относи-

$\varepsilon > 0$ такое, что для произвольного отображения $\varphi \in B^1_{k,\varepsilon}(f)$ существует δ-близкий в C^0-норме к тождественному отображению гомеоморфизм $h : \Omega(f) \to \Omega(\varphi)$ такой, что

$$h \circ f_{|\Omega(f)} = \varphi_{|\Omega(\varphi)} \circ h \tag{0.0.19}$$

Обозначим через $C^1_\omega(I_k)$ пространство всех Ω-устойчивых в $C^1_{\partial_k}(I_k)$ отображений отрезка I_k в себя ($k = 1,\, 2$).

Приведем необходимые для формулировок (и последующих доказательств) основных результатов главы 3 свойства Ω-устойчивых C^1-гладких отображений отрезка I_1, вытекающие из определения 0.0.12, результатов работ [103], [104] (см. также монографию [24, гл.3, §.2]).

Предложение 0.0.1 *Если $f \in C^1_\omega(I_1)$, то*

(1) *либо f есть отображение типа $\prec 2^\infty$ (т. е. множество (наименьших) периодов периодических точек f совпадает с множеством $\{2^i\}_{i=0}^{i=\mu} = \{1,\, 2,\, \ldots,\, 2^\mu\}$ при некотором $0 \leq \mu < +\infty$), при этом неблуждающее множество $\Omega(f)$ конечно и состоит из гиперболических периодических точек;*

(2) *либо f есть отображение типа $\succ 2^\infty$ (т. е. существует f-периодическая точка x ($x \in Per(f)$) периода $n(x) \notin \{2^i\}_{i\geq 0}$), при этом неблуждающее множество $\Omega(f)$ есть объединение конечного числа гиперболических периодических точек и конечного числа локально максимальных квазиминимальных (т. е. максимальных квазиминимальных множеств в некоторой своей окрестности) гиперболических совершенных нигде неплотных множеств.*

Множество $C^1_\omega(I_1)$ открыто и всюду плотно в $C^1_{\partial_1}(I_1)$.

Введем пространство C^1-гладких косых произведений отображений интервала $T^1_*(I)$ (с C^1-нормой), определив его как подпространство пространства $T^1(I)$, состоящее из всех тех косых произведений отображений интервала, факторотображение каждого из которых принадлежит $C^1_\omega(I_1)$.

Следовательно, если $F \in T^1_*(I)$ – произвольное косое произведение отображений интервала, то в силу предложения 0.0.1 справедливо:

(1) $\Omega(f) = \Omega_r(f) \bigcup \Omega_p(f)$, где $\Omega_r(f)$ – непустая разреженная часть неблуждающего

тельно которых граница отрезка I_k инвариантна.

множества $\Omega(f)$, состоящая из конечного числа гиперболических периодических точек, $\Omega_p(f)$ – совершенная часть множества $\Omega(f)$, непустая в том и только том случае, если факторотображение f имеет тип $\succ 2^\infty$; причем в том случае, когда f имеет тип $\succ 2^\infty$, множество $\Omega_p(f)$ состоит из конечного числа локально максимальных квазиминимальных гиперболических совершенных нигде неплотных множеств;
(2) множество $T^1_*(I)$ открыто и всюду плотно в подпространстве пространства $T^1(I)$, состоящем из косых произведений с факторотображениями из $C^1_{\partial_1}(I_1)$.

Таким образом, выбор пространства отображений, рассматриваемых в главах 3 - 5, обусловлен не только тем, что для C^1-гладких Ω-устойчивых отображений отрезка известны тонкие элементы его структуры и динамики на неблуждающем множестве (см. предложение 0.0.1), но и следующими двумя причинами. Первая причина состоит в том, что C^1-гладкие Ω-устойчивые отображения отрезка образуют открытое всюду плотное множество в пространстве C^1-гладких отображениях отрезка (с инвариантной границей относительно рассматриваемых отображений). Вторая связана с тем, что достаточно малая окрестность C^1-гладкого косого произведения с Ω-устойчивым факторотображением состоит из отображений с Ω-сопряженными факторами. Поэтому в этом случае влияние на динамику "близких" косых произведений оказывает изменение (или, наоборот, сохранение) лишь свойств отображений в слоях.

В § 3.1 доказана теорема о разложении пространства C^1-гладких косых произведений отображений интервала, факторотображения которых имеют тип $\succ 2^\infty$ и являются Ω-устойчивыми в $C^1_\partial(I_1)$ (см. [74], [75]). Эта теорема основана на рассмотрении всех логических возможностей сочетания свойств непрерывности/разрывности основных многозначных функций, связанных с косым произведением отображений интервала.

Теорема о разложении позволяет представить указанное пространство в виде объединения четырех непустых попарно непересекающихся подпространств.

Для того, чтобы выделить признаки, лежащие в основе разложения, нам потребуются некоторые сведения о временах возвращения траекторий произвольных окрестностей всех точек непустого множества $\Omega_p(f)$ (см. предложение 0.0.1). Эти времена возвращения траекторий произвольных окрестностей всех точек множества $\Omega_p(f)$ определяются периодами периодических точек, существующих у $f_{|\Omega_p(f)}$.

Обозначим через $\tau(f_{|K(f)})$ множество (наименьших) периодов периодических точек сужения $f_{|K(f)}$, где $K(f)$ – произвольное локально максимальное квазиминимальное множество факторотображения f косого произведения F.

Существуют натуральные числа $m_0 = m_0(K(f))$, $i_0 = i_0(K(f))$ и конечное подмножество $N_* = N_*(K(f))$ множества $\mathbf{N}$ натуральных чисел (возможно, пустое) такие, что

$$\tau(f_{|K(f)}) = \{m_0 i\}_{i \geq i_0} \cup N_* \text{ (см. [104], [105]).} \qquad (0.0.20)$$

Заметим, что для произвольного непрерывного отображения типа $\succ 2^\infty$ отрезка в себя всегда существует такое квазиминимальное множество, что натуральные числа $m_0(K(f))$, $i_0(K(f))$ и конечное подмножество $N^*(K(f))$ множества натуральных чисел $\mathbf{N}$ определяются порядком А.Н. Шарковского [106].

Нам потребуются натуральные числа:

$$\begin{aligned} m_* &= \underset{K(f)\subset\Omega_p(f)}{\text{НОК}}\{m_0(K(f))\},\\ n_* &= \underset{K(f)\subset\Omega_p(f)}{\text{НОК}}\{n \in N_*(K(f))\},\\ i_* &= \max_{K(f)\subset\Omega_p(f)}\{i_0(K(f))\}, \end{aligned} \qquad (0.0.21)$$

где НОК –наименьшее общее кратное конечного множества, состоящего из натуральных чисел. Условимся считать, что $n_* = 1$, если $N_*(K(f)) = \emptyset$ для любого множества $K(f) \subset \Omega_p(f)$.

Будем использовать последовательность натуральных чисел

$$l_i^* = m_* n_* i, \text{ где } i \geq i_*. \qquad (0.0.22)$$

Для произвольного отображения $F \in T_*^1(I)$ с фактором типа $\succ 2^\infty$ возможны следующие случаи:

1. последовательность вспомогательных функций $\{\Omega_{l_i^*}^F\}_{i\geq 1}$ (а, следовательно, и последовательность функций $\{\Omega_{l_i^*,1}^F\}_{i\geq 1}$) содержит не более, чем конечное множество разрывных функций;

2. последовательность вспомогательных функций $\{\Omega_{l_i^*}^F\}_{i\geq 1}$ (а, следовательно, и после-

довательность функций $\{\Omega^F_{l^*_i,1}\}_{i\geq 1}$) содержит счетное множество разрывных функций, но при этом последовательность подходящих функций $\{\overline{\Omega}^F_{l^*_i}\}_{i\geq 1}$ (а, следовательно, и последовательность функций $\{\overline{\Omega}^F_{l^*_i,1}\}_{i\geq 1}$) содержит не более, чем конечное множество разрывных функций;

3. последовательность подходящих функций $\{\overline{\Omega}^F_{l^*_i}\}_{i\geq 1}$ содержит счетное множество разрывных функций, при этом Ω-функция отображения F непрерывна;

4. последовательность подходящих функций $\{\overline{\Omega}^F_{l^*_i}\}_{i\geq 1}$ содержит счетное множество разрывных функций, при этом Ω-функция отображения F разрывна.

Сделаем следующее терминологическое замечание. Так, в случае 1 будем говорить, что F удовлетворяет сильному условию **H**. В том случае, если последовательность подходящих функций $\{\overline{\Omega}^F_{l^*_i}\}_{i\geq 1}$ содержит не более, чем конечное множество разрывных функций, скажем, что F удовлетворяет условию **H**.

В соответствии с перечисленными логически возможными случаями в подпространстве пространства $T^1_*(I)$, состоящем из косых произведений отображений интервала, имеющих факторотображения типа $\succ 2^\infty$, в свою очередь, можно выделить следующие подпространства:

$T^1_{*,1}(I)$, образованное косыми произведениями, имеющими свойство 1;

$T^1_{*,2}(I)$, состоящее из косых произведений, обладающих свойством 2;

$T^1_{*,3}(I)$, образованное косыми произведениями, имеющими свойство 3;

$T^1_{*,4}(I)$, состоящее из косых произведений, обладающих свойством 4.

В силу определения подпространств $T^1_{*,1}(I)$–$T^1_{*,4}(I)$ все они попарно не пересекаются.

Теорема 3.1.1 [74], [75]. *Любое из подпространств* $T^1_{*,j}(I)$ *(*$1 \leq j \leq 4$*) не пусто, а их объединение* $\bigcup\limits_{j=1}^{4} T^1_{*,j}(I)$ *совпадает с частью пространства* $T^1_*(I)$, *состоящей из косых произведений, факторотображение каждого из которых имеет тип* $\succ 2^\infty$.

Теорема 3.1.1 определила все дальнейшие исследования данной работы. Так, эта теорема играет фундаментальную роль в изучении неблуждающего множества косых произведений из пространства $T^1_*(I)$, факторотображения которых имеют тип $\succ 2^\infty$, и может рассматриваться, как первый этап доказательства теорем о неблуждающем множестве такого рода косых произведений.

Структура неблуждающего множества C^1-гладких косых произведений отображений интервала со сложной динамикой фактора изучалась в статьях [81], [107], [108]. Отметим и статью [109], в которой рассматривались вопросы, связанные с мерой неблуждающего множества некоторых диффеоморфизмов-косых произведений над отображением сдвига на топологической марковской цепи с диффеоморфизмами Морса-Смейла на отрезке в качестве отображений в слоях. Следуя работам [81], [107], [108], мы покажем, как формируется неблуждающее множество косых произведений из подпространств $T^1_{*,\,1}(I)$ – $T^1_{*,\,4}(I)$.

Будем рассматривать неблуждающее множество произвольного косого произведения $F \in T^1_{*,\,j}(I)$ $(1 \leq j \leq 4)$ в слоях над точками совершенного множества $\Omega_p(f)$. (Для описания неблуждающих точек, лежащих в слоях над конечным множеством изолированных периодических точек факторотображения произвольного косого произведения $F \in T^1_{*,\,j}(I)$, используется теорема 1.2.1, которую необходимо применить к F^q при некотором $q \geq 1$ таком, что изолированные периодические точки фактора f^q имеют периоды вида степеней двойки.)

В § 3.2 изучается структура неблуждающего множества в слоях над точками множества $\Omega_p(f)$ косых произведений отображений интервала из $T^1_{*,\,1}(I) \bigcup T^1_{*,\,2}(I)$. Будем использовать подпоследовательность $\{l_i\}_{i \geq i^*}$ последовательности натуральных чисел $\{l^*_i\}_{i \geq i^*}$, определенной в силу равенства (0.0.22), при $l_i = m_* n_* i!$. Натуральное число $i!$ при $i > 1$ представимо в виде

$$i! = 2^{j(i)}(2j'(i) + 1), \quad \text{где} \quad j(i) \geq 0,\, j'(i) \geq 1.$$

На неблуждающем множестве $\Omega(f)$ фактора f определим многозначные функции

$$(\overline{\Omega}^F_{l_i})' = \bigcup_{\gamma=0}^{j(i)} \overline{\Omega}^F_{2^{-\gamma} l_i}; \quad (\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})' = \bigcup_{\gamma=0}^{j(i)} \overline{\Omega}^F_{2^{-\gamma} l_i,\,1}. \tag{0.0.23}$$

Функции, определенные формулами (0.0.23), следует понимать в смысле выполнения равенств $(\overline{\Omega}^F_{l_i})'(x) = \bigcup\limits_{\gamma=0}^{j(i)} \overline{\Omega}^F_{2^{-\gamma} l_i}(x)$; $(\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})'(x) = \bigcup\limits_{\gamma=0}^{j(i)} \overline{\Omega}^F_{2^{-\gamma} l_i,\,1}(x)$ при любом $x \in \Omega(f)$. Пусть $Per_p(f)$ – множество периодических точек в $\Omega_p(f)$ (в силу [103] верно равенство $\overline{Per_p(f)} = \Omega_p(f)$), а $Per^*_p(f)$ – произвольное инвариантное всюду плотное в $\Omega_p(f)$ подмножество множества $Per_p(f)$ (возможно, совпадающее с $Per_p(f)$).

Обозначим через $(\overline{\Omega}^F_{l_i})^{P^*}$ и сужение функции $\overline{\Omega}^F_{l_i}$ на множество $Per^*_p(f)$, и его график в фазовом пространстве I. Положим

$$(\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})^{P^*} = F_{l_i,\,1 | Per^*_p(f)\times I_2}((\overline{\Omega}^F_{l_i})^{P^*}). \tag{0.0.24}$$

В равенстве (0.0.24) используются графики функций $(\overline{\Omega}^F_{l_i})^{P^*}$ и $(\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})^{P^*}$.

Обозначим через $Per_p(f,\,n)$ $(Per^*_p(f,\,n))$ конечное множество всех тех точек из $Per_p(f)$ $(Per^*_p(f))$, (наименьший) период каждой из которых делит $n \in \tau(f_{|\Omega_p(f)})$. Для любого $i \geq i^*$ будем использовать следующие сужения функций, определенных равенствами (0.0.23):

$$(\overline{\Omega}^F_{l_i})'_{\,|Per^*_p(f,\,l_i)} = \bigcup_{\gamma=0}^{j(i)} \overline{\Omega}^F_{2^{-\gamma}l_i\ |Per^*_p(f,\,2^{-\gamma}l_i)}; \tag{0.0.25}$$

$$((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,\,l_i)} = \bigcup_{\gamma=0}^{j(i)} (\overline{\Omega}^F_{2^{-\gamma}l_i,\,1})^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,\,2^{-\gamma}l_i)}. \tag{0.0.26}$$

Равенства (0.0.25), (0.0.26) понимаются в соответствии с (0.0.23):

$$(\overline{\Omega}^F_{l_i})'_{\,|Per^*_p(f,\,l_i)}(x) = \bigcup_{\gamma=0}^{j(i)} \overline{\Omega}^F_{2^{-\gamma}l_i\ |Per^*_p(f,\,2^{-\gamma}l_i)}(x);$$

$$(\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})'_{\,|Per^*_p(f,\,l_i)}(x) = \bigcup_{\gamma=0}^{j(i)} \overline{\Omega}^F_{2^{-\gamma}l_i,\,1\ |Per^*_p(f,\,2^{-\gamma}l_i)}(x)$$

при любом $x \in Per^*_p(f,\,l_i)$.

В дальнейшем будем использовать естественные расширения $(\Omega^F_n)^{ex}$ на отрезок I_1 и $(\Omega^F_{n,1})^{ex}$ на отрезок $f^n(I_1)$ функций Ω^F_n и $\Omega^F_{n,1}$ соответственно.

Важную роль будут играть также определенные на множестве $\bigcap\limits_{\gamma=0}^{\overline{j}(i)} f^{2^{-\gamma}l^*_i}(I_1)$ (здесь $i = 2^{\overline{j}(i)}(2\overline{j}'(i)+1)$, $\overline{j}(i) \geq 0$, $\overline{j}'(i) \geq 1$) функции

$$(\Omega^F_{l^*_i,1})^{ex'} = \bigcup_{\gamma=0}^{\overline{j}(i)} (\Omega^F_{2^{-\gamma}l^*_i,1})^{ex}. \tag{0.0.27}$$

Равенство (0.0.27) понимается в следующем смысле: при любом $x \in \bigcap\limits_{\gamma=0}^{\overline{j}(i)} f^{2^{-\gamma}l^*_i}(I_1)$ выполнено $(\Omega^F_{l^*_i,1})^{ex'}(x) = \bigcup\limits_{\gamma=0}^{\overline{j}(i)} (\Omega_{2^{-\gamma}l^*_i,1})^{ex}(x)$.

Положим $\Omega^*_p(F) = \Omega_p(f) \times I_2$.

Теорема 3.2.1 [81], [107], [108]. *Пусть $F \in T^1_{*,\,1}(I)$, а $Per^*_p(f)$ – произвольное инвариантное всюду плотное в $\Omega_p(f)$ подмножество множества $Per_p(f)$. Тогда* *существует топологический предел* $\underset{i\to+\infty}{Lim}\,((\Omega^F_{l_i,\,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,l_i)}$, *не зависящий от множества* $Per^*_p(f)$, *и справедливы равенства:*

$$\Omega^{F^{m_*n_*}_{|\Omega^*_p(F)}} = \underset{i\to+\infty}{Ls}\,(\Omega^F_{l_i,\,1})' = \underset{i\to+\infty}{Ls}\,((\Omega^F_{l_i,\,1})')^{P^*} =$$
$$\underset{i\to+\infty}{Lim}\,((\Omega^F_{l_i,\,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,l_i)} = \overline{\bigcup_{x\in Per^*_p(f)}\{x\}\times\Omega(\widetilde{g}_x)}$$

(здесь $\Omega^*_p(F) = \Omega_p(f)\times I_2$, $\Omega^{F^{m_*n_*}_{|\Omega^*_p(F)}}$, $(\Omega^F_{l_i,\,1})'$, $((\Omega^F_{l_i,\,1})')^{P^*}$, $((\Omega^F_{l_i,\,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,l_i)}$ *– графики соответствующих функций в* I*),* $\underset{i\to+\infty}{Ls}\,(\cdot)_i$ *– верхний топологический предел последовательности множеств;*

более того, значение $\Omega^{F^{m_*n_*}}(x)$ Ω*-функции отображения* $F^{m_*n_*}$ *в любой точке* $x\in\Omega_p(f)$ *определено в силу равенства*

$$\Omega^{F^{m_*n_*}}(x) = (\underset{i\to+\infty}{Ls}\,(\Omega^F_{m^*n^*i,1})^{ex'}{}_{|U_{1,\,\varepsilon_i}(x)})(x), \tag{0.0.28}$$

где $U_{1,\,\varepsilon_i}(x)$ *– произвольная* ε_i*-окрестность в* I_1 *точки* $x\in\Omega_p(f)$*, причем* $\lim\limits_{i\to+\infty}\varepsilon_i = 0$.

В § 3.2 мы приведем пример отображения $F_2\in T^1_{*,\,2}(I)$, для которого множество $\overline{\bigcup\limits_{x\in Per^*_p(f)}\{x\}\times\Omega(\widetilde{g}_x)}$ зависит от выбора подмножества $Per^*_p(f)$ в $\Omega_p(f)$.

Теорема 3.2.2 [81], [108]. *Пусть* $F\in T^1_{*,\,2}(I)$, *а множество* $Per^*_p(f)$ *выбрано также, как в теореме 3.2.1. Тогда существует топологический предел* $\underset{i\to+\infty}{Lim}((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,l_i)}$, *не зависящий от множества* $Per^*_p(f)$, *и верно:*

$$\Omega^{F^{m_*n_*}_{|\Omega^*_p(F)}} = \underset{i\to+\infty}{Ls}\,(\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})' = \underset{i\to+\infty}{Ls}\,((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*} =$$
$$\underset{i\to+\infty}{Lim}((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,l_i)} = \overline{\bigcup_{x\in Per^*_p(f)}\{x\}\times WN_{\Omega_p}(\widetilde{g}_x)},$$

здесь $(\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})'$, $((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}$, $((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,l_i)}$ *– графики соответствующих функций в* I, $WN_{\Omega_p}(\widetilde{g}_x)$ *– множество точек* $y\in I_2$ *таких, что любая точка* $(x,\,y)$ *является слабо неблуждающей относительно семейства отображений в слоях над точками множества* $\Omega_p(f)$ *косого произведения* F_m *(см. формулу (0.0.13)), где* $m = m(x)$ *– (наименьший) период* x*;*

более того, значение $\Omega^{F^{m_*n_*}}(x)$ Ω*-функции отображения* $F^{m_*n_*}$ *в произвольной точке* $x\in\Omega_p(f)$ *определено в силу равенства (0.0.28) для любых окрестностей* $U_{1,\varepsilon_i}(x)$ *в* I_1 *точки* $x\in\Omega_p(f)$*, где* $\lim\limits_{i\to+\infty}\varepsilon_i = 0$.

§ 3.2 содержит также пример отображения $F \in T^1_{*,\,1}(I)$, обладающего глобальным хаотическим аттрактором, представляющим собой "дико"разветвленный (имеющий множество точек ветвления мощности континуум) одномерный континуум [40].

В § 3.3 дано описание неблуждающего множества отображений из пространств $T^1_{*,\,3}(I)$ и $T^1_{*,\,4}(I)$, следующее статьям [81], [108].
Отметим, что теоремы 3.2.1 – 3.3.1, доказанные в главе 3, содержат универсальный алгоритм формирования неблуждающего множества отображений из подпространств $T^1_{*,\,1}(I) - T^1_{*,\,4}(I)$ над совершенной частью неблуждающего множества C^1-гладкого Ω-устойчивого факторотображения.

Проблема существования автономных систем n $(n \geq 3)$ дифференциальных уравнений на поверхностях в $\mathbf{R^n}$ с глубиной центра, большей n, сформулирована Биркгофом в 1928 году (см. [2, раздел "Приложения", § 3]). Классические результаты по изучению глубины центра такого рода систем получены А.Г. Майером в [110] – [113] и Л.П. Шильниковым в [114].

В главе 4 рассматривается аналог проблемы Биркгофа для тех C^1-гладких косых произведений из пространства $T^1_*(I)$, которые имеют факторотображения типа $\succ 2^\infty$. Здесь указаны оценки глубины центра C^1-гладких косых произведений отображений интервала, принадлежащих каждому из подпространств $T^1_{*,\,j}(I)$ при $1 \leq j \leq 3$. Что касается отображений из пространства $T^1_{*,\,4}(I)$, то, как показано в предложении 3.1.5 (см. подпараграф 3.1.2), в $T^1_{*,\,4}(I)$ существуют косые произведения отображений интервала с глубиной центра, представляющей собой произвольный конечный или счетный ординал.

Так, в §4.1 установлена замкнутость притягивающего множества $\bigcup\limits_{(x;\,y)\in I} \omega_F((x;\,y))$ произвольного косого произведения отображений интервала $F \in T^1_{*,\,1}(I)$. Для притягивающего множества доказан аналог классической теоремы о константе Биркгофа для неблуждающего множества.

Теорема 4.1.1 [81]. *Пусть* $F \in T^1_{*,\,1}(I)$ *Тогда* $\bigcup\limits_{(x;\,y)\in I} \omega_F((x;\,y))$ *– замкнутое множество, и для любой окрестности* U *множества* $\bigcup\limits_{(x;\,y)\in I} \omega_F((x;\,y))$ *существует* $m = m(U)$ *такое, что время пребывания траектории любой точки из* I *вне* U *не превосходит* m.

Техника, разработанная при доказательстве теоремы 4.1.1, позволяет описать структуру и глубину центра отображений из пространства $T^1_{*,\,1}(I)$.

Теорема 4.1.2 [81]. *Для множества центральных движений $C(F)$ косого произведения $F \in T^1_{*,\,1}(I)$ справедливы равенства*

$$C(F) = \overline{Per(F)} = \Omega(F_{|\Omega(F)}) = \overline{\bigcup_{x \in Per(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_{x|\Omega(\widetilde{g}_x)})}.$$

Утверждение теоремы 4.1.2 показывает, что глубина центра $\gamma(F)$ произвольного отображения $F \in T^1_{*,\,1}(I)$ не превосходит 2. В то же время существует отображение из пространства $T^1_{*,\,1}(I)$ с глубиной центра, равной 2.

Приведенная далее теорема 4.1.3 объясняет механизм формирования множества центральных движений косых произведений из пространства $T^1_{*,\,1}(I)$ над совершенной частью неблуждающего множества фактороотображения.

Теорема 4.1.3 [81]. *Пусть $F \in T^1_{*,\,1}(I)$. Тогда существует топологический предел $\underset{i \to +\infty}{Lim}\, C^F_{l_i\,|\Omega_p(f)}$ последовательности множеств $C^F_{l_i\,|\Omega_p(f)}$, и справедливо равенство*

$$C^F_{|\Omega_p(f)} = \underset{i \to +\infty}{Lim}\, C^F_{l_i\,|\Omega_p(f)},$$

здесь $C^F_{|\Omega_p(f)}$ ($C^F_{l_i\,|\Omega_p(f)}$) – график сужения C-функции (функции $C^F_{l_i}$) отображения F на множество $\Omega_p(f)$.

В § 4.2 показано, что при любом $j = 2,\, 3,\, 4$ существует отображение $F \in T^1_{*,\,j}(I)$ с незамкнутым притягивающим множеством $\bigcup\limits_{(x;\,y) \in I} \omega_F((x;\,y))$ (см. теорему 4.2.1).

Следующая теорема 4.2.2 содержит оценку глубины центра отображений из подпространств $T^1_{*,\,2}(I)$ и $T^1_{*,\,3}(I)$.

Теорема 4.2.2 [81]. *Пусть $F \in T^1_{*,\,2}(I) \bigcup T^1_{*,\,3}(I)$, причем, если $F \in T^1_{*,\,3}(I)$, то $\Omega^{F_{|\Omega^*_p(F)}}$ – непрерывная функция. Тогда $\gamma(F) \leq 2$.*

Как отмечалось ранее (см. предложение 3.1.5 в подпараграфе 3.1.2), в $T^1_{*,\,4}(I)$ существуют косые произведения отображений интервала с глубиной центра, представляющей собой произвольный конечный или счетный ординал.

Подпространства $T^1_{*,\,1}(I)$ – $T^1_{*,\,4}(I)$, выделенные в теореме о разложении пространства C^1-гладких косых произведений отображений интервала с Ω-устойчивым фактороотображением типа $\succ 2^\infty$ (см. § 3.1), описаны с использованием всех логических возможностей сочетания свойства непрерывности или, наоборот, разрывности основных многозначных функций, связанных с косым произведением отображений интервала. В этом смысле можно говорить о том, что теорема о разложении, доказанная в § 3.1, дает неявное описание подпространств $T^1_{*,1}(I)$ – $T^1_{*,4}(I)$.

В главе 5 в указанных подпространствах выделены некоторые непустые подмножества отображений, изучены аппроксимационные свойства отображений из выделенных подмножеств. Явное описание этих подмножеств косых произведений основано на использовании, во-первых, понятия устойчивости в целом в C^1-норме семейства отображений в слоях, введенного в [73] (см. также [81], [115]) и, во-вторых, понятия плотной устойчивости в целом в C^1-норме семейства отображений в слоях, введенного в [81], [116].

Для определения указанных понятий нам потребуется подпространство $\widetilde{T}^1_*(I)$ пространства $T^1_*(I)$, состоящее из всех отображений, для каждого из которых верно включение $F(\partial I) \subseteq \partial I$, где ∂I – граница прямоугольника I. При любом $1 \leq j \leq 4$ будем использовать также подпрострства $\widetilde{T}^1_{*,j}(I) = \widetilde{T}^1_*(I) \bigcap T^1_{*,j}(I)$.

Определение 0.0.13 [73], [81], [115]. Скажем, что семейство отображений в слоях косого произведения $F \in \widetilde{T}^1_*(I)$ с факторотображением типа $\succ 2^\infty$ *устойчиво в целом в C^1-норме*, если для любого $\delta > 0$ существует окрестность $B^1_\varepsilon(F)$ отображения F в пространстве $\widetilde{T}^1_*(I)$ такая, что для каждого отображения $\Phi \in B^1_\varepsilon(F)$ и произвольного l^*_i ($i \geq i^*$ при некотором $i^* \geq i_*$) существует δ-близкий к тождественному в C^0-норме гомеоморфизм $H^{<l^*_i>} : \overline{\Omega}^F_{l^*_i} \to \overline{\Omega}^\Phi_{l^*_i}$ (здесь $\overline{\Omega}^F_{l^*_i}$, $\overline{\Omega}^\Phi_{l^*_i}$ - графики подходящих функций отображений F и Φ соответственно), принадлежащий классу косых произведений, такой, что вспомогательные отображения $F_{l^*_i\,|\Omega(f)\times I_2}$ и $\Phi_{l^*_i\,|\Omega(\varphi)\times I_2}$ (см. равенства (0.0.13)) Ω-сопряжены с помощью $H^{<l^*_i>}$.

Следующее утверждение содержит основной результат § 5.1.

Теорема 5.1.1 [81], [115]. *Пусть косое произведение $F \in \widetilde{T}^1_*(I)$ имеет факторотображение типа $\succ 2^\infty$ и устойчивое в целом в C^1-норме семейство отображений в слоях. Тогда $F \in \widetilde{T}^1_{*,1}(I)$ и имеет непрерывную Ω-функцию.*

Результаты § 5.1 позволяют перейти к рассмотрению C^1-гладких Ω-устойчивых косых произведений отображений интервала (относительно гомеоморфизмов - косых произведений).

Изучению различных аспектов C^1- структурной устойчивости и C^1- Ω-устойчивости диффеоморфизмов посвящены, например, статьи [83], [102], [118] – [120], и C^1- Ω-устойчивости эндоморфизмов – статьи [81], [103], [115], [121], [122] [123]. Нетипичность свойства Ω-устойчивости C^r-диффеоморфизмов ($r \geq 2$) для размерностей ≥ 3 доказана Абрахамом и Смейлом [118] и для размерности 2 следует из работы Ньюхауса [124]. В [123] установлено, что Ω-устойчивые C^1-гладкие косые произведения отображений интервала не плотны в $\widetilde{T}^1_*(I)$. Этот результат усилен в статье [115], которая, в частности, содержит доказательство утверждения о неплотности Ω-устойчивых C^1-гладких косых произведений отображений интервала в содержащем их подпространстве $\widetilde{T}^1_{*,\,1}(I)$.

Некоторые свойства отображений в слоях C^1-гладких Ω-устойчивых косых произведений отображений интервала (по отношению к гомеоморфизмам-косым произведениям) исследовались в работах [72], [73].

Определение 0.0.14. Будем говорить, что отображение $F \in \widetilde{T}^1_*(I)$ *Ω-устойчиво в C^1-норме (в пространстве $\widetilde{T}^1_*(I)$)*, если для любого $\delta > 0$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для произвольного отображения $\Phi \in B^1_\varepsilon(F)$ ($B^1_\varepsilon(F)$ - ε-окрестность отображения F в пространстве $\widetilde{T}^1_*(I)$), $\Phi(x,\, y) = (\varphi(x),\, \psi_x(y))$, существует δ-близкий в C^0-норме к тождественному отображению гомеоморфизм

$$H : \Omega(F) \to \Omega(\Phi), \;\; H(x,\, y) = (h_1(x),\, h_{2,\,x}(y)),$$

такой, что для любой точки $(x;\, y) \in \Omega(F)$ справедливы равенства:

$$h_1 \circ f_{|\Omega(f)}(x) = \varphi \circ h_{1|\Omega(f)}(x);$$

$$h_{2,\,f(x)_{|(\Omega(F))(f(x))}} \circ g_{x|(\Omega(F))(x)}(y) = \psi_{h_1(x)_{|(\Omega(\Phi))(h_1(x))}} \circ h_{2,\,x|(\Omega(F))(x)}(y). \tag{0.0.29}$$

Сформулируем основные результаты § 5.2. Так, следующее утверждение содержит критерий различения C^1-гладких Ω-устойчивых косых произведений отображений интервала (в пространстве $\widetilde{T}^1_*(I)$).

Теорема 5.2.1 [73], [81], [115]. *Отображение $F \in \widetilde{T}^1_*(I)$ с факторотображением типа $\succ 2^\infty$ Ω-устойчиво в C^1-норме в том и только том случае, если его семейство отображений в слоях устойчиво в целом в C^1-норме.*

Из теорем 5.1.1 и 5.2.1 следует, что C^1-гладкие Ω-устойчивые косые произведения отображений интервала с фактоотображением типа $\succ 2^\infty$ имеют непрерывную Ω-функцию и содержатся в пространстве $\widetilde{T}^1_{*,1}(I)$.

Теорема 5.2.2 [81], [115], [123]. *Существует отображение $F \in \widetilde{T}^1_{*,1}(I)$ такое, что некоторая его окрестность $B^1_\varepsilon(F)$ в пространстве $\widetilde{T}^1_{*,1}(I)$ не содержит Ω-устойчивых отображений.*

Ослабим определение устойчивости в целом в C^1-норме семейства отображений в слоях произвольного косого произведения $F \in \widetilde{T}^1_*(I)$ и рассмотрим отображения из подпространств $\widetilde{T}^1_{*,j}(I)$, где $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

Определение 0.0.15 [81], [116]. Семейство отображений в слоях косого произведения отображений интервала $F \in \widetilde{T}^1_{*,j}(I)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ называется *плотно устойчивым в целом (в C^1-норме)*, если существует открытое множество $A(f) \subset I_1$ такое, что $A^*(f) = A(f) \bigcap \Omega(f)$ есть собственное всюду плотное подмножество f-неблуждающего множества $\Omega(f)$, обладающее следующим свойством:
для любого $\delta > 0$ найдется окрестность $B^1_\varepsilon(F)$ отображения F в $\widetilde{T}^1_*(I)$ такая, что для каждого отображения $\Phi \in B^1_\varepsilon(F) \bigcap \widetilde{T}^1_{*,j'}(I)$ $(j' = 1, 2, 3, 4)$ и каждого времени возвращения l^*_i $(i \geq i^*$ при некотором $i^* > i_*)$ траекторий точек совершенной части f-неблуждающего множества $\Omega(f)$ можно указать δ-близкий к тождественному отображению в C^0-норме гомеоморфизм - косое произведение $H^{<l^*_i>} : \overline{\Omega}^F_{l^*_i}|_{A^*(f)} \to \overline{\Omega}^\Phi_{l^*_i}|_{A^*(\varphi)}$, для которого вместе с равенством $h_1(A^*(f)) = A^*(\varphi)$ выполнено

$$\begin{gathered} h^{<l^*_i>}_{2,\,x}{}_{|\overline{\Omega}^F_{l^*_i\,|A^*(f)}(x)} \circ g_{x,\,l^*_i\,|\overline{\Omega}^F_{l^*_i\,|A^*(f)}(x)}(y) = \\ \psi_{h_1(x),\,l^*_i\,|\overline{\Omega}^\Phi_{l^*_i\,|A^*(\varphi)}(h_1(x))} \circ h^{<l^*_i>}_{2,\,x}{}_{|\overline{\Omega}^F_{l^*_i\,|A^*(f)}(x)}(y), \end{gathered} \tag{0.0.30}$$

где $(x,\, y) \in I$ – произвольная точка графика функции $\overline{\Omega}^F_{l^*_i\,|A^*(f)}$.

Следующее утверждение, приведенное в § 5.3, обосновывает корректность определения 0.0.15.

Теорема 5.3.1 [81], [116]. *При любом $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ существует отображение $F_j \in \widetilde{T}^1_{*,j}(I)$, имеющее плотно устойчивое в целом в C^1-норме семейство отображений в слоях.*

В § 5.3 доказаны также аппроксимационные теоремы для C^1-гладких косых произведений отображений интервала из некоторых подмножеств пространства $\widetilde{T}^1_*(I)$.

Теорема 5.3.2 [81], [116], [117]. *Пусть* $F \in \widetilde{T}^1_{*,j}(I)$ *(*$j = 1, 3$ *или* 4*) – косое произведение отображений интервала с плотно устойчивым в целом (в* C^1*-норме) семейством отображений в слоях.*

Отображение F *можно аппроксимировать с любой степенью точности* C^1*-гладкими* Ω*-устойчивыми косыми произведениями отображений интервала в том и только том случае, если для каждого локально максимального квазиминимального множества* $K(f)$ *фактороотображения* f *и каждого* $i \geq i^*$ *существует связная компонента* $C_{K(f),i}$ *пространства* C^1*-гладких* Ω*-устойчивых отображений отрезка* I_2 *в себя, для которой верно включение*

$$\{g_{x,l_i^*}\}_{x \in K(f)} \subset \overline{C}_{K(f),i}. \tag{0.0.31}$$

Отметим, что C^1-гладкое косое произведение отображений интервала, построенное в доказательстве теоремы 5.2.2 и недопускаюшее аппроксимацию в C^1-норме Ω-устойчивыми косыми произведениями отображений интервала, не удовлетворяет условиям теоремы 5.3.2.

Как показывает приведенная ниже теорема 5.3.3, уже косые произведения отображений интервала из пространства $\widetilde{T}^1_{*,4}(I)$ с плотно устойчивым в целом семейством отображений в слоях проявляют исключительные, неизвестные ранее динамические свойства, требующие разработки принципиально новой техники для их изучения.

Теорема 5.3.3 [81], [117]. *Множество классов* Ω*-сопряженности отображений из пространства* $\widetilde{T}^1_{*,4}(I)$ *несчетно и имеет мощность* $\geq \aleph_1$ *(где* $\aleph_1$ *– мощность множества счетных ординалов.*

Более того, $\widetilde{T}^1_{*,4}(I)$ *содержит плотное в себе подмножество косых произведений с произвольной допустимой глубиной центра (то есть с глубиной центра, представляющей собой произвольный конечный или счетный ординал).*

Автор выражает глубокую признательность профессору А.М. Степину за внимание к работе, плодотворные обсуждения результатов и всестороннюю поддержку.

Глава 1

Динамика косых произведений и многозначные функции

В §1.1 главы 1 доказаны основные свойства Ω-функции и C-функции (см. определение 0.0.6, приведенное во Введении). Эти многозначные функции использованы далее при описании важнейших динамически предельных множеств косых произведений отображений интервала: неблуждающего множества и множества центральных движений (центра) соответственно. Здесь же указан динамический смысл Ω-функции и C-функции; дано детальное описание вспомогательных и подходящих функций к Ω-функции и вспомогательных функций к C-функции косого произведения отображений интервала, с помощью графиков которых формируются основные динамически предельные множества (см. §1.2, §1.3).

В следующих §1.2 и §1.3 с использованием введенных в диссертации многозначных функций дано описание неблуждающего множества, структуры и глубины центра (в смысле Дж. Биркгофа) косого произведения отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек в базе; указан динамический смысл функций, подходящих к Ω-функции.

1.1 Основные многозначные функции, используемые при описании предельных множеств

В этой части работы доказаны основные свойства оригинальных многозначных функций, использующихся при описании неблуждающего множества и центра произвольного (непрерывного) косого произведения отображений интервала: Ω-функции и C-функции (см. определение 0.0.6), вспомогательных и подходящих многозначных функций к Ω-функции и вспомогательных функций к C-функции (см. определение 0.0.7).

1.1.1 Ω-функция и C-функция: свойства, примеры

Здесь предложен функциональный подход к описанию основных динамически предельных множеств: неблуждающего множества $\Omega(F)$ и множества центральных движений $C(F)$ непрерывной д.с. (0.0.2). В основе этого подхода лежит идея описания структуры множеств $\Omega(F)$ и $C(F)$ с использованием как их первых проекций $pr_1(\Omega(F))$ и $pr_1(C(F))$ соответственно, так и срезов $(\Omega(F))(x)$ $(C(F))(x)$ (см. формулы 0.0.11) вертикальными слоями над точками $x \in pr_1(\Omega(F))$ и $x \in pr_1(C(F))$ соответственно.

Компактность фазового пространства и указанные во введении характерные особенности д. с. (0.0.2) позволяют установить "свойство первой проекции"неблуждающего множества и центра отображения $F \in T^0(I)$.

Лемма 1.1.1 [60], [61]. *Для произвольного отображения* $F \in T^0(I)$ *справедливо равенство*

$$\Omega(f) = pr_1(\Omega(F)),$$

здесь $\Omega(f)$ *– множество неблуждающих точек факторотображения* f *д. с. (0.0.2).*

Доказательство. Докажем включение $\Omega(f) \subset pr_1(\Omega(F))$. Возьмем произвольно точку $x^0 \in \Omega(f)$ и последовательность положительных чисел $\{\delta_i\}_{i\geq 1}$ такую, что

$$\lim_{i\to+\infty} \delta_i = 0 \qquad (1.1.1)$$

Так как $x^0 \in \Omega(f)$, то в силу определения 0.0.3 для произвольной окрестности $U_{1,\delta_i}(x^0)$ точки x^0 в I_1 найдутся точка $x_i^0 \in U_{1,\delta_i}(x^0)$ и натуральное число n_i такие, что

$$f^{n_i}(x_i^0) \in U_{1,\delta_i}(x^0) \tag{1.1.2}$$

При каждом $i \geq 1$ непрерывное отображение $g_{x_i^0, n_i} : I_2 \to I_2$ имеет неподвижные точки. Пусть y_i^0 – произвольная неподвижная точка отображения $g_{x_i^0, n_i}$. Так как I – компакт, то из последовательности $\{(x_i^0; y_i^0)\}_{i \geq 1}$ выделим подпоследовательность $\{(x_{i_s}^0; y_{i_s}^0)\}_{s \geq 1}$, сходящуюся к некоторой точке $z^0(x^0; y^0)$. Из соотношений (0.0.3), (1.1.1) и (1.1.2) следует, что последовательность точек прямоугольника I вида $\{F^{n_{i_s}}(x_{i_s}^0, y_{i_s}^0)\}_{s \geq 1} = \{(f^{n_{i_s}}(x_{i_s}^0), y_{i_s}^0)\}_{s \geq 1}$ также сходится к $z^0(x^0; y^0)$. Отсюда получаем, что для любой окрестности $U(z^0)$ точки $z^0(x^0; y^0)$ найдутся точка $(x_{i_s}^0; y_{i_s}^0) \in U(z^0)$ и натуральное число n_{i_s} такие, что $F^{n_{i_s}}(x_{i_s}^0, y_{i_s}^0) \in U(z^0)$. Таким образом, $z^0(x^0; y^0) \in \Omega(F)$, и $x^0 \in pr_1(\Omega(F))$. Так как одновременно выполнено включение $pr_1(\Omega(F)) \subset \Omega(f)$, то лемма 1.1.1 доказана.

Лемма 1.1.2 [60], [61]. *Для произвольного отображения $F \in T^0(I)$ справедливо равенство*

$$C(f) = pr_1(C(F)),$$

здесь $C(f)$ – множество центральных движений факторотображения f отображения $F \in T^0(I)$.

Доказательство. В силу равенства (0.0.3) и определения 0.0.5 выполнены соотношения

$$Per(f) = pr_1(Per(F)) \subset pr_1(P(F)) \subset P(f), \tag{1.1.3}$$

где $Per(\cdot)$ – множество периодических точек отображения.

Так как I – компакт, то $pr_1 : I \to I_1$ – как открытое, так и замкнутое отображение. Воспользуемся тем, что для отображения $f \in C^0(I_1)$ верно равенство $C(f) = \overline{Per(f)}$ [126] (см. далее предложение 1.2.2). Тогда, используя формулы (1.1.3), получаем

$$C(f) = \overline{Per(f)} \subset \overline{pr_1(P(F))} = pr_1(\overline{P(F)}) = pr_1(C(F)) \subset \overline{P(f)} = C(f).$$

Лемма 1.1.2 доказана.

В статье [62], в частности, показано, что и другие динамически предельные множества (например, ω-предельные множества) непрерывных косых произведений отображений интервала обладают свойством первой проекции.

Отметим, что "свойство первой проекции"неблуждающего множества и центра непрерывной д.с. (0.0.2), доказанное в леммах 1.1.1 и 1.1.2, является следствием компактности фазового пространства системы. Так, отображение

$$F(x,\, y) = (x,\, x + y), \text{ где } (x;\, y) \in [0,\, 1] \times \mathbf{R^1},$$

не обладает "свойством первой проекции". Действительно,

$$\Omega(f) = C(f) = [0,\, 1], \quad \text{но в то же время} \quad pr_1(\Omega(F)) = pr_1(C(F)) = \{0\}.$$

Обозначим через 2^X множество всех замкнутых подмножеств топологического пространства X. Пусть $A \subset X$. По определению, 2^A есть множество всех замкнутых подмножеств множества A.

Экспоненциальной топологией во множестве 2^X называется слабейшая топология, в которой множества 2^A открыты в 2^X для открытых A и замкнуты в 2^X для замкнутых A (см. [47, гл. 1, § 17, I]).

Как отмечалось во Введении, для определения многозначных функций, связанных с косым произведением отображений интервала, используется топологическое пространство 2^X, при $X = I_2$, всех замкнутых подмножеств отрезка I_2 с экспоненциальной топологией.

Напомним (см. определение 0.0.6), что Ω-*функцией* (C-*функцией*) отображения $F \in T^0(I)$ называется функция $\Omega^F : \Omega(f) \to 2^{I_2}$ ($C^F : C(f) \to 2^{I_2}$) такая, что при любом $x \in \Omega(f)$ ($x \in C(f)$) выполнено равенство

$$\Omega^F(x) = (\Omega(F))(x) \quad (C^F(x) = (C(F))(x)),$$

где $(\Omega(F))(x)$ $((C(F))(x))$ – срез неблуждающего множества $\Omega(F)$ (центра $C(F)$) вертикальным слоем над точкой x (см. формулу (0.0.11)).

Заметим, что график произвольной многозначной функции $\Theta : A_1 \to 2^{I_2}$ есть множество точек $\{(x;\, y) \in I : x \in A_1,\ y \in \Theta(x)\}$ [127, гл. 1, §1]. Отсюда с использованием лемм 1.1.1 и 1.1.2 получаем, что введенные определением 0.0.6 основные многозначные функции имеют реальный динамический смысл: графики Ω-функции и C-функции в фазовом пространстве I совпадают с неблуждающим множеством $\Omega(F)$ и центром $C(F)$ соответственно косого произведения $F \in T^0(I)$.

Важную роль в последующих рассмотрениях играют понятия многозначных функций, полунепрерывных сверху, снизу, непрерывных, как в точке, так и на множестве (см. [47, гл. 1, § 18, I]).

Определение 1.1.1. Пусть X и Y – топологические пространства. Функция $\Theta : Y \to 2^X$ называется *полунепрерывной сверху в точке* $y \in Y$, если для каждого открытого множества $A \subset X$ из условия $y \in \Theta^{-1}(2^A)$, где

$$\Theta^{-1}(2^A) = \{y \in Y : \Theta(y) \in 2^A\},$$

следует, что y – внутренняя точка множества $\Theta^{-1}(2^A)$.

Многозначная функция $\Theta : Y \to 2^X$ называется *полунепрерывной снизу в точке* $y \in Y$, если для каждого замкнутого множества $A \subset X$ из условия $y \in \overline{\Theta^{-1}(2^A)}$ следует, что $y \in \Theta^{-1}(2^A)$.

Непрерывность многозначной функции Θ в точке y означает полунепрерывность и сверху, и снизу этой функции в точке y.

Полунепрерывность сверху (снизу) (соответственно непрерывность) многозначной функции Θ на множестве Y означает ее полунепрерывность сверху (снизу) (соответственно непрерывность) в каждой точке множества Y.

Динамическая система (0.0.2) имеет компактное фазовое пространство.

Пусть X – компактное метрическое пространство, а $(2^X)_m$ - пространство всех замкнутых подмножеств пространства X, наделенное метрикой Хаусдорфа $dist_X$ (см. [47, гл. 2, § 21, VII]).

Для любых двух непустых замкнутых множеств $A, B \subset X$

$$dist_X(A,\, B) = \max\{\sup_{x \in A} d(x,\, B),\ \sup_{y \in B} d(y,\, A)\},$$

где d - метрика в X, $d(t,\, C)$ - расстояние от точки $t = x$ или y до замкнутого множества $C = B$ или A соответственно.

Имеем: $2^X \overset{top}{=} (2^X)_m$ [47, гл. 4, § 42, II].

Верны следующие критерии различения полунепрерывных многозначных функций [47, гл. 4, § 43, II]).

Теорема 1.1.1. *Многозначная функция* $\Theta : Y \to 2^X$, *где* X *– компактное метрическое пространство, полунепрерывна сверху в точке* $y \in Y$ *тогда и только тогда, когда из соотношений* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ *и* $x_n \in \Theta(y_n)$ *следует соотношение* $x \in \Theta(y)$.

Теорема 1.1.2. *Многозначная функция* $\Theta : Y \to 2^X$, *где* X *– компактное метрическое пространство, полунепрерывна снизу в точке* $y \in Y$ *тогда и только тогда, когда из соотношений* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$, *и* $x \in \Theta(y)$ *следует существование последовательности* $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, *такой, что*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \ \ \text{и} \ \ x_n \in \Theta(y_n).$$

Определение 1.1.2 [47, гл. 1, § 29, I - VI]. Скажем, что точка z принадлежит *нижнему топологическому пределу последовательности множеств* $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ $(z \in \mathop{Li}\limits_{n\to+\infty} A_n)$ *в метрическом пространстве,* если произвольная окрестность этой точки пересекается со всеми множествами последовательности $\{A_n\}_{n\geq1}$ начиная с некоторого n_0.

Будем говорить, что точка z принадлежит *верхнему топологическому пределу последовательности множеств* $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ $(z \in \mathop{Ls}\limits_{n\to+\infty} A_n)$ *в метрическом пространстве,* если любая окрестность этой точки пересекается с бесконечным числом множеств A_n.

Последовательность множеств $\{A_n\}_{n\geq1}$ называется *сходящейся к множеству* A, *называемому топологическим пределом этой последовательности* $(A = \mathop{Lim}\limits_{n\to+\infty} A_n)$, если $\mathop{Li}\limits_{n\to+\infty} A_n = \mathop{Ls}\limits_{n\to+\infty} A_n = A$.

Используя понятия верхнего и нижнего предела последовательности множеств, замечаем, что, если X - компактное метрическое пространство, то полунепрерывность снизу многозначной функции Θ в точке y (см. теорему 1.1.1) равносильна выполнению включения $\Theta(y) \subset \mathop{Li}\limits_{n\to+\infty} \Theta(y_n)$, а ее полунепрерывность сверху в указанной точке (см. теорему 1.1.2) равносильна выполнению включения $\mathop{Ls}\limits_{n\to+\infty} \Theta(y_n) \subset \Theta(y)$. Отсюда немедленно получаем, что непрерывность Θ в точке y означает выполнение равенства

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\,\Theta(y_n) = \Theta(y) \tag{1.1.4}$$

для произвольной последовательности $\{y_n\}_{n\geq 1}$, сходящейся к y [47, гл. 4, § 43, II].

Если X – компактное метрическое пространство, то условия

$$\lim_{n\to+\infty} dist_X(A_n,\, A) = 0 \quad \text{и} \quad \underset{n\to+\infty}{Lim}\, A_n = A$$

эквивалентны для любых замкнутых непустых множеств A_n и A [47, гл. 4, § 42, II].

Определение 1.1.3. Многозначная функция $\Theta : I_1 \to (2^{I_2})_m$ называется *непрерывной* в точке $x' \in I_1$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta = \delta(x',\, \varepsilon)$ такое, что для произвольной точки $x \in I_1$, удовлетворяющей неравенству $|x - x'| < \delta$, выполнено неравенство $dist_{I_2}(\Theta(x),\, \Theta(x')) < \varepsilon$.

Если функция Θ непрерывна в каждой точке некоторого множества $E \subset I_1$, то говорим, что Θ *непрерывна на* E.

Из определения 0.0.6 и компактности отрезка I_2, хаусдорфовости I_1 и замкнутости $\Omega(F)$ $(C(F))$ следует, что Ω-функция (C-функция) косого произведения $F \in T^0(I)$ полунепрерывна сверху (см. [47, гл. 4, § 43, II], а также определение 1.1.1 и теорему 1.1.1).

Свойство полунепрерывности сверху Ω-функции (C-функции) содержит информацию о топологической структуре неблуждающего множества (множества центральных движений) косого произведения. Так, множество точек разрыва $S_d(\Omega^F)$ Ω-функции ($S_d(C^F)$ – C-функции), если оно непусто, есть граничное на компакте $\Omega(f)$ $(C(f))$ множество первой категории в смысле Бэра, а дополнительное к нему множество точек непрерывности $S_c(\Omega^F)$ Ω-функции ($S_c(C^F)$ C-функции) есть всюду плотное в $\Omega(f)$ $(C(f))$ множество второй категории в смысле Бэра [47, гл.4, §43, VII]. Используя классическую теорему Бэра о категории [47, гл.3, §34, IV], получаем отсюда, что множество точек непрерывности $S_c(\Omega^F)$ Ω-функции ($S_c(C^F)$ C-функции) непусто для любого отображения $F \in T^0(I)$.

В §3.1 указан пример отображения $F \in T^1(I)$, Ω-функция (C-функция) которого имеет всюду плотное в $\Omega(f)$ как множество точек разрыва типа F_σ, так и множество точек непрерывности типа G_δ (и является многозначным аналогом функции Римана в классическом анализе). А сейчас ограничимся двумя простыми примерами C^1-гладких косых произведений, каждое из которых имеет непрерывную Ω-функцию и непрерывную C-функцию.

Пример 1.1.1. Определим отображение $F_1 \in T^1([0,\,1] \times [-1,\,1+\varepsilon])$ $(0 < \varepsilon < 1)$, где

$$F_1(x,\,y) = (x,\,g_x(y)).$$

Для построения отображений в слоях будем использовать функцию $\psi \in C^1([-1,\,1])$, определяемую следующим равенством

$$\psi(y) = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad y \in [-1,\,-\frac{1}{2}); \\ 4y(1-|y|), & \text{если} \quad y \in [-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}); \\ 12(\frac{1}{4}-y)(y-\frac{3}{4})+\frac{1}{4}, & \text{если} \quad y \in [\frac{1}{2},\,\frac{3}{4}); \\ 128(1-y)^4-4(1-y)^2, & \text{если} \quad y \in [\frac{3}{4},\,1]. \end{cases} \tag{1.1.5}$$

График функции ψ представлен на рис 1.1. Заметим, что $\psi(1-\sqrt{\frac{1}{32}}) = 0$. Положим

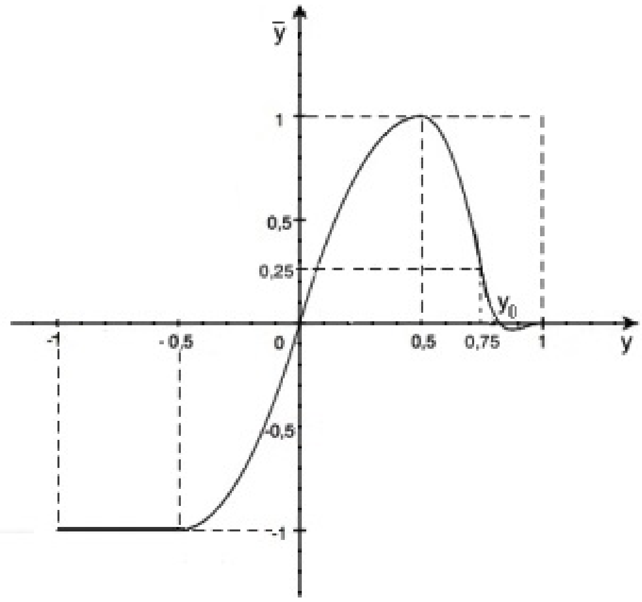


Рис. 1.1: *График функции* $\overline{y} = \psi(y)$.

$y_0 = 1-\sqrt{\frac{1}{32}}$. Тогда при всех $y \in (y_0,\,1]$ и $n \geq 1$ справедливо $\psi^n(y) \in (-1,\,0]$. Поэтому все точки множества $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} \psi^{-n}((y_0,\,1])$ являются блуждающими (здесь $\psi^{-n}(\cdot)$ означает

n-ный полный прообраз множества), блуждающими являются также и точки интервала $(-1,\, 0)$. Все остальные точки отрезка $[-1,\, 1]$ являются неблуждающими, т. е.

$$\Omega(\psi) = \{-1\} \cup ([0,\, 1] \setminus \bigcup_{n=0}^{+\infty} \psi^{-n}((y_0,\, 1]). \tag{1.1.6}$$

Возьмем произвольно и зафиксируем непустое замкнутое нигде не плотное множество $E \subset [0,\, 1]$. Определим "шапочку Урысона"$h \in C^1([0,\, 1])$ так, что $h(x) = 0$ при $x \in E$, и $0 < h(x) < 1$ при $x \in [0,\, 1] \setminus E$. С использованием функции h построим отображения в слоях $g_x(y)$, полагая

$$g_x(y) = \begin{cases} \psi(y), & \text{если} \quad (x,\, y) \in [-\frac{1}{20},\, 1] \times [-1,\, 1); \\ h(x)(y-1)^2, & \text{если} \quad (x,\, y) \in [-\frac{1}{20},\, 1] \times [1,\, 1+\varepsilon]. \end{cases} \tag{1.1.7}$$

Из формул (1.1.6) и (1.1.7) следует, что при любом $x \in E$ справедливо

$$\Omega(g_x) = \{-1\} \cup ([0,\, 1] \setminus \bigcup_{n=0}^{+\infty} g_x^{-n}((y_0,\, 1]), \tag{1.1.8}$$

а при любом $x \notin E$ справедливо

$$\Omega(g_x) = \{-1;\, 1\} \cup ([0,\, 1] \setminus \bigcup_{n=0}^{+\infty} g_x^{-n}((y_0,\, 1]). \tag{1.1.9}$$

Используя формулы (1.1.8) и (1.1.9), получаем, что

$$\Omega(F_1) = \bigcup_{x \in [0,\, 1]} \{x\} \times \left(\{-1;\, 1\} \cup ([0,\, 1] \setminus \bigcup_{n=0}^{+\infty} g_x^{-n}((y_0,\, 1]) \right);$$

$$C(F_1) = \bigcup_{x \in [0,\, 1]} \{x\} \times \left(\{-1\} \cup ([0,\, 1] \setminus \bigcup_{n=0}^{+\infty} g_x^{-n}((y_0,\, 1]) \right).$$

Поэтому при любом $x \in [0,\, 1]$ выполнено

$$\Omega^{F_1}(x) = \{-1;\, 1\} \cup ([0,\, 1] \setminus \bigcup_{n=0}^{+\infty} g_x^{-n}((y_0,\, 1]);$$

$$C^{F_1}(x) = \{-1\} \cup ([0,\, 1] \setminus \bigcup_{n=0}^{+\infty} g_x^{-n}((y_0,\, 1]),$$

и, следовательно, как Ω-функция, так и C-функция отображения F_1 непрерывна.

Пример 1.1.2. Рассмотрим косое произведение $F_2 : [0,\, 1]^2 \to [0,\, 1]^2$ такое, что $F_2(x,\, y) = (4x(1-x),\, x)$. Тогда якобиан этого отображения равен 0;

$$F_2([0,\, 1]^2) = \{(x,\, y) \in [0,\, 1]^2 : x = 4y(1-y)\} = \Omega(F_2) = C(F_2);$$

причем для любого $x \in [0,\, 1]$, где $[0,\, 1] = \Omega(f) = C(f)$, верно равенство:

$$\Omega^{F_2}(x) = C^{F_2}(x) = \Big\{\frac{1-\sqrt{1-x}}{2};\ \frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\Big\}.$$

В завершение данного раздела убедимся в справедливости следующего свойства Ω-функции (C-функции).

Лемма 1.1.3. *Пусть $F, \Phi \in T^0(I)$, где F определено равенством (0.0.2), а $\Phi(x,\, y) = (\varphi(x),\, \psi_x(y))$, причем существует гомеоморфизм $H : \Omega(F) \to \Omega(\Phi)$ такой, что $H(x,\, y) = (h_1(x),\, h_{2,\,x}(y))$, и $H \circ F_{|\Omega(F)} = \Phi_{|\Omega(\Phi)} \circ H$.*
Тогда Ω-функции $\Omega^F : \Omega(f) \to 2^{I_2}$ и $\Omega^\Phi : \Omega(\varphi) \to 2^{I_2}$ (C-функции $C^F : C(f) \to 2^{I_2}$ и $C^\Phi : C(\varphi) \to 2^{I_2}$) непрерывны или разрывны одновременно.

Доказательство. Для определенности, докажем, что свойство непрерывности Ω-функции отображения $F \in T^0(I)$ инвариантно относительно Ω-сопряженности, если сопрягающий гомеоморфизм является косым произведением. Для этого достаточно установить полунепрерывность снизу функции Ω^Φ, если функция Ω^F непрерывна. В силу теоремы 1.1.1 последнее означает, что для любой точки $x' \in \Omega(\varphi)$ и произвольной последовательности $\{x'_n\} \subset \Omega(\varphi)$, сходящейся к x', выполнено включение $\Omega^\Phi(x') \subset \underset{n\to+\infty}{Li}\, \Omega^\Phi(x'_n)$. Другими словами, Ω-функция Ω^Φ отображения $\Phi \in T^0(I)$ полунепрерывна снизу тогда и только тогда, когда для произвольной указанной выше последовательности $\{x'_n\}_{n\ge1}$, сходящейся к x', и любой точки $y' \in \Omega^\Phi(x')$ существует последовательность $\{y'_n\}_{n\ge1}$ такая, что $y'_n \in \Omega^\Phi(x'_n)$, и $\lim\limits_{n\to+\infty} y'_n = y'$.
Возьмем произвольно точку $x' \in \Omega(\varphi)$, последовательность $\{x'_n\} \subset \Omega(\varphi)$, сходящуюся к x', и точку $y' \in \Omega^\Phi(x') = (\Omega(\Phi))(x')$. Тогда существует единственная точка $(x;\, y) = H^{-1}(x',\, y')$, где $H^{-1} : \Omega(\Phi) \to \Omega(F)$ – гомеоморфизм, обратный к H. Так как H – косое произведение, то имеем: $x = h_1^{-1}(x') = \lim\limits_{n\to+\infty} h_1^{-1}(x'_n)$, а $y \in (\Omega(F))(x) = \Omega^F(x)$. Положим $x_n = h_1^{-1}(x'_n)$, $n \ge 1$. Из непрерывности Ω-функции Ω^F следует, что Ω^F полунепрерывна и сверху, и снизу (см. равенство (1.1.4)). Используя полунепрерывность снизу Ω-функции Ω^F в точке $x \in \Omega(f)$, укажем сходящуюся

к точке y последовательность $\{y_n\}_{n\geq 1}$, где $y_n \in \Omega^F(x_n) = (\Omega(F))(x_n)$. Тогда при всех $n \geq 1$ выполнено $H(x_n,\, y_n) = (x'_n,\, h_{2,\, x_n}(y_n))$.

Положим $h_{2,\, x_n}(y_n) = y'_n$. Имеем:

$$y'_n \in (\Omega(\Phi))(x'_n) = \Omega^{\Phi}(x'_n), \;\; \lim_{n\to+\infty} y'_n = \lim_{n\to+\infty} h_{2,\, x_n}(y_n) = h_{2,\, x}(y) = y'.$$

Таким образом, Ω^{Φ} полунепрерывна снизу. А так как Ω-функция Ω^{Φ} и полунепрерывна сверху, то Ω^{Φ} непрерывна.

Так как центр $C(F)$ отображения $F \in T^0(I)$ есть инвариант Ω-сопряженности (т. е. $H(C(F)) = C(\Phi)$), то, повторяя приведенные рассуждения для C-функций $C^F : C(f) \to 2^{I_2}$ и $C^{\Phi} : C(\varphi) \to 2^{I_2}$), убеждаемся в том, что они непрерывны или разрывны одновременно. Лемма 1.1.3 доказана.

Следствие 1.1.1. *Пусть выполнены условия леммы 1.1.3. Тогда для множеств точек непрерывности $S_c(\Omega^F)$ и $S_c(\Omega^{\Phi})$ Ω-функций Ω^F и Ω^{Φ} соответственно (для множеств точек непрерывности $S_c(C^F)$ и $S_c(C^{\Phi})$ C-функций C^F и C^{Φ} соответственно) справедливо равенство*

$$h_1(S_c(\Omega^F)) = S_c(\Omega^{\Phi}) \qquad (h_1(S_c(C^F)) = S_c(C^{\Phi})).$$

Результаты подпараграфа 1.1.1 опубликованы в работах автора [60] – [61]; [65] – [66]; [75]; [81].

1.1.2 Вспомогательные и подходящие многозначные функции

Важную роль в описании структуры неблуждающего множества и центра д. с. (0.0.2) играют специальные многозначные функции, связанные с всевозможными итерациями рассматриваемой системы.

Как отмечалось во Введении, произвольная итерация F^n $(n \geq 1)$ косого произведения $F \in T^0(I)$ представима в виде

$$F^n = F_{n,\,1} \circ F_n \;\; \text{(см. формулу (0.0.15))},$$

где в силу равенства (0.0.13)

$$F_n(x,\, y) = (id(x),\, g_{x,\,n}(y)),$$

а в силу равенства (0.0.14)

$$F_{n,1}(x,\, y) = (f^n(x),\, id(y)).$$

Отображение $F_n : I \to I$ "останавливает движение"в базе I_1 (любая точка $x \in I_1$ является неподвижной для его факторотображения $id(x)$). Это приводит к F_n-инвариантности каждого вертикального слоя $\{x\} \times I_2$. Отображение $F_{n,1} : I \to I$ "останавливает движение"в вертикальных слоях (любая точка $y \in I_2$ является неподвижной для отображения $id(y)$ в произвольном вертикальном слое), и это приводит к $F_{n,1}$-инвариантности горизонтальных слоев $I_1 \times \{y\}$.

Формула (0.0.15) позволяет связать с каждой итерацией F новые многозначные функции, с помощью графиков которых формируется неблуждающее множество (центр) косого произведения $F \in T^0(I)$ (или, что то же самое, график Ω-функции (C-функции) отображения F).

Прежде, чем определить эти новые функции, обратим внимание на свойства множества неблуждающих точек итераций отображений интервала (см. [128], [129]).

Предложение 1.1.1. *Пусть* $f \in C^0(I_k)$ $(k = 1,\, 2)$*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $\Omega(f^{2^i}) = \Omega(f^{2^i(2j+1)})$ *при всех* $i \geq 0,\ j \geq 1$.

(2) *Для произвольного подмножества* M *множества* $\mathbf{N}$ *натуральных чисел существует отображение* f_M *такое, что*

(2.1) $\Omega(f_M^{2^{i-1}}) \neq \Omega(f_M^{2^i})$*, если* $i \in M$*;*

(2.2) $\Omega(f_M^{2^{i-1}}) = \Omega(f_M^{2^i})$*, если* $i \in \mathbf{N} \setminus M$*.*

Таким образом, если f – эндоморфизм, то равенство $\Omega(f^n) = \Omega(f)$ может не выполняться. Анализ причин нарушения указанного равенства можно найти, например, в монографии [23]. В то же время, как следует из результатов статьи [126] (см. далее предложение 1.2.2), при любых $n \geq 1$ справедливо $C(f) = C(f^n)$.

Предположим, что для факторотображения f косого произведения отображений интервала $F \in T^r(I)$ $(r = 0$ или $1)$ выполнено равенство $\Omega(f^n) = \Omega(f)$. Последнее справедливо, например, для непрерывных отображений отрезка с замкнутым множеством периодических точек, C^1-гладких Ω-устойчивых отображений отрезка (косые произведения с факторами такого рода рассматриваются в данной диссертации).

В силу определения 0.0.7 при любом $x \in \Omega(f)$ $(x \in C(f))$ для вспомогательных функций к Ω-функции (к C-функции) выполнено:

$$\Omega_n^F(x) = \Omega(g_{x,n}) \ \ [65], \quad (C_n^F(x) = C(g_{x,n}) \ \ [66]).$$

Укажем, что функции $\Omega_n^{F_1}$, построенные для отображения F_1 из примера 1.1.1 при любом $n \geq 1$, разрывны в каждой точке множества E и непрерывны в каждой точке дополнительного множества $[0,\,1] \setminus E$. Здесь каждая точка множества E не является точкой полунепрерывности сверху функции $\Omega_n^{F_1}$ (отображения $g_{x,n} : I_2 \to I_2$ при любых $x \in E$ и $n \geq 1$ допускают C^1- Ω-взрыв (см. далее раздел 1.2.3)).

В отличие от функций $\Omega_n^{F_1}$, функции $C_n^{F_1}$, построенные для отображения F_1 из примера 1.1.1, непрерывны: здесь $C_n^{F_1}(x) = \{-1\} \cup ([0,\,1] \setminus \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} g_x^{-n}((y_0,\,1])$ при любых $x \in [0,\,1]$ и $n \geq 1$.

Что касается функций $\Omega_n^{F_2}$ и $C_n^{F_2}$ $(n \geq 1)$, построенных для отображения F_2 из примера 1.1.2, то эти функции непрерывны, так как при любом $x \in [0,\,1]$ справедливо равенство $\Omega_n^{F_2}(x) = C_n^{F_2}(x) = \{f^{n-1}(x)\}$ (здесь $f(x) = 4x(1-x)$).

В силу определения 0.0.7 (см. Введение) *подходящими к Ω-функции отображения $F \in T^0(I)$ многозначными функциями* названы функции $\overline{\Omega}_n^F : \Omega(f) \to 2^{I_2}$, $n \geq 1$, графиками которых в I служат замыкания графиков вспомогательных функций Ω_n^F; при этом

$$\overline{\Omega}_n^F(x) = (\overline{\Omega}_n^F)(x) \ \text{ для каждого } x \in \Omega(f)$$

Здесь $(\overline{\Omega}_n^F)(x)$ – срез графика функции $\overline{\Omega}_n^F$ (или, что то же самое, срез замыкания графика функции Ω_n^F слоем над точкой x.

В отличие от вспомогательных функций, которые допускают точки разрыва, не являющиеся точками полунепрерывности сверху (ситуация Ω-взрыва в семействе отображений в слоях соответствующих итераций F), подходящие функции могут иметь только лишь точки разрыва, являющиеся точками полунепрерывности сверху.

Отметим, что функции $\overline{\Omega}_n^{F_1}$, подходящие к Ω-функции косого произведения F_1 из примера 1.1.1, непрерывны при любом $n \geq 1$ на отрезке $[0,\,1]$, так как при всех $n \geq 1$ и $x \in [0,\,1]$ справедливо равенство

$$\overline{\Omega}_n^{F_1}(x) = \{-1,\ 1\} \cup ([0,\,1] \setminus \bigcup_{n=0}^{+\infty} g_x^{-n}((y_0,\,1]).$$

Для функций $\overline{\Omega}_n^{F_2}$, подходящих к Ω-функции отображения F_2 из примера 1.1.2, верно равенство $\overline{\Omega}_n^{F_2} = \Omega_n^{F_2}$. Следовательно, функции $\overline{\Omega}_n^{F_2}$ непрерывны при всех $n \geq 1$.

Для описания неблуждающего множества косых произведений отображений интервала нам потребуется выяснить взаимосвязь между Ω-функцией рассматриваемого косого произведения и вспомогательными (подходящими) функциями. С этой целью будем использовать указанные выше прямые произведения $F_{n,\,1}$.

Действительно, после того, как при всех $n \geq 1$ определены вспомогательные функции Ω_n^F (подходящие функции $\overline{\Omega}_n^F$) для Ω-функции, каждую точку $(x;\, y)$, принадлежащую графику Ω_n^F (графику $\overline{\Omega}_n^F$), следует переместить в точку $(f^n(x);\, y)$ с помощью прямого произведения $F_{n,\,1}$ (см. равенство (0.0.15)). Таким образом, естественно возникают многозначные функции $\Omega_{n,\,1}^F : \Omega(f) \to 2^{I_2}$ $(n \geq 1)$, определенные в силу равенств

$$\Omega_{n,\,1}^F(x) = (F_{n,\,1}(\Omega_n^F))(x),$$

а также многозначные функции $\overline{\Omega}_{n,\,1}^F : \Omega(f) \to 2^{I_2}$ $(n \geq 1)$, определенные в силу равенств

$$\overline{\Omega}_{n,\,1}^F(x) = (F_{n,\,1}(\overline{\Omega}_n^F))(x)$$

для любого $x \in \Omega(f)$; здесь Ω_n^F, а также $\overline{\Omega}_n^F$ – графики соответствующих многозначных функций в I, $(F_{n,\,1}(\Omega_n^F))(x)$, а также $(F_{n,\,1}(\overline{\Omega}_n^F))(x)$ – срезы множеств $F_{n,\,1}(\Omega_n^F)$, а также $F_{n,\,1}(\overline{\Omega}_n^F)$ соответственно слоем над точкой $x \in \Omega(f)$.

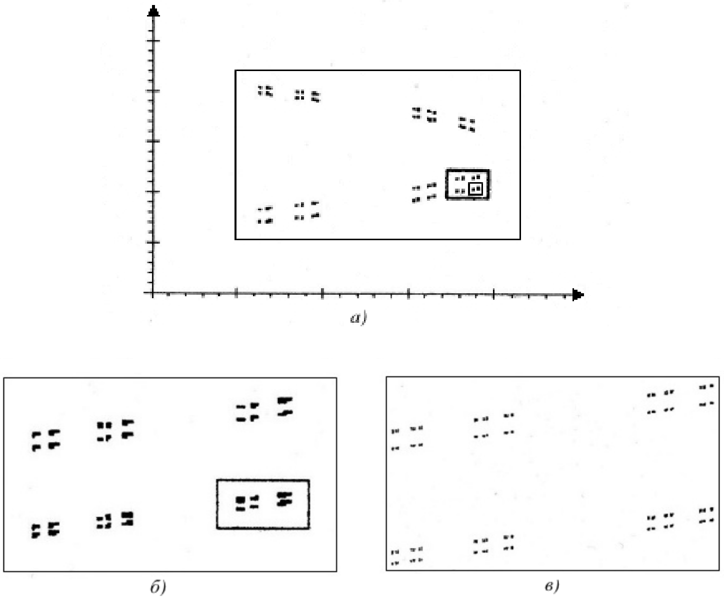
Так как в любую точку $(x;\, y)$ на графике функции $\Omega_{n,\,1}^F$, а также на графике функции $\overline{\Omega}_{n,\,1}^F$ мы приходим, используя $F_{n,\,1}$, из каждой точки $(\overline{x};\, y)$, где $\overline{x}$ – произвольная точка n-ного полного прообраза x относительно отображения $f_{|\Omega(f)}$, то справедливы следующие равенства:

$$\Omega_{n,\,1}^F(x) = \bigcup_{\overline{x} \in \{(f_{|\Omega(f)})^{-n}(x)\}} \Omega_n^F(\overline{x}) \qquad \overline{\Omega}_{n,\,1}^F(x) = \bigcup_{\overline{x} \in \{(f_{|\Omega(f)})^{-n}(x)\}} \overline{\Omega}_n^F(\overline{x}), \tag{1.1.10}$$

где $\{(f_{|\Omega(f)})^{-n}(x)\}$ – n-ный полный прообраз точки x относительно $f_{|\Omega(f)}$.

Замечание 1.1.1. Свойство, определяемое равенствами (1.1.10), можно рассматривать как "эффект запоминания прошлого" в косых произведениях. Это свойство наблюдалось также в численном эксперименте, представленном в [130].

Рисунки 1.2а - 1.2в демонстрируют влияние "памяти" на структуру неблуждающего множества отображения $F(x,\, y) = (f(x),\, 0,5x + 0,1y)$, где $F : [0,\, 1]^2 \to [0,\, 1]^2$, f


а)

б)

в)

Рис. 1.2: *а) Совершенная часть неблуждающего множества отображения F; б) Часть неблуждающего множества в первом вложенном прямоугольнике; в) часть неблуждающего множества во втором вложенном прямоугольнике.*

определено далее (см. формулу (3.1.1)). Так, существование двух различных прообразов относительно $f_{|\Omega_p(f)}$ у каждой точки множества $\Omega_p(f)$ приводит к удвоению непрерывных селекций (однозначных непрерывных ветвей) у графика Ω-функции отображения F.

Замечание 1.1.2. График полунепрерывной сверху функции $\overline{\Omega}_n^F$ – замкнутое множество (здесь $n \geq 1$). Так как множество $(f_{|\Omega(f)})^{-n}(x)$ замкнуто, то отсюда следует замкнутость множества $\bigcup\limits_{\overline{x}\in\{(f_{|\Omega(f)})^{-n}(x)\}} \overline{\Omega}_n^F(\overline{x})$ и корректность второго из равенств (1.1.10). Таким образом, функции $\overline{\Omega}_{n,1}^F$ полунепрерывны сверху, как и порождающие их подходящие функции $\overline{\Omega}_n^F$.

Замечание 1.1.3. Укажем, что, если при любых $x \in \Omega(f)$ и $n \geq 1$ множество $\{f^{-n}(x)\}$ конечно, то из равенств (1.1.10) следует, что многозначная функция $\Omega_{n,1}^F$ наследует свойства многозначной функции Ω_n^F. Так, если Ω_n^F полунепрерывна сверху (снизу), то $\Omega_{n,1}^F$ также полунепрерывна сверху (снизу); более того, если Ω_n^F непрерывна, то $\Omega_{n,1}^F$ также непрерывна [47, гл.1, §18, IV]. Как отмечалось ранее, функции Ω_n^F, $n \geq 1$, могут иметь точки разрыва, которые не являются точками полунепрерывности сверху.

Для отображения F_1 из примера 1.1.1 выполнено $\Omega^{F_1}_{n,\,1} = \Omega^F_n$, а для отображения F_2 из примера 1.1.2 – $(\Omega^{F_2}_{n,\,1})(x) = \bigcup\limits_{\overline{x}\in\{f^{-n}(x)\}} \{f^{n-1}(\overline{x})\} = \{f^{-1}(x)\}$ $(n \geq 1)$.

Завершая эту часть работы и забегая вперед, отметим, что результаты § 1.2 позволят, в частности, указать динамический смысл функций, подходящих к Ω-функции произвольного непрерывного косого произведения отображений интервала.

Результаты подпараграфа 1.1.2 опубликованы в статьях [65] – [66], [73] – [75], [81].

1.2 О неблуждающем множестве косых произведений с замкнутым множеством периодических точек в базе

Основное содержание этой части работы составляет доказательство теоремы 1.2.1 о структуре неблуждающего множества непрерывных косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек в базе. Эта теорема отвечает на вопрос о том, какой вклад в структуру неблуждающего множества произвольной динамической системы $F \in T^0(I)$ с замкнутым множеством периодических точек фактороотображения вносят неблуждающие множества отображений $g_{x,n}$ $(n \geq 1)$ при всех x из некоторой окрестности множества $\Omega(f) = Per(f)$.

Прежде всего, напомним (см. Введение), что, в частности, многозначные функции Ω^F_n и $\Omega^F_{n,1}$, построенные для произвольного косого произведения $F \in T^0(I)$, допускают естественные расширения $(\Omega^F_n)^{ex}$ на отрезок I_1 и $(\Omega^F_{n,1})^{ex}$ на отрезок $f^n(I_1)$ $(n \geq 1)$ соответственно, если $\Omega(f) \neq I_1$. При этом, каково бы ни было $n \geq 1$, выполнено

$$((\Omega^F_n)^{ex})(x) = \Omega(g_{x,\,n}), \text{ для всех } x \in I_1 \text{ и}$$

$$((\Omega^F_{n,1})^{ex})(x) = (F_{n,\,1}((\Omega^F_n)^{ex}))(x) \text{ для всех } x \in f^n(I_1),$$

где $(\Omega^F_n)^{ex}$ в правой части второго равенства – график соответствующей многозначной функции, $(F_{n,\,1}((\Omega^F_n)^{ex}))(x)$ – срез множества $F_{n,\,1}((\Omega^F_n)^{ex})$ слоем над точкой x.

Пусть натуральное число $l_n,\ n \geq 0$, есть элемент множества $\tau(f)$ наименьших периодов периодических точек фактора f произвольного отображения $F \in T^0(I)$. Используем множества $Per(f,\, l_n)$ всех тех f-периодических точек, (наименьший) период каждой из которых делит l_n.

Для непрерывных отображений отрезка с замкнутым множеством периодических точек верно равенство $l_n = 2^n,\ n \geq 0$ (т. е. (наименьшие) периоды этих точек образуют множества $\{1,\, 2,\, 2^2,\, \dots, 2^n\}$ [106]). С помощью множеств $Per(f,\, l_n)$ определим многозначные функции (см. формулы (0.0.17) и пояснения к ним)

$$(\Omega^F_{l_n})'_{|Per(f,\, l_n)} = \bigcup_{i=0}^{n} \Omega^F_{l_i\, |Per(f,\, l_i)}; \quad (\Omega^F_{l_n,\, 1})'_{|Per(f,\, l_n)} = \bigcup_{i=0}^{n} \Omega^F_{l_i,\, 1|Per(f,\, l_i)}. \tag{1.2.1}$$

Положим $(\Omega^F_{l_n,1})^{ex'} = \bigcup\limits_{i=0}^{n} (\Omega^F_{l_i,1})^{ex}$ при всех $x \in \bigcap\limits_{i=0}^{n} f^{l_i}(I_1)$.

В пояснение приведенных формул укажем, что, например, первое из равенств (1.2.1) при любом $x \in Per(f,\, l_n)$ следует понимать в естественном смысле

$$(\Omega^F_{l_n})'_{|Per(f,\, l_n)}(x) = (\bigcup_{i=0}^{n} \Omega^F_{l_i\, |Per(f,\, l_i)})(x) = \bigcup_{i=0}^{n} (\Omega^F_{l_i\, |Per(f,\, l_i)})(x) = \bigcup_{i=0}^{n} \Omega^F_{l_i\, |Per(f,\, l_i)}(x),$$

где $(\cdot)(x)$ означает, как обычно, срез множества (графика соответствующей многозначной функции) слоем над точкой x (см. равенство (0.0.11)). Если $x \notin Per(f,\, l_i)$ при некотором $1 \leq i \leq n-1$, то $(\Omega^F_{l_i\, |Per(f,\, l_i)})(x) = \Omega^F_{l_i\, |Per(f,\, l_i)}(x) = \emptyset$.

Теорема 1.2.1 *Пусть факторотображение f косого произведения отображений интервала $F \in T^0(I)$ имеет замкнутое множество периодических точек $Per(f)$. Тогда существуют и равны между собой топологические пределы $\underset{n\to+\infty}{Lim} (\Omega^F_{l_n,\, 1})'_{|Per(f,\, l_n)}$ и $\underset{n\to+\infty}{Lim} (\Omega^F_{l_n})'_{|Per(f,\, l_n)}$, причем справедливы равенства:*

$$\begin{aligned} \Omega^{F_{|Per(f)\times I_2}} &= \underset{n\to+\infty}{Lim} (\Omega^F_{l_n,1})'_{|Per(f,\, l_n)} = \underset{n\to+\infty}{Lim} (\Omega^F_{l_n})'_{|Per(f,\, l_n)} \\ &= \overline{\bigcup_{x \in Per(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)}, \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

где $(\Omega^F_{l_n,\, 1})'_{|Per(f,\, l_n)}$, $(\Omega^F_{l_n})'_{|Per(f,\, l_n)}$, $\Omega^{F_{|Per(f)\times I_2}}$ – графики соответствующих многозначных функций в I;

более того, если x – периодическая точка f с (наименьшим) периодом $l(x)$, предельная для непериодических точек f, то

$$\Omega^F(x) = (\underset{n\to+\infty}{Ls} (\Omega^F_{l(x)n,1})^{ex'}{}_{|U_{1,\, \varepsilon_n}(x)})(x), \tag{1.2.3}$$

где $\underset{n\to+\infty}{Ls}(\cdot)_n$ *– верхний топологический предел последовательности множеств,* $(\Omega^F_{l(x)n,1})^{ex'}{}_{|U_{1,\,\varepsilon_n}(x)}$ *– график соответствующей многозначной функции,* $U_{1,\,\varepsilon_n}(x)$ *– произвольная* ε_n*-окрестность точки* $x \in Per(f)$ *такая, что* $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$*,* $(\cdot)(x)$ *– срез множества вертикальным слоем над точкой* x*.*

Замечание 1.2.1. Равенство (1.2.2) содержит информацию о вкладе отображений в слоях над неблуждающими точками фактора в структуру неблуждающего множества косого произведения $F \in T^0(I)$ с замкнутым множеством периодических точек фактороотображения, а равенство (1.2.3) учитывает еще и вклад отображений в слоях над блуждающими точками фактороотображения в структуру неблуждающего множества F.

Рассмотрения §1.2 (также, как и следующего §1.3), прежде всего, основаны на использовании результатов о динамических свойствах непрерывных отображений отрезка с замкнутым множеством периодических точек.

1.2.1 Предварительные сведения о динамике непрерывных отображений отрезка с замкнутым множеством периодических точек

Прежде, чем сформулировать основные свойства непрерывных отображений отрезка с замкнутым множеством периодических точек, укажем, что основополагающую роль в топологической динамике отображений отрезка играет

Теорема А.Н. Шарковского [30]. *Если отображение* $\varphi \in C^0(I_k)$ *(*$k = 1, 2$*) содержит периодическую орбиту периода* $m > 1$*, то оно содержит также и периодические орбиты каждого периода* n *такого, что* n *предшествует* m *(*$n \prec m$*) в порядке А.Н. Шарковского:*

$$\begin{aligned} &1 \prec 2 \prec 2^2 \prec 2^3 \prec \ldots \prec \ldots \prec 2^2 \cdot 9 \prec 2^2 \cdot 7 \prec 2^2 \cdot 5 \prec 2^2 \cdot 3 \prec \ldots \\ &\prec 2 \cdot 9 \prec 2 \cdot 7 \prec 2 \cdot 5 \prec 2 \cdot 3 \prec \ldots \prec 9 \prec 7 \prec 5 \prec 3 \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

По характеру динамического поведения траекторий все пространство непрерывных отображений отрезка разбивается на 3 подпространства (см. [22]– [23]): первое подпространство образовано отображениями *типа* $\prec 2^\infty$, то есть отображениями, содержащими периодические точки с (наименьшими) периодами $\{1,\,2,\,2^2,\,\ldots 2^\nu\}$ при произвольном (зависящем от отображения) $0 \le \nu < +\infty$; второе подпространство составляют отображения *типа* 2^∞, то есть отображения с периодическими точками, имеющими периоды вида $\{1,\,2,\,2^2,\,\ldots 2^i,\,2^{i+1},\ldots\}$; и третье подпространство образовано отображениями *типа* $\succ 2^\infty$, то есть отображениями, содержащими периодические точки с (наименьшими) периодами $\notin \{2^i\}_{i\ge 0}$.

Любое непрерывное отображение отрезка типа $\prec 2^\infty$, как отображение с ограниченным множеством (наименьших) периодов периодических точек, имеет замкнутое множество периодических точек. В то же время существуют непрерывные, но не гладкие (см. предложение 1.2.3), отображения отрезка типа 2^∞ с замкнутым множеством периодических точек [106] (см. также [23]).

Для изучения неблуждающего множества и центра произвольного косого произведения отображений интервала требуется информация о тонких элементах структуры, прежде всего, неблуждающего множества факторотображения и динамики на нем. Такая детальная информация известна, в первую очередь, для непрерывных отображений отрезка с замкнутым множеством периодических точек (см. предложения 1.2.1 – 1.2.3, которые мы сформулируем, следуя оригинальным результатам статей [106], [126], [131] – [134]).

Предложение 1.2.1. *Если множество периодических точек $Per(f)$ отображения $f \in C^0(I_1)$ замкнуто, то*

(1) $\tau(f) = \{1,\,2,\,2^2,\ldots,\,2^\nu\}$*, где* $\tau(f)$ *– множество (наименьших) периодов периодических точек* f*,* $0 \le \nu \le +\infty$ *[106];*

(2) *для каждой точки* $x^0 \in Per(f)$ *найдется окрестность* $U_1(x^0) \subset I_1$ *со следующим свойством:*

$$U_1(x^0) \bigcap f^n(U_1(x^0)) \ne \emptyset$$

в том и только том случае, если n *кратно периоду* $n(x^0) = 2^{i_0}$ *точки* x^0 *[131];*

(3) *произвольная последовательность периодических точек* f*, сходящаяся к* x^0*, обладает следующим свойством: последовательность траекторий этих точек сходится к траектории точки* x^0 *[132].*

Для того, чтобы сформулировать следующий критерий различения непрерывных отображений отрезка с замкнутым множеством периодических точек, нам потребуются определения цепно-рекуррентных и слабо неблуждающих точек.

В § 2.1 главы 2 будет использовано понятие цепно-рекуррентных точек косых произведений отображений интервала. Чтобы охватить и случай отображений отрезка, и случай косых произведений отображений интервала, мы приведем общее определение цепно-рекуррентных точек для непрерывных отображений метрических компактов.

Определение 1.2.1 [36, гл. 1, § 2]. Пусть X – метрический компакт, d – метрика на X, а $\varphi : X \to X$ – непрерывное отображение. Точка $x \in X$ называется *цепно-рекуррентной для отображения* φ, если для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-цепь относительно отображения φ, ведущая из x в x.
Множество цепно-рекуррентных точек отображения обозначим через $CR(\cdot)$.

Определение 1.2.2 [22, гл. 3, § 2]. Точка $x \in I_1$ называется *слабо неблуждающей для отображения* $f \in C^r(I_1)$ *(*$r = 0$ *или* 1*)*, если для любой окрестности $U_1(x)$ точки $x \in I_1$ и любой ε-окрестности $B^r_{1,\varepsilon}(f)$ отображения $f \in C^r(I_1)$ существуют отображение $\varphi \in B^r_{1,\varepsilon}(f)$ и натуральное число m такие, что

$$U_1(x) \cap \varphi^m(U_1(x)) \neq \emptyset.$$

Множество слабо неблуждающих точек отображения $f \in C^r(I_1)$ обозначим $WN^r(f)$.

Предложение 1.2.2. *Для отображения* $f \in C^0(I_1)$ *следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *множество* $Per(f)$ *периодических точек* f *замкнуто;*

(2) *справедливы равенства* $Per(f) = \Omega(f) = C(f) = CR(f) = WN^0(f)$ *[126], [133], [134];*

(3) ω*-предельное множество* $\omega_f(x)$ *произвольной точки* $x \in I_1$ *есть периодическая орбита [126], [106].*

Предложение 1.2.3. *Для отображения* $f \in C^1(I_1)$ *следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *множество* $Per(f)$ *периодических точек* f *замкнуто;*

(2) *справедливо равенство* $\tau(f) = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^\nu\}$*, где* $0 \leq \nu < +\infty$ *[132].*

Завершая эту часть работы, сформулируем два общих утверждения, справедливых для произвольных непрерывных отображений отрезка: критерий различения неблуждающих точек непрерывных отображений отрезка [133] и теорему о центре непрерывного отображения отрезка [126].

Предложение 1.2.4. *Каково бы ни было* $g \in C^0(I_2)$, *точка* y *является неблуждающей для* g *в том и только том случае, если для любой окрестности* $U_2(y)$ *точки* y *в* I_2 *существуют* $y' \in U_2(y)$ *и* $m' \geq 1$ *такие, что* $g^{m'}(y') = y$ *[133].*

Предложение 1.2.5. *Для произвольного отображения* $f \in C^0(I_1)$ *справедливо равенство*

$$C(f) = \overline{Per(f)} = \Omega(f_{|\Omega(f)}) \ [126].$$

Сформулируем также используемую в дальнейшем теорему сосуществования периодов периодических точек косых произведений отображений интервала.

Обобщенная теорема А.Н. Шарковского [29]. *Любое косое произведение* $F \in T^0(I)$, *содержащее периодическую орбиту периода* $m > 1$, *содержит также и периодические орбиты каждого периода* n, *предшествующего* m *в порядке (1.2.4).*

1.2.2 Доказательство первой части теоремы о структуре неблуждающего множества

Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение, непосредственно вытекающее из утверждения (2) предложения 1.2.1 и определения 0.0.3.

Лемма 1.2.1. *Пусть периодические точки фактороотображения* $f : I_1 \to I_1$ *косого произведения* $F \in T^0(I)$ *образуют замкнутое множество. Тогда, если* x^0 *– периодическая точка* f *периода* $n(x^0) = 2^{i_0}$ $(i_0 \geq 1)$, *то следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $(x^0, y^0) \in \Omega(F)$; *(2)* $(x^0, y^0) \in \Omega(F^{n(x^0)})$.

Доказательство первой части теоремы 1.2.1, состоящей в доказательстве равенства (1.2.2), разобьем на два этапа, рассмотренные в леммах 1.2.2 и 1.2.3. Наряду с результатами о непрерывных отображениях отрезка с замкнутым множеством периодических точек, приведенными в п. 1.2.1, нам потребуются Ω-функция и функции $(\Omega^F_{l_n})'$, $(\Omega^F_{l_n,1})'$. Укажем, что в силу утверждения (2) предложения 1.2.2 функции

$(\Omega^F_{l_n})'$, $(\Omega^F_{l_n,1})'$ определены на множестве $Per(f)$.

Лемма 1.2.2. *Если множество $Per(f)$ факторотображения f отображения $F \in T^0(I)$ замкнуто, то существуют топологические пределы $\underset{n\to+\infty}{Lim}\,(\Omega^F_{l_n,1})'_{|Per(f,l_n)}$ и $\underset{n\to+\infty}{Lim}\,(\Omega^F_{l_n})'_{|Per(f,l_n)}$, причем*

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\,(\Omega^F_{l_n,1})'_{|Per(f,l_n)} = \underset{n\to+\infty}{Lim}\,(\Omega^F_{l_n})'_{|Per(f,l_n)} = \overline{\bigcup_{x\in Per(f)} \{x\}\times\Omega(\widetilde{g}_x)}; \tag{1.2.5}$$

где $\{(\Omega^F_{l_n,1})'_{|Per(f,l_n)}\}_{n\geq 1}$ ($\{(\Omega^F_{l_n})'_{|Per(f,l_n)}\}_{n\geq 1}$) – последовательность графиков функций $(\Omega^F_{l_n,1})'_{|Per(f,l_n)}$ ($(\Omega^F_{l_n})'_{|Per(f,l_n)}$) в I.

Доказательство. 1. Заметим, что в силу первой из формул (1.2.1) включения

$$(\Omega^F_{l_n})'_{|Per(f,l_n)} \subseteq (\Omega^F_{l_{n+1}})'_{|Per(f,l_{n+1})} \tag{1.2.6}$$

справедливы для любого $n \geq 0$.

Включения (1.2.6) вместе с определением многозначных функций $(\Omega^F_{l_n})'$ влекут за собой существование топологического предела $\underset{n\to+\infty}{Lim}\,(\Omega^F_{l_n})'_{|Per(f,l_n)}$ (см. [47, гл.2, §29, IV]) и справедливость равенства

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\,(\Omega^F_{l_n})'_{|Per(f,l_n)} = \overline{\bigcup_{x\in Per(f)} \{x\}\times\Omega(\widetilde{g}_x)}. \tag{1.2.7}$$

Обратим внимание на случай ограниченного множества $\tau(f)$ (при этом $\nu < +\infty$). Имеем:

$$(\Omega^F_{l_n})'_{|Per(f,l_n)} = (\Omega^F_{l_\nu})'_{|Per(f,l_\nu)} \tag{1.2.8}$$

для всех $n \geq \nu$.

2. В силу формул (1.1.10) и (1.2.1) равенства

$$\Omega^F_{l_n,1|Per(f,l_n)} = \Omega^F_{l_n|Per(f,l_n)}, \quad (\Omega^F_{l_n,1})'_{|Per(f,l_n)} = (\Omega^F_{l_n})'_{|Per(f,l_n)} \tag{1.2.9}$$

справедливы для всех $n \geq 0$. Тогда из (1.2.6), (1.2.7) и (1.2.9) следует существование топологического предела:

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\,(\Omega^F_{l_n,1})'_{|Per(f,l_n)} = \underset{n\to+\infty}{Lim}\,(\Omega^F_{l_n})'_{|Per(f,l_n)} = \overline{\bigcup_{x\in Per(f)} \{x\}\times\Omega(\widetilde{g}_x)}. \tag{1.2.10}$$

Если множество $\tau(f)$ ограничено, то, используя формулы (1.2.8) и (1.2.9), получаем

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\,(\Omega^F_{l_n,1})'_{|Per(f,l_n)} = \overline{(\Omega^F_{l_\nu})'}_{|Per(f,l_\nu)} = \overline{\bigcup_{x\in Per(f)} \{x\}\times\Omega(\widetilde{g}_x)}. \tag{1.2.11}$$

Лемма 1.2.2 доказана.

Лемма 1.2.3. *Пусть выполнены условия леммы 1.2.2. Тогда справедливо равенство*

$$\Omega^{F_{|Per(f)\times I_2}} = \underset{n\to+\infty}{Lim}\, {(\Omega^F_{l_n,\,1})'}_{|Per(f,\,l_n)}. \tag{1.2.12}$$

Доказательство. Положим $\Omega^*(F) = Per(f)\times I_2$. В силу леммы 1.2.2 справедливо включение

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\, {(\Omega^F_{l_n,\,1})'}_{|Per(f,\,l_n)} \subset \Omega^{F_{|\Omega^*(F)}}. \tag{1.2.13}$$

2. Убедимся в том, что верно противоположное включение

$$\Omega^{F_{|\Omega^*(F)}} \subset \underset{n\to+\infty}{Lim}\, {(\Omega^F_{l_n,\,1})'}_{|Per(f,\,l_n)}. \tag{1.2.14}$$

Для этого покажем, что для произвольной точки $(x,\,y)\in\Omega^*(F)$ такой, что $(x,\,y)\notin \underset{n\to+\infty}{Lim}\, {(\Omega^F_{l_n,\,1})'}_{|Per(f,\,l_n)}$ выполнено $(x,\,y)\notin\Omega^{F_{|\Omega^*(F)}}$.

В самом деле, пусть окрестности $U((x,\,y))$ точки $(x,\,y)\in\Omega^*(F)$ и $U(L^*)$ замкнутого множества $L^* = \underset{n\to+\infty}{Lim}\, {(\Omega^F_{l_n,\,1})'}_{|Per(f,\,l_n)}$ таковы, что

$$U((x,\,y))\bigcap U(L^*) = \emptyset.$$

Так как $\underset{n\to+\infty}{Lim}\, {(\Omega^F_{l_n,\,1})'}_{|Per(f,\,l_n)} = \underset{n\to+\infty}{Lim}\, {(\overline{\Omega}^F_{l_n,\,1})'}_{|Per(f,\,l_n)}$, то окрестность $U((x,\,y))$ может пересекаться лишь с конечным числом множеств последовательности $\{{(\overline{\Omega}^F_{l_n,\,1})'}_{|Per(f,\,l_n)}\}_{n\geq 1}$. В случае необходимости выберем окрестность $U((x,\,y))$ точки $(x,\,y)$ так, чтобы она не пересекалась ни с одним из множеств указанной выше последовательности.

Пусть $n(x) = 2^{i(x)}$ – (наименьший) период точки x. Может случиться, что при некотором $j'\geq 1$ для полного прообраза порядка $2^{i(x)}j'$ окрестности $U((x,\,y))$ относительно отображения $F_{|\Omega^*(F)}$ выполнено ${F_{|\Omega^*(F)}}^{-2^{i(x)}j'}(U((x,\,y))) = \emptyset$. Тогда при всех $j\geq j'$ имеем:

$$U((x,\,y))\cap {F_{|\Omega^*(F)}}^{2^{i(x)}j}(U'((x,\,y))) = \emptyset, \quad \text{и} \quad (x,\,y)\notin\Omega^{F^{2^{i(x)}}_{|\Omega^*(F)}}.$$

Используя лемму 1.2.1, получаем отсюда, что $(x,\,y)\notin\Omega^{F_{|\Omega^*(F)}}$.

Рассмотрим другую возможность. Пусть при всех $j\geq 1$ выполнено ${F_{|\Omega^*(F)}}^{-n(x)j}(U'((x,\,y)))\neq\emptyset$ для произвольной подокрестности $U'((x,\,y))$ окрестности

$U((x,\, y))$. В силу формулы (0.0.14) отображение $F_{l_i,\, 1|\Omega^*(F)}$ – сюръекция множества $\Omega^*(F)$ на себя. Поэтому при всех $i \geq i(x)$ полный прообраз $(F_{l_i,\, 1|\Omega^*(F)})^{-1}(U'((x,\, y)))$ окрестности $U'((x,\, y))$ непуст и открыт в $\Omega^*(F)$.

Используя указанные выше свойства окрестностей $U((x,\, y))$ и $U'((x,\, y))$, а также вторую из формул (1.1.10), получаем, что множество $(F_{l_i,\, 1|\Omega^*(F)})^{-1}(U'((x,\, y)))$ не пересекается с $(\overline{\Omega}^F_{l_i})'$ при любом $i \geq i(x)$ и, следовательно, состоит из блуждающих точек каждого отображения $F_{l_i|\Omega^*(F)}$ (см. лемму 1.2.2).

Воспользуемся тем, что многозначные функции $(\overline{\Omega}^F_{l_i})'$ полунепрерывны сверху и при любом $i \geq i(x)$ верно включение $\Omega(\widetilde{g}_x^{2^i/n(x)}) \subseteq \Omega(\widetilde{g}_x)$. Тогда в силу теоремы 1.1.1 и выбора окрестности $U'((x,\, y))$ найдется универсальная окрестность $U''((x,\, y)) = U_1''(x) \times U_2''(y)$ точки $(x,\, y)$, $U''((x,\, y)) \subseteq U'((x,\, y))$, для которой, в частности, при всех $i \geq i(x)$ верно

$$\begin{aligned} &(F_{l_i,\, 1|\Omega^*(F)})^{-1}(U''((x,\, y))) \bigcap \\ &F_{l_i|\Omega^*(F)}((F_{l_i,\, 1|\Omega^*(F)})^{-1}(U''((x,\, y)))) = \emptyset. \end{aligned} \tag{1.2.15}$$

К обеим частям равенства (1.2.15) применим гомеоморфизм $F_{l_i,\, 1|\Omega^*(F)}$ множества $\Omega^*(F)$ на себя и воспользуемся формулами (0.0.13) – (0.0.14). Тогда при всех $x'' \in Per(f) \cap f^{-l_i}(U_1{}''(x))$, $x' = f^{l_i}(x'')$ $(x' \in Per(f) \times U_1''(x))$, $i \geq i(x)$, получаем:

$$U_2{}''(y) \bigcap g_{x'',\, 2l_i}(U_2''(y)) = U_2''(y) \bigcap g_{x',\, l_i}(U_2''(y)) = \emptyset.$$

Последнее вместе с леммой 1.2.1 влечет за собой: $(x,\, y) \notin \Omega^{F|\Omega_p^*(F)}$. Таким образом, верно включение (1.2.14). Последнее вместе с включением (1.2.13) устанавливает справедливость леммы 1.2.3. Лемма 1.2.3 доказана.

Таким образом, справедливость равенства (1.2.2) установлена.

Замечание 1.2.2. Первая часть теоремы 1.2.1 позволяет дать динамическую интерпретацию подходящих функций $\overline{\Omega}^F_n$ для произвольного косого произведения $F \in T^0(I)$.

Действительно, для любого $F \in T^0(I)$ и любого $n \geq 1$ определены, в частности, вспомогательные отображения F_n. Из определения F_n (см. формулу (0.0.13)) следует, что F_n удовлетворяет условиям теоремы 1.2.1: любая точка $x \in I_1$ является неподвижной для тождественного фактороотображения вспомогательного косого произведения F_n.

Поэтому в силу равенства (1.2.2) выполнено

$$\Omega^{F_n|_{\Omega(f)\times I_2}} = \overline{\bigcup_{x\in\Omega(f)} \{x\}\times\Omega(g_{x,n})}.$$

С другой стороны, в силу определения 0.0.7 для графика любой подходящей функции $\overline{\Omega_n^F}$ справедливо равенство

$$\overline{\Omega}_n^F = \overline{\bigcup_{x\in\Omega(f)} \{x\}\times\Omega(g_{x,n})}.$$

Отсюда получаем равенство

$$\overline{\Omega}_n^F = \Omega^{F_n|_{\Omega(f)\times I_2}}.$$

Последнее означает, что подходящая функция $\overline{\Omega}_n^F$ при любом $n\geq 1$ совпадает с Ω-функцией сужения вспомогательного косого произведения F_n на множество $\Omega(f)\times I_2$.

Результаты этой части работы опубликованы в статьях [61], [66], [76].

1.2.3 Слабо неблуждающие точки относительно семейства отображений в слоях. Примеры

Понятие слабо неблуждающих точек широко используется в структурных вопросах теории динамических систем (см., например, [36], [135], [136]). В этой части работы построены примеры, указывающие на необходимость введения понятия слабо неблуждающих точек относительно семейства отображений в слоях при описании структуры неблуждающего множества динамической системы вида (0.0.2); приведено определение слабо неблуждающей точки относительно семейства отображений в слоях произвольного непрерывного косого произведения отображений интервала.

Начнем с примера косого произведения, имеющего слабо неблуждающие точки относительно семейства отображений в слоях над точками множества $\Omega(f) = Per(f)$.

Положим

$$\Omega_w(F) = \Omega(F)\setminus(\bigcup_{x\in Per(f)} \{x\}\times\Omega(\widetilde{g}_x)).$$

Из равенства (1.2.2) следует, что множество $\Omega_w(F)$ является граничным в $\Omega(F)$ и, если оно не пусто, то состоит из точек $(x;\,y)$, каждая из которых блуждает относительно содержащего ее слоя $\{x\}\times I_2$.

Укажем пример гладкого отображения $F_3 \in T^1([0,\,1]^2)$ с замкнутым множеством периодических точек в базе и непустым множеством $\Omega_w(F_3)$.

Нам потребуются треугольник

$$\Pi_1 = \{(x;\,y) : x \in (0,\,1],\ y \in (\frac{1}{8},\,\frac{1}{8} + \frac{x}{16})\},$$

трапеция

$$\Pi_2 = \{(x;\,y) : x \in [0,\,1],\ y \in (\frac{1}{8} + \frac{x}{16},\,\frac{3}{16} + \frac{x}{32})\},$$

а также их нижняя и верхняя границы соответственно

$$\partial_l(\Pi_1) = [0,\,1] \times \{\frac{1}{8}\},\ \partial_u(\Pi_1) = \{(x;\,y) : x \in [0,\,1],\ y = \frac{1}{8} + \frac{x}{16}\};$$

$$\partial_l(\Pi_2) = \partial_u(\Pi_1),\ \partial_u(\Pi_2) = \{(x;\,y) : x \in [0,\,1],\ y = \frac{3}{16} + \frac{x}{32}\}.$$

Будем использовать следующие функции

$$\lambda_x(y) = \begin{cases} \frac{x}{4}\exp[-\frac{\exp(-\frac{1}{(\frac{1}{8}-y)^2})}{(\frac{1}{8}+\frac{x}{16}-y)^2}] + \frac{1}{4}, & \text{если} \quad (x;\,y) \in \Pi_1, \\ \frac{x+1}{4}, & \text{если} \quad (x;\,y) \in \partial_l(\Pi_1), \\ \frac{1}{4}, & \text{если} \quad (x;\,y) \in \partial_u(\Pi_1); \end{cases}$$

$$\mu_x(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} - A(x)\exp[-\frac{\exp(-\frac{1}{(\frac{3}{16}+\frac{x}{32}-y)^2})}{(\frac{1}{8}+\frac{x}{16}-y)^2}], & \text{если} \quad (x;\,y) \in \Pi_2, \\ \frac{1}{4}, & \text{если} \quad (x;\,y) \in \partial_l(\Pi_2), \\ \frac{1}{4} - A(x), & \text{если} \quad (x;\,y) \in \partial_u(\Pi_2), \end{cases}$$

где $A(x) = \frac{2-x}{16\pi}$, а также полином 3-ей степени

$$p(y) = -80y^3 + 88y^2 - 28y + 3.$$

Обозначим через Π_3 трапецию

$$\{(x;\,y) : x \in [0,\,1],\ y \in (\frac{3}{16} + \frac{x}{32},\,\frac{1}{4}]\}.$$

Пример 1.2.1. *Определим отображение* $F_3 \in T^1([0,\,1]^2)$, *где*

$$F_3(x,\,y) = (x,\,g_x(y)).$$

При этом семейство отображений в слоях зададим так, чтобы отображение $g_0(y) \in C^1([0,\,1])$ *допускало* C^1*-* Ω*-взрыв в семействе отображений в слоях (определение см. далее в § 2.1) (рис.1.3). Положим*

$$g_x(y) = \begin{cases} 16(x+1)y(\frac{1}{4}-y), & \textit{если} \quad (x;\,y) \in [0,\,1] \times [0,\,\frac{1}{8}), \\ \lambda_x(y), & \textit{если} \quad (x;\,y) \in \overline{\Pi}_1, \\ \mu_x(y), & \textit{если} \quad (x;\,y) \in \overline{\Pi}_2, \\ \frac{1}{4} + A(x)\sin 2\pi\frac{8y-x}{2-x}, & \textit{если} \quad (x;\,y) \in \Pi_3, \\ p(y), & \textit{если} \quad (x;\,y) \in [0,\,1] \times (\frac{1}{4},\,\frac{1}{2}], \\ 4y(1-y), & \textit{если} \quad (x;\,y) \in [0,\,1] \times (\frac{1}{2},\,1]. \end{cases}$$

Тогда отображение g_0 допускает C^1- Ω-взрыв, связанный с гомоклиническим "касанием", и верно включение $\{(0,\,(g_{0|[0,\,\frac{1}{8})})^{-n}(\frac{1}{8}))\}_{n\geq 0} \subset \Omega(F_2)$. В то же время любая точка интервала $\{0\} \times (0,\,\frac{1}{4})$ является блуждающей относительно слоя $\{0\} \times [0,\,1]$. Следовательно, $\Omega_w(F_3) \neq \emptyset$.

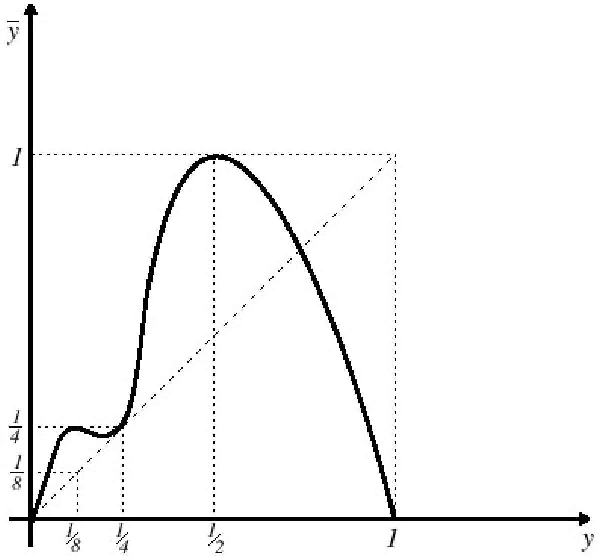


Рис. 1.3: *График функции* $\overline{y} = g_0(y)$.

Отметим, что непрерывный (но не гладкий) аналог примера 1.2.1 построен в статье автора [61].

Обратим внимание на то, что ни одна из точек множества $\Omega_w(F_3)$ отображения из примера 1.2.1 не является ω-предельной; кроме того, здесь $\bigcup\limits_{(x,\,y)\in I} \omega_{F_3}((x,\,y))$ – незамкнутое множество (в отличие от случая непрерывных отображений отрезка в себя [162]). Отметим также, что пример непрерывного (но не гладкого) косого произведения отображений интервала F с незамкнутым множеством $\bigcup\limits_{(x,\,y)\in I} \omega_F((x,\,y))$ содержится в статье [62]. Косое произведение, указанное в [62], имеет фактороотображение, содержащее периодические точки с (наименьшими) периодами, отличными от степеней двойки. В отличие от примера из [62], пример 1.2.1 (также, как и пример из [61]) показывает, что незамкнутым множеством $\bigcup\limits_{(x,\,y)\in I} \omega_F((x,\,y))$ могут обладать и косые произведения отображений интервала (гладкие или непрерывные, но не гладкие) с тождественным фактороотображением.

Следующий пример 1.2.2 показывает, что неблуждающие множества отображений в слоях над точками множества $I_1 \setminus Per(f)$ блуждающих точек фактора также могут оказывать влияние на структуру неблуждающего множества C^1-гладкого косого произведения в плоскости.

Пусть K – классический канторов дисконтинуум на отрезке $[0,\,1]$, а $h : [0,\,1] \to [0,\,1]$ – C^1-гладкая функция Урысона такая, что $h(x) = 0$ для $x \in K$, $h(x) > 0$ для $x \in [0,\,1] \setminus K$; причем $x + h(x) \in [0,\,1]$ при всех $x \in [0,\,1]$.

Пример 1.2.2. *Определим отображение* $F_4 \in T^1([0,\,1] \times [-1,\,1{,}01])$, *где*

$$F_4(x,\,y) = (x + h(x),\, g_x(y)).$$

Тогда $Per(f) = Fix(f) = K$, *где* $Fix(\cdot)$ *– множество неподвижных точек отображения. Для определения отображений в слоях нам потребуется* C^1-*гладкая функция* $\psi : [-1,1] \to [-1,\,1]$, *использованная в примере 1.1.1 (см. равенство (1.1.5)). Положим*

$$g_x(y) = \begin{cases} \psi(y) & \textit{если} \quad (x;\,y) \in [0,\,1] \times [-1,\,1); \\ h(x)(y-1)^2 & \textit{если} \quad (x;\,y) \in [0,\,1) \times [1,\,1{,}01]. \end{cases}$$

Тогда $(x;\,1) \notin \Omega^{F_{4|K \times I_2}}$, но $(x;\,1) \in \underset{n\to+\infty}{Ls} (\Omega^F_{l_n,1})^{ex'}{}_{|U_{1,\,\varepsilon_n}(K)}$, где $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 1}$ – произвольная бесконечно малая последовательность положительных чисел; и $(x,\,1) \in \Omega^{F_4}$ для любого $x \in K$.

Понятие слабо неблуждающей точки относительно семейства отображений в слоях косого произведения (0.0.2) введено автором в [76] (для косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек факторотображения). В [108] определение слабо неблуждающих точек сформулировано для произвольного непрерывного косого произведения отображений интервала в удобной для применения форме.

Определение 1.2.3 [108]. Точку $(x,\, y) \in I$ назовем *слабо неблуждающей относительно семейства отображений в слоях над точками множества* $A \subseteq I_1$ *косого произведения отображений интервала* $F \in T^0(I)$, если $x \in \Omega(f) \bigcap \overline{A}$, и для произвольной окрестности $U_\varepsilon((x,\, y)) = U_{1,\,\varepsilon}(x) \times U_{2,\,\varepsilon}(y)$ точки $(x,\, y)$ в I можно указать точку $(x_\varepsilon,\, y_\varepsilon) \in U_\varepsilon((x,\, y))$, где $x_\varepsilon \in A$, и натуральное число $j = j(\varepsilon)$ такие, что при выполнении $f^j(x_\varepsilon) \in U_{1,\,\varepsilon}(x)$, справедливо

$$g_{x_\varepsilon,\,j}(y_\varepsilon) \in U_{2,\,\varepsilon}(y).$$

Из определения 1.2.3 следует, что слабо неблуждающие точки относительно семейства отображений в слоях косого произведения $F \in T^0(I)$ являются и неблуждающими точками отображения F (хотя $y \in I_2$ может быть блуждающей точкой отображения в слое $g_{x,\,n} : I_2 \to I_2$ для произвольной итерации F).
Примеры 1.2.1 и 1.2.2 показывают, что существуют C^1-гладкие косые произведения отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек в базе, содержащие слабо неблуждающие точки семейства отображений в слоях.

Результаты подпараграфа 1.2.3 опубликованы в статьях [76], [108].

1.2.4 Заключительная часть доказательства теоремы о неблуждающем множестве

Доказательство второй части теоремы 1.2.1 (т.е. доказательство равенства (1.2.3)) учитывает возможность существования в слоях над точками множества $Per(f)$ слабо неблуждающих точек косого произведения отображений интервала, появление которых обусловлено влиянием слоев над точками множества $I_1 \setminus Per(f)$ блуждающих точек факторотображения, и состоит в доказательстве следующего утверждения.

Лемма 1.2.4. *Пусть отображение* $F \in T^0(I)$ *имеет факторотображение* f *с замкнутым множеством* $Per(f)$. *Если* x *– периодическая точка* f *с (наименьшим)* *периодом $l(x)$, предельная для непериодических точек f, то*

$$(\Omega^F)(x) = (\underset{n\to+\infty}{Ls}\,(\Omega^F_{l(x)n,1})^{ex'}{}_{|U_{1,\,\varepsilon_{l(x)n}}(x)})(x)$$

для произвольной последовательности $\{\varepsilon_{l(x)n}\}_{n\geq 1}$ положительных чисел такой, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_{l(x)n} = 0$, $(\cdot)(x)$ – срез множества вертикальным слоем над точкой x.

Доказательство. 1. Пусть x – периодическая точка f с (наименьшим) периодом $l(x)$, являющаяся предельной для непериодических точек f. Установим справедливость включения

$$(\underset{n\to+\infty}{Ls}\,(\Omega^F_{l(x)n,1})^{ex'}{}_{|U_{1,\,\varepsilon_{l(x)n}}(x)})(x) \subset (\Omega^F)(x). \tag{1.2.16}$$

Возьмем произвольно точку $y \in I_2$. Утверждение леммы 1.2.4 справедливо, если $y \notin \Omega(\widetilde{g}_x)$, но $(x,\, y) \in \underset{n\to+\infty}{Lim}\,(\Omega^F_{l_n,1})'_{|Per(f,\,l_n)}$ (см. лемму 1.2.3).
Поэтому рассмотрим случай, когда для точки $(x,\, y)$ удовлетворяются условия $(x,\, y) \notin \underset{n\to+\infty}{Lim}\,(\Omega^F_{l_n,1})'_{|Per(f,\,l_n)}$, но $(x,\, y) \in \underset{n\to+\infty}{Ls}\,(\Omega^F_{l(x)n,1})^{ex'}{}_{|U_{1,\,\varepsilon_{l(x)n}}(x)}$ для произвольной числовой последовательности $\{\varepsilon_{l(x)n}\}_{n\geq 1}$, удовлетворяющей условиям леммы 1.2.4.
Для доказательства включения (1.2.16) достаточно показать, что для произвольной окрестности $U_\varepsilon((x;\, y))$ точки $(x;\, y)$ в I найдутся натуральное число $n = n(\varepsilon)$ и точка $(x_n;\, y_n)$ такие, что при некотором $r \geq 1$, $r = r(x_n,;\, y_n)$, выполнено

$$(x_n;\, y_n),\ F^{l(x)nr}(x_n;\, y_n) \in U_\varepsilon((x;\, y)). \tag{1.2.17}$$

Пусть, для определенности, x не является отталкивающей периодической точкой f. Возьмем произвольно окрестность $U_1(x)$ точки x в I_1 столь малую, чтобы выполнялось включение

$$f^{l(x)}(U_1(x)) \subseteq U_1(x)\ \ [137], \tag{1.2.18}$$

Пусть ε – произвольное положительное число столь малое, чтобы включение $U_{1,\,\varepsilon/3}(x) \subset U_1(x)$ выполнялось для $\varepsilon/3$-окрестности $U_{1,\,\varepsilon/3}(x)$ точки x в I_1.
Воспользуемся непрерывностью отображения $F^{l(x)}$ в точке $(x;\, y)$ и по числу $\varepsilon/3$ укажем число $\delta > 0$ так, чтобы для произвольной точки $(x';\, y') \in I$, координаты которой удовлетворяют неравенствам $|x - x'|$, $|y - y'| < \delta$, были выполнены неравенства

$$|x - f^{l(x)}(x')|,\ |g_{x,\,l(x)}(y) - g_{x',\,l(x)}(y')| < \varepsilon/3. \tag{1.2.19}$$

Будем использовать окрестность точки $(x;\,y)$ в I $U_\theta((x;\,y)) = U_{1,\theta}(x) \times U_{2,\theta}(y)$ при $\theta = \varepsilon/3$ или $\theta \le \delta$ в зависимости от того, можно ли по $\varepsilon/3 > 0$ указать $\delta \ge \varepsilon/3$ так, чтобы для каждой точки $(x';\,y') \in I$ при $|x - x'|,\ |y - y'| < \delta$ выполнялись неравенства (1.2.19), или для любого $\delta > 0$, найденного по $\varepsilon/3$ из условия непрерывности $F^{l(x)}$ в точке $(x;\,y)$, удовлетворяется неравенство $\delta < \varepsilon/3$.

Так как $(x;\,y) \in \underset{n\to+\infty}{Ls}\,(\Omega^F_{l(x)n,1})^{ex'}{}_{|U_{1,\,\varepsilon_{l(x)n}}(x)}$, то в рассматриваемом случае окрестность $U_\theta((x;\,y))$ пересекается со счетным множеством графиков функций $(\Omega^F_{l(x)n,1})^{ex'}{}_{|U_{1,\,\varepsilon_{l(x)n}}(x)}$ в точках, не принадлежащих слою $\{x\} \times I_2$. Возьмем произвольно и зафиксируем точку

$$(x'_n;\,y'_n) \in U_\theta((x;\,y)) \bigcap (\Omega^F_{l(x)n,1})^{ex'}{}_{|U_{1,\,\varepsilon_{l(x)n}}(x)} \text{ при } x'_n \ne x.$$

В силу формулы (1.1.10) выполнено $y'_n \in \Omega(g_{x''_n,\,l(x)n})$ при $x''_n = f^{l(x)n}(x'_n)$. Из формулы (1.2.18) следует, что $(x''_n;\,y'_n) \in U_\theta((x;\,y))$. Воспользуемся предложением 1.2.4 и для окрестности $U_{2,\theta}(y)$ укажем точку $y_n \in U_{2,\theta}(y)$ и натуральное число r так, чтобы

$$g^r_{x''_n,\,l(x)n}(y_n) = y'_n. \tag{1.2.20}$$

1a. Рассмотрим случай, когда по $\varepsilon/3$ можно указать $\delta \ge \varepsilon/3$ такое, что для произвольной точки $(x';\,y') \in I$, координаты которой удовлетворяют неравенствам $|x - x'|,\ |y - y'| < \delta$, выполнены неравенства (1.2.19). Будем использовать окрестность $U_\theta((x;\,y))$ при $\theta = \varepsilon/3$.

Возьмем произвольно и зафиксируем точку $x_n \in U_{1,\varepsilon/3}(x)$, $x_n \ne x$. Так как $\delta \ge \varepsilon/3$, и выполнено включение (1.2.18), то последовательность вторых координат $\{g_{x_n,\,l(x)nj}(y_n)\}_{j\ge0}$ точек $F^{l(x)n}$-траектории $\{F^{l(x)nj}(x_n;\,y_n)\}_{j\ge0}$ точки $(x_n;\,y_n)$ отслеживает с точностью до $\varepsilon/3$ траекторию $\{g^j_{x''_n,\,l(x)n}(y_n)\}_{j\ge0}$ точки y_n относительно отображения $g_{x''_n,\,l(x)n} : I_2 \to I_2$. В частности, при $j = r$ имеем:

$$|g^r_{x''_n,\,l(x)n}(y_n) - g_{x_n,\,l(x)nr}(y_n)| = |y'_n - g_{x_n,\,l(x)nr}(y_n)| < \varepsilon/3.$$

Последнее вместе с включением (1.2.18) влечет за собой выполнение свойства (1.2.17). Таким образом, в случае 1a имеем: $(x;\,y) \in \Omega(F)$, и, следовательно, справедливо включение (1.2.16).

1b. Пусть теперь любое $\delta > 0$, указанное по числу $\varepsilon/3$ так, чтобы для произвольной точки $(x',\, y') \in I$ $(|x - x'|,\ \ |y - y'| < \delta)$ было верно неравенство (1.2.19), удовлетворяет неравенству $\delta < \varepsilon/3$.

Опишем выбор окрестности $U_\theta((x;\, y))$ при $\theta \leq \delta$ так, чтобы специально выбранные отрезки отрицательных полутраекторий точек окрестности $U_\theta((x;\, y))$ аппроксимировали с точностью до δ некоторую определенную ниже конечную совокупность точек отрезка I_2.

Действительно, так как $(x;\, y) \in \underset{n\to+\infty}{Ls}\,(\Omega^F_{l(x)n,1})^{ex'}{}_{|U_{1,\,\varepsilon_{l(x)n}}(x)}$, и выполнены включение (1.2.18) и равенство (1.2.20), то

$$(x;\, y) \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} F^{l(x)n}(\overline{U}_1(x) \times I_2) = [\alpha'_1,\, \beta'_1] \times [\alpha'_2,\, \beta'_2].$$

Так как $\delta < \varepsilon/3$, то $[\alpha'_2,\, \beta'_2]$ – невырожденный отрезок (отрезок $[\alpha'_1,\, \beta'_1]$ может вырождаться в точку x, если x – притягивающая неподвижная точка отображения $f^{l(x)}$). Выберем в качестве θ наименьшее положительное число из совокупности трех чисел $\{\delta,\, y - \alpha'_2,\, \beta'_2 - y\}$[1].

Из равенства (1.2.20) следует, что корректно определен отрезок длины r отрицательной полутраектории точки y'_n относительно отображения $g_{x''_n, l(x)n}$ такой, что $y_n \in g^{-r}_{x''_n,\, l(x)n}(y'_n)$, где $g^{-r}_{x''_n,\, l(x)n}(\cdot)$ – полный прообраз точки. Положим $\hat{x}_n = f^{l(x)nr}(x'_n)$, $\hat{y}_n = y'_n$. Тогда $(\hat{x}_n;\, \hat{y}_n) \in U_\theta((x;\, y))$. Так как $\theta \leq \delta < \varepsilon/3$, то отрезок длины r отрицательной полутраектории точки $\hat{y}_n$ относительно отображения $g_{x''_n,\, l(x)n} : I_2 \to I_2$ аппроксимирует с точностью до δ некоторую последовательность точек $\{\hat{y}_n^{-1},\, \dots \hat{y}_n^{-r}\}$, где $g_{x'_n,\, l(x)nj}(\hat{y}_n^{-j}) = \hat{y}_n$ при всех $1 \leq j \leq r$. Отсюда следует, что

$$(x'_n;\, \hat{y}_n^{-r}),\ F^{l(x)nr}(x'_n;\, \hat{y}_n^{-r}) \in U_\varepsilon((x;\, y)).$$

Таким образом, в силу свойства (1.2.17) выполнено включение (1.2.16).

2. Пусть, по-прежнему, $x \in Per(f)$, а $l(x)$ – (наименьший) период x. Убедимся в справедливости противоположного включения

$$(\Omega^F)(x) \subset (\underset{n\to+\infty}{Ls}\,(\Omega^F_{l(x)n,1})^{ex'}{}_{|U_{1,\,\varepsilon_{l(x)n}}(x)})(x). \tag{1.2.21}$$

Также, как и в предыдущем п. 1, предположим, что произвольная окрестность точки x содержит непериодические точки f.

---

[1] В том случае, если $y - \alpha'_2 = 0$ $(\beta'_2 - y = 0)$, окрестность $U_2(y)$ является правосторонней (левосторонней) окрестностью точки y.

Возьмем произвольно точку $(x;\, y) \notin \underset{n\to+\infty}{Ls} (\Omega^F_{l(x)n,1})^{ex'}{}_{|U_{1,\,\varepsilon_{l(x)n}}(x)}$. Тогда одновременно выполнено $(x;\, y) \notin \underset{n\to+\infty}{Ls} \overline{(\Omega^F_{l(x)n,1})^{ex'}}{}_{|U_{1,\,\varepsilon_{l(x)n}}(x)}$. Здесь $\overline{(\cdot)}$ означает замыкание графика многозначной функции.

Используя определение многозначных функций $(\Omega^F_{l(x)n,1})^{ex'}$, полунепрерывность сверху функций $\overline{(\Omega^F_{l(x)n,1})^{ex'}}$ и проводя рассуждения, аналогичные примененным при доказательстве леммы 1.2.3, укажем универсальную окрестность точки $(x;\, y)$ в I $U((x;\, y)) = U_{1,\,\varepsilon}(x) \times U_{2,\,\varepsilon}(y)$ $(0 < \varepsilon \le \varepsilon_{l(x)})$ так, чтобы равенство

$$U_{2,\,\varepsilon}(y) \bigcap g_{x',\,l(x)n}(U_{2,\,\varepsilon}(y)) = \emptyset \tag{1.2.22}$$

было выполнено для всех $n \ge 1$ и $x' \in U_{1,\,\varepsilon}(x)$. Более того, $U_{1,\varepsilon}(x) \bigcap f^k(U_{1,\varepsilon}(x)) \ne \emptyset$ в том и только том случае, если $l(x)$ делит k (см. лемму 1.2.1). Это свойство вместе с выбором окрестности $U_{1,\varepsilon}(x)$ означает, что $(x;\, y) \notin \Omega(F)$. Таким образом, включение (1.2.21) установлено. Последнее включение вместе с включением (1.2.16) завершает доказательство леммы 1.2.4. Лемма 1.2.4 доказана.

Справедливость теоремы 1.2.1 следует из лемм 1.2.1 – 1.2.4.

Существенным элементом доказательства леммы 1.2.4 (а, следовательно, и теоремы 1.2.1) является возможность отслеживать положительные полутраектории или отрезки выделенных отрицательных полутраекторий точек в слоях над непериодическими точками факторотображения положительными же полутраекториями или отрезками некоторых отрицательных полутраекторий "близких"точек в аналогичных слоях соответственно. В этой связи упомянем классическую теорему о семействах ε-траекторий [138]. Предложенный метод доказательства леммы 1.2.4 не требует дополнительных предположений типа гиперболичности отображений в слоях.

Утверждение теоремы 1.2.1 показывает, что равенство (1.2.2) при условии $Per(f) \ne I_1$ дает оценку снизу неблуждающего множества $\Omega(F)$ отображения $F \in T^0(I)$. Если же $Per(f) = I_1$, то $\Omega(F) = \overline{\bigcup_{x\in Per(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)}$.

В статье [80] установлено, что множество цепно рекуррентных точек дает оценку сверху неблуждающего множества косого произведения $F \in T^0(I)$ с замкнутым множеством периодических точек в базе. Забегая вперед, отметим, что примеры отображений из $T^0(I)$ с замкнутым множеством периодических точек (образующих собственное подмножество рассматриваемого множества косых произведений), содержащих цепно рекуррентные, но блуждающие точки, приведены в главе 2 [89].

Приведем важные следствия теоремы 1.2.1. Так, используя теореиу 1.2.1 и определение 1.2.1, докажем критерий различения косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек

Теорема 1.2.2 [61], [76], [81]. *Если $F \in T^0(I)$, то следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\Omega(F) = Per(F)$*;*

(2) *множество F-периодических точек $Per(F)$ замкнуто.*

Доказательство. Так как $\Omega(F)$ – замкнутое множество, то из утверждения (1) теоремы 1.2.2 следует утверждение (2). Покажем, что утверждение (2) теоремы 1.2.2 влечет за собой справедливость утверждения (1).

В самом деле, для множеств $Per(F)$, $Per(f)$ и $Per(\widetilde{g}_x)$ периодических точек отображений F, f и $\widetilde{g}_x$ при любом $x \in Per(f)$ соответственно выполнено

$$Per(f) = pr_1(Per(F)), \;\; Per(\widetilde{g}_x) = (Per(F))(x) \;\; \text{(см. [89])}. \tag{1.2.23}$$

Так как $Per(F)$ – замкнутое множество, то в силу формул (1.2.23) множества $Per(f)$ и $Per(\widetilde{g}_x)$ при любом $x \in Per(f)$ замкнуты. Тогда, используя формулу (1.2.2), получаем

$$\Omega^{F|_{Per(f) \times I_2}} = Per(F). \tag{1.2.24}$$

Предположим, что существует точка $(x',\, y') \in \Omega^F$ ($\Omega^F = \Omega(F)$, здесь Ω^F – график Ω-функции) такая, что $x' \in Per(f)$ ($l(x')$ – (наименьший) период x'), а $(x',\, y') \notin Per(F)$. Тогда найдется $\varepsilon' > 0$ такое, что замыкание произвольной ε-окрестности $U_\varepsilon((x',\, y')) = U_{1,\varepsilon}(x') \times U_{2,\varepsilon}(y')$ точки $(x',\, y')$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ не содержит точек замкнутого множества $Per(F)$.

Используя равномерную непрерывность отображения $g_{x,\,l(x')}(y)$ в замкнутом прямоугольнике I, по числу $\varepsilon > 0$ укажем $\delta > 0$ так, чтобы для всех $(x,\, y)$, $(x'',\, y'') \in I$, удовлетворяющих неравенствам $|x'' - x| < \delta$, $|y'' - y| < \delta$, выполнялось

$$|g_{x,\,l(x')}(y) - g_{x'',\,l(x')}(y'')| < \varepsilon. \tag{1.2.25}$$

Пусть, для определенности, неравенство (1.2.25) выполняется лишь при $\delta < \varepsilon$, а x' – неотталкивающая периодическая точка f. Выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы выполнялось

$$f^{l(x')}(U_{1,\,\delta/2}(x')) \subseteq U_{1,\,\delta/2}(x') \ \text{(см. [22])}, \tag{1.2.26}$$

где $U_{1,\,\delta/2}(x')$ – $\delta/2$-окрестность x' в I_1.

При сделанном предположении выполнено $(x',\, y') \in \Omega(F) \setminus Per(F)$. Последнее вместе с равенством (1.2.24) означает, что $(x',\, y')$ – слабо неблуждающая точка относительно семейства отображений в слоях над блуждающими точками фактора. В определении 1.2.3 используем окрестность точки $(x',\, y')$ в I

$$U_{\delta/2,\,\varepsilon}((x',\, y')) = U_{1,\,\delta/2}(x') \times U_{2,\,\varepsilon}(y')$$

В силу определения 1.2.3 найдутся точка $(x'_{\delta/2},\, y'_\varepsilon) \in U_{\delta/2,\,\varepsilon}((x',\, y'))$ $(x'_{\delta/2} \notin Per(f))$ и натуральное число j' такие, что при выполнении $x_{\delta/2} \in U_{1,\,\delta/2}(x')$ $(x_{\delta/2} = f^{j'}(x'_{\delta/2}))$ справедливо

$$g_{x'_{\delta/2},\,j'}(y'_\varepsilon) \in U_{2,\,\varepsilon}(y'). \tag{1.2.27}$$

Из леммы 1.2.1 следует, что j' кратно $l(x')$. Поэтому далее будем использовать представление j' в виде $j' = l(x')j$ $(j \geq 1)$.

Положим $x_0 = x_{\delta/2}$, $y_0 = g_{x'_{\delta/2},\,l(x')j}(y'_\varepsilon)$. Рассмотрим отрезок $\Gamma_{-l(x')j}((x_0,\, y_0))$ отрицательной полутраектории точки $(x_0,\, y_0)$ относительно отображения $F^{l(x')}$ такой, что

$$\Gamma_{-l(x')j}((x_0,\, y_0)) = \{(x_0,\, y_0),\, (x_{-l(x')},\, y_{-l(x')}),\, \ldots\, (x_{-l(x')j},\, y_{-l(x')j})\},$$

$$(x_{-l(x')i},\, y_{-l(x')i}) = (f^{l(x')(j-i)}(x'_{\delta/2}),\, g_{x'_{\delta/2},\,l(x')(j-i)}(y'_\varepsilon)) \ \text{при всех}\ 0 \leq i \leq j.$$

В силу (1.2.26) выполнено $x_{-l(x')i} \in U_{1,\,\delta/2}(x')$ и при всех $i_1 \neq i_2$, $0 \leq i,\, i_1,\, i_2 \leq j$ –

$$|x_{-l(x')i_1} - x_{-l(x')i_2}| < \delta. \tag{1.2.28}$$

Пусть $\gamma_{-l(x')j}(x_0) = pr_1(\Gamma_{-l(x')j}((x_0,\, y_0)))$. На множестве $\gamma_{-l(x')j}(x_0) \times I_2$ зададим отображение $F^*_{l(x')}(x,\, y) = (f^{l(x')}(x),\, g_{x_{-l(x')},\,l(x')}(y))$. Так как $\delta < \varepsilon$, то из неравенств (1.2.28) и (1.2.25) следует, что существует отрезок $\Gamma^*_{-l(x')j}((x_0,\, y_0))$ отрицательной полутраектории точки $(x_0,\, y_0)$ относительно отображения $F^*_{l(x')}$, аппроксимирующий $\Gamma_{-l(x')j}((x_0,\, y_0))$ с точностью до ε, где

$$\Gamma^*_{-l(x')j}((x_0,\, y_0)) = \{(x_0,\, y_0),\, (x_{-l(x')},\, y'_{-l(x')}),\, \ldots\, (x_{-l(x')j},\, y'_{-l(x')j})\},$$

$$y_0 = g^i_{x_{-l(x')},\, l(x')}(y'_{-l(x')i}) \text{ при любых } 0 \le i \le j.$$

Поэтому $y'_{-l(x')j} \in U_{2,\,\varepsilon}(y'_\varepsilon)$, где $U_{2,\,\varepsilon}(y'_\varepsilon)$ – ε-окрестность точки y'_ε в I_2. Так как одновременно $y'_\varepsilon \in U_{2,\,\varepsilon}(y')$, то $y'_{-l(x')j} \in U_{2,\,2\varepsilon}(y')$, где $U_{2,\,2\varepsilon}(y')$ – 2ε-окрестность точки y' в I_2. Последнее вместе с (1.2.27) влечет за собой

$$U_{2,\,2\varepsilon}(y') \bigcap g^j_{x_{-l(x')},\, l(x')}(U_{2,\,2\varepsilon}(y')) \neq \emptyset. \tag{1.2.29}$$

В силу (1.2.25) выполнено также $g_{x_{-l(x')},\, l(x')} \in B^0_{2,\,\varepsilon}(g_{x',\, l(x')})$.

Таким образом, доказано, что для любой окрестности $U_{2,\,2\varepsilon}(y')$ точки y' в I_2 и любой окрестности $B^0_{2,\,\varepsilon}(g_{x',\, l(x')})$ отображения $g_{x',\, l(x')} = \widetilde{g}_{x'}$ в пространстве $C^0(I_2)$ найдутся отображение $g_{x_{-l(x')},\, l(x')} \in B^0_{2,\,\varepsilon}(\widetilde{g}_{x'})$ и натуральное число j такие, что выполнено соотношение (1.2.29). Последнее означает, что $y' \in WN^0(\widetilde{g}_{x'})$, то есть y' слабо неблуждающая непериодическая точка отображения $\widetilde{g}_{x'}$ (см. определение 1.2.2). Так как $Per(\widetilde{g}_{x'})$ – замкнутое множество, то получено противоречие с утверждением (2) предложения 1.2.2. Следовательно, сделанное предположение неверно, и $\Omega(F) = Per(F)$. Теорема 1.2.2 доказана.

Завершая эту часть работы, сформулируем непосредственное следствие лемм 1.2.3 и 1.2.4, которое играет важную роль в понимании свойств центральных движений косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек в базе.

Следствие 1.2.2. *Пусть факторотображение f косого произведения $F \in T^0(I)$ имеет замкнутое множество периодических точек. Тогда*

$$\Omega(F_{|\Omega(F)}) = \Omega(F_{|\Omega(F_{|Per(f)\times I_2})}).$$

Результаты подпараграфа 1.2.4 опубликованы в работах [61], [76], [81].

1.3 О центре косых произведений с замкнутым множеством периодических точек в базе

Структура центра непрерывных косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек факторотображения изучалась в статьях [61], [66], [81].

Здесь мы приведем доказательство теоремы 1.3.1 о центре для отображений из пространства $T^0(I)$ с замкнутым множеством периодических точек в базе.

Теорема 1.3.1 [61], [66], [81]. *Пусть фактороотображение f косого произведения $F \in T^0(I)$ имеет замкнутое множество $Per(f)$. Тогда существует топологический предел $\underset{n\to+\infty}{Lim}\, C^F_{l_n|Per(f,\,l_n)}$, и верны равенства:*

$$C(F) = \overline{Per(F)} = \overline{\bigcup_{x\in Per(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_{x|\Omega(\widetilde{g}_x)})} = \Omega(F_{|\Omega(F)}) = \underset{n\to+\infty}{Lim}\, C^F_{l_n|Per(f,\,l_n)},$$

где $C^F_{l_n|Per(f,\,l_n)}$ – график сужения вспомогательной функции $C^F_{l_n}$ для C-функции (см. определение 0.0.7) на множество $Per(f,\,l_n)$.

Доказательство. 1. Пусть $(x;\,y)$ – произвольная устойчивая по Пуассону точка отображения F. Тогда $(x;\,y) \in C(F)$, и из леммы 1.1.2 и утверждения (2) предложения 1.2.2 следует, что $x \in Per(f)$, $y \in P(\widetilde{g}_x)$, где $P(\widetilde{g}_x)$ – множество устойчивых по Пуассону точек отображения $\widetilde{g}_x$. Используя предложение 1.2.5, получаем, что $y \in \overline{Per(\widetilde{g}_x)}$, и, следовательно, $(x;\,y) \in \overline{Per(F)}$. Отсюда вытекает, что

$$P(F) \subset \overline{P(F)} = C(F) \subset \overline{Per(F)}.$$

Так как $\overline{Per(F)} \subset C(F)$, то верны равенства

$$C(F) = \overline{Per(F)} = \overline{\bigcup_{x\in Per(f)} \{x\} \times C(\widetilde{g}_x)} = \overline{\bigcup_{x\in Per(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_{x|\Omega(\widetilde{g}_x)})}. \tag{1.3.1}$$

2. Так как при любом l_n имеем $C(\widetilde{g}_x^{l_n}) = C(\widetilde{g}_x)$, то справедливо включение

$$C^F_{l_n|Per(f,\,l_n)} \subseteq C^F_{l_{n+1}|Per(f,\,l_{n+1})},\ n \geq 0.$$

Отсюда получаем, что последовательность графиков функций

$$C^F_{l_n|Per(f,\,l_n)} = \bigcup_{x\in Per(f,\,l_n)} \{x\} \times C(\widetilde{g}_x)$$

сходится в I, и имеет место равенство (см. [47, гл.2, §29, IV]):

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\, C^F_{l_n|Per(f,\,l_n)} = \overline{\bigcup_{x\in Per(f)} \{x\} \times C(\widetilde{g}_x)}.$$

Последнее вместе с (1.3.1) влечет за собой равенство

$$C(F) = \underset{n\to+\infty}{Lim}\, C^F_{l_n|Per(f,\,l_n)}.$$

3. Используя теорему 1.2.1, получаем (см. равенства (1.2.2), (1.2.3)), что, если существует точка $(x,\, y)$ такая, что $(x,\, y) \in \Omega^F \setminus \Omega^{F_{|Per(f)\times I_2}}$, то $(x,\, y) \notin \Omega(F_{|\Omega(F)})$. Поэтому выполнено $\Omega(F_{|\Omega(F)}) \subset \Omega^{F_{|Per(f)\times I_2}}$, и $\Omega(F_{|\Omega(F)}) = \Omega(F_{|\Omega(F_{|Per(f)\times I_2})})$ (см.следствие 1.2.2). В силу определения 0.0.4 центра верно включение $C(F) \subset \Omega(F_{|\Omega(F)})$.

Докажем, что выполнено также и противоположное включение: $\Omega(F_{|\Omega(F)}) \subset C(F)$. Пусть $(x',\, y')$ – произвольная точка множества $\Omega(F_{|\Omega(F)})$. Тогда из предыдущего следует, что

$$(x',\, y') \in \Omega(F_{|\Omega(F_{|Per(f)\times I_2})}), \text{ и } x' \in Per(f). \tag{1.3.2}$$

Обозначим через $l(x')$ (наименьший) период точки x'. Покажем, что $y' \in C(\widetilde{g}_{x'})$.

Действительно, воспользуемся равномерной непрерывностью отображения $g_{x,\,l(x')}(y)$ на прямоугольнике I, и для любого $\varepsilon > 0$ укажем $\delta > 0$ так, чтобы для всех $(x,\, y)$, $(x'',\, y'') \in I$, удовлетворяющих неравенствам $|x - x''| < \delta$, $|y - y''| < \delta$, было выполнено неравенство (1.2.25).

В силу первого из соотношений (1.3.2) существует сходящаяся к $(x',\, y')$ последовательность точек $\{(x'_n,\, y'_n)\}_{n\ge1} \subset \Omega(F_{|Per(f)\times I_2})$, для каждой из которых найдется натуральное число $l(x')j_n$ (см. утверждение (2) предложения 1.2.1) такое, что последовательность $\{F^{l(x')j_n}(x'_n,\, y'_n)\}_{n\ge1}$ также сходится к $(x',\, y')$, причем $\lim\limits_{n\to+\infty} j_n = +\infty$. Отсюда, в частности, получаем, что точка $(x',\, y')$ имеет прообраз произвольного порядка относительно отображения $F^{l(x')}$ во множестве $\Omega(F_{|Per(f)\times I_2})$.

Будем использовать прямоугольную окрестность $U_{\delta,\,\varepsilon}((x',\, y'))$ точки $(x',\, y')$ в I, где $U_{\delta,\,\varepsilon}((x',\, y')) = U_{1,\,\delta}(x') \times U_{2,\,\varepsilon}(y')$.

В силу утверждения (3) предложения 1.2.1, найдется натуральное число n_0 такое, что при всех $n \ge n_0$ периодические орбиты точек $x'_n \in Per(f)$ содержатся в окрестности $U_\delta(x')$ точки x', а $F^{l(x')j_n}(x'_n,\, y'_n) \in U_{\delta,\,\varepsilon}((x',\, y'))$.

Будем считать, для определенности, что неравенство (1.2.25) выполнено лишь при $\delta < \varepsilon$. Положим $P^* = \{Orb(x'_n,\, f^{l(x')})\}_{n\ge n_0} \times I_2$, где $Orb(x'_n,\, f^{l(x')})$ – периодическая орбита точки x'_n относительно $f^{l(x')}$. Пусть $U^{P^*}_{\delta,\,\varepsilon}((x',\, y')) = P^* \bigcap U_{\delta,\,\varepsilon}((x',\, y'))$.

Возьмем произвольно и зафиксируем точку $(x'_n,\, y'_n) \in U^{P^*}_{\delta,\,\varepsilon}((x',\, y'))$. Рассмотрим отрезок $\Gamma_{-l(x')j_n}(f^{l(x')j_n}(x'_n),\, g_{x'_n,\,l(x')j_n}(y'_n))$ отрицательной полутраектории точки $(f^{l(x')j_n}(x'_n),\, g_{x'_n,\,l(x')j_n}(y'_n))$ относительно отображения $F^{l(x')}{}_{|U^{P^*}_{\delta,\,\varepsilon}((x',\,y'))}$, где

$$\Gamma_{-l(x')j_n}(f^{l(x')j_n}(x'_n),\, g_{x'_n,\,l(x')j_n}(y'_n)) =$$

$$\{(f^{l(x')j_n}(x'_n),\, g_{x'_n,\,l(x')j_n}(y'_n)),\, (f^{l(x')(j_n-1)}(x'_n),\, g_{x'_n,\,l(x')(j_n-1)}(y'_n)),\, \dots,\, (x'_n,\, y'_n)\}.$$

Так как $\delta < \varepsilon$, то $\Gamma_{-l(x')j_n}(f^{l(x')j_n}(x'_n),\, g_{x'_n,\,l(x')j_n}(y'_n))$ аппроксимирует с точностью до ε отрезок $\Gamma_{-l(x')j_n}(x',\, y')$ некоторой отрицательной полутраектории точки $(x',\, y')$ относительно отображения $F^{l(x')}{}_{|U^{P^*}_{\delta,\,\varepsilon}((x',\,y'))}$, где

$$\Gamma_{-l(x')j_n}(x',\, y') = \{(x',\, y'),\, (x',\, y'_{-l(x')}),\, \dots,\, (x',\, y'_{-l(x')j_n})\},$$

причем $y' = \widetilde{g}^{\,i}_{x'}(y'_{-l(x')i})$ при любом $1 \leq i \leq j_n$. Поэтому верно неравенство

$$|y' - y'_{-l(x')j_n}| < 2\varepsilon. \tag{1.3.3}$$

Неравенство (1.3.3) означает, что точка y' является α-предельной точкой некоторой своей отрицательной полутраектории относительно $\widetilde{g}_{x'}$, а выделенная отрицательная полутраектория плотна в себе и, следовательно, в своем α-предельном множестве. Так как α-предельное множество является одновременно и ω-предельным для траектории некоторой его точки, то получаем отсюда, что $y' \in P(\widetilde{g}_{x'})$, и $y' \in C(\widetilde{g}_{x'})$. Таким образом, верно включение $\Omega(F_{|\Omega(F)}) \subset C(F)$. Последнее вместе с противоположным включением устанавливает справедливость равенства $\Omega(F_{|\Omega(F)}) = C(F)$.
Теорема 1.3.1 доказана.

Отметим, что отображение F_3 из примера 1.2.1 имеет непустое множество

$$C(F_3) \setminus (\bigcup_{x \in Per(f)} \{x\} \times C(\widetilde{g}_x)).$$

Замечание 1.3.1. В силу теоремы 1.3.1 для произвольного отображения $F \in T^0(I)$ с замкнутым множеством $Per(f)$ выполнено неравенство $\gamma(F) \leq 2$. В то же время для отображения F_1 из примера 1.1.1 справедливо $\gamma(F_1) = 2$. Поэтому неравенство $\gamma(F) \leq 2$ дает точную (неулучшаемую) оценку глубины центра непрерывных косых произведений с замкнутым множеством периодических точек в базе.

Непосредственным следствием теорем 1.2.1 и 1.3.1 является приведенное далее утверждение.

Теорема 1.3.2 [61], [66], [81]. *Для отображения $F \in T^0(I)$ следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\Omega(F) = Per(F)$;

(2) $C(F) = Per(F)$;

(3) *множество F-периодических точек $Per(F)$ замкнуто.*

Последнее означает, что в непрерывных косых произведениях отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек реализуется только наиболее простой тип возвращаемости траекторий: периодичность (ср. с первыми двумя равенствами в утверждении (2) предложения 1.2.2). Таким образом, теорема 1.3.2 обосновывает корректность введения понятия простейшего косого произведения отображений интервала (см. определение 0.0.8).

Замечание 1.3.2. Для произвольного косого произведения отображений интервала $F \in T^0(I)$ можно определить функции $\overline{C}_n^F$ $(n \geq 1)$, подходящие для C-функции отображения F так, что при любом $x \in C(f)$ выполнено:

$$\overline{C}_n^F(x) = (\overline{C_n^F})(x).$$

Здесь $(\overline{C_n^F})(x)$ означает срез замыкания графика вспомогательной функции C_n^F для C-функции слоем над точкой x.

Теорема 1.3.1 позволяет дать динамическую интерпретацию функций $\overline{C}_n^F$: каждая такая функция совпадает с C-функцией сужения отображения F_n (см. формулу (0.0.13)) на множество $C(f) \times I_2$.

Результаты § 1.3 опубликованы в статьях [61], [66], [81].

Глава 2

Особенности динамики простейших косых произведений

В главе 2 рассмотрены косые произведения отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек (называемые также *простейшими косыми произведениями* (см. определение 0.0.8)), образующие собственное подмножество множества косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек в базе (см. §1.2 и §1.3 главы 1).

В §2.1 доказан критерий (необходимое и достаточное условие) C^0- Ω-взрыва в C^1-гладких простейших косых произведениях отображений интервала и установлено отсутствие C^1- Ω-взрыва в таких отображениях. Здесь же указаны особенности бифуркаций удвоения периода в C^3-гладких косых произведениях отображений интервала.

В §2.2 указан допустимый топологический тип ω-предельных множеств простейших косых произведений, введены и изучены специальные расходящиеся ряды, являющиеся основным инструментом исследования структуры ω-предельных множеств косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек; здесь же введен специальный несобственный интеграл первого рода, с использованием которого получено интегральное необходимое условие существования одномерных ω-предельных множеств у рассматриваемых отображений.

В §2.3 построен пример дифференцируемого простейшего косого произведения отображений интервала с одномерным ω-предельным множеством, обладающего максимальными дифференциальными свойствами по переменной x, C^1-гладкого по переменной y.

В §2.4 с использованием рядов, введенных в §2.2, исследовано влияние дифференциальных свойств простейших косых произведений на стуктуру их ω-предельных множеств; дано полное описание ω-предельных множеств C^1-гладких косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек (удовлетворяющих некоторым естественным дополнительным условиям).

2.1 Об Ω-взрывах в простейших C^1-гладких косых произведениях отображениях интервала

В данном параграфе изучено влияние C^0- и C^1-возмущений (класса косых произведений) на неблуждающее множество C^1-гладких косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек.

По этой причине, как отмечалось во введении, результаты §2.1 следует рассматривать в контексте исследований по общей проблеме изучения возмущений динамических систем класса косых произведений, сформулированной Д.В. Аносовым в [82]. Важную роль в доказательствах этой части работы играет теорема 1.2.2, приведенная в [61] как следствие основных результатов и передоказанная позже в [78], [125] (для некоторых частных случаев косых произведений).

Будем использовать подпространство $T^0_1(I)$ с (C^0-нормой) пространства $T^0(I)$, состоящее из C^1-гладких косых произведений отображений интервала. База топологии в $T^0_1(I)$ задается системой ε-шаров $B^{01}_\varepsilon(F) = B^0_\varepsilon(F) \bigcap T^0_1(I)$ при всех $F \in T^0_1(I)$ (см. Введение).

Основными результатами данного параграфа являются, во-первых, теорема 2.1.1, представляющая собой критерий (необходимое и достаточное условие) C^0- Ω-взрыва в C^1-гладких простейших косых произведениях отображений интервала, и, во-вторых, теорема 2.1.2 об отсутствии C^1- Ω-взрыва в таких отображениях.

Для того, чтобы сформулировать и доказать основные результаты §2.1, нам потребуются не только теорема 1.2.2 и определение 0.0.9, но также некоторые понятия и утверждения, содержащиеся, например, в работах [36], [134], [139].

2.1.1 Используемые понятия и утверждения

Перейдем к изложению основных понятий и утверждений, с использованием которых формулируются и доказываются основные результаты §2.1.

Так, важность понятия цепно-рекуррентной точки при изучении явления C^0- Ω-взрыва отмечена в работах [36], [139], [140].

Нам потребуются определения ε-цепи при любом $\varepsilon > 0$ (см. определение 0.0.10) и цепно-рекуррентных точек (см. определение 1.2.1); при этом будет использована метрика d в I, согласованная с топологией произведения в I. Последнее означает, что для произвольных точек $z(x, y)$ и $z'(x', y')$ выполнено

$$d(z, z') = \max\{|x - x'|, |y - y'|\}.$$

Указанные определения можно найти, например, в [36], [90], [139].

Определение 1.2.1 цепно-рекуррентных точек показывает, что эти точки порождают частный случай ε-траекторий Д.В. Аносова [138]: ε-периодические траектории. Напомним, что через $CR(F)$ обозначено множество цепно-рекуррентных точек косого произведения $F \in T^0(I)$.

Для доказательства критерия C^0- Ω-взрыва в C^1-гладких простейших косых произведениях отображений интервала нам потребуется следующее утверждение, доказанное в [139].

Предложение 2.1.1. *Непрерывное отображение Φ метрического компакта X в себя допускает Ω-взрыв в пространстве такого рода отображений в том и только том случае, если для множеств цепно-рекуррентных точек $CR(\Phi)$ и неблуждающих точек $\Omega(\Phi)$ отображения Φ выполнено*

$$CR(\Phi) \neq \Omega(\Phi).$$

Важную роль при рассмотрении C^0- Ω-взрыва в C^1-гладких простейших косых произведениях отображений интервала играют понятия достижимости одного множества из другого (см. определение 0.0.10) и "t-пары", введенные в статье [90].

Определение 2.1.1. Пусть $F \in T^0(I)$, $Per(F)$ – замкнутое множество. Будем говорить, что точки $z_1(x, y_1)$, $z_2(x, y_2) \in Per(F)$ *образуют t-пару*, если

(1) $\{z_2\} \to^a \{z_1\}$, причем для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ любая ε-цепь относительно сужения $F_{|E}$ $(E = Orb(x, f) \times I_2)$, соединяющая z_2 с z_1, содержит хотя бы одну непериодическую точку;

(2) и для любого $\delta > 0$ существует конечный набор компонент связности K_i множества $Per(F)$ $(i = 1, 2, \ldots, m$, где $m = m(\delta)$, $m \geq 1)$ таких, что $z_1 \in K_1$ и $z_2 \in K_m$, и для всех $i = 1, 2, \ldots, m-1$ при $m > 1$ выполнено либо $K_i \to^a K_{i+1}$, либо $d(K_i, K_{i+1}) < \delta$.

Нам потребуются доказанные в [90] критерий несовпадения множеств $CR(F)$ и $Per(F)$ для простейших косых произведений отображений интервала, основанный на использовании понятия t-пары, а также некоторое достаточное условие, при выполнении которого две точки образуют t-пару.

Предложение 2.1.2. *Пусть $F \in T^0(I)$, $Per(F)$ – замкнутое множество. Тогда $CR(F) \neq Per(F)$ в том и только том случае, если существует t-пара.*

Для сравнения отметим, что для произвольного непрерывного отображения отрезка в себя замкнутость множества его периодических точек эквивалентна совпадению множеств цепно-рекуррентных и периодических точек (см. предложение 1.2.2). Последнее вместе с равенством $Per(f) = \Omega(f)$ означает невозможность C^0- Ω-взрыва в произвольных непрерывных (в том числе, и гладких) отображениях отрезка в себя.

Лемма 2.1.1. *Пусть $F \in T^0(I)$, $Per(F)$ – замкнутое множество, а точка $z(x, y) \notin Per(F)$ такова, что x – f-неподвижная точка. Если точки $z_1 \in \omega_F(z)$, $z_2 \in \alpha_F(z)$ (здесь $\alpha_F(z)$ означает множество всех предельных точек некоторой отрицательной полутраектории точки z) принадлежат одной компоненте связности множества $Per(F)$, то z_1 и z_2 образуют t-пару. В противном случае для z_1 и z_2 удовлетворяется только лишь условие (1) определения 2.1.1.*

Следующее утверждение, доказанное в [91], используется не только при доказательстве отсутствия C^1- Ω-взрывов в C^1-гладких простейших косых произведениях в плоскости (см. теорему 2.1.4), но и в доказательствах теорем 2.4.1 и 5.2.2.

Предложение 2.1.3. *Если отображение $\varphi \in C^1(I_k)$ ($k = 1$ или 2) не содержит периодическую точку периода 2^i, то существует ε-окрестность $B^1_{k,\varepsilon}(\varphi)$ отображения φ в пространстве $C^1(I_k)$ такая, что любое отображение из окрестности $B^1_{k,\varepsilon}(\varphi)$ не содержит периодических точек периода 2^{i+1}, каково бы ни было $i \geq 1$.*

Из предложения 2.1.3, определения Ω-взрыва для C^1-гладких отображений отрезка (см. подстрочное замечание 8 во введении) и предложения 1.2.2 следует невозможность C^1- Ω-взрыва в произвольных гладких отображениях отрезка в себя типа $\prec 2^\infty$.

2.1.2 C^0- Ω-взрывы в C^1-гладких простейших косых произведениях

Основное содержание этой части работы составляет доказательство следующего утверждения.

Теорема 2.1.1 [81], [87], [89]. *Простейшее косое произведение $F \in T^0_1(I)$, для которого верно равенство $F^{-1}(Per(F)) = Per(F)$ ($F^{-1}(\cdot)$ – полный прообраз множества), допускает C^0- Ω-взрыв в том и только том случае, если выполнено одно из следующих двух условий:*

(1) либо существует связная компонента K множества $Per(F)$ такая, что при некотором $x \in Per(f)$ срез $(K)(x)$ не является связным множеством;

(2) либо, в противном случае, для любого $\delta > 0$ найдется конечный набор компонент связности $\{K_i\}_{i=1}^{i=m}$ (где $m = m(\delta)$, $m > 1$) множества $Per(F)$ таких, что $K_m \to^a K_1$, а при всех $1 \leq i \leq m-1$ выполнено одно из следующих двух свойств: $K_i \to^a K_{i+1}$ или $d(K_i, K_{i+1}) < \delta$.

Доказательство теоремы 2.1.1 разобьем на ряд шагов, проделанных в теореме 2.1.2 (см. [87] – [89]) и предложении 2.1.4 (см. [81]).

Теорема 2.1.2. *Отображение $F \in T^0_1(I)$ с замкнутым множеством $Per(F)$ допускает Ω-взрыв в пространстве $T^0_1(I)$ в том и только том случае, если выполнено* *неравенство*

$$CR(F) \neq Per(F).$$

Доказательство. 1. Пусть отображение $F \in T_1^0(I)$ с замкнутым множеством $Per(F)$ допускает Ω-взрыв в пространстве $T_1^0(I)$. Тогда в силу определения 0.0.9 F допускает Ω-взрыв в пространстве $T^0(I)$. Используя предложение 2.1.1 и теорему 1.2.2, получаем отсюда, что $CR(F) \neq Per(F)$.

Обратно, пусть отображение $F \in T_1^0(I)$ имеет цепно-рекуррентную непериодическую точку $\overline{z}$. Убедимся в том, что тогда F допускает C^0- Ω-взрыв.

2. Действительно, положим $\delta = d(\overline{z},\, Per(F)) = \inf\limits_{z \in Per(F)} d(\overline{z},\ z)$ (т. е. $d(\overline{z},\, Per(F))$ – расстояние от точки $\overline{z}$ до множества $Per(F)$). При сделанном предположении $\delta > 0$. Возьмем произвольно и зафиксируем $\varepsilon > 0$. Покажем сначала, что существует точка $v \in U_{\delta/2}(\overline{z})$, $v = v(\varepsilon)$ (где $U_{\delta/2}(\overline{z})$ – $\delta/2$-окрестность точки $\overline{z}$ в I) такая, что в шаровой окрестности $B_\varepsilon^{0\,1}(F)$ отображения F в пространстве $T_1^0(I)$ найдется косое произведение Φ, для которого справедливо $v \in Per(\Phi)$.

В самом деле, положим

$$\varepsilon_1 = \min\{\frac{\varepsilon}{12(C^* + 1)},\, \frac{\delta}{2}\},\ \text{ где }\ C^* = ||DF||_0\ \text{ (см. Введение)}.$$

Пусть ε_1-цепь из $\overline{z}$ в $\overline{z}$ относительно F образована точками $\{u_k\}_{k=0}^{k=n}$ (среди которых могут быть как совпадающие точки, так и граничные точки прямоугольника I), здесь $u_0 = u_n = \overline{z}$. По ε_1-цепи $\{u_k\}_{k=0}^{k=n}$ построим новую ε-цепь $\{v_k(x_k,\, y_k)\}_{k=0}^{k=n}$ из v_0 в $v_n = v_0$ (возможно, $v_0 \neq \overline{z}$), состоящую из точек с попарно различными абсциссами, попарно различными ординатами и такую, что множество $\{v_k\}_{k=0}^{k=n}$ не содержит граничных точек прямоугольника I.

Для этого определим новые точки $\{u'_k\}_{k=0}^{k=n}$. Положим сначала $u'_0 = u'_n = \overline{z}$, а в качестве точек $\{u'_k\}_{k=1}^{n-1}$ выберем произвольные точки множеств

$$U_{\varepsilon_1}(u_k) \setminus ((pr_1(\{u'_0,\, \ldots, u'_{k-1}\}) \times I_2) \cup (I_1 \times pr_2(\{u'_0,\, \ldots, u'_{k-1}\})) \cup \partial I),$$

где $U_{\varepsilon_1}(\cdot)$ – ε_1-окрестность точки в I, $pr_s : I \to I_s$ – естественная проекция I на I_s $(s = 1,\, 2)$, ∂I – граница прямоугольника I.

При всех $1 \le k \le n-1$ положим $v_k = u'_k$. При $u_0 \notin \partial I$ положим $v_0 = v_n = u_0$. Если же $u_0 \in \partial I$, то в качестве $v_0 = v_n$ выберем любую точку, содержащуюся во множестве

$$U_{\varepsilon_1}(u_0) \setminus ((pr_1(\{u'_1, \ldots, u'_{n-1}\}) \times I_2) \cup (I_1 \times pr_2(\{u'_0, \ldots, u'_{n-1}\})) \cup \partial I).$$

Таким образом, все точки каждого из множеств $\{x_k\}_{k=0}^{n-1}$ и $\{y_k\}_{k=0}^{n-1}$ (а, следовательно, и $\{v_k(x_k, y_k)\}_{k=0}^{n-1}$) попарно различны, причем среди $\{v_k\}_{k=0}^{n-1}$ нет точек из ∂I.

Покажем, что множество $\{v_k(x_k, y_k)\}_{k=0}^{k=n}$ является ε-цепью из v_0 в $v_n = v_0$ относительно отображения F. Действительно, используя классическую теорему Лагранжа [141, гл. 1, §3], при любом $1 \le k \le n$ имеем:

$$d(v_k, F(v_{k-1})) = \max\{|f(x_{k-1}) - x_k|, |g_{x_{k-1}}(y_{k-1}) - y_k|\} \le d(v_k, u'_k) + d(u'_k, u_k) +$$

$$d(u_k, F(u_{k-1})) + d(F(u_{k-1}), F(u'_{k-1})) + d(F(u'_{k-1}), F(v_{k-1})) < 3\varepsilon_1 + 2C^*\varepsilon_1 < \varepsilon.$$

Перейдем к построению отображения Φ, обладающего требуемыми свойствами.

Возьмем произвольно и зафиксируем положительное число $\varepsilon_2 \le \varepsilon_1$ так, чтобы при любых $1 \le i \le n$ выполнялось

$$U_{\varepsilon_2}(v_i) \cap \partial I = \emptyset, , \text{ где } U_{\varepsilon_2}(v_i) = U_{1,\varepsilon_2}(x_i) \times U_{2,\varepsilon_2}(y_i),$$

а также при всех $1 \le j \le n$, $j \ne i$ –

$$\overline{U}_{1,\varepsilon_2}(x_i) \cap \overline{U}_{1,\varepsilon_2}(x_j) = \emptyset \text{ и } \overline{U}_{2,\varepsilon_2}(y_i) \cap \overline{U}_{2,\varepsilon_2}(y_j) = \emptyset.$$

Такой выбор числа $\varepsilon_2 > 0$ возможен, так как все точки каждого из двух конечных множеств $\{x_k\}_{k=0}^{n-1}$ и $\{y_k\}_{k=0}^{n-1}$ попарно различны, причем среди $\{v_k(x_k, y_k)\}_{k=0}^{n-1}$ нет точек из ∂I.

Используя равномерную непрерывность F, по числу $\varepsilon_2 > 0$ укажем положительное число $\eta \le \varepsilon_2$ так, чтобы для любых точек $z', z'' \in I$ таких, что $d(z', z'') < \eta$, выполнялось неравенство

$$d(F(z'), F(z'')) < \varepsilon_2. \tag{2.1.1}$$

Нам потребуются C^1-гладкие "шапочки"Урысона, при определении которых будут использованы η-окрестности $U_{1,\eta}(x_k)$ точек x_k в I_1 и η-окрестности $U_{2,\eta}(y_k)$ точек y_k

$(1 \le k \le n)$ в I_2. Положим

$$h_k^1(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \in I_1 \setminus U_{1,\eta}(x_{k-1}); \\ 1, & \text{если} \quad x = x_{k-1}, \end{cases}$$

$$h_k^2(y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y \in I_2 \setminus U_{2,\eta}(y_{k-1}); \\ 1, & \text{если} \quad y = y_{k-1}. \end{cases}$$

Тогда корректно определено отображение $\Phi \in T_1^0(I)$, $\Phi = (\varphi(x),\, \psi_x(y))$, где

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) + \sum_{k=1}^{n} h_k^1(x)(x_k - f(x_{k-1})), \\ \psi_x(y)) &= g_x(y) + \sum_{k=1}^{n} h_k^2(y)(y_k - g_{x_{k-1}}(y_{k-1})). \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Из (2.1.1) – (2.1.2) следует также, что $\Phi \in B_\varepsilon^{01}(F)$. Заметим, что для отображения Φ точка v_0 является периодической с периодом n, поскольку при каждом $1 \le k \le n$ выполнено $\Phi(x_{k-1},\, y_{k-1}) = (x_k;\, y_k)$, а $(x_n;\, y_n) = (x_0;\, y_0)$, т. е. $\Phi^n(x_0,\, y_0) = (x_0,\, y_0)$.

3. Из п.2 следует, что для косого произведения $\Phi \in B_\varepsilon^{01}(F)$ существует точка $v_0 \in \Omega(\Phi)$ такая, что $v_0 \notin U_{\delta/2}(\Omega(F))$. Последнее означает, что отображение F допускает Ω-взрыв в пространстве $T_1^0(I)$ (см. определение 0.0.9). Теорема 2.1.2 доказана.

Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2.1.2. *Если множество $Per(F)$ C^1-гладкого отображения F замкнуто, то множество $\tau(F)$ (наименьших) периодов периодических точек F ограничено.*

В самом деле, в силу формулы (0.0.2) и определения периодической точки для множеств $Per(F)$, $Per(f)$ и $Per(\widetilde{g}_x)$ справедливы равенства

$$Per(f) = pr_1(Per(F)); \tag{2.1.3}$$

$$Per(\widetilde{g}_x) = (Per(F))(x) \text{ для любого } x \in Per(f), \tag{2.1.4}$$

где $(Per(F))(x)$ – срез множества $Per(F)$ слоем над точкой x. Из формул (2.1.3) и (2.1.4) следует, что каждое из множеств $Per(f)$ и $Per(\widetilde{g}_x)$ при любом $x \in Per(f)$ замкнуто. Используя предложение 1.2.3, получаем отсюда, что каждое из C^1-гладких отображений f и g_x при любом $x \in Per(f)$ имеет ограниченное множество (наименьших) периодов периодических точек.

Пусть x – произвольная точка множества $Per(f)$ с (наименьшим) периодом 2^p при некотором $0 \leq p < +\infty$, а y – произвольная точка множества $Per(\widetilde{g}_x)$ с (наименьшим) периодом 2^q при некотором $0 \leq q < +\infty$. Тогда из формул (2.1.3) и (2.1.4) следует, что 2^{p+q} – (наименьший) период точки $(x;\, y) \in Per(F)$. Таким образом, множество $\tau(F)$ ограничено.

Предложение 2.1.4. *Пусть* $F \in T_1^0(I)$, $Per(F)$ *– замкнутое множество, и* $F^{-1}(Per(F)) = Per(F)$. *Тогда* t*-пара существует в том и только том случае, если выполнено одно из условий* (1) *или* (2) *теоремы 2.1.1.*

Доказательство. 1. Воспользуемся тем, что при любом $n \geq 1$ справедливы равенства $Per(F^n) = Per(F)$, $CR(F^n) = CR(F)$. Из определения 2.1.1 следует также, что множества t-пар для отображений F и F^n совпадают. А так как $F \in T_1^0(I)$, то, используя лемму 2.1.2 и переходя, в случае необходимости, к отображению F^M, где M – наибольший элемент множества $\tau(F) = \{1,\, 2,\, 2^2, \ldots, 2^\mu\}$ при некотором $0 \leq \mu < +\infty$ (см. обобщенную теорему А.Н. Шарковского), будем считать, не уменьшая общности, что $\tau(F) = \{1\}$.

Из сделанного предположения, в частности, следует, что $Per(f) = Fix(f)$, где $Fix(\cdot)$ – множество неподвижных точек отображения. Поэтому при любом $x \in Per(f)$ справедливо равенство $\widetilde{g}_x = g_x$, причем $Per(g_x) = Fix(g_x)$.

2. Пусть существует t-пара, образованная точками $z_1(x;\, y_1)$, $z_2(x;\, y_2) \in Fix(F)$. Тогда для точек z_1 и z_2 удовлетворяется определение 2.1.1. Возьмем произвольно и зафиксируем $\delta > 0$. Используя условие (2) определения 2.1.1, укажем конечный набор из $m = m(\delta)$, $m \geq 1$, компонент связности $\{K_1,\, \ldots, K_m\}$ множества $Per(F)$, таких, что $z_1 \in K_1$ и $z_2 \in K_m$, и для всех $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, m-1$ при $m > 1$ выполнено либо $K_i \to^a K_{i+1}$, либо $d(K_i,\, K_{i+1}) < \delta$.

Рассмотрим случай, когда $K_1 \neq K_m$ (т. е. $Fix(F)$ не является связным множеством). Тогда в силу условия (1) определения 2.1.1 удовлетворяется определение 0.0.10 достижимости компоненты связности K_1 из компоненты связности K_m ($K_m \to^a K_1$). Последнее вместе с условием (2) определения 2.1.1 влечет за собой выполнение условия (2) теоремы 2.1.1.

Пусть теперь $K_1 = K_m$, то есть множество $Fix(F)$ связно. Убедимся в том, что множество $Fix(g_x)$ не является связным. Действительно, предположим противное. Тогда в силу замкнутости $Fix(F)$ множество $Fix(g_x)$ – отрезок.

Если допустить, что отрезок $Fix(g_x)$ вырождается в точку, то имеем:

$$Fix(g_x) = \{y_1\} = \{y_2\}.$$

В этом случае для произвольного положительного числа ε существует ε-цепь относительно отображения $F_{|\{x\} \times I_2}$, соединяющая z_2 с $z_1 = z_2$ и состоящая лишь из единственной неподвижной точки $z_1 = z_2$. В силу предложения 1.2.2 ε-цепей, содержащих точки, неявляющиеся неподвижными для отображения g_x (а, следовательно, и для $F_{|\{x\} \times I_2}$), не существует. Полученное противоречие с условием (1) определения 2.1.1 означает, что $y_1 \neq y_2$, и $Fix(g_x)$ – невырожденный отрезок.

Возьмем произвольно и зафиксируем положительное число $\varepsilon < |y_2 - y_1|$. Определим натуральное число P, полагая

$$P = \left[\frac{|y_2 - y_1|}{\varepsilon}\right],$$

здесь $[\cdot]$ – целая часть числа.

Разделим отрезок, соединяющий точку z_1 с точкой z_2 (и лежащий в вертикальном слое $\{x\} \times I_2$) на $2(P + 1)$ равных частей. Тогда длина каждого из полученных подотрезков $< \varepsilon/2$. Выбирая в каждом таком подотрезке произвольную внутреннюю точку, получаем ε-цепь относительно отображения $F_{|\{x\} \times I_2}$, соединяющую z_2 с z_1 и состоящую из неподвижных точек F. Полученное противоречие с условием (1) определения 2.1.1 означает, что сделанное предположение не верно и $Fix(g_x)$ – несвязное множество. Следовательно, удовлетворяется либо условие (1) теоремы 2.1.1, если множество $Per(F)$ связно; либо условие (2) теоремы 2.1.1, если множество $Per(F)$ не связно.

3. Обратно, пусть выполнено одно из условий (1) или (2) теоремы 2.1.1. Тогда при некотором $x \in Per(f)$ множество $Fix(g_x)$ не связно. Последнее влечет за собой существование смежного интервала J к замкнутому множеству $Fix(g_x)$, ограниченного неподвижными точками отображения g_x. Условие "$F^{-1}(Per(F)) = Per(F)$"влечет за собой выполнение равенств

$$J = g_x(J), \;\; g_x(intJ) = intJ, \;\; g_x(\partial J) = \partial J, \tag{2.1.5}$$

где $int(\cdot)$, $\partial(\cdot)$ означают, как обычно, внутренность и границу множества соответственно.

Возьмем произвольно и зафиксируем точку $y_0 \in intJ$. В силу (2.1.5) для y_0 корректно определена отрицательная полутраектория $\{y_{-n}\}_{n \geq 0} \subset intJ$, α-предельное множество которой совпадает с одной из граничных точек промежутка J (обозначим ее через α). Так как множество $Fix(g_x)$ замкнуто, то ω-предельное множество траектории точки y_0 совпадает с другой граничной (неподвижной) точкой (обозначим ее через ω) интервала J.

Пусть выполнено условие (1). Тогда точки $z_1(x,\, \alpha)$ и $z_2(x,\, \omega)$ можно выбрать так, чтобы они принадлежали одной компоненте связности множества $Fix(F)$. Используя лемму 2.1.1, получаем, что в этом случае указанные точки образуют t-пару.

Предположим, что выполнено условие (2), а точки $z_1(x,\, \alpha)$ и $z_2(x,\, \omega)$ принадлежат различным связным компонентам множества $Fix(F)$. Тогда в силу леммы 2.1.1 для этих точек удовлетворяется условие (1) определения 2.1.1. Последнее вместе с условием (2) означает, что и в этом случае точки $z_1(x,\, \alpha)$ и $z_2(x,\, \omega)$ также образуют t-пару. Предложение 2.1.4 доказано.

Справедливость теоремы 2.1.1 вытекает из теоремы 2.1.2, предложения 2.1.2 и предложения 2.1.4. Теорема 2.1.1 доказана.

Утверждение теоремы 2.1.1 показывает, что в основе явления C^0- Ω-взрыва в простейших C^1-гладких косых произведениях отображений интервала лежит либо нарушение связности среза некоторой связной компоненты множества $Per(F)$ некоторым вертикальным слоем; либо, в противном случае, такое нарушение связности во множестве $Per(F)$, при котором для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечное число компонент связности, содержащих точки, допускающие соединение конечной ε-цепью.

С другой стороны, как было отмечено в разделе 2.1.1, цепно-рекуррентные точки порождают частный случай ε-траекторий Д.В. Аносова [138]: "ε-периодические траектории". Поэтому для любого отображения $F \in T_1^0(I)$, удовлетворяющего условиям теоремы 2.1.1, найдется $\delta > 0$ такое, что при каждом $\varepsilon > 0$ существует C^1-возмущение F с C^0-нормой (но не с C^1-нормой!), меньшей ε, превращающее некоторую цепно-рекуррентную непериодическую точку F в периодическую точку (период которой может быть сколь угодно большим) нового косого произведения $\Phi \in T^0_1(I)$, непринадлежащую δ-окрестности $U_\delta(\Omega(F))$ множества $\Omega(F)$. Следовательно, учитывая равенства (1.2.23), можно сказать, что возможность Ω-взрыва в простейших отображениях из пространства $T^0_1(I)$ связана также и с тем, что любое C^1-гладкое отображение отрезка можно с произвольной степенью точности аппроксимировать в C^0-норме C^1-гладкими отображениями отрезка, имеющими периодические точки сколь угодно больших периодов (см., например, [22, гл. 2, § 2]).

Приведем примеры C^1-гладких отображений с замкнутым множеством периодических точек, допускающих Ω-взрыв в пространстве $T^0_1(I)$.
Начнем с примера отображения, для которого реализуется условие (1) теоремы 2.1.1.

Пример 2.1.1 [89]. Рассмотрим косое произведение отображений интервала $F_1 : [0,\, 1]^2 \to [0,\, 1]^2$, заданное равенством

$$F_1(x,\, y) = (x,\, y + 0,1(1 - x)(\cos 2\pi y - 1)).$$

Тогда отображение F_1 является C^1-гладким и имеет замкнутое множество периодических точек, причем

$$Per(F_1) = Fix(F_1) = L, \text{ где } L = ([0,\, 1] \times \{0;\, 1\}) \cup (\{1\} \times [0,\, 1]).$$

Отсюда следует, что $Per(F_1)$ – связное множество; при любом $x \in [0,\, 1)$ множество $Per(g_x) = Fix(g_x) = \{0;\, 1\}$ не связно, а $Per(g_1) = Fix(g_1) = [0,\, 1]$. Таким образом, выполнено условие (1) теоремы 2.1.1, и F_1 допускает Ω-взрыв в пространстве $T^0_1(I)$.
Покажем непосредственно, что

$$CR(F_1) \setminus Per(F_1) = I \setminus L. \tag{2.1.6}$$

Действительно, пусть $z_0(x_0,\, y_0)$ – произвольная точка множества $I \setminus L$. Возьмем произвольно и зафиксируем $\varepsilon > 0$ и построим ε-цепь относительно F_1 из z_0 в z_0.
Для этого невырожденный отрезок $[x_0,\, 1]$ оси абсцисс разобьем на $n = [1/\varepsilon] + 2$ равных частей точками $x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$. Обозначим через ε_1 длину отрезка $[x_{k-1},\, x_k]$ $(1 \le k \le n)$. В силу выбора числа n выполнено $\varepsilon_1 < \varepsilon$. Положим

$$z_k = (f(x_{k-1}) + \varepsilon_1,\, g_{x_{k-1}}(y_{k-1})),$$

т. е. $x_k = f(x_{k-1}) + \varepsilon_1 = x_{k-1} + \varepsilon_1$, $y_k = g_{x_{k-1}}(y_{k-1})$. Поэтому при всех $1 \le k \le n$ справедливо $d(F_1(z_{k-1}),\, z_k) = x_k - x_{k-1} = \varepsilon_1$.

Имеем: $z_n = (1;\, g_{x_{n-1}}(y_{n-1}))$. Из определения F_1 следует, что при любом $x \in [0,\, 1]$ отображение $g_x : [0,\, 1] \to [0,\, 1]$ строго возрастает. Поэтому существует единственный прообраз $g^{-1}_{x_{n-k}}(y_{n-k})$ точки y_{n-k} при любом $1 \le k \le n$, причем верно неравенство $g_{x_{n-k}}(y_{n-k}) < g^{-1}_{x_{n-k}}(y_{n-k})$. Отсюда получаем, что

$$g_{x_{n-1}} \circ \ldots \circ g_{x_0}(y_0) < g^{-1}_{x_{n-1}} \circ \ldots \circ g^{-1}_{x_0}(y_0).$$

Обозначим через l длину отрезка $[g_{x_{n-1}} \circ \ldots \circ g_{x_0}(y_0),\, g^{-1}_{x_{n-1}} \circ \ldots \circ g^{-1}_{x_0}(y_0)]$ оси ординат. Разобьем этот отрезок на $m = [l/\varepsilon] + 2$ равных частей точками

$$y_n < y_{n+1} < \ldots < y_{n+m} = g^{-1}_{x_{n-1}} \circ \ldots \circ g^{-1}_{x_0}(y_0).$$

Обозначим через ε_2 $(\varepsilon_2 < \varepsilon)$ длину отрезка $[y_{k-1},\, y_k]$ при $n+1 \le k \le n+m$. При любом $n+1 \le k \le n+m$ положим $z_k = (1;\, g_1(y_{k-1}) + \varepsilon_2)$.

Так как $g_1(y_{k-1}) + \varepsilon_2 = y_{k-1} + \varepsilon_2 = y_k$, то $z_k = (1;\, y_k)$. Поэтому при всех $n+1 \le k \le n+m$ справедливо $d(F_1(z_{k-1}),\, z_k) = y_k - y_{k-1} = \varepsilon_2$.

При каждом $1 \le k \le n$ положим

$$z_{n+m+k} = (f(x_{n+m+k-1}) - \varepsilon_1;\, g_{x_{n+m+k-1}}(y_{n+m+k-1})).$$

Тогда $z_{n+m+k} = (x_{n-k};\, g_{x_{n-k}}(y_{n+m+k-1}))$, причем $g_{x_{n-k}}(y_{n+m+k-1}) = g^{-1}_{x_{n-k-1}} \circ \ldots \circ g^{-1}_{x_0}(y_0)$ при всех $1 \le k \le n-1$. Поэтому $z_{2n+m} = z_0$, и $d(F_1(z_{n+m+k-1}),\, z_{n+m+k}) = |x_{n-k} - x_{n-k-1}| = \varepsilon_1$ для $1 \le k \le n$. Следовательно, $z_0 \in CR(F_1) \setminus Per(F_1)$. Так как одновременно $CR(F_1) \setminus Per(F_1) \subset I \setminus L$, то равенство (2.1.6) доказано.

Завершая эту часть работы, приведем пример отображения, для которого реализуется условие (2) теоремы 2.1.1.

Пример 2.1.2. Рассмотрим косое произведение $F_2 : [0,\, 1]^2 \to [0,\, 1]^2$, факторотображение которого задано равенством:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \in (\frac{1}{2^{2j+1}},\, \frac{1}{2^{2j}}]; \\ x + \frac{1}{2^{2j+5}} \sin^2 \pi(2^{2j+2}x - 1), & \text{если} \quad x \in (\frac{1}{2^{2j+2}},\, \frac{1}{2^{2j+1}}],\ j \ge 0; \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases} \tag{2.1.7}$$

а отображения в слоях – равенством

$$g_x(y) = (2x+1)y(1-y).$$

Тогда $F_2 \in T_1^0(I)$. Заметим, что F_2 удовлетворяет условию (2) теоремы 2.1.1. В самом деле, $Per(F_2) = Fix(F_2)$ – замкнутое несвязное множество такое, что

$$Fix(F_2) = \{(0;\, 0)\} \bigcup \bigcup_{j=0}^{+\infty} \{(x;\, y) : x \in [\frac{1}{2^{2j+1}},\, \frac{1}{2^{2j}}],\ y = 0 \text{ или } \frac{2x}{2x+1}\},$$

и ни одна из компонент связности множества $Fix(F_2)$ не удовлетворяет условию (1) теоремы 2.1.1. При любом $j \geq 0$ положим

$$K_j^1 = \{(x;\, y) : x \in [\frac{1}{2^{2j+1}},\, \frac{1}{2^{2j}}],\ y = \frac{2x}{2x+1}\}; \quad K_j^2 = \{(x;\, 0) : x \in [\frac{1}{2^{2j+1}},\, \frac{1}{2^{2j}}]\}.$$

Обратим внимание на то, что для произвольной точки $(x;\, y) \in Fix(F_2)$ при $x \neq 0$ верно следующее свойство: $y = 0$ – источник, а $y = \frac{2x}{2x+1}$ – сток или притягивающая неподвижная точка с мультипликатором -1 отображения g_x в зависимости от того, выполнено ли неравенство $x < 1$, или имеет место равенство $x = 1$. Поэтому, проводя рассуждения, аналогичные указанным в примере 2.1.1, убеждаемся в том, что при каждом $j \geq 0$ выполнено $K_j^1 \to^a K_j^2$, $K_j^2 \to^a K_j^1$. Следовательно, удовлетворяется условие (2) теоремы 2.1.1 (с $m = 2$ при любом $\delta > 0$), и F_2 допускает Ω-взрыв в пространстве $T_1^0(I)$.

Результаты этой части диссертации опубликованы в работах [81], [87] – [89].

2.1.3 Отсутствие C^1- Ω-взрывов в C^1-гладких простейших косых произведениях

Как было замечено в предыдущем подпараграфе 2.1.2, возможность Ω-взрыва у простейших отображений в пространстве $T_1^0(I)$ связана, в частности, с тем, что любое C^1-гладкое отображение отрезка в себя можно с любой степенью точности аппроксимировать в C^0-норме C^1-гладким отображением отрезка, имеющим периодические точки сколь угодно больших периодов (см., например, [22, гл. 2, §2]). В то же время в C^1-норме такая аппроксимация не возможна (см. предложение 2.1.3). Это свойство влечет за собой невозможность Ω-взрыва у простейших косых произведений в пространстве $T^1(I)$.

Основной результат, полученный в этой части работы (см. [88]), содержит

Теорема 2.1.3. *Пусть $F \in T^1(I)$, а $Per(F)$ – замкнутое множество. Тогда F не допускает Ω-взрыв в пространстве $T^1(I)$; причем существует окрестность $B^1_\varepsilon(F)$ отображения F в пространстве $T^1(I)$ такая, что любое отображение $\Phi \in B^1_\varepsilon(F)$ имеет замкнутое множество периодических точек.*

Доказательство теоремы 2.1.3 проведем в 2 этапа, выделенные в предложениях 2.1.5 и 2.1.6.

Предложение 2.1.5. *Пусть $F \in T^1(I)$, а $Per(F)$ – замкнутое множество. Тогда существует окрестность $B^1_\varepsilon(F)$ отображения F в пространстве $T^1(I)$ такая, что любое отображение $\Phi \in B^1_\varepsilon(F)$ имеет замкнутое множество периодических точек.*

Доказательство. 1. Пусть сначала $\tau(F) = \{1\}$ (тогда и $\tau(F^2) = \{1\}$). Используя предложение 2.1.3, укажем, во-первых, ε_1-окрестность $B^1_{1,\varepsilon_1}(f)$ отображения f в пространстве $C^1(I_1)$ такую, что для любого $\varphi \in B^1_{1,\varepsilon_1}(f)$ справедливо $\tau(\varphi) \subseteq \{1;\, 2\}$, и, во-вторых, при любом $x \in Fix(f)$ – $\varepsilon_2(x)$-окрестность $B^1_{2,\,\varepsilon_2(x)}(g^2_x)$ отображения $g^2_x = g_{x,\,2}$ в пространстве $C^1(I_2)$ такую, что для любого отображения $\theta \in B^1_{2,\,\varepsilon_2(x)}(g^2_x)$ верно включение $\tau(\theta) \subseteq \{1;\, 2\}$.

Воспользуемся C^1-представлением $\rho_2 : I_1 \to C^1(I_2)$, где $\rho_2(x) = g_{x,\,2}$ при любом $x \in I_1$. Непрерывность ρ_2 и компактность множества $Fix(f)$ (отметим, что в рассматриваемом случае верны равенства $Fix(f) = Per(f) = Per(f^2) = Fix(f^2)$) влекут за собой компактность образа $\rho_2(Fix(f)) = \{g_{x,\,2}\}_{x\in Fix(f)}$ в семействе C^1-гладких отображений в слоях $\{g_{x,\,2}\}_{x\in I_1}$ для отображения F^2.

Семейство окрестностей $\{B^1_{2,\,\varepsilon_2(x)}(g^2_x)\}_{x\in Fix(f)}$ представляет собой открытое покрытие компакта $\rho_2(Fix(f))$, бесконечное в том и только том случае, если $Fix(f)$ – бесконечное множество. В случае бесконечного множества $Fix(f)$ из открытого покрытия $\{B^1_{2,\,\varepsilon_2(x)}(g^2_x)\}_{x\in Fix(f)}$ компакта $\rho_2(Fix(f))$ выделим конечное его подпокрытие $\{B^1_{2,\,\varepsilon_2(x_i)}(g^2_{x_i})\}^r_{i=1}$. Положим $\varepsilon_2 = \min\limits_{1\le i\le r}\{\varepsilon_2(x_i)\}$.

Используя равномерную непрерывность C^1-представления $\rho_2 : I_1 \to C^1(I_2)$, по числу $\varepsilon_2 > 0$ укажем положительное число $\delta_2 < \varepsilon_2/2$ так, чтобы для любых $x,\, x' \in I_1$ таких, что $|x - x'| < \delta_2$, выполнялось неравенство

$$||g^2_x - g^2_{x'}||_{1,\,2} < \varepsilon_2/2 \quad \text{(см. определение 0.0.2).} \tag{2.1.8}$$

Возьмем произвольно и зафиксируем положительное число $\delta_3 < \delta_2$. Используя отсутствие C^1- Ω-взрыва у отображений отрезка с замкнутым множеством периодических точек в $C^1(I_1)$, по числу $\delta_3 > 0$ укажем ε_3-окрестность $B^1_{1,\,\varepsilon_3}(f)$ $(\varepsilon_3 < \delta_3)$ отображения f в пространстве $C^1(I_1)$ так, чтобы для любого отображения $\varphi \in B^1_{1,\,\varepsilon_3}(f)$ выполнялось включение

$$Per(\varphi) \subset U_{1,\,\delta_3}(Fix(f)). \tag{2.1.9}$$

Пусть положительное число ε выбрано по числу $\varepsilon_* = 1/2 \min\{\varepsilon_1,\, \varepsilon_3,\, \delta_3\}$ $(\varepsilon < \varepsilon_*)$ так, что для любого $\Phi \in B^1_\varepsilon(F)$ выполнено $\Phi^2 \in B^1_{\varepsilon_*}(F^2)$, где $\Phi(x,\, y) = (\varphi(x),\, \psi_x(y))$. Тогда, в частности, $\varphi \in B^1_{1,\,\varepsilon_3}(f)$, и $\psi_{x',\,2} \in B^1_{(1,\,2),\,\varepsilon_*}(g^2_{x'})$ при любом $x' \in Per(\varphi)$. В силу выбора чисел ε и ε^* выполнено $\varphi \in B^1_{1,\,\varepsilon_3}(f)$ и $\psi_{x',\,2} \in B^1_{(1,\,2),\,\varepsilon_2/2}(g^2_{x'})$ Из неравенства (0.0.7) вытекает справедливость включений

$$B^1_{(1,\,2),\,\varepsilon_*}(g^2_{x'}) \subset B^1_{(1,\,2),\,\varepsilon_2/2}(g^2_{x'}) \subset B^1_{2,\,\varepsilon_2/2}(g^2_{x'}). \tag{2.1.10}$$

Так как $\varphi \in B^1_{1,\,\varepsilon_3}(f)$, то из включения (2.1.9) следует, что для любого $x' \in Per(\varphi)$ найдется точка $x \in Per(f)$ такая, что $|x - x'| < \delta_3 < \delta_2$. Последнее вместе с неравенством (2.1.8) влечет за собой соотношение: $g^2_{x'} \in B^1_{2,\,\varepsilon_2/2}(g^2_x)$. Используя соотношение $\psi_{x',\,2} \in B^1_{(1,\,2),\,\varepsilon_2/2}(g^2_{x'})$ и включения (2.1.10), получаем: $\psi_{x',\,2} \in B^1_{2,\,\varepsilon_2}(g^2_x)$. Тогда при любом $x' \in Per(\varphi)$ справедливо включение $\tau(\psi_{x',\,2}) \subseteq \{1;\, 2\}$. Отсюда немедленно получаем включение $\tau(\Phi) \subseteq \{1,\, 2,\, 2^2\}$. Ограниченность множества $\tau(\Phi)$ влечет за собой замкнутость множества $Per(\Phi)$.

2. Пусть теперь $\tau(F) = \{1,\, 2, \ldots, 2^\mu\}$ при некотором $0 < \mu < +\infty$. Тогда в силу п.1 $\tau(F^{2^\mu}) = \{1\}$, и существует окрестность $B^1_\varepsilon(F^{2^\mu})$ отображения F^{2^μ} в пространстве $T^1(I)$ такая, что для любого $\Phi \in B^1_\varepsilon(F)$ выполнено $\tau(\Phi) \subseteq \{1,\, 2,\, 2^2\}$. Выберем положительное число ε' по числу ε так, чтобы для любого отображения

$\Phi \in B^1_{\varepsilon'}(F)$ выполнялось $\Phi^{2^\mu} \in B^1_\varepsilon(F^{2^\mu})$. Тогда каждое $\Phi \in B^1_{\varepsilon'}(F)$ имеет ограниченное множество (наименьших) периодов периодических точек (справедливо включение $\tau(\Phi) \subseteq \{1,\, 2, \ldots, 2^{\mu+2}\}$) и, следовательно, замкнутое множество $Per(\Phi)$. Предложение 2.1.5 доказано.

Укажем оценку сверху множества (наименьших) периодов периодических точек простейших отображений из $T^1(I)$, непосредственно вытекающую из предложения 2.1.5.

Следствие 2.1.1. *Пусть* $F \in T^1(I)$ *– простейшее отображение такое, что* $\tau(F) = \{1,\, 2, \ldots, 2^\mu\}$ *при некотором* $0 \le \mu < +\infty$. *Тогда существует окрестность* $B^1_\varepsilon(F)$ *отображения* F *в пространстве* $T^1(I)$, *обладающая свойством: для любого* $\Phi \in B^1_\varepsilon(F)$ *справедливо* $\tau(\Phi) \subseteq \{1,\, 2, \ldots, 2^{\mu+2}\}$[1].

Предложение 2.1.6. *Пусть* $F \in T^1(I)$, *а множество* $Per(F)$ *замкнуто. Тогда* F *не допускает* Ω*-взрыв в пространстве* $T^1(I)$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует простейшее отображение $F_* \in T^1(I)$, допускающее Ω-взрыв в пространстве $T^1(I)$.

1. Будем считать сначала, что $Per(F_*) = Fix(F_*)$. При этом $\tau(F_*) = \{1\}$. Используя следствие 2.1.1 при $\mu = 0$, укажем ε_0-окрестность $B^1_{\varepsilon_0}(F_*)$ отображения F_* в пространстве $T^1(I)$ так, чтобы для произвольного косого произведения $\Phi \in B^1_{\varepsilon_0}(F_*)$ выполнялось $\tau(\Phi) \subseteq \{1,\, 2, 2^2\}$. В силу определения 0.0.9 при сделанном предположении существует $\delta > 0$ такое, что при любом положительном $\varepsilon < \varepsilon_0$ найдется $\Phi \in B^1_\varepsilon(F_*)$, обладающее следующим свойством: для некоторой точки $w_0 \in Per(\Phi)$ выполнено $w_0 \notin U_\delta(Fix(F_*))$.

2. Пусть последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{+\infty}$ такова, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Тогда найдется $n_0 \ge 1$ такое, что при любом $n \ge n_0$, верно неравенство $\varepsilon_n < \varepsilon_0$. Следовательно, при каждом $n \ge n_0$ можно указать отображение $\Phi_n \in B^1_\varepsilon(F_*)$ такое, что для некоторой точки $w_n \in Per(\Phi_n)$ выполнено $w_n \notin U_\delta(Fix(F_*))$.

Используя компактность I, из последовательности $\{w_n\}_{n\ge n_0}$ выделим подпоследовательность $\{w_{n_k}\}_{k\ge1}$, сходящуюся к некоторой точке $w_*(x_*,\, y_*)$. Тогда $w_* \notin$

---

[1] Забегая вперед, отметим, что оценка сверху множества (наименьших) периодов периодических точек простейших отображений из $T^1(I)$, указанная в следствии 2.1.1, может быть улучшена. Точная (неулучшаемая) оценка этого множества получена в предложении 2.1.7.

$U_\delta(Fix(F_*))$. Покажем, что w_* - устойчивая по Пуассону ($w_* \in P(F_*)$), но не периодическая точка F_* ($w_* \notin Fix(F_*)$).

Действительно, возьмем произвольно и зафиксируем положительное число $\varepsilon < \varepsilon_0$. Используя равномерную непрерывность F_* на компакте I, по ε при каждом $i \geq 1$ укажем положительное число $\eta_i < \varepsilon$ так, чтобы, во-первых, для произвольных точек z', $z'' \in I$ таких, что $d(z',\, z'') < \eta_i$, выполнялось неравенство

$$d(F_*^{4^i}(z'),\, F_*^{4^i}(z'')) < \varepsilon, \tag{2.1.11}$$

а, во-вторых, для любых $\Phi \in B^1_{\eta_i}(F_*)$ выполнялось

$$\Phi^{4^i} \in B^1_\varepsilon(F_*^{4^i}). \tag{2.1.12}$$

Пусть натуральное число $k(i)$ выбрано так, что верно неравенство $d(w_{n_{k(i)}},\, w_*) < \eta_i$. Тогда, используя соотношения (2.1.11), (2.1.12) и равенство $\Phi^{4^i}_{n_{k(i)}}(w_{n_{k(i)}}) = w_{n_{k(i)}}$, верное для любого отображения $\Phi_{n_{k(i)}} \in B^1_{\eta_i}(F_*)$, имеем:

$$\begin{gathered} d(w_*,\, F_*^{4^i}(w_*)) \leq d(w_*,\, w_{n_{k(i)}}) + d(\Phi^{4^i}_{n_{k(i)}}(w_{n_{k(i)}}),\, F_*^{4^i}(w_{n_{k(i)}}))+ \\ +d(F_*^{4^i}(w_{n_{k(i)}}),\, F_*^{4^i}(w_*) < 3\varepsilon. \end{gathered} \tag{2.1.13}$$

Неравенство (2.1.13) равносильно одновременному выполнению следующих двух неравенств для факторотображения и отображения в слое над точкой x_* косого произведения F_*:

$$|x_* - f^{4^i}(x_*)| < 3\varepsilon, \quad \text{и} \quad |y_* - g_{x_*,\,4^i}(y_*)| = |y_* - g^{4^i}_{x_*}(y_*)| < 3\varepsilon,$$

причем в силу $w_* \notin U_\delta(Fix(F_*))$ либо $f^{4^i}(x_*) \neq x_*$, либо $y_* \neq g^{4^i}_{x_*}(y_*)$. Следовательно, $w_* \in P(F_*) \setminus Per(F_*)$. Последнее невозможно, так как из теоремы 1.3.2 следует, что $P(F_*) = Per(F_*)$. Таким образом, сделанное предположение не верно, и любое простейшее отображение $F \in T^1(I)$ такое, что $\tau(F) = \{1\}$ не допускает Ω-взрыв в пространстве $T^1(I)$.

3. Пусть теперь $\tau(F) = \{1,\, 2,\, \dots,\, 2^\mu\}$ при некотором $0 < \mu < +\infty$. Тогда $\tau(F^{2^\mu}) = \{1\}$, и в силу предыдущего отображение F^{2^μ} не допускает Ω-взрыв в пространстве $T^1(I)$. Так как $\Omega(F^{2^\mu})$=$Per(F^{2^\mu})$=$Per(F)$=$\Omega(F)$ (см. теорему 1.2.2), то используя определение отсутствия Ω-взрыва в пространстве $T^1(I)$, получаем отсюда, что и отображение F не допускает Ω-взрыв в пространстве $T^1(I)$. Предложение 2.1.6 доказано.

Справедливость теоремы 2.1.3 следует из предложений 2.1.5 и 2.1.6. Теорема 2.1.3 доказана.

В заключение §2.1 обобщим предложение 2.1.3 на случай отображений из $T^1(I)$, уточнив оценку сверху для множества (наименьших) периодов периодических точек гладких простейших косых произведений, указанную в следствии 2.1.1.

Предложение 2.1.7. *Если отображение* $F \in T^1(I)$ *не содержит периодическую точку периода* 2^i, *то существует* ε-*окрестность* $B^1_\varepsilon(F)$ *отображения* F *в пространстве* $T^1(I)$ *такая, что любое отображение из окрестности* $B^1_\varepsilon(F)$ *не содержит периодических точек периода* 2^{i+1}, *каково бы ни было* $i \geq 1$.

Доказательство. 1. Пусть F – произвольное отображение из $T^1(I)$, несодержащее периодическую точку периода 2^i при некотором $i \geq 1$. В силу обобщенной теоремы А.Н. Шарковского в условиях предложения 2.1.7 имеем: $\tau(F) = \{1, 2, \ldots, 2^{i-1}\}$ при некотором $1 \leq i < +\infty$. Тогда для отображения $G = F^{2^{i-1}}$ справедливо $\tau(G) = \{1\}$. Используя следствие 2.1.1, укажем окрестность $B^1_{\varepsilon'}(G)$ отображения G в пространстве $T^1(I)$ такую, что для произвольного отображения $\Phi \in B^1_{\varepsilon'}(G)$ выполнено $\tau(\Phi) \subseteq \{1, 2, 2^2\}$.

2. Покажем, что существует подокрестность $B^1_{\varepsilon''}(G)$ окрестности $B^1_{\varepsilon'}(G)$ отображения G такая, что произвольное отображение из $B^1_{\varepsilon''}(G)$ не содержит периодических точек периода 4. Предположим противное. Тогда найдется последовательность отображений $\{\Phi_n\}_{n\geq 1}$ такая, что

$$\lim_{n\to+\infty} ||\Phi_n - G||_1 = 0, \qquad (2.1.14)$$

и отображение Φ_n при любом $n \geq 1$ содержит периодическую точку периода 4. В силу равенства (2.1.3) и предложения 2.1.3 проекцией периодической орбиты периода 4 отображения Φ_n на ось абсцисс служит периодическая орбита периода 2 факторотображения косого произведения Φ_n. Пусть эта периодическая орбита образована точками

$$(x_1^n,\, y_1^n),\ (x_2^n,\, y_2^n),\ (x_1^n,\, y_3^n),\ (x_2^n,\, y_4^n),\ \text{ причем }\ y_3^n \neq y_1^n,\ \ y_4^n \neq y_2^n.$$

Пусть $\Phi_n(x,\, y) = (f_n(x),\, (g_n)_x(y))$, $n \geq 1$. В плоскости $YO\overline{Y}$ построим графики функций $\overline{y} = (g_n)_{x_1^n}(y)$ и $\overline{y} = (g_n)_{x_2^n}(y)$. Соединим отрезками прямой точку $(y_1^n;\, y_2^n)$ с точкой

$(y_3^n;\, y_4^n)$ на графике функции $\overline{y} = (g_n)_{x_1^n}(y)$ и точку $(y_2^n;\, y_3^n)$ с точкой $(y_4^n;\, y_1^n)$ на графике функции $\overline{y} = (g_n)_{x_2^n}(y)$.

Запишем уравнения каждой из двух прямых, содержащих построенные отрезки. Так, через точки $(y_1^n;\, y_2^n)$ и $(y_3^n;\, y_4^n)$ проходит прямая l_1^n, заданная уравнением

$$\overline{y} = \frac{y_4^n - y_2^n}{y_3^n - y_1^n}(y - y_1^n) + y_2^n,$$

а через точки $(y_2^n;\, y_3^n)$ и $(y_4^n;\, y_1^n)$ – прямая l_2^n, заданная уравнением

$$\overline{y} = \frac{y_3^n - y_1^n}{y_2^n - y_4^n}(y - y_4^n) + y_1^n,$$

Положим $k_1^n = \frac{y_4^n - y_2^n}{y_3^n - y_1^n}$, $k_2^n = \frac{y_3^n - y_1^n}{y_2^n - y_4^n}$. Тогда

$$k_1^n k_2^n = -1, \tag{2.1.15}$$

т. е. прямые l_1^n и l_2^n – взаимно перпендикулярны (при любом $n \geq 1$) .

В то же время справедливы равенства

$$k_1^n = \frac{(g_n)_{x_1^n}(y_3^n) - (g_n)_{x_1^n}(y_1^n)}{y_3^n - y_1^n}; \quad k_2^n = \frac{(g_n)_{x_2^n}(y_2^n) - (g_n)_{x_2^n}(y_4^n)}{y_2^n - y_4^n}.$$

Положим

$$J_{1,3}^n = \{x_1^n \times (\min\{y_1^n,\, y_3^n\},\ \max\{y_1^n,\, y_3^n\}),$$

$$J_{2,4}^n = \{x_2^n \times (\min\{y_2^n,\, y_4^n\},\ \max\{y_2^n,\, y_4^n\}).$$

Используя классическую теорему Лагранжа для функции одного переменного, укажем точки $\xi_1^n \in J_{1,3}^n$, $\xi_2^n \in J_{2,4}^n$, для которых выполнено

$$\frac{\partial}{\partial y}(g_n)_{x_1^n}(\xi_1^n) = k_1^n; \quad \frac{\partial}{\partial y}(g_n)_{x_2^n}(\xi_2^n) = k_2^n.$$

Используя (2.1.15), получаем отсюда

$$|\frac{\partial}{\partial y}(g_n)_{x_1^n}(\xi_1^n) - \frac{\partial}{\partial y}(g_n)_{x_2^n}(\xi_2^n)| = |k_1^n - k_2^n| = |k_1^n + \frac{1}{k_1^n}| \geq 2. \tag{2.1.16}$$

С другой стороны, в силу теоремы 2.1.3 отображение G не допускает Ω-взрыв в пространстве $T^1(I)$. Воспользуемся определением 0.0.9 и возьмем произвольную последовательность положительных чисел $\{\delta_m\}_{m\geq 1}$, сходящуюся к 0. Тогда для каждого $m \geq 1$ существует положительное число $\varepsilon(\delta_m)$ такое, что для любого отображения

$\Phi \in B^1_{\varepsilon(\delta_m)}(G)$ справедливо $\Omega(\Phi) \subset U_{\delta_m}(\Omega(G))$; и, в частности, в силу (2.1.14) при каждом $m \geq 1$ найдется отображение $\Phi_{n_m} \in B^1_{\varepsilon(\delta_m)}(G)$, содержащее периодическую орбиту периода 4 и такое, что $\Omega(\Phi_{n_m}) \subset U_{\delta_m}(\Omega(G))$. Таким образом, любая сходящаяся (по m) последовательность точек из $\Omega(\Phi_{n_m})$ имеет единственную предельную точку, являющуюся неподвижной для отображения G. Отсюда с использованием равенства (2.1.14) и непрерывности отображений G и Φ_{n_m} немедленно получаем, что если последовательность $\{(x_1^{n_{m_k}}, y_1^{n_{m_k}})\}_{k \geq 1}$ сходится и

$$\lim_{k \to +\infty} (x_1^{n_{m_k}}, y_1^{n_{m_k}}) = (x^0, y^0), \quad \text{где} \;\; G(x^0, y^0) = (x^0, y^0),$$

то сходится и каждая из последовательностей $\{(x_1^{n_{m_k}}, y_3^{n_{m_k}})\}_{k \geq 1}$, $\{(x_2^{n_{m_k}}, y_s^{n_{m_k}})\}_{k \geq 1}$ при $s = 2, 4$, и справедливы равенства

$$(x^0, y^0) = \lim_{k \to +\infty} (x_1^{n_{m_k}}, y_3^{n_{m_k}}) = \lim_{k \to +\infty} (x_2^{n_{m_k}}, y_s^{n_{m_k}}).$$

Тогда, используя полученные соотношения, равенство (2.1.14) и C^1-гладкость отображений Φ_{n_m}, получаем

$$\frac{\partial}{\partial y} g_{x^0,\, 2^{i-1}}(y^0) = \lim_{k \to +\infty} \frac{\partial}{\partial y} (g_{n_{m_k}})_{x_1^{n_{m_k}}}(\xi_1^{n_{m_k}}) = \lim_{k \to +\infty} \frac{\partial}{\partial y} (g_{n_{m_k}})_{x_2^{n_{m_k}}}(\xi_2^{n_{m_k}}).$$

Поэтому

$$\lim_{k \to +\infty} \left| \frac{\partial}{\partial y} (g_{n_{m_k}})_{x_1^{n_{m_k}}}(\xi_1^{n_{m_k}}) - \frac{\partial}{\partial y} (g_{n_{m_k}})_{x_2^{n_{m_k}}}(\xi_2^{n_{m_k}}) \right| = 0,$$

в то время, как из неравенства (2.1.16) следует

$$\lim_{k \to +\infty} \left| \frac{\partial}{\partial y} (g_{n_{m_k}})_{x_1^{n_{m_k}}}(\xi_1^{n_{m_k}}) - \frac{\partial}{\partial y} (g_{n_{m_k}})_{x_2^{n_{m_k}}}(\xi_2^{n_{m_k}}) \right| \geq 2.$$

Таким образом, неравенство (2.1.16) противоречит C^1-гладкости отображений Φ_{n_m}. Следовательно, сделанное предположение не верно, и существует подокрестность $B^1_{\varepsilon''}(G)$ окрестности $B^1_{\varepsilon'}(G)$ отображения G такая, что произвольное отображение из $B^1_{\varepsilon''}(G)$ не содержит периодических точек периода 4 (хотя может содержать периодические точки периода 2).

3. Пусть теперь $\tau(F) = \{1, 2, \ldots, 2^{i-1}\}$ при некотором $2 \leq i < +\infty$ По числу $\varepsilon'' > 0$ (см. п.2) укажем положительное число ε так, чтобы для любого отображения $\Psi \in B^1_{\varepsilon}(F)$ выполнялось $\Psi^{2^{i-1}} \in B^1_{\varepsilon''}(G)$. Тогда $\Psi^{2^{i-1}}$ не содержит периодических точек периода 4, а, следовательно, Ψ не содержит периодических точек периода 2^{i+1}

(хотя может содержать периодические точки периода 2^i).

Предложение 2.1.7 доказано.

Как показывает приведенный ниже пример 2.1.3, полученная в предложении 2.1.7 оценка множества (наименьших) периодов периодических точек C^1-гладких косых произведений отображений интервала из некоторой окрестности простейшего отображения в пространстве $T^1(I)$ не улучшаема.

Пример 2.1.3. Рассмотрим отображение $F_3 \in T^1([0,\,1]^2)$, факторотображение $f(x)$ которого определено в силу равенства (2.1.7). Следовательно, $Fix(f)$ – совершенное множество (мощности континуум). Перейдем к определению отображений в слоях.

Обозначим через λ_i $(i \geq 1)$ бифуркационное значение параметра в семействе логистических отображений $\overline{x} = \lambda x(1-x)$ такое, что при $\lambda = \lambda_i$ логистическое отображение имеет негрубую притягивающую периодическую орбиту периода 2^{i-1}, а при $\lambda_i < \lambda < \lambda_{i+1}$ у логистических отображений существует периодическая орбита периода 2^i (см., например, [22, гл. 1, §2]). Определим отображения в слоях $g_x(y)$ косого произведения F_3, полагая $g_x(y) = ((\lambda_i - \lambda_{i-1})x + \lambda_{i-1})y(1-y)$, $i \geq 2$.

Тогда $\tau(F_3) = \{1,\,2,\,\ldots,2^{i-1}\}$. Так как f – возрастающий диффеоморфизм (см. формулу (2.1.7)), то существует окрестность $B^1_{1,\,\varepsilon_1}(f)$ отображения f в пространстве $C^1(I_1)$ такая, что любое отображение $\varphi \in B^1_{1,\,\varepsilon_1}(f)$ также является возрастающим диффеоморфизмом (т. е. $\tau(\varphi) = \{1\}$). В силу предложения 2.1.3 при каждом $x \in Fix(f)$ существует окрестность $B^1_{2,\,\varepsilon_2(x)}(g_x)$ такая, что произвольное отображение $g \in B^1_{2,\,\varepsilon_2(x)}(g_x)$ не содержит периодической орбиты периода 2^i при $x = 0$ (при этом $\{1,\,2\ldots 2^{i-2}\} \subseteq \tau(g) \subseteq \{1,\,2\ldots 2^{i-1}\}$) и – периодической орбиты периода 2^{i+1} при $x \in (0,\,1]$ (здесь $\{1,\,2\ldots 2^{i-1}\} \subseteq \tau(g) \subseteq \{1,\,2\ldots 2^{i}\}$).

Будем использовать окрестности $B^1_{2,\,\varepsilon_2(x)}(g_x)$ C^1-гладких отображений в слоях (по переменной y) косого произведения F_3 при всех $x \in Fix(f)$. Тогда при любом $x' \in [0,\,1]$ таком, что $g_{x'} \in B^1_{2,\,\varepsilon_2(x)}(g_x)$ при некотором $x \in Fix(f)$, множество $\tau(g_{x'})$ не содержит натурального числа 2^{i+1}.

Непрерывность C^1-представления $\rho_1 : [0,\,1] \to C^1([0,\,1])$ (см. Введение, определение 0.0.2) и компактность $Fix(f)$ влекут за собой компактность множества $\rho_1(Fix(f)) = \{g_x\}_{x \in Fix(f)}$ в семействе C^1-гладких отображений в слоях $\{g_x\}_{x\in[0,\,1]}$ отображения F_3. Семейство окрестностей $\{B^1_{2,\,\varepsilon_2(x)}(g_x)\}_{x\in Fix(f)}$ представляет собой бесконечное открытое покрытие компакта $\rho_1(Fix(f))$. Пусть окрестности $\{B^1_{2,\,\varepsilon_2(x_i)}(g_{x_i})\}_{i=1}^{r}$ образуют конечное открытое подпокрытие компакта $\rho_1(Fix(f))$. Положим $\varepsilon_2 = \min\limits_{1\le i\le r}\{\varepsilon_2(x_i)\}$.

Используя равномерную непрерывность C^1-представления ρ_1, по $\varepsilon_2 > 0$ укажем положительное число $\delta_2 < \varepsilon_2/2$ так, чтобы для любых $x,\ x' \in [0,\,1]$ таких, что $|x - x'| < \delta_2$, выполнялось неравенство $||g_x - g_{x'}||_{1,\,2} < \varepsilon_2/2$.

Возьмем произвольно и зафиксируем положительное число $\delta_3 < \delta_2$. Используя отсутствие C^1- Ω-взрыва у отображений отрезка с замкнутым множеством периодических точек в $C^1([0,\,1])$, по числу $\delta_3 > 0$ укажем ε_3-окрестность $B^1_{1,\,\varepsilon_3}(f)$ отображения f в пространстве $C^1([0,\,1])$ так, что $\varepsilon_3 < \varepsilon_1$, и для любого отображения $\varphi \in B^1_{1,\,\varepsilon_3}(f)$ выполнено $Fix(\varphi) \subset U_{1,\,\delta_3}(Fix(f))$.

Положим $\varepsilon_* = 1/2\min\{\varepsilon_3,\,\delta_3\}$. Тогда в силу предыдущего и второго из включений (2.1.10) любое отображение $\Phi \in B^1_{\varepsilon_*}(F_3)$ не содержит периодических точек с (наименьшим) периодом, равным 2^{i+1}. В то же время, пусть ε – произвольное положительное число такое, что $\varepsilon < \min\{\varepsilon_*,\,\lambda_{i+1} - \lambda_i\}$. Положим

$$\Phi_\varepsilon(x,\,y) = (f(x),\,(\lambda_i - \lambda_{i-1})x + \lambda_{i-1} + \varepsilon)y(1-y)).$$

Тогда $\Phi_\varepsilon \in B^1_{\varepsilon_*}(F_3)$, и $\tau(\Phi_\varepsilon) = \{1,\,2,\,\dots,2^i\}$.

Таким образом, малые C^1-возмущения простейших косых произведений в пространстве $T^1(I)$ могут приводить лишь к локальным перестройкам множества периодических точек, связанным с бифуркациями удвоения периода периодических точек.

Завершая раздел 2.1.3, укажем отличительные особенности бифуркаций удвоения периода периодических точек гладких косых произведений отображений интервала, когда первый мультипликатор $\lambda_1((x^0;\,y^0))$ неподвижной точки $(x^0;\,y^0)$ проходит через -1, а второй мультипликатор $\lambda_2((x^0;\,y^0))$ этой точки проходит либо через 1, либо через -1. Напомним, что в гладких отображениях отрезка при переходе мультипликатора неподвижной точки через -1 появляется единственная периодическая орбита периода 2, образованная стоками (см., например, [22, гл. 1, § 3], [142])), при этом неподвижная точка становится источником (хотя в момент бифуркации была притягивающей).

Теорема 2.1.4 [88]. *Пусть $F_\alpha : I \to I$ ($F_\alpha(x, y) = (f_\alpha(x), g_{\alpha, x}(y))$) – однопараметрическое семейство C^3-гладких косых произведений отображений интервала, C^1-гладко зависящее от параметра $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$, $(x^0; y^0)$ – неподвижная точка косого произведения F_{α_0}, причем $\lambda_1((x^0; y^0)) = -1$, и $\lambda_2((x^0; y^0)) = 1$. Пусть при $\alpha = \alpha_0$ в неподвижной точке $(x^0; y^0)$ выполнены следующие неравенства*

(1) $\frac{\partial^3}{\partial x^3}(f^2_\alpha(x)) < 0$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}(g_{\alpha, x, 2}(y)) > 0$,

(2) $\frac{\partial}{\partial \alpha}(f^2_\alpha(x)) < 0$, $\frac{\partial}{\partial \alpha}(g_{\alpha, x, 2}(y)) < 0$.

Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

(a) при $\alpha \in (\alpha_0 - \delta, \alpha_0)$ косое произведение F_α не имеет неподвижных точек в открытом квадрате $(x^0 - \varepsilon, x^0 + \varepsilon) \times (y^0 - \varepsilon, y^0 + \varepsilon)$;

(b) при $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_0 + \delta)$ косое произведение F_α имеет в $(x^0 - \varepsilon, x^0 + \varepsilon) \times (y^0 - \varepsilon, y^0 + \varepsilon)$ две неподвижные точки, с одной и той же неподвижной точкой фактоторотображения f_α в качестве проекции, причем одна из неподвижных точек F_α является источником, а другая седлом; и пару периодических орбит периода 2, с одной и той же периодической орбитой периода 2 фактоторотображения f_α в качестве проекции, причем одна из периодических орбит периода 2 косого произведения F_α образована стоками, а другая – седловыми периодическими точками.

Условия (1), (2) теоремы 2.1.4 получены из приведенных в [92] условий, при выполнении которых происходят бифуркации периодических точек отображений отрезка (см. также [22, гл. 1, § 3]).

Теорема 2.1.5 [88]. *Пусть $F_\alpha : I \to I$ ($F_\alpha(x, y) = (f_\alpha(x), g_{\alpha, x}(y))$) – однопараметрическое семейство C^3-гладких косых произведений отображений интервала, C^1-гладко зависящее от параметра $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$, $(x^0; y^0)$ – неподвижная точка косого произведения F_{α_0}, причем $\lambda_1((x^0; y^0)) = -1$, и $\lambda_2((x^0; y^0)) = -1$. Пусть при $\alpha = \alpha_0$ в неподвижной точке $(x^0; y^0)$ выполнены следующие неравенства*

(1) $\frac{\partial^3}{\partial x^3}(f^2_\alpha(x)) < 0$, $\frac{\partial^3}{\partial y^3}(g_{\alpha, x, 2}(y)) < 0$,

(2) $\frac{\partial}{\partial \alpha}(f^2_\alpha(x)) < 0$, $\frac{\partial}{\partial \alpha}(g_{\alpha, x, 2}(y)) < 0$.

Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что *(a) при* $\alpha \in (\alpha_0 - \delta, \alpha_0)$ *косое произведение* F_α *имеет только одну неподвижную точку в открытом квадрате* $(x^0 - \varepsilon, x^0 + \varepsilon) \times (y^0 - \varepsilon, y^0 + \varepsilon)$*, и эта точка является стоком;*

(b) при $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_0 + \delta)$ F_α *имеет в открытом квадрате* $(x^0 - \varepsilon, x^0 + \varepsilon) \times (y^0 - \varepsilon, y^0 + \varepsilon)$ *только одну неподвижную точку – источник и 4 периодические орбиты периода 2, одна из орбит периода 2 с той же проекцией, что и неподвижная точка, образована седловыми периодическими точками; одна из трех периодических орбит периода 2 отображения* F_α *с одной и той же периодической орбитой периода* 2 *фактороотображения* f_α *в качестве проекции образована седловыми периодическими точками, а две другие образованы стоками.*

Условия (1), (2) теоремы 2.1.5 также, как и в предыдущей теореме 2.1.4, получены из соответствующих бифуркационных условий для гладких отображений отрезка, имеющихся в [92] (см. также [22, гл. 1, § 3]).

Результаты, приведенные в разделе 2.1.3, получены в работе автора [88].

2.2 Расходящиеся ряды, дифференциальные свойства и ω-предельные множества простейших косых произведений

В §2.2 введены специальные ряды, с использованием которых установлено не только необходимое условие существования одномерных ω-предельных множеств косых произведений в плоскости с замкнутым множеством периодических точек (теорема 2.2.4), но и доказаны критерии (необходимые и достаточные условия) существования таких ω-предельных множеств (предложение 2.2.2 и теорема 2.2.1). Здесь же получено интегральное условие существования одномерных ω-предельных множеств простейших косых произведений в плоскости (теорема 2.2.5).

Пусть, по-прежнему, $\tau(F)$ есть множество (наименьших) периодов периодических точек простейшего отображения $F \in T^0(I)$. В §2.1 отмечалось, что для ограниченного множества $\tau(F)$ справедливо равенство $\tau(F) = \{1, 2, 2^2, \ldots, 2^\mu\}$ при некотором

$0 \le \mu < +\infty$ [29], и для наибольшего элемента M множества $\tau(F)$ выполнено $M = 2^{\mu}$.

Начнем с установления допустимого топологического типа ω-предельных множеств отображений из $T^0(I)$ с ограниченным множеством $\tau(F)$.

2.2.1 Допустимый топологический тип ω-предельных множеств

В этой части работы доказано следующее

Предложение 2.2.1. *Пусть $F \in T^0(I)$, а множество $\tau(F)$ ограничено. Тогда для любой точки $(x;\, y) \in I$ ω-предельное множество $\omega_{F^M}((x;\, y))$ ее траектории относительно отображения F^M есть вертикальный отрезок (возможно, вырожденный).*

Для доказательства предложения 2.2.1 нам потребуется характеристическое свойство ω-предельных множеств из статьи [143].

Характеристическое свойство ω-предельных множеств. *Пусть $F : X \to X$ – непрерывное отображение локально компактного пространства X в себя, а Ω – произвольное ω-предельное множество. Если V – подмножество Ω, открытое в Ω и несовпадающее с Ω, то замыкание множества $F(V)$ не содержится в V.*

Доказательство предложения 2.2.1. Предположим, что найдется точка $(x';\, y') \in I$ такая, что $\omega_{F^M}((x';\, y'))$ не является вертикальным отрезком. Так как для некоторой точки $x^0 \in I_1$ выполнено $x^0 = \lim\limits_{n \to +\infty} f^{Mn}(x')$ [106], то при сделанном предположении $\omega_{F^M}((x';\, y'))$ – несвязное замкнутое подмножество слоя над точкой x^0. Тогда существует открытое и замкнутое относительно $\omega_{F^M}((x';\, y'))$, состоящее из неподвижных точек F^M множество $V \subset \omega_{F^M}((x';\, y'))$, $V \ne \omega_{F^M}((x';\, y'))$, такое, что в силу компактности I справедливы равенства $F^M(\overline{V}) = \overline{F^M(V)} = V$. Последнее противоречит характеристическому свойству ω-предельных множеств. Таким образом, сделанное предположение неверно, и ω-предельное множество $\omega_{F^M}((x;\, y))$ траектории произвольной точки $(x;\, y)$ относительно отображения F^M есть отрезок (возможно, вырожденный). Предложение 2.2.1 доказано.

Если множество $\tau(F)$ косого произведения $F \in T^0(I)$ ограничено, то в силу теоремы 1.3.2 ω-предельное множество $\omega_{F^M}((x;\, y))$ траектории произвольной точки

$(x;\, y) \in I$ относительно отображения F^M состоит из неподвижных точек F^M.

Результат подраздела 2.2.1 приведен в статьях [81], [93].

2.2.2 Критерии различения одномерных ω-предельных множеств

Покажем, что свойство траектории иметь одномерное ω-предельное множество связано с расходимостью некоторых специальных рядов, построенных по исследуемой траектории и содержащих информацию о ее асимптотическом поведении. Этот подход, по-видимому, следует рассматривать в контексте сформулированной Д.В. Аносовым в статье [82] глобальной задачи нахождения движений, занимающих (в некотором естественном смысле) промежуточное положение между квазипериодическими и гиперболическими движениями.

Отметим, что в [82] в качестве начального этапа решения указанной задачи предлагается развить теорию расходящихся рядов.

Предложение 2.2.2. *Пусть отображение $F \in T^0(I)$ имеет ограниченное множество $\tau(F)$. Тогда для произвольной точки $(x';\, y') \in I$ следующие утверждения эквивалентны:*

(1) ω-предельное множество $\omega_{F^M}((x';\, y'))$ – невырожденный вертикальный отрезок;

(2) ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \phi_{x',\,Mn}(y') \qquad (2.2.1)$$

– расходящийся (знакопеременный), здесь $\phi_{x',\,Mn}(y') = g_{x',\,M(n+1)}(y') - g_{x',\,Mn}(y')$ при любом $n \geq 1$.

Доказательство. 1. Пусть $(x';\, y')$ – произвольная точка прямоугольника I. Обозначим через S'_k – k-тую частичную сумму ряда (2.2.1). Имеем: $S'_k = g_{x',\,M(k+1)}(y') - g_{x',\,M}(y')$. Так как при любых $(x';\, y')$ и $k \geq 1$ выполнено $g_{x',\,M(k+1)}(y') \in I_2$, то последовательность $\{S'_k\}_{k\geq 0}$ частичных сумм ряда (2.2.1) ограничена. Поэтому, если ряд (2.2.1) расходится, то он является знакопеременным.

2. Пусть имеет место свойство (1). В силу предложения 2.2.1 при некоторых $x^0 \in I_1$

и $[\alpha,\, \beta] \subset I_2$, где $\alpha < \beta$, справедливо $\omega_{FM}((x';\, y')) = \{x^0\} \times [\alpha,\, \beta]$. Тогда невырожденный отрезок $[\alpha,\, \beta]$ совпадает с множеством предельных точек последовательности $\{g_{x',\,Mn}(y')\}_{n\geq 1}$, а невырожденный отрезок $[\alpha - g_{x',\,M}(y'),\; \beta - g_{x',\,M}(y')]$ – с множеством предельных точек последовательности $\{S'_k\}_{k\geq 0}$. Таким образом, (2.2.1) – расходящийся (знакопеременный) ряд, и F обладает свойством (2).

3. Обратно, пусть выполнено свойство (2). Тогда из ограниченности последовательности $\{S'_k\}_{k\geq 0}$ следует, что множество ее предельных точек содержит, по крайней мере, две различные точки, то же справедливо и для множества предельных точек последовательности $\{g_{x',\,Mn}(y')\}_{n\geq 1}$. Используя предложение 2.2.1, получаем, что $\omega_{FM}((x';\, y'))$ – невырожденный отрезок. Предложение 2.2.2 доказано.

Для того, чтобы сформулировать и доказать еще один, более точно учитывающий свойства рассматриваемых отображений критерий различения одномерных ω-предельных множеств (теорему 2.2.1), нам потребуется следующее утверждение, представляющее собой приспособленный к рассматриваемому случаю вариант классической леммы Адамара для функции одного переменного [144, гл.6, §2].

Предложение 2.2.3. *Пусть $F \in T^0(I)$, и найдутся точка $x_* \in I_1$ и отрезок $[\alpha,\, \beta] \subseteq I_2$, для которых выполнено равенство $g_{x_*|[\alpha,\,\beta]} = id_{|[\alpha,\,\beta]}$, где $id_{|[\alpha,\,\beta]}$ – тождественное отображение отрезка $[\alpha,\, \beta]$. Тогда $g_x(y)$ дифференцируемо по x в каждой точке $(x_*;\, y)$ при $y \in [\alpha,\, \beta]$ в том и только том случае, если существует непрерывная по переменной x на отрезке $\{x_*\} \times [\alpha,\, \beta]$ функция $\psi(x,\, y)$, определенная в прямоугольнике $I_1 \times [\alpha,\, \beta]$ и такая, что при всех $(x;\, y) \in I_1 \times [\alpha,\, \beta]$ справедливо равенство*

$$g_x(y) = y + (x - x_*)\psi(x,\, y). \tag{2.2.2}$$

При этом при любом $y \in [\alpha,\, \beta]$ выполнено

$$\psi(x_*,\, y) = \frac{\partial}{\partial x} g_{x_*}(y). \tag{2.2.3}$$

Доказательство. Пусть y – произвольная точка отрезка $[\alpha,\, \beta]$.

1. Предположим, что отображение $g_x(y)$ дифференцируемо по x в точке $(x_*;\, y)$. Тогда существует конечный предел

$$\lim_{x \to x_*} \frac{g_x(y) - y}{x - x_*} = \frac{\partial}{\partial x} g_{x_*}(y),$$

а функция

$$\psi(x,\,y)=\begin{cases}\frac{g_x(y)-y}{x-x_*}, & \text{если}\quad x\neq x_*;\\ \frac{\partial}{\partial x}g_{x_*}(y) & \text{если}\quad x=x_*\end{cases}\qquad(2.2.4)$$

определена в прямоугольнике $I_1\times[\alpha,\,\beta]$, удовлетворяет равенству (2.2.2) и непрерывна по x в точке $(x_*;\,y)$. При этом в силу (2.2.4) верно (2.2.3).

2. Из (2.2.2) следует, что при любом $x\in I_1\setminus\{x_*\}$, выполнено

$$\psi(x,\,y)=\frac{g_x(y)-y}{x-x_*}.$$

Непрерывность $\psi(x,\,y)$ по переменной x в точке $(x_*;\,y)$ влечет за собой справедливость равенства $\psi(x_*,\,y)=\lim\limits_{x\to x_*}\frac{g_x(y)-y}{x-x_*}$ для действительного числа $\psi(x_*,\,y)$. Последнее означает, что $g_x(y)$ дифференцируемо по x в точке $(x_*;\,y)$, при этом выполнено равенство (2.2.3). Предложение 2.2.3 доказано.

Сохраним обозначения предложения 2.2.3 и сформулируем

Следствие 2.2.1. *Пусть $F\in T^0(I)$, в каждой точке I существует конечная частная производная $\frac{\partial}{\partial x}g_x(y)$, и найдутся точка $x_*\in I_1$ и отрезок $[\alpha,\,\beta]\subseteq I_2$ такие, что $g_{x_*|[\alpha,\beta]}=id_{|[\alpha,\beta]}$. Тогда функция $\psi(x,\,y)$ ограничена в прямоугольнике $I_1\times[\alpha,\,\beta]$, если в этом прямоугольнике ограничена частная производная $\frac{\partial}{\partial x}g_x(y)$.*

В самом деле, возьмем произвольно точку $(x;\,y)\in I_1\times[\alpha,\,\beta]$, $x\neq x_*$. Обозначим через J_y отрезок, лежащий в горизонтальном слое $I_1\times\{y\}$ и имеющий в этом слое граничные точки x_* и x. Так как в каждой точке I существует конечная частная производная $\frac{\partial}{\partial x}g_x(y)$, то функция $g_x(y)$ на отрезке J_y удовлетворяет условиям классической теоремы Лагранжа для функции одного переменного (переменного x). Кроме того, в условиях следствия 2.2.1 выполнены и условия предложения 2.2.3. Поэтому последнее вместе с (2.2.4) влечет за собой существование числа $\theta\in(0,\,1)$ такого, что верно равенство

$$\psi(x,\,y)=\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}g_{x_*+\theta(x-x_*)}(y), & \text{если}\quad x\neq x_*;\\ \frac{\partial}{\partial x}g_{x_*}(y) & \text{если}\quad x=x_*\end{cases}\qquad(2.2.5)$$

Справедливость следствия 2.2.1 вытекает из равенства (2.2.5).

Выделим исключительные периодические точки факторотображения f простейшего косого произведения $F\in T^0(I)$, то есть такие периодические точки f, в слоях над которыми существуют невырожденные отрезки, заполненные периодическими точками F (см. определение 0.0.11).

Обозначим через $Per_e(f)$ множество исключительных периодических точек фактоотображения f отображения $F \in T^0(I)$. Символом $W^s(x^0,\, f^M)$, как обычно, будем обозначать устойчивое многообразие точки $x^0 \in Per(f)$ относительно отображения f^M, то есть множество точек $\{x \in I_1 : \lim\limits_{n\to+\infty} f^{Mn}(x) = x^0\}$.

Теорема 2.2.1. *Пусть отображение $F \in T^0(I)$ имеет ограниченное множество $\tau(F)$, а $g_x(y)$ дифференцируемо по x на I. Тогда для произвольной точки $(x';\, y') \in I$ следующие утверждения эквивалентны:*

(1) ω-предельное множество $\omega_{F^M}((x';\, y'))$ – невырожденный вертикальный отрезок;

(2) существуют точка $x^0 \in Per_e(f)$, связная компонента $[\alpha,\, \beta]$ ($\alpha < \beta$) среза $(Per(F))(x^0)$ и счетное подмножество $N_{[\alpha,\,\beta]}$ множества $\mathbf{N}$ натуральных чисел такие, что $x' \in W^s(x^0,\, f^M) \setminus \{f^{-Mn}(x^0)\}_{n\geq 0}$ (здесь $f^{-Mn}(\cdot)$ – полный прообраз точки относительно отображения f^{Mn}, $W^s(x^0,\, f^M)$ – устойчивое многообразие точки $x^0 \in Per_e(f)$ относительно отображения f^M);

$$N_{[\alpha,\,\beta]} = \{n \in \mathbf{N} : g_{x',\,Mn}(y'),\, g_{x',\,M(n+1)}(y') \in [\alpha,\, \beta]\}; \tag{2.2.6}$$

а ряд

$$\sum_{k\in N_{[\alpha,\,\beta]}} (f^{Mk}(x') - x^0)\psi(f^{Mk}(x'),\; g_{x',\,Mk}(y')) \tag{2.2.7}$$

расходится, здесь функция ψ определена для отображений в слоях $g_{x,\,M}$ по отношению к точке $x_* = x^0$ (см. предложение 2.2.3).

Прежде, чем перейти к доказательству теоремы 2.2.1, укажем, что ряд (2.2.7) получается из ряда (2.2.1) с использованием формул (2.2.2) и (2.2.6). Утверждение теоремы 2.2.1 показывает, что при исследовании вопроса существования одномерного ω-предельного множества $\omega_{F^M}((x';\, y'))$ важны лишь те члены ряда (2.2.1), которые соответствуют значениям $g_{x',\,Mn}(y')$ и $g_{x',\,M(n+1)}(y')$, содержащимся в отрезке $[\alpha,\, \beta]$.

Доказательство. Возьмем произвольно и зафиксируем точку $(x';\, y') \in I$. Покажем сначала, что свойство (1) ω-предельного множества $\omega_{F^M}((x';\, y'))$ F^M-траектории точки $(x';\, y')$ влечет за собой выполнение свойства (2).

1. Так как $\omega_{F^M}((x';\, y'))$ состоит из неподвижных точек F^M, то найдутся точка $x^0 \in Per_e(f)$ и связная компонента $[\alpha,\, \beta]$ (где $\alpha < \beta$) среза $(Per(F))(x^0)$ такие, что

$$\omega_{F^M}((x';\, y')) \subseteq \{x^0\} \times [\alpha,\, \beta], \tag{2.2.8}$$

где $\omega_{F^M}((x';\, y')) = \{x^0\} \times [\alpha',\, \beta']$ при некоторых $\alpha \leq \alpha' < \beta' \leq \beta$. Тогда имеем $x' \in W^s(x^0,\, f^M) \setminus \{f^{-Mn}(x^0)\}_{n \geq 0}$ (см. предложение 1.2.2, утверждение (3)).

2. Убедимся в том, что существует счетное множество $N_{[\alpha,\, \beta]}$, удовлетворяющее условию (2.2.6). Для этого будем использовать точку $y_c = \frac{\beta' - \alpha'}{2}$.

Возьмем произвольно и зафиксируем положительное число $\varepsilon \leq \frac{\beta' - \alpha'}{16}$ и из условия равномерной непрерывности F^M на I по числу $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$. Тогда для любых точек $(x_1;\, y_1)$, $(x_2;\, y_2) \in I$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$, $|y_1 - y_2| < \delta$, удовлетворяются неравенства

$$|f^M(x_1) - f^M(x_2)| < \varepsilon, \;\; |g_{x_1,\, M}(y_1) - g_{x_2,\, M}(y_2)| < \varepsilon \tag{2.2.9}$$

Используя компактность I, для окрестности

$$U_{\varepsilon,\, \delta}(\omega_{F^M}((x';\, y'))) = U_{1,\, \delta}(x^0) \times U_{2,\, \varepsilon}([\alpha',\, \beta'])$$

множества $\omega_{F^M}((x';\, y'))$ (здесь $U_{1,\, \delta}(x^0)$ и $U_{2,\, \varepsilon}([\alpha',\, \beta'])$ есть δ-окрестность точки x^0 в I_1 и ε-окрестность отрезка $[\alpha',\, \beta']$ в I_2 соответственно) укажем натуральное число n_* так, чтобы при всех $n \geq n_*$ выполнялось

$$F^{Mn}(x',\, y') \in U_{\varepsilon,\, \delta}(\omega_{F^M}((x';\, y'))) \;\; [55, \text{гл.}\, 5, \S 3]. \tag{2.2.10}$$

Так как $(x^0;\, y_c) \in \omega_{F^M}((x';\, y'))$, то для ε-окрестности $U_{2,\, \varepsilon}(y_c)$ точки y_c в I_2 найдется счетное множество $N' = \{n'_1,\, n'_2,\, \ldots\}$ такое, что $n_* \leq n'_1 < n'_2 < \ldots$, и при любом $n \in N'$ верно $g_{x',\, Mn}(y') \in U_{2,\, \varepsilon}(y_c)$. Заметим, что при любом $n \in N'$ выполнено $g_{x',\, M(n+1)}(y') \in [\alpha,\, \beta]$. Действительно, положим $y'_n = g_{x',\, Mn}(y')$. В силу (2.2.9) и (2.2.10) при любых $n \geq n_*$ имеем $|x^0 - f^{Mn}(x')| < \delta$, и справедливо неравенство

$$|y'_n - g_{x',\, M(n+1)}(y')| < \varepsilon \tag{2.2.11}$$

(в частности, (2.2.11) выполнено при любом $n \in N'$).

Так как $y'_n \in U_{2,\, \varepsilon}(y_c)$, то из (2.2.11) следует, что $|y_c - g_{x',\, M(n+1)}(y')| < 2\varepsilon < \frac{\beta' - \alpha'}{8}$, и

$g_{x',\,M(n+1)}(y') \in [\alpha',\, \beta']$ при каждом $n \in N'$. Таким образом, $N' \subset N_{[\alpha,\,\beta]}$, и $N_{[\alpha,\,\beta]}$ – счетное множество.

3. Покажем, что ряд (2.2.7) расходится. В самом деле, если $\mathbf{N} \setminus N_{[\alpha,\,\beta]}$ – не более, чем конечное множество, то расходимость ряда (2.2.7) следует из предложения 2.2.2. Рассмотрим случай счетного множества $\mathbf{N} \setminus N_{[\alpha,\,\beta]}$. Нам потребуются следующие подмножества множества натуральных чисел (хотя бы одно из которых непусто):

$$N_\alpha = \{n : g_{x',\,Mn}(y') < \alpha\}, \text{ и } N_\beta = \{n : g_{x',\,Mn}(y') > \beta\}.$$

При сделанном предположении хотя бы одно из множеств N_α или N_β счетно. Тогда из определения связной компоненты множества следует, что если N_α (N_β) – счетное множество, то α (β) – единственная предельная точка для $\{g_{x',\,Mn}(y')\}_{n\in N_\alpha}$ $(\{g_{x',\,Mn}(y')\}_{n\in N_\beta})$, при этом $\alpha' = \alpha$, $(\beta' = \beta)$.

Будем использовать далее точку $y'_c = \frac{y_c-\alpha'}{2}$. Так как $(x^0;\, y'_c) \in \omega_{F^M}((x';\, y'))$, то для окрестности $U_{2,\,\varepsilon}(y'_c)$ точки y'_c в I_2 найдется счетное подмножество $N'' = \{n''_1,\, n''_2, \ldots\}$ множества $\mathbf{N}$ такое, что $n_* < n''_1 < n''_2 < \ldots$, причем при любом $n \in N''$ верно $g_{x',\,Mn}(y') \in U_{2,\,\varepsilon}(y'_c)$. Элементы множества $N' \bigcup N'' \subset N_{[\alpha,\,\beta]}$, расположенные в порядке возрастания их численных значений, обозначим через $\overline{n}_1$, $\overline{n}_2$, … (таким образом, $\overline{n}_1 < \overline{n}_2 < \ldots$). Пусть S'_m (S''_m) означает m-ную частичную сумму ряда (2.2.1) (ряда (2.2.7)). Тогда

$$S'_{M\overline{n}_{i+j}} - S'_{M\overline{n}_i} = g_{x',\,M\overline{n}_{i+j}}(y') - g_{x',\,M\overline{n}_i}(y') \text{ при всех } i,\, j \geq 1,$$

и из определения множеств N' и N'' следует, что последовательность $\{S'_{M\overline{n}_i}\}_{i\geq 1}$ не является фундаментальной.

Укажем нефундаментальную последовательность частичных сумм ряда (2.2.7). Для этого заметим, что счетность множества $N_\alpha \bigcup N_\beta$ влечет за собой существование строго возрастающей последовательности натуральных чисел $\{i_s\}_{s\geq 1}$ такой, что при всех $s \geq 1$ имеют место следующие свойства:

(3.1) $\overline{n}_{i_s},\ \overline{n}_{i_{s+1}} \in N' \bigcup N''$;

(3.2) $(\overline{n}_{i_s},\ \overline{n}_{i_{s+1}}) \bigcap (N_\alpha \bigcup N_\beta) \neq \emptyset$.

Из свойств (3.1) – (3.2) следует, что при любом $s \geq 1$ найдется натуральное число $\overline{n}(s) \in (\overline{n}_{i_s},\, \overline{n}_{i_{s+1}})$ такое, что $g_{x',\,M\overline{n}(s)}(y') \in [\alpha,\, \beta]$, $(\overline{n}(s) + 1) \in N_\alpha \bigcup N_\beta$, причем

$\mathbf{N}\bigcap[\overline{n}_{i_s},\, \overline{n}(s)-1]\subset N_{[\alpha,\,\beta]}$. Положим в (2.2.11) $n=\overline{n}(s)$. Имеем

$$|y'_{\overline{n}(s)}-g_{x',\,M(\overline{n}(s)+1)}(y')|<\varepsilon\leq\frac{\beta'-\alpha'}{16}\leq\frac{\beta-\alpha}{16}. \qquad (2.2.12)$$

Используя определение чисел $\overline{n}(s)$ и неравенство (2.2.12), получаем, что при каждом $s\geq 1$ только лишь одна из точек α или β содержится в промежутке, ограниченном точками $y'_{\overline{n}(s)}$ и $g_{x',\,M(\overline{n}(s)+1)}(y')$. Поэтому из (2.2.12) следует, что предельными точками последовательности $\{g_{x',\,M\overline{n}(s)}(y')\}_{s\geq 1}$ могут являться лишь точки α или β (возможно, обе одновременно).

Рассмотрим множество $\{\overline{n}_{i_s}\}_{s\geq 1}\bigcup\{\overline{n}(s)\}_{s\geq 1}$. В силу предыдущего при любом $s\geq 1$ выполнены неравенства $\overline{n}_{i_s}<\overline{n}(s)<\overline{n}_{i_{s+1}}$. Положим $\underline{n}_{2s-1}=\overline{n}_{i_s}$, $\underline{n}_{2s}=\overline{n}(s)$ $(s\geq 1)$. Тогда справедливо включение $\mathbf{N}\bigcap[\underline{n}_{2s-1},\, \underline{n}_{2s}-1]\subset N_{[\alpha,\,\beta]}$, и при всех $s\geq 1$ имеем:

$$S''_{M\underline{n}_{2s}}-S''_{M\underline{n}_{2s-1}}=S'_{M\underline{n}_{2s}}-S'_{M\underline{n}_{2s-1}}=g_{x',\,M\underline{n}_{2s}}(y')-g_{x',\,M\underline{n}_{2s-1}}(y').$$

Так как последовательность $\{g_{x',\,M\underline{n}_k}(y')\}_{k\geq 1}$ имеет не менее двух предельных точек, то последовательность частичных сумм $\{S''_{M\underline{n}_k}\}_{k\geq 1}$ ряда (2.2.7) нефундаментальна, и ряд (2.2.7) расходится. Таким образом, доказано, что свойство (1) влечет за собой справедливость свойства (2).

4. Обратно, пусть теперь отображение $F\in T^0(I)$, удовлетворяющее условиям теоремы 2.2.1, обладает свойством (2). Если при этом $N_{[\alpha,\,\beta]}=\mathbf{N}$ или $\mathbf{N}\setminus N_{[\alpha,\,\beta]}$ – конечное множество, то справедливость свойства (1) вытекает из предложения 2.2.2.

Рассмотрим случай счетного множества $\mathbf{N}\setminus N_{[\alpha,\,\beta]}$. Тогда хотя бы одно из множеств N_α или N_β счетно, и в силу предыдущего п.3 α (β) – единственная предельная точка для $\{g_{x',\,Mn}(y')\}_{n\in N_\alpha}$, если N_α счетно (для $\{g_{x',\,Mn}(y')\}_{n\in N_\beta}$, если N_β счетно). Используя предложение 2.2.2, получаем отсюда, что множества частичных пределов последовательностей частичных сумм рядов (2.2.1) и (2.2.7) совпадают и представляют собой невырожденный отрезок $[\alpha,\, \beta']$ при некотором $\beta'\leq\beta$, если N_α счетно (невырожденный отрезок $[\alpha',\, \beta]$ при некотором $\alpha'\geq\alpha$, если N_β счетно). Таким образом, в силу предложения 2.2.2 $\omega_{F^M}((x';\, y'))$ – невырожденный вертикальный отрезок (т. е. выполнено свойство (1)). Теорема 2.2.1 доказана.

Обозначим через $T_d(I)$ – подпространство пространства $T^0(I)$, состоящее из отображений, каждое из которых имеет C^1-гладкое на отрезке I_1 факторотображение f

и отображения в слоях $g_x(y)$ со следующими свойствами:

(i) частная производная $\frac{\partial}{\partial y} g_x(y)$ непрерывна на I,

(ii) в каждой точке $(x;\, y) \in I$ существует конечная частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$, непрерывная всюду, за исключением, быть может, точек множества $Per_e(f) \times I_2$.

Будем рассматривать далее отображения из множества $T_d(I)$ [2].

Следствие 2.2.2. *Пусть* $F \in T_d(I)$ *– простейшее отображение; причем для некоторой точки*

$$(x';\, y') \in (W^s(x^0,\, f^M) \setminus \{f^{-Mn}(x^0)\}_{n \geq 0}) \times I_2,$$

где $x^0 \in Per_e(f)$*, существуют связная компонента* $[\alpha,\, \beta]$ *среза* $(Per(F))(x^0)$ *(здесь* $\alpha < \beta$*) и подмножество* $N_{[\alpha,\, \beta]}$ *множества натуральных чисел* $\mathbf{N}$*, удовлетворяющее условияю (2.2.6). Тогда, если ряд*

$$\sum_{k \in N_{[\alpha,\, \beta]}} |\psi(f^{Mk}(x'),\, g_{x',\, Mk}(y'))| \tag{2.2.13}$$

сходится, то сходится и ряд (2.2.7); если, кроме того, частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ *ограничена на* I*, то сходимость ряда*

$$\sum_{k \in N_{[\alpha,\, \beta]}} |f^{Mk}(x') - x^0|. \tag{2.2.14}$$

влечет за собой и сходимость ряда (2.2.7).

Доказательство. Убедимся сначала в том, что сходимость ряда (2.2.13) влечет за собой и сходимость ряда (2.2.7). Действительно, при $x' \in I_1$ и любых $k \geq 1$ выполнено неравенство $|f^{Mk}(x') - x^0| < l(I_1)$, где $l(I_1)$ – длина отрезка I_1, а, следовательно, и неравенство

$$|(f^{Mk}(x') - x^0)\psi(f^{Mk}(x'),\, g_{x',\, Mk}(y'))| < l(I_1)|\psi(f^{Mk}(x'),\, g_{x',\, Mk}(y'))|. \tag{2.2.15}$$

Сходимость ряда (2.2.7) следует из неравенства (2.2.15).

Пусть теперь частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ ограничена на I. Тогда тем же свойством

---

[2] Ограниченность множества $\tau(F)$ отображения $F \in T_d(I)$ с замкнутым множеством $Per(F)$ является следствием результатов статьи [132].

обладает и частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_{x,\,M}(y)$ при $M \geq 2$. В самом деле, для дифференциала DF^M отображения F^M ($M \geq 2$) в произвольной точке $(x;\,y) \in I$ справедливо следующее представление:

$$DF^M((x;\,y)) = \prod_{i=0}^{M-1} \begin{pmatrix} a_{M-1-i} & 0 \\ b_{M-1-i} & c_{M-1-i} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} a_1 a_0 & 0 \\ b_1 a_0 + b_0 c_1 & c_1 c_0 \end{pmatrix}, & \text{если} \quad M = 2; \\ \begin{pmatrix} \prod\limits_{i=0}^{M-1} a_{M-1-i} & 0 \\ b_{M-1} \prod\limits_{i=1}^{M-1} a_{M-1-i} + \sigma + b_0 \prod\limits_{i=0}^{M-2} c_{M-1-i} & \prod\limits_{i=0}^{M-1} c_{M-1-i} \end{pmatrix}, & \text{если} \quad M > 2, \end{cases}$$

где

$$\sigma = \sum_{j=1}^{M-2} (\prod_{i=0}^{j-1} c_{M-1-i}) b_{M-1-j} (\prod_{i=j+1}^{M-1} a_{M-1-i}), \tag{2.2.16}$$

и при всех $0 \leq i \leq M-1$ справедливы равенства

$$a_{M-1-i} = f'((f^{(M-1-i)})(x)),$$

$$b_{M-1-i} = \frac{\partial}{\partial x} g_{f^{M-1-i}(x)}(g_{x,\,M-1-i}(y)),$$

$$c_{M-1-i} = \frac{\partial}{\partial y} g_{f^{M-1-i}(x)}(g_{x,\,M-1-i}(y)).$$

Поэтому при $M > 2$

$$\frac{\partial}{\partial x} g_{x,\,M}(y) = b_{M-1} \prod_{i=1}^{M-1} a_{M-1-i} + \sigma + b_0 \prod_{i=0}^{M-2} c_{M-1-i}. \tag{2.2.17}$$

Так как $F \in T_d(I)$, то корректно определены неотрицательные числа

$$C_f = \sup_{x \in I_1} |f'(x)|; \;\; C_{g,\,y} = \sup_{(x;\,y) \in I} |\frac{\partial}{\partial y} g_x(y)|.$$

Из ограниченности частной производной $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ на I следует, что существует неотрицательное число $C_{g,\,x}$ такое, что при любых $(x;\,y) \in I$ справедливо неравенство $|\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)| \leq C_{g,\,x}$. Положим $C = \max\{1,\, C_f,\, C_{g,\,x},\, C_{g,\,y}\}$. Используя формулы (2.2.16) и (2.2.17), получаем, что при всех $(x;\,y) \in I$ верно неравенство

$$|\frac{\partial}{\partial x} g_{x,\,M}(y)| \leq C^M (M+1). \tag{2.2.18}$$

Пусть теперь $(x;\, y)$ – произвольная точка прямоугольника $I_1 \times [\alpha,\, \beta]$, а функция $\psi(x,\, y)$ определена для отображений $g_{x,\, M}$ по отношению к слою над точкой x^0. Тогда в силу следствия 2.2.1 и формулы (2.2.18) справедливо неравенство

$$|\psi(x,\, y)| \leq C^M(M+1).$$

А так как при всех $k \in N_{[\alpha,\, \beta]}$ выполнено $(f^{Mk}(x');\, g_{x',\, Mk}(y')) \in I_1 \times [\alpha,\, \beta]$, то при каждом $k \in N_{[\alpha,\, \beta]}$ верно неравенство

$$|(f^{Mk}(x') - x^0)\psi(f^{Mk}(x'),\, g_{x',\, Mk}(y))| \leq C^M(M+1)|f^{Mk}(x') - x^0|. \qquad (2.2.19)$$

Из (2.2.19) следует, что сходимость ряда (2.2.14) влечет за собой сходимость ряда (2.2.7). Справедливость следствия 2.2.2 установлена.

В качестве примеров применения результатов, полученных в разделах 2.2.1 и 2.2.2, приведем некоторые критерии различения простейших отображений из множества $T_d(I)$. Так, непосредственным следствием предложения 2.2.1 и определения 2.2.1 является

Теорема 2.2.2. *Пусть* $F \in T_d(I)$, *а* $Per_e(f) = \emptyset$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *множество* $Per(F)$ *периодических точек* F *замкнуто;*

(2) ω*-предельное множество траектории произвольной точки из* I *есть периодическая орбита.*

Следствие 2.2.3. *Пусть* $F \in T_d(I)$, *и при любом* $x \in Per(f)$ *отображение* $\widetilde{g}_x$ *имеет лишь притягивающие и отталкивающие (в частности, гиперболические) периодические точки. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *множество* $Per(F)$ *периодических точек* F *замкнуто;*

(2) ω*-предельное множество траектории произвольной точки из* I *есть периодическая орбита.*

Следующее утверждение, вытекающее из теоремы 2.2.1 и следствия 2.2.2, показывает, что гиперболичность периодических точек факторотображения простейшего косого произведения из множества $T_d(I)$ (вместе с ограниченностью частной производной $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$) является весьма тонким и сильным свойством, определяющим структуру ω-предельных множеств.

Теорема 2.2.3. *Пусть* $F \in T_d(I)$, *фактороотображение* f *имеет только гиперболические периодические точки, а частная производная* $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ *ограничена на* I. *Тогда утверждения* (1) *и* (2) *(в формулировке теоремы 2.2.2 и следствия 2.2.3) эквивалентны.*

Доказательство. 1. Убедимся в том, что в условиях теоремы 2.2.3 утверждение (1) влечет за собой справедливость утверждения (2). Предположим, что для некоторого простейшего отображения $F \in T_d(I)$ с ограниченной частной производной $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ и фактороотображением, имеющим лишь гиперболические периодические точки, найдется точка $(x';\, y')$ такая, что ее ω-предельное множество $\omega_{F^M}((x';\, y'))$ – невырожденный вертикальный отрезок. При этом из теоремы 2.2.1 следует существование точки $x^0 \in Per_e(f)$, связной компоненты $[\alpha,\, \beta]$ среза $Per(F)(x^0)$ (здесь $\alpha < \beta$) и счетного множества $N_{[\alpha,\, \beta]} \subset \mathbf{N}$, удовлетворяющего условию (2.2.6), таких, что $x' \in W^s(x^0,\, f^M) \setminus \{f^{-Mn}(x^0)\}_{n \geq 0}$, и ряд (2.2.7) расходится.

С другой стороны, условие гиперболичности точек множества $Per(f)$ вместе с неравенством $W^s(x^0,\, f^M) \neq \{f^{-Mn}(x^0)\}_{n \geq 0}$ означает, что x^0 – сток фактороотображения f. Тогда найдутся, во-первых, действительное число $0 < q < 1$ и окрестность $U_1(x^0)$ точки x^0 в I_1 такие, что при всех $\overline{x} \in U_1(x^0)$ выполнено неравенство

$$|\frac{d}{dx}(f^M)(\overline{x})| < q; \tag{2.2.20}$$

и, во-вторых, натуральное число k_* такое, что при любых $k \geq k_*$ справедливо $f^{Mk}(x') \in U_1(x^0)$. Используя классическую теорему Лагранжа и неравенство (2.2.20), получаем, что при всех $k \geq k_*$ верно

$$|f^{Mk}(x') - x^0| < q^{k-k_*} l(I_1). \tag{2.2.21}$$

Из (2.2.21) следует, что ряд $\sum\limits_{k \in N_{[\alpha,\, \beta]}} |f^{Mk}(x') - x^0|$ сходится. Используя следствие 2.2.2, получаем отсюда, что сходится и ряд (2.2.7). Полученное противоречие со сделанным предположением показывает, что утверждение (1) влечет за собой выполнение утверждения (2).

2. Обратно, пусть выполнено свойство (2). Тогда при любом $x \in I_1$ $\omega_f(x)$ есть периодическая орбита фактороотображения f, а $\omega_{\widetilde{g}_x}(y)$, каково бы ни было $y \in I_2$, есть периодическая орбита отображения $\widetilde{g}_x$. Отсюда, используя предложение 1.2.2, полу-

чаем, что множества $Per(f)$ и $Per(\widetilde{g}_x)$ (при всех $x \in I_1$) замкнуты (где $Per(\widetilde{g}_x)$ – множество периодических точек отображения $\widetilde{g}_x$).

Воспользуемся формулами (2.1.3) и (2.1.4). Так как каждое из множеств $pr_1(Per(F)) = Per(f)$ и $(Per(F))(x) = Per(\widetilde{g}_x)$ при любом $x \in Per(f)$ замкнуто, то получаем отсюда, что $Per(F)$ – замкнутое множество. Теорема 2.2.3 доказана.

Результаты подраздела 2.2.2 приведены в [81], [93].

2.2.3 Необходимые условия существования одномерных ω-предельных множеств

Эту часть работы мы начнем с формулировки и доказательства необходимого условия существования одномерных ω-предельных множеств простейших отображений, основанного на использовании ряда, членами которого являются значения функции переменной x, представляющей собой C^0-норму отклонений сужений отображений в слоях на некоторый невырожденный отрезок от тождественного отображения на том же отрезке.

Теорема 2.2.4. *Пусть* $F \in T_d(I)$ *– простейшее отображение такое, что для* F^M*-траектории некоторой точки* $(x';\, y')$ *справедливо*

$$\omega_{F^M}((x';\, y')) = \{x^0\} \times [\alpha',\, \beta'],$$

где $x^0 \in Per_e(F)$, $[\alpha',\, \beta'] \subseteq I_2$, $\alpha' < \beta'$. *Тогда знаконеотрицательный числовой ряд*

$$\sum_{k \in N_{[\alpha',\, \beta']}} ||g_{f^{Mk}(x'),\, M}{}_{|[\alpha',\, \beta']} - id_{|[\alpha',\, \beta']}||_{0,\, 2} \tag{2.2.22}$$

расходится.

Доказательство. Пусть F^M-траектория некоторой точки $(x';\, y')$ простейшего отображения $F \in T_d(I)$ имеет ω-предельное множество

$$\omega_{F^M}((x';\, y')) = \{x^0\} \times [\alpha',\, \beta'],\ \text{где}\ x^0 \in Per_e(f);\ [\alpha',\, \beta'] \subseteq I_2,\ \alpha' < \beta'.$$

Тогда в силу теоремы 2.2.1 знакопеременный ряд

$$\sum_{k \in N_{[\alpha',\, \beta']}} (x_{Mk} - x^0)\psi(x_{Mk},\, y_{Mk})$$

расходится (напомним, что $x_{Mk} = f^{Mk}(x')$, $y_{Mk} = g_{x',\,Mk}(y')$ при любом $k \geq 0$). Тогда расходится и знаконеотрицательный ряд

$$\sum_{k \in N_{[\alpha',\,\beta']}} |x_{Mk} - x^0||\psi(x_{Mk},\, y_{Mk})|.$$

Рассмотрим последовательность неотрицательных чисел

$$\{||g_{x_{Mk},\,M}{}_{|[\alpha',\,\beta']} - id_{|[\alpha',\,\beta']}||_{0,\,2}\}_{k \in N_{[\alpha',\,\beta']}}.$$

Из определения C^0-нормы следует, что при любом $k \in N_{[\alpha',\beta']}$ верно

$$||g_{x_{Mk},\,M}{}_{|[\alpha',\,\beta']} - id_{|[\alpha',\,\beta']}||_{0,\,2} \geq |x_{Mk} - x^0||\psi(x_{Mk},\, y_{Mk})|. \tag{2.2.23}$$

Поэтому знаконеотрицательный ряд

$$\sum_{k \in N_{[\alpha',\,\beta']}} ||g_{x_{Mk},\,M}{}_{|[\alpha',\,\beta']} - id_{|[\alpha',\,\beta']}||_{0,\,2}$$

расходится. Теорема 2.2.4 доказана.

Будем считать выполненными условия теоремы 2.2.4. Рассмотрим убывающую (хотя бы в широком смысле) числовую последовательность $\{s_l\}_{l \geq 1}$, где при любом $l \geq 1$ выполнено

$$s_l = \sup\{||g_{x_{Mk},\,M}{}_{|[\alpha',\,\beta']} - id_{|[\alpha',\,\beta']}||_{0,\,2}\}_{k \geq l}.$$

Из определения последовательности $\{s_l\}_{l \geq 1}$ и теоремы 2.2.4 следует, что знакоположительный числовой ряд

$$\sum_{l=1}^{+\infty} s_l, \tag{2.2.24}$$

мажорирующий ряд (2.2.22), расходится.

Пусть непрерывная положительная функция $\vartheta(u)$, определенная на некотором промежутке $[l_0,\, +\infty)$ такова, что $\vartheta(l) = s_l$ при всех $l \geq l_0$, причем $\vartheta(u)$ монотонно убывает (хотя бы в широком смысле) на $[l_0,\, +\infty)$[3]. Тогда в силу теоремы 2.2.4 и интегрального признака Маклорена-Коши несобственный интеграл

$$\int\limits_{l_0}^{+\infty} \vartheta(u)du \tag{2.2.25}$$

---

[3] Указанными свойствами обладает, например, кусочно линейная на каждом промежутке $[l,\, l+1]$ функция, принимающая в точках l и $l+1$ значения s_l и s_{l+1} соответственно.

расходится одновременно с рядом (2.2.24) (см., например, [145, гл.6, §5, п.2b]). Таким образом, доказана следующая

Теорема 2.2.5. *Пусть* $F \in T_d(I)$ *– простейшее отображение такое, что для* F^M*-траектории некоторой точки* $(x';\, y')$ *справедливо равенство*

$$\omega_{F^M}((x';\, y')) = \{x^0\} \times [\alpha',\, \beta'],$$

где $x^0 \in Per_e(F)$, $[\alpha',\, \beta'] \subseteq I_2$, $\alpha' < \beta'$.

Пусть непрерывная положительная функция $\vartheta(u)$*, определенная на некотором промежутке* $[l_0,\, +\infty)$ *такова, что* $\vartheta(l) = s_l$ *при всех* $l \geq l_0$*, причем* $\vartheta(u)$ *монотонно не возрастает на* $[l_0,\, +\infty)$.

Тогда несобственный интеграл (2.2.25) расходится.

Результаты, приведенные в подразделе § 2.2.3, имеются в статьях [93], [146].

2.3 Пример дифференцируемого простейшего отображения с одномерным ω-предельным множеством.

В §2.3 дан положительный ответ на вопрос существования простейших отображений из множества $T_d(I)$, имеющих одномерные ω-предельные множества. В силу следствия 2.2.2 и теоремы 2.2.3 проблема существования отображений с указанными свойствами решается в классе простейших косых произведений в плоскости таких, что их факторотображения имеют негиперболические периодические точки; а каждый из рядов (2.2.7), (2.2.13) и (2.2.14) расходится.

Как отмечалось во введении, первые примеры непрерывных отображений вида (0.0.2) с замкнутым множеством периодических точек, имеющих траектории с одномерными ω-предельными множествами, намечены в статьях [62] и [94]. В [95][4], [96] ука-

---

[4] Обобщение конструкции примера из [95] имеется в статье [97], где построено существенно непрерывное косое произведение в стандартном единичном кубе такое, что одна из граней куба состоит из неподвижных точек отображения и является ω-предельным множеством траектории любой непринадлежащей ей точки.

заны новые примеры непрерывных отображений такого рода и дано описание всех ω-предельных множеств построенных здесь косых произведений. Отображения, указанные в этих работах, имеют не только континуум точек, в которых отсутствует частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$, но и континуум точек, в которых отсутствует частная производная $\frac{\partial}{\partial y} g_x(y)$.

В §2.3 предложен новый (отличный от использованного в [62], [94] – [96]) алгоритм построения простейшего отображения с указанными выше свойствами. Основу данного алгоритма составляет использование расходящихся рядов.

Прежде, чем сформулировать соответствующее утверждение (теорему 2.3.1), укажем, что в современной математической литературе обсуждается вопрос существования и структуры нехаотического аттрактора у косого произведения на цилиндре или торе над иррациональным поворотом окружности или над стандартным отображением окружности (см., например, статьи [147], [148], содержащие результаты численного эксперимента, и теоретические работы [71] [149]. Так, в [71] приведены аналитические достаточные условия, при выполнении которых срез странного нехаотического аттрактора косого произведения над иррациональным поворотом окружности на компактном цилиндре по произвольному вертикальному слою является отрезком (ср. с предложением 2.2.1).

Здесь мы дадим определение нехаотического аттрактора, подчеркнув его взаимосвязь с классическим определением аттрактора (последнее можно найти, например, в [57, гл.3, §3.3]).

Определение 2.3.1 [150]. Под *нехаотическим аттрактором* косого произведения $F \in T_d(I)$ будем понимать замкнутое множество $A^* \subset I$, обладающее поглощающей окрестностью, то есть окрестностью $U(A^*)$ со следующими свойствами:

$$F(\overline{U(A^*)}) \subset U(A^*), \qquad A^* = \bigcap_{n=1}^{+\infty} F^n(\overline{U(A^*)}),$$

и такое, что сужение $F_{|A^*}$ имеет нулевую топологическую энтропию.

Теорема 2.3.1. *Существует отображение $F_a \in T_d(I)$, имеющее только лишь неподвижные точки (необладающее периодическими точками более высоких периодов) и содержащее глобальный нехаотический аттрактор A^*, представляющий собой невырожденный вертикальный отрезок, совпадающий с множеством непо-*

движных точек F_a и такой, что для траектории некоторой точки $(x';\, y') \notin A^*$ справедливо $\omega_{F_a}((x';\, y')) = A^*$.

Доказательство. 1. Положим

$$F_a(x,\, y) = (x - \frac{x^2}{2},\, y + x\psi(x,\, y)) \tag{2.3.1}$$

(см. предложение 2.2.3), здесь $F_a : [0,\, \alpha] \times [0,\, 1] \to [0,\, \alpha] \times [0,\, 1]$, где выбор положительного числа $\alpha \leq 1$ будет описан ниже.

Сначала будем считать, что $x \in [0,\, 1]$. Прежде, чем определить функцию $\psi(x,\, y)$, убедимся в том, что при всех $n \geq 1$ для $x_n = f^n(x_0)$, где $x_0 = 1$, удовлетворяется неравенство

$$\frac{2}{n} > x_n \geq \frac{1}{n+1}, \tag{2.3.2}$$

причем равенство в правой части (2.3.2) имеет место лишь при $n = 1$. Действительно, так как $x_1 = \frac{1}{2}$, то (2.3.2) верно при $n = 1$. Предположим, что (2.3.2) выполнено для натурального числа n. Установим его справедливость для $n{+}1$. Так как $f(x)$ – сторого возрастающая на отрезке $[0,\, 1]$ функция, то в силу предположения индукции имеем

$$\frac{2}{n+1} > \frac{2(n-1)}{n^2} > x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{2} \geq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2(n+1)^2} > \frac{1}{n+2}.$$

Следовательно, при всех $n > 1$ доказано строгое неравенство (2.3.2). В силу (2.3.2) $x_n = O(\frac{1}{n})$ при $n \to +\infty$, и числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ расходится [5]. Нам потребуется ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{10 - \ln x_n}. \tag{2.3.3}$$

Ряд (2.3.3) корректно определен, так как $x_n \in (0,\, 1]$ при любом $n \geq 0$.

Заметим, что ряд (2.3.3) расходится. В самом деле, воспользуемся правой частью неравенства (2.3.2) (верной и при $n = 0$). Тогда при всех $n \geq 0$ выполнено неравенство $\frac{x_n}{10 - \ln x_n} \geq \frac{1}{(n+1)(10+\ln(n+1))}$, и расходимость знакоположительного минорантного ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(10+\ln(n+1))}$ влечет за собой расходимость ряда (2.3.3).

---

[5] Для сравнения укажем, что оценка скорости расходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_{-n}$ для отображения $f(x) = x + \alpha x^2$ при $\alpha > c$ для некоторого $c > 0$ содержится в статьях [98] – [99] (здесь x_{-n} – n-ный прообраз на некотором отрезке точки $x_0 = 1$).

В силу расходимости ряда (2.3.3) существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_m\}_{m\geq 0}$ такая, что $n_0 = 0$ и при всех $m \geq 0$ выполнены неравенства

$$\sum_{n=0}^{n_1+1} \tfrac{x_n}{10-\ln x_n} > 1 - y'_0 - \tfrac{1}{\sqrt{10}} \quad \text{или}$$
$$\sum_{n=n_m+2}^{n_{m+1}+2} \tfrac{x_n}{10-\ln x_n} > 1 - y'_{n_m+2} - \tfrac{1}{\sqrt{10-\ln x_{n_m+2}}}, \ \text{если } m \geq 1, \ m \ - \ \text{четное}; \qquad (2.3.4)$$
$$\sum_{n=n_m+2}^{n_{m+1}+2} \tfrac{x_n}{10-\ln x_n} > y'_{n_m+2} - \tfrac{1}{\sqrt{10-\ln x_{n_m+2}}}, \ \text{если } m \ - \ \text{нечетное},$$

здесь

$$y'_0 = \tfrac{1}{\sqrt{10}}, \ y'_{n_1+1} = y'_{n_1+2} = y'_0 + \sum_{n=0}^{n_1+1} \tfrac{x_n}{10-\ln x_n}, \quad \text{и при каждом } \ m \geq 1$$
$$y'_{n_{m+1}+2} = y'_{n_{m+1}+1} = y'_{n_m+2} + (-1)^m \sum_{n=n_m+2}^{n_{m+1}+2} \tfrac{x_n}{10-\ln x_n}. \qquad (2.3.5)$$

Будем считать, что при любом $m \geq 0$ число $(n_{m+1}+2)$ есть наименьшее из натуральных чисел, для которых выполнены неравенства (2.3.4).

В дальнейшем нам потребуются промежутки $J_0 = (x_{n_1}, \ 1]$; $J_m = (x_{n_{m+1}}, x_{n_m+3}]$, $J_m^{(1)} = (x_{n_m+1}, \ x_{n_m}]$, $J_m^{(2)} = (x_{n_m+3}, \ x_{n_m+1}]$ при всех $m \geq 1$.

Для построения отображений в слоях косого произведения (2.3.1) будем использовать (в качестве функции $|\psi(x, \, y)|$) C^1-гладкие по y "шапочки"Урысона, длины горизонтальных участков и высоты которых зависят от $x \in (0, \, 1]$. Обозначим через $h(x)$ высоту "шапочки"Урысона в слое над $x \in (0, \, 1]$. Нам потребуются функции $y_1(x) = \sqrt{h(x)}$ и $y_2(x) = 1 - y_1(x)$.

При любом $x \in (0, \, 1]$ положим

$$|\psi(x, \, y)| = \begin{cases} h(x)\sin^2 \frac{\pi y}{2y_1(x)}, & \text{если} \quad y \in [0, \, y_1(x)]; \\ h(x) & \text{если} \quad y \in (y_1(x), \, y_2(x)); \\ h(x)\sin^2 \frac{\pi(y-1)}{2y_1(x)}, & \text{если} \quad y \in [y_2(x), \, 1]. \end{cases} \qquad (2.3.6)$$

Пусть $h_1(x) = \frac{1}{10-\ln x}$, где $x \in (0, \, 1]$. Отметим, что $h_1(x)$ строго возрастает, выпукла вверх и положительна на промежутке $(0, \, 1]$. На множестве $J = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} J_m$ определим функцию $h(x)$, полагая $h(x) = h_{1|J}(x)$, здесь $h_{1|(\cdot)}$ – сужение функции h_1 на множество.

К определению функции $h(x)$ на промежутках $J_m^{(1)}$ и $J_m^{(2)}$ при всех $m \geq 1$ применим процедуру "простого сглаживания"(в отличие от процедуры сглаживания по

С.Л. Соболеву, используемой в задачах математической физики [151, гл.3, §2.3]). Так, на промежутках $J_m^{(1)}$ рассмотрим C^1-гладкие линейные функции

$$\overline{h}_1(x) = \frac{1}{10 - \ln x_{n_m}} + \frac{x - x_{n_m}}{x_{n_m}(10 - \ln x_{n_m})^2}$$

и

$$h_2(x) = 2\frac{x - x_{n_m+1}}{(10 - \ln x_{n_m})(x_{n_m+1} - x_{n_m+2})}.$$

Функция h_1 выпукла вверх, $\overline{h}_1$ – касательная к графику h_1 в точке $C_m^1(x_{n_m},\, h_1(x_{n_m}))$, h_2 – линейная функция, причем $h_1(x_{n_m+1}) > h_2(x_{n_m+1}) = 0$, $h_1(x_{n_m}) < h_2(x_{n_m})$. Поэтому графики h_1 и h_2 пересекаются в некоторой точке $C_m(c_m;\, h_2(c_m))$ ($c_m \in (x_{n_m+1},\, x_{n_m})$) без касания, а графики $\overline{h}_1$ и h_2 пересекаются в некоторой точке $C_m^2(c_m^2;\, h_2(c_m^2))$, где $c_m^2 \in (c_m,\, x_{n_m})$. На интервалах $(C_m,\, C_m^2)$ и $(C_m^2,\, C_m^1)$ укажем точки $C_m^3(c_m^3,\, h_2(c_m^3))$ и $C_m^4(c_m^4,\, \overline{h}_1(c_m^4))$ соответственно так, чтобы $l([C_m^3,\, C_m^2]) = l([C_m^2,\, C_m^4])$, где $l(\cdot)$ – длина отрезка. При этом $h_2(c_m^3) < h_2(c_m^2) < \overline{h}_1(c_m^4)$. Тогда корректно определена C^1-гладкая строго возрастающая, выпуклая вверх на промежутке $J_m^{(1)}$ функция $h(x)$ такая, что

$$h_{|(x_{n_m+1},\, c_m^3]} = h_{2|(x_{n_m+1},\, c_m^3]}, \quad h_{|[c_m^4,\, x_{n_m}]} = \overline{h}_{1|[c_m^4,\, x_{n_m}]},$$

а график $h_{|(c_m^3,\, c_m^4)}$ представляет собой дугу окружности, касающейся в точках C_m^3 и C_m^4 прямых h_2 и $\overline{h}_1$ соответственно.

Определим функцию $h(x)$ на промежутках $J_m^{(2)}$ $(m \geq 1)$. Здесь нам потребуются линейные функции

$$h_3(x) = 2\frac{x_{n_m+1} - x}{(10 - \ln x_{n_m})(x_{n_m+1} - x_{n_m+2})}$$

и

$$h_4(x) = \frac{1}{10 - \ln x_{n_m+3}} + \frac{x - x_{n_m+3}}{x_{n_m+3}(10 - \ln x_{n_m+3})^2}.$$

Заметим, что прямая-график h_4 есть касательная к графику h_1 в точке с координатами $(x_{n_m+3};\, h_1(x_{n_m+3}))$. Определим функцию h в точке x_{n_m+2} так, чтобы

$$h(x_{n_m+2}) = h_1(x_{n_m+2}), \ \text{ и } \ h'(x_{n_m+2}) = 0.$$

В силу определения h_3 имеем $h_3(x_{n_m+2}) > h(x_{n_m+2})$, и $h(x_{n_m+2}) > h_3(x_{n_m+1}) = 0$. Поэтому горизонтальная касательная к графику h в точке $B_m(x_{n_m+2};\, h(x_{n_m+2}))$

пересекается с прямой – графиком функции h_3 в некоторой точке B^1_m, причем $l([B_m,\, B^1_m]) < x_{n_m+1} - x_{n_m+2} = \frac{x^2_{n_m+1}}{2}$. Пусть B^2_m – точка с координатами $(x_{n_m+1};\, 0)$. Имеем

$$\frac{l([B_m,\, B^1_m])}{l([B^1_m,\, B^2_m])} < \frac{x_{n_m+1} - x_{n_m+2}}{h(x_{n_m+2})} = \frac{x^2_{n_m+1}}{2}(10 - \ln x_{n_m+2}). \tag{2.3.7}$$

Так как $\lim\limits_{m\to+\infty} \frac{x^2_{n_m+1}}{2}(10 - \ln x_{n_m+2}) = 0$, то из (2.3.7) следует, что найдется m_0 такое, что при всех $m \geq m_0$ верно неравенство $l([B_m,\, B^1_m]) < l([B^1_m,\, B^2_m])$. Поэтому при всех $m \geq m_0$ в интервале $(B^1_m,\, B^2_m)$ существует точка $B^3_m(b^3_m;\, h_3(b^3_m))$ такая, что $l([B_m,\, B^1_m]) = l([B^1_m,\, B^3_m])$. Тогда на отрезке $[x_{n_m+2},\, x_{n_m+1}]$ корректно определена положительная строго убывающая выпуклая вверх C^1-гладкая функция h такая, что $h_{|[b^3_m,\, x_{n_m+1}]} = h_{3|[b^3_m,\, x_{n_m+1}]}$; на промежутке $[x_{n_m+2},\, b^3_m)$ график h_3 представляет собой дугу окружности, касательная к которой в точке B_m горизонтальна, а в точке B^3_m совпадает с графиком функции h_3.

Перейдем к определению функции h на интервале $(x_{n_m+3},\, x_{n_m+2})$. Так как h_1 – выпуклая вверх на $(0,\, 1]$ функция, а $h(x_{n_m+2}) = h_1(x_{n_m+2})$, то верно неравенство $h_4(x_{n_m+2}) > h(x_{n_m+2})$. Кроме того, из строгого возрастания функции h_1 на промежутке $(0,\, 1]$ следует, что $h(x_{n_m+2}) > h_4(x_{n_m+3})$. Поэтому найдется точка $A^1_m(a^1_m;\, h(x_{n_m+2}))$, в которой горизонтальная касательная к графику функции h в точке B_m пересекается с касательной h_4 к графику h в точке $A_m(x_{n_m+3};\, h(x_{n_m+3}))$ (здесь $a^1_m \in (x_{n_m+3},\, x_{n_m+2})$). Сравним длины отрезков $[A_m,\, A^1_m]$ и $[A^1_m,\, B_m]$. Нам потребуется точка $A^2_m(x_{n_m+3};\, h(x_{n_m+2}))$. Имеем

$$\frac{l([A_m,\, A^2_m])}{l([A^2_m,\, B_m])} = \frac{2(\ln x_{n_m+2} - \ln x_{n_m+3})}{x^2_{n_m+2}(10 - \ln x_{n_m+2})(10 - \ln x_{n_m+3})} < \frac{l([A_m,\, A^1_m])}{l([A^1_m,\, B_m])}. \tag{2.3.8}$$

Так как

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{2(\ln x_{n_m+2} - \ln x_{n_m+3})}{x^2_{n_m+2}(10 - \ln x_{n_m+2})(10 - \ln x_{n_m+3})} =$$

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{x_{n_m+2}(10 - \ln x_{n_m+2})(10 - \ln x_{n_m+3})} = +\infty,$$

то в силу (2.3.8) найдется натуральное число $\overline{m}_0 \geq m_0$ такое, что при любом $m \geq \overline{m}_0$ выполнено неравенство $l([A_m,\, A^1_m]) > l([A^1_m,\, B_m])$. Поэтому при любых $m \geq \overline{m}_0$ найдется точка $A^3_m(a^3_m;\, h_4(a^3_m)) \in (A_m,\, A^1_m)$ такая, что $l([A^3_m,\, A^1_m]) = l([A^1_m,\, B_m])$. Тода в интервале $(x_{n_m+3},\, x_{n_m+2})$ корректно определена строго возрастающая выпуклая вверх C^1-гладкая функция h такая, что $h_{|(x_{n_m+3},\, a_m^3)} = h_{4|(x_{n_m+3},\, a_m^3)}$; а на промежутке $[a_m^3,\, x_{n_m+2})$ графиком h служит дуга окружности, касающейся h_4 в точке A_m^3 и имеющей горизонтальную касательную в точке B_m. Наконец, положим $\alpha = x_{n_{\overline{m}_0}+1}$, $h(0) = 0$.

Из приведенного определения функции $h(x)$ следует, что $h(x)$ непрерывна на отрезке $[0,\, \alpha]$, причем во всех точках полуинтервала $(0,\, \alpha]$, за исключением точек x_{n_m+1} $(m \geq \overline{m}_0)$, существует конечная производная $h'(x)$; в каждой точке x_{n_m+1} существуют конечные односторонние производные, отличающиеся лишь знаком, а в точке 0 функция $h(x)$ не имеет производной. (В дальнейшем нам не потребуются дифференциальные свойства функции h).

При любых $m \geq \overline{m}_0$, $y \in [0,\, 1]$ определим $\psi(x,\, y)$, полагая

$$\psi(x,\, y) = \begin{cases} (-1)^m |\psi(x,\, y)|, & \text{если} \quad x \in J_m \bigcup J_{m+1}^{(1)}; \\ (-1)^{m+1} |\psi(x,\, y)|, & \text{если} \quad x \in J_{m+1}^{(2)}; \\ 0, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases} \tag{2.3.9}$$

2. Покажем, что $F_a \in T_d([0,\, \alpha] \times [0,\, 1])$. В силу формул (2.3.1), (2.3.6) и (2.3.9) достаточно убедиться в том, что отображение $g_x(y)$ дифференцируемо по x на I, и частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ непрерывна в прямоугольнике $(0,\, \alpha] \times [0,\, 1]$. В самом деле, из формул (2.3.6), (2.3.9) и определения функции h следует, что функция $\psi(x,\, y)$ непрерывна в прямоугольнике $(0,\, \alpha] \times [0,\, 1]$. Заметим, что функция ψ непрерывна и на вертикальном отрезке $\{0\} \times [0,\, 1]$. Действительно, из (2.3.6) и (2.3.9) следует, что $|\psi(x,\, y)| \leq h(x)$ при любых $(x,\, y) \in [0,\, \alpha] \times [0,\, 1]$. Для $h(x)$ удовлетворяются следующие неравенства:

$$h(x) \leq \begin{cases} \frac{1}{10 - \ln x_{n_m+3}}, & \text{если} \quad x \in J_m, m \geq 1; \\ \frac{1}{10 - \ln x_{n_m}}, & \text{если} \quad x \in J_m^{(1)}; \\ \frac{1}{10 - \ln x_{n_m+2}}, & \text{если} \quad x \in J_m^{(2)}. \end{cases} \tag{2.3.10}$$

Так как $\lim\limits_{x \to +0} \frac{1}{10 - \ln x} = 0$, то, используя (2.3.10), при любых $y \in [0,\, 1]$ получаем

$$\lim_{x \to +0} \psi(x,\, y) = \lim_{x \to +0} h(x) = 0 = h(0) = \psi(0,\, y).$$

Используя предложение 2.2.3 и равенство (2.3.1), получаем отсюда, что $g_x(y)$ дифференцируемо по x в каждой точке отрезка $\{0\} \times [0,\, 1]$, причем $\frac{\partial}{\partial x} g_0(y) = 0$.

Возьмем произвольно и зафиксируем $m \geq \overline{m}_0$. Убедимся в дифференцируемости $g_x(y)$ по переменной x на отрезке $\{x_{n_m+1}\} \times [0,\, 1]$. В самом деле, пусть y – произвольная (но фиксированная) точка отрезка $[0,\, 1]$. Из равенства (2.3.1) и определения функции ψ (см. п.1) следует, что $g_{x_{n_m+1}}(y) = id_{|[0,\, 1]}$ и

$$\frac{g_x(y) - g_{x_{n_m+1}}(y)}{x - x_{n_m+1}} = \frac{x\psi(x,\, y)}{x - x_{n_m+1}},$$

причем

$$\lim_{x \to x_{n_m+1}} \frac{x\psi(x,\, y)}{x - x_{n_m+1}} = \lim_{x \to x_{n_m+1}} \frac{2(-1)^{m-1}x}{(10 - \ln x_{n_m})(x_{n_m+1} - x_{n_m+2})} = \frac{4(-1)^{m-1}}{x_{n_m+1}(10 - \ln x_{n_m})}.$$

Таким образом, при любых $m \geq \overline{m}_0$ и $y \in [0,\, 1]$ справедливо

$$\frac{\partial}{\partial x} g_{x_{n_m+1}}(y) = \frac{4(-1)^{m-1}}{x_{n_m+1}(10 - \ln x_{n_m})}. \tag{2.3.11}$$

Из (2.3.11) следует, что, во-первых, отображение $g_x(y)$ дифференцируемо по x в слое над каждой точкой x_{n_m+1} $(m \geq \overline{m}_0)$ и, во-вторых, что частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ неограничена в произвольной окрестности любой точки слоя $\{0\} \times [0,\, 1]$. Таким образом, каждая точка $(0;\, y)$, $y \in [0,\, 1]$, является точкой разрыва 2-го рода частной производной $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ в горизонтальном слое $[0,\, \alpha] \times \{y\}$.

Заметим, что частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ непрерывна на отрезке $\{x_{n_m+1}\} \times [0,\, 1]$ $(m \geq \overline{m}_0)$. Действительно, возьмем произвольно и зафиксируем $y \in [0,\, 1]$. Используя непрерывность ψ, формулы (2.3.6) и (2.3.9), укажем окрестность $U_{1,\,\delta}(x_{n_m+1})$ точки x_{n_m+1} в I_1 такую, что при всех $x \in U_{1,\,\delta}(x_{n_m+1})$, $x \neq x_{n_m+1}$, выполнено

$$y \in (y_1(x),\, y_2(x)); \quad \text{а} \quad \psi(x,\, y) = \frac{2(-1)^{m-1}(x - x_{n_m+1})}{(10 - \ln x_{n_m})(x_{n_m+1} - x_{n_m+2})}.$$

Поэтому при любых $x \in U_{1,\,\delta}(x_{n_m+1})$, $x \neq x_{n_m+1}$, справедливо

$$\frac{\partial}{\partial x} g_x(y) = \frac{2(-1)^{m-1}(2x - x_{n_m+1})}{(10 - \ln x_{n_m})(x_{n_m+1} - x_{n_m+2})} \tag{2.3.12}$$

Из равенств (2.3.11) и (2.3.12) следует непрерывность частной производной $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ в произвольной точке отрезка $\{x_{n_m+1}\} \times [0,\, 1]$.

Проводя дальнейшие вычисления, убеждаемся в том, что отображение $g_x(y)$ дифференцируемо по x в замкнутом прямоугольнике $[0,\, \alpha] \times [0,\, 1]$ (и непрерывно дифференцируемо по x в незамкнутом прямоугольнике $(0,\, \alpha] \times [0,\, 1]$), то есть $F_a \in$

$T_d([0,\, \alpha] \times [0,\, 1])$.

3. Пусть $A^* = \{0\} \times [0,\, 1]$. Тогда A^* удовлетворяет определению 2.3.1 и является одномерным нехаотическим аттрактором построенного отображения.

Укажем точку $(x_0''; \, y_0'') \in [0,\, \alpha] \times [0,\, 1]$ так, чтобы $\omega_{F_a}((x_0''; \, y_0'')) = A^*$. Для этого возьмем произвольно и зафиксируем четное число $m > \overline{m}_0$. Положим

$$x_0'' = x_{n_m+2} \ \text{ (то есть } \ x_0'' \in J_m^{(2)} \ \text{ при четном } \ m), \ \ y_0'' = y'_{n_m+2} \ \text{ (см. (2.3.5))}.$$

При любом $k \geq 1$ определим натуральные числа $p_k = n_{m+k} - n_{m+k-1} - 1$. Так как m – четное число, то в силу формул (2.3.4), (2.3.5) и (2.3.9) при $k = 1$ выполнено

$$(x''_{p_1}; \, y''_{p_1}) = F_a^{p_1}(x_0''; \, y_0'') = (x_{n_{m+1}+1}; \, y_0'' + \sum_{n=n_m+2}^{n_{m+1}+1} \frac{x_n}{10 - \ln x_n}). \tag{2.3.13}$$

Тогда $(x''_{p_1+1}; \, y''_{p_1+1}) = (x_{n_{m+1}+2}; \, y''_{p_1})$, то есть $y''_{p_1+1} = y''_{p_1}$. При всех $k \geq 2$ выполнено $y''_{p_1+\ldots+p_k+k-1} = y''_{p_1+\ldots+p_k}$, и с использованием (2.3.4) имеем

$$\begin{gathered}(x''_{p_1+\ldots+p_k+k-1}; \, y''_{p_1+\ldots+p_k+k-1}) = F_a^{p_1+\ldots+p_k+k-1}(x_0''; \, y_0'') = \\ (x_{n_{m+k}+1}; \, y''_{p_1+\ldots+p_{k-1}} + (-1)^{k-1} \sum_{n=n_{m+k-1}+2}^{n_{m+k}+1} \tfrac{x_n}{10-\ln x_n}).\end{gathered} \tag{2.3.14}$$

Из (2.3.13) и (2.3.14) следует, что

$$g_{x_0'', p_1+\ldots+p_k+k-1}(y_0'') = y_0'' + \sum_{i=1}^{k}((-1)^{i-1} \sum_{n=n_{m+i-1}+2}^{n_{m+i}+1} \frac{x_n}{10 - \ln x_n}). \tag{2.3.15}$$

Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{i=1}^{+\infty}((-1)^{i-1} \sum_{n=n_{m+i-1}+2}^{n_{m+i}+1} \frac{x_n}{10 - \ln x_n}). \tag{2.3.16}$$

Из (2.3.4) следует, что ряд (2.3.16) расходится (не выполнено необходимое условие сходимости числового ряда). А так как все слагаемые вида $(-1)^{i-1} \sum\limits_{n=n_{m+i-1}+2}^{n_{m+i}+1} \frac{x_n}{10-\ln x_n}$ (заключенные в (2.3.16) в одну скобку) имеют один и тот же знак, зависящий от четности натурального числа i, то ряд (2.3.16) расходится одновременно с рядом

$$\frac{x_{n_m+2}}{10 - \ln x_{n_m+2}} + \ldots + \frac{x_{n_{m+1}+1}}{10 - \ln x_{n_{m+1}+1}} - \frac{x_{n_{m+1}+2}}{10 - \ln x_{n_{m+1}+2}} - \ldots - \frac{x_{n_{m+2}+1}}{10 - \ln x_{n_{m+2}+1}} + \ldots,$$

полученным из (2.3.16) опусканием скобок. Последнее вместе с предложением 2.2.2 означает, что $\omega_{F_a}((x_0''; \, y_0''))$ – невырожденный отрезок, содержащийся в A^*.

Покажем, что $\omega_{F_a}((x_0''; y_0'')) = A^*$. В самом деле, в силу выбора чисел $n_{m+1}+2$ $(m \geq 0)$ и формул (2.3.4) – (2.3.5) при четных $m > 1$ выполнено

$$1 - \frac{1}{\sqrt{10 - \ln x_{n_m+2}}} - \frac{x_{n_{m+1}+2}}{10 - \ln x_{n_{m+1}+2}} < y'_{n_m+2} + \sum_{n=n_m+2}^{n_{m+1}+1} \frac{x_n}{10 - \ln x_n} < 1, \qquad (2.3.17)$$

а при всех нечетных m –

$$\frac{1}{\sqrt{10 - \ln x_{n_m+2}}} + \frac{x_{n_{m+1}+2}}{10 - \ln x_{n_{m+1}+2}} > y'_{n_m+2} - \sum_{n=n_m+2}^{n_{m+1}+1} \frac{x_n}{10 - \ln x_n} > 0. \qquad (2.3.18)$$

Так как $\lim\limits_{m\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{10-\ln x_{n_m+2}}} = \lim\limits_{m\to+\infty} \frac{x_{n_{m+1}+2}}{10-\ln x_{n_{m+1}+2}} = 0$, то в силу формул (2.3.14), (2.3.15), (2.3.17) и (2.3.18) $y = 0$ и $y = 1$ являются предельными точками последовательности $\{g_{x_0'', p_1+\ldots+p_k+k-1}(y_0'')\}_{k\geq 1}$. Следовательно, $\omega_{F_a}((x_0''; y_0'')) = A^*$. Теорема 2.3.1 доказана.

Замечание 2.3.1. Заметим, что если по первой координате траектория точки $(x_0''; y_0'')$, указанной в доказательстве теоремы 2.3.1, притягивается к f-неподвижной точке 0, то по второй координате эта траектория проявляет черты сложного хаотического поведения: каково бы ни было $\hat{y} \in [0, 1]$, найдется последовательность натуральных чисел $\{n_l\}_{l\geq 0}$ такая, что $\lim\limits_{l\to+\infty} g_{x_0'', n_l}(y_0'') = \hat{y}$, причем последовательность разностей этих чисел $\{n_{l+1} - n_l\}_{l\geq 0}$ не ограничена. Таким образом, уже в простейших косых произведениях отображений интервала (принадлежащих пространству $T_d(I)$ и содержащих только лишь неподвижные точки) возможно существование траекторий (имеющих одномерные ω-предельные множества рассматриваемого вида), проявляющих по второй координате черты хаотического поведения.

Замечание 2.3.2. Отметим и следующую функциональную особенность отображения, построенного в доказательстве теоремы 2.3.1: в силу формулы (2.3.11) частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_x(\overline{y})$ не ограничена при любом $\overline{y} \in [0, 1]$ в произвольной окрестности точки $(0; \overline{y})$, которая является точкой разрыва второго рода $\frac{\partial}{\partial x} g_x(\overline{y})$ по переменной x в соответствующем горизонтальном слое (см. классическую теорему Дарбу для производной функции одного действительного переменного [144, гл.7, §2]).

Завершая §2.3, укажем расходящийся несобственный интеграл 1-го рода, соответствующий отображению F_a, построенному в доказательстве теоремы 2.3.1. В самом деле, для отображения F_a при всех $m \geq \overline{m}_0$ имеем:

$$s_l = \begin{cases} \frac{x_l}{10-\ln x_l} & \text{при} \quad l \neq n_m + 1; \\ \frac{x_{l+1}}{10-\ln x_{l+1}} & \text{при} \quad l = n_m + 1. \end{cases}$$

Так как $x_l = O(\frac{1}{l})$ при $l \to +\infty$, то расходящемуся ряду (2.3.3) можно поставить в соответствие расходящийся несобственный интеграл $\int\limits_{l_0}^{+\infty} \frac{du}{u(10+\ln u)}$, где $l_0 \geq n_{\overline{m}_0} + 1$. Пусть функция $\vartheta(u)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.2.5. Тогда $\vartheta(u) = O(\frac{1}{u(10+\ln u)})$ при $u \to +\infty$. Следовательно, несобственный интеграл $\int\limits_{l_0}^{+\infty} \vartheta(u)du$ расходится.

Результаты, приведенные в параграфе § 2.3, можно найти в статьях [93], [146].

2.4 Дифференциальные свойства и структура ω-предельных множеств

Во множестве $T_d(I)$ выделим подмножество простейших отображений, удовлетворяющих следующему естественному дополнительному условию:

(iii) для любой точки $(\overline{x}; \overline{y}) \in I$ такой, что $\overline{x} \in J^* \setminus Per(f)$ для некоторого интервала $J^* \subset I_1$, а $\overline{y}$ –неподвижная точка отображения $g_{\overline{x}, M} : I_2 \to I_2$, существует окрестность $U_\delta((\overline{x}; \overline{y})) = U_{1,\delta}(\overline{x}) \times U_{2,\delta}(\overline{y})$, обладающая следующим свойством: для каждой точки $(x; y) \in U_\delta((\overline{x}; \overline{y}))$ верно

$$\frac{\partial}{\partial x} g_{x,M}(y) \geq 0 \ \ (\frac{\partial}{\partial x} g_{x,M}(y) \leq 0),$$

причем каково бы ни было $y \in U_{2,\delta}(\overline{y})$, промежуток $U_{1,\delta}(\overline{x}) \times \{y\}$ не содержит невырожденного подотрезка, на котором верно тождество $\frac{\partial}{\partial x} g_{x,M}(y) \equiv 0$.

Отметим, что (iii) означает выполнение условий классической локальной теоремы существования неявной функции $x = x(y)$, удовлетворяющей уравнению $g_{x,M}(y) = y$ (см., например, [152, §1]). Возможность применения указанной теоремы делает обозримой геометрическую структуру множества $\{(x; y) : g_{x,M}(y) = y\}$.

Укажем также, что множество отображений, удовлетворяющих условию (iii) непусто: из равенства (2.3.11) и непрерывности частной производной $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ в каждой точке слоя $\{x_{n_{m+1}}\}\times[0,\,1]$ при всех $m \geq \overline{m}_0$ (см. доказательство теоремы 2.3.1) следует, что отображение F_a, построенное в доказательстве теоремы 2.3.1, удовлетворяет условию (iii).

В этой части работы доказана теорема 2.4.1, показывающая, что свойство неограниченности частной производной $\frac{\partial}{\partial x}g_x(y)$ выполнено для произвольного отображения из множества $T_d(I)$ (а не только для отображения F_a, построенного в доказательстве теоремы 2.3.1), удовлетворяющего условию (iii) и имеющего одномерные ω-предельные множества рассматриваемого вида.

Теорема 2.4.1. *Пусть $F \in T_d(I)$ – простейшее отображение, удовлетворяющее условию (iii) и такое, что траектория некоторой точки $(x';\,y')$ имеет одномерное ω-предельное множество, представляющее собой орбиту невырожденного вертикального периодического отрезка. Тогда частная производная $\frac{\partial}{\partial x}g_x(y)$ не ограничена в произвольной окрестности множества $\omega_F((x';\,y'))$.*

Доказательство. 1. Пусть отображение $F \in T_d(I)$ имеет замкнутое множество $Per(F)$, а ω-предельное множество $\omega_{F^M}((x';\,y'))$ F^M-траектории точки $(x';\,y')$ – невырожденный отрезок.

Тогда в силу теоремы 2.2.1 найдутся точка $x^0 \in Per_e(f)$, связная компонента $[\alpha,\,\beta]$ $(\alpha < \beta)$ среза $(Per(F))(x^0)$ и счетное подмножество $N_{[\alpha,\,\beta]}$ множества натуральных чисел такие, что $x' \in W^s(x^0,\,f^M) \setminus \{f^{-Mn}(x^0)\}_{n\geq 0}$ и $\omega_{F^M}((x';\,y')) = \{x^0\}\times[\alpha',\,\beta']$ $(\alpha \leq \alpha' < \beta' \leq \beta)$; числа из множества $N_{[\alpha,\,\beta]}$ обладают свойством (2.2.6), а ряд (2.2.7) расходится. Следовательно, в силу следствия 2.2.2 расходятся ряды (2.2.13) и (2.2.14). Тогда из теоремы 2.2.3 получаем, что x^0 – негиперболическая f^M-неподвижная точка (неравенство $W^s(x^0,\,f^M) \neq \{f^{-Mn}(x^0)\}_{n\geq 0}$ означает, что точка x^0 не является отталкивающей). Таким образом, верно равенство $|(f^M)'(x^0)| = 1$. Отметим, что если $(f^M)'(x^0) = -1$, то переход к отображению F^{2M} приводит к равенству $(f^{2M})'(x^0) = 1$. Поэтому, не уменьшая общности, будем считать, что

$$(f^M)'(x^0) = 1. \tag{2.4.1}$$

Пусть $I_1 = [a_1,\,b_1]$. В силу (2.4.1) найдется окрестность $U_1(x^0)$ точки x^0 такая, что, во-первых, сужение $f^M{}_{|U_1(x^0)}$ – диффеоморфизм; и, во-вторых, если $x^0 \neq b_1$, то при любых $x \in U_{1+}(x^0)$, выполнено $f^M(x) > x^0$, а если $x^0 \neq a_1$, то при всех $x \in U_{1-}(x^0)$

верно $f^M(x) < x^0$ (здесь $U_{1\,+}(x^0)$ ($U_{1\,-}(x^0)$) – правосторонняя (левосторонняя) окрестность точки x^0 в I_1, то есть интервал вида $(x^0,\, x^0+\delta)$ (вида $(x^0-\delta,\, x^0)$) при некотором $\delta > 0$). Положим

$$U_1(x^0) = \begin{cases} U_{1\,+}(x^0) & \text{если} \quad x^0 = a_1, \\ U_{1\,-}(x^0) \bigcup U_{1\,+}(x^0) \bigcup \{x^0\} & \text{если} \quad x^0 \in (a_1,\, b_1), \\ U_{1\,-}(x^0) & \text{если} \quad x^0 = b_1. \end{cases}$$

Так как $x' \in W^s(x^0,\, f^M)$, то для окрестности $U_1(x^0)$ укажем натуральное число n'_0 так, что при всех $n \geq n'_0$ верно $f^{Mn}(x') \in U_1(x^0)$. Так как $x' \notin \{f^{-Mn}(x^0)\}_{n\geq 0}$, то, для определенности, будем считать, что $f^{Mn'_0}(x') \in U_{1\,+}(x^0)$. Тогда в силу свойств окрестности $U_{1\,+}(x^0)$ при всех $n \geq n'_0$ справедливо $f^{Mn}(x') \in U_{1\,+}(x^0)$, то есть $x' \in W^s_+(x^0,\, f^M)$, где $W^s_+(x^0,\, f^M)$ – правостороннее неустойчивое многообразие точки x^0 относительно отображения f^M.

2. Убедимся в том, что точка x^0 изолирована во множестве неподвижных точек отображения f^M справа. Действительно, предположив противное, в интервале $U_{1\,+}(x^0)$ укажем последовательность неподвижных точек f^M

$$x^0_1 > x^0_2 > \ldots > x^0_k > \ldots > x^0 \ \text{ такую, что } \ \lim_{k\to+\infty} x^0_k = x^0.$$

Для промежутка $(x^0,\, x^0_1] \subset U_{1\,+}(x^0)$ найдем натуральное число $n_0 \geq n'_0$ так, чтобы для любого $n \geq n_0$ выполнялось $f^{Mn}(x') \in (x^0,\, x^0_1]$. Тогда в силу равенства $(x^0,\, x^0_1] = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} [x^0_{k+1},\, x^0_k]$ для любого $n \geq n_0$ существует $k \geq 1$ такое, что

$$f^{Mn}(x') \in (x^0_{k+1},\, x^0_k). \tag{2.4.2}$$

Возьмем произвольно и зафиксируем $n \geq n_0$ и укажем $k \geq 1$ так, чтобы выполнялось (2.4.2). Так как $f^{Mn}(x') \in W^s_+(x^0,\, f^M)$, то из (2.4.2) следует, что интервал $(x^0_{k+1},\, x^0_k)$ содержит точку x'' такую, что $f^M(x'') \notin (x^0_{k+1},\, x^0_k)$. Тогда, используя классическую теорему Ролля, укажем точку $\widetilde{x} \in (x^0_{k+1},\, x^0_k)$ такую, что $(f^M)'(\widetilde{x}) = 0$. Последнее противоречит тому, что $f^M{}_{|U_{1\,+}(x^0)}$ – диффеоморфизм.

3. В силу п.2 найдется подокрестность окрестности $U_{1\,+}(x^0)$, несодержащая неподвижных точек f^M. Не уменьшая общности, будем считать, что весь интервал $U_{1\,+}(x^0)$ не содержит неподвижных точек f^M. Последнее вместе с $x' \in W^s_+(x^0,\, f^M)$

и тем, что ${f^M}_{|U_{1+}(x^0)}$ – диффеоморфизм, влечет за собой выполнение неравенства $f^M(x) < x$ при всех $x \in U_{1+}(x^0)$. Используя (2.4.1), укажем непрерывную в точке x^0 функцию φ, определенную в замыкании $\overline{U}_{1+}(x^0)$ окрестности $U_{1+}(x^0)$, такую, что $\varphi(x^0) = 0$; при всех $x \in \overline{U}_{1+}(x^0)$, $x \neq x^0$, справедливо $\varphi(x) > 0$, и

$$f^M(x) = x - \varphi(x)(x - x^0). \tag{2.4.3}$$

4. Отображение $g_{x^0,M}(y)$ содержит только неподвижные точки и не обладает периодическими точками других периодов. Если среди неподвижных точек $g_{x^0,M}$ есть точки с неположительными собственными числами, то переход к отображению F^{2M} (с отображениями в слоях $g_{x,2M}$ при всех $x \in I_1$) приводит к отображению $g_{x^0,2M}$, все неподвижные точки которого имеют неотрицательные собственные числа. Поэтому, не уменьшая общности рассмотрений, будем предполагать далее, что собственные числа всех неподвижных точек отображения $g_{x^0,M}$ неотрицательны. Покажем, что при сделанном предположении существует подокрестность $U'_{1+}(x^0)$ окрестности $U_{1+}(x^0)$ такая, что при любом $x \in U'_{1+}(x^0)$ отображение $g_{x,M}(y)$ имеет только лишь неподвижные точки и не содержит периодических точек других периодов.

Действительно, в силу [91] (см. предложение 2.1.3) найдется окрестность $B^1(g_{x^0,M})$ отображения $g_{x^0,M}$ в пространстве C^1-гладких отображений отрезка I_2 в себя такая, что произвольное отображение из $B^1(g_{x^0,M})$ содержит лишь неподвижные точки; возможно, периодические точки периода 2 и не имеет периодических точек более высоких периодов. (Существование в произвольной окрестности $B^1(g_{x^0,M})$ отображения $g_{x^0,M}$ отображений в слоях $g_{x,M}$ с периодическими точками периода 2 возможно лишь в том случае, если $[\alpha, \beta] \neq I_2$.)

Обозначим через ρ_M – отображение отрезка I_1 на семейство отображений в слоях $\{g_{x,M}\}_{x \in I_1}$ косого произведения F^M. Так как $F \in T_d(I)$, то ρ_M непрерывно на I_1 и, в частности, непрерывно в точке x^0. Тогда для окрестности $B^1_{F^M}(g_{x^0,M})$ отображения $g_{x^0,M}$ в семействе отображений в слоях косого произведения F^M найдется окрестность $U'_{1+}(x^0)$ точки x^0, содержащаяся в $U_{1+}(x^0)$, такая, что при каждом $x \in U'_{1+}(x^0)$ выполнено $g_{x,M} \in B^1(g_{x^0,M})$.

Предположим, что существует последовательность точек $\{x'_l\}_{l \geq 0} \subset U'_{1+}(x^0)$, сходящаяся к x^0, такая, что $g_{x'_l,M}$ при любом $l \geq 0$ содержит периодические точки периода 2. Возьмем произвольно и зафиксируем $l' \geq 0$. Сужению $F^M_{|[x^0,\, x'_{l'}]\times I_2}$ на F^M-инвариантный прямоугольник $[x^0,\, x'_{l'}] \times I_2$ (см. п.3) сопоставим отображение $G_*(x,\, y) = (x,\, g_{x,\,M}(y))$, определенное на G_*-инвариантном прямоугольнике $[x^0,\, x'_{l'}] \times I_2$. Тогда G_* имеет лишь неподвижные точки, периодические точки периода 2 и не содержит периодических точек более высоких периодов. Отсюда следует, что множество $Per(G_*)$ периодических точек G_* замкнуто.

При каждом $l \geq 0$ обозначим через y'_l периодическую точку периода 2 отображения $g_{x'_l,\,M}$. Из последовательности точек $\{(x'_l;\, y'_l)\}_{l\geq 0} \subset Per(G_*)$ выделим сходящуюся к некоторой точке $(x^0;\, y_*)$ подпоследовательность $\{(x'_{l_p};\, y'_{l_p})\}_{p\geq 0}$. В силу замкнутости множества $Per(G_*)$ выполнено: $(x^0;\, y_*) \in Per(G_*)$, и y_* – неподвижная точка $g_{x^0,\,M}$. Но тогда непрерывность G_* влечет за собой сходимость последовательности точек периода 2 вида $\{g_{x'_{l_p},\,M}(y'_{l_p})\}_{p\geq 0}$ к точке y_*. Пусть, для определенности, при любом $p \geq 0$ выполнено неравенство $y'_{l_p} < g_{x'_{l_p},\,M}(y'_{l_p})$ (последнего, в случае необходимости, можно добиться соответствующим переобозначением точек). Так как отображения $g_{x'_{l_p},\,M}(y)$ являются C^1-гладкими по y, то, применяя классическую теорему Лагранжа для функции одного переменного к отображению $g_{x'_{l_p},\,M}(y)$ $(p \geq 0)$ на отрезке $[y'_{l_p},\ g_{x'_{l_p},\,M}(y'_{l_p})]$, укажем точку $c_p \in [y'_{l_p},\ g_{x'_{l_p},\,M}(y'_{l_p})]$ такую, что

$$\frac{\partial}{\partial y} g_{x'_{l_p},\,M}(c_p) = \frac{g^2_{x'_{l_p},\,M}(y'_{l_p}) - g_{x'_{l_p},\,M}(y'_{l_p})}{g_{x'_{l_p},\,M}(y'_{l_p}) - y'_{l_p}} = -1.$$

Используя условие "$F \in T_d(I)$"и равенство $\lim\limits_{p\to+\infty} c_p = y_*$, получаем отсюда, что $\frac{\partial}{\partial y} g_{x^0,\,M}(y_*) = -1$. Последнее противоречит предположению о неотрицательности собственных чисел неподвижных точек отображения $g_{x^0,\,M}$. Следовательно, найдется окрестность $U''_{1+}(x^0)$ точки x^0, содержащаяся в $U'_{1+}(x^0)$, такая, что при каждом $x \in U''_{1+}(x^0)$ отображение $g_{x,\,M}$ имеет лишь неподвижные точки и не содержит периодических точек более высоких периодов.

Так как $g_{x^0,\,M_{|[\alpha,\,\beta]}} = id_{|[\alpha,\,\beta]}$, то существует (открытая в I) окрестность U отрезка $\{x^0\} \times [\alpha,\, \beta]$ такая, что при каждом $x \in pr_1(U)$ отображение $g_{x,\,M_{|U(x)}}$ – возрастающий диффеоморфизм по y, здесь $U(x)$ – срез окрестности U слоем над x. Не уменьшая общности рассмотрений, будем считать, что $pr_1(U) = U''_{1+}(x^0)$.

Так как $x' \in W^s_+(x^0,\, f^M)$, то для некоторого натурального числа $n''_0 \geq 1$ при всех

$n \geq n_0''$ выполнено $f^{Mn}(x') \in U''_{1+}(x^0)$ (см. п.1).

Возьмем произвольно и зафиксируем $\overline{n} \geq n_0''$ так, чтобы $g_{x',\,M\overline{n}}(y') \in (\alpha',\, \beta')$. Переобозначим полученные точки, полагая $f^{M\overline{n}}(x') = x_0$, $g_{x',\,M\overline{n}}(y') = y_0$. Так как F^M-траектория $\{F^{Mn}(x_0;\, y_0)\}_{n\geq 0}$ точки $(x_0;\, y_0)$ является подтраекторией F^M-траектории точки $(x';\, y')$ и отличается от последней отсутствием конечного множества точек $\{(x';\, y'),\, F^M(x';\, y'), \ldots, F^{M(\overline{n}-1)}(x';\, y')\}$, то $\{F^{Mn}(x_0;\, y_0)\}_{n\geq 0}$ обладает теми же асимптотическими свойствами, что и $\{F^{Mn}(x';\, y')\}_{n\geq 0}$.

5. Цель рассмотрений п.п. 5, 6 и 7 – описать геометрическую структуру множества

$$\{(x;\, y) : g_{x,\,M}(y) = y\} \text{ при } (x;\, y) \in U''_{1+}(x^0) \times [\alpha',\, \beta'].$$

В силу предложения 2.2.3 в условиях теоремы 2.4.1 существует непрерывная по x на отрезке $\{x^0\} \times [\alpha,\, \beta]$ функция $\psi(x,\, y)$, определенная в прямоугольнике $I_1 \times [\alpha,\, \beta]$, и такая, что в указанном прямоугольнике справедливо представление

$$g_{x,\,M}(y) = y + (x - x^0)\psi(x,\, y). \tag{2.4.4}$$

Положим

$$Z^+ = \{z(x;\, y) : g_{x,\,M}(y) - y > 0\};\;\; Z^- = \{z(x;\, y) : g_{x,\,M}(y) - y < 0\} \text{ при } x \in U''_{1+}(x^0).$$

В силу теоремы 2.2.1 каждое из множеств Z^+ и Z^- непусто. Последнее вместе с непрерывностью $g_{x,\,M}$ на I означает, что Z^+ и Z^- – открытые множества.

Покажем, что каково бы ни было $y \in (\alpha',\, \beta')$, интервал $U''_{1+}(x^0)$ содержит последовательность

$$x^+_M(y) > x^-_M(y) > x^+_{2M}(y) > x^-_{2M}(y) > \ldots > x^+_{Mj}(y) > x^-_{Mj}(y) > \ldots \tag{2.4.5}$$

(здесь $x^+_{Mj}(y)$ $(x^-_{Mj}(y))$ – точки множества $Z^+(y)$ $(Z^-(y)))$, сходящуюся (по j) к x^0. Действительно, предположим, что при некотором $\overline{y} \in (\alpha',\, \beta')$ в некоторой подокрестности $V_{1+}(x^0)$ окрестности $U''_{1+}(x^0)$ верно неравенство

$$g_{x,\,M}(\overline{y}) - \overline{y} \geq 0 \;\; (g_{x,\,M}(\overline{y}) - \overline{y} \leq 0). \tag{2.4.6}$$

Положим $U' = V_{1+}(x^0) \times pr_2 U$, здесь $pr_2(\cdot)$ – проекция множества на ось ординат. Из определения окрестности U' следует, что, во-первых, сужение $F^M{}_{|\overline{U'}}$ отображения

F^M на замыкание множества U' – диффеоморфизм, и, во-вторых, найдется $\overline{n}_0 \geq 1$ такое, что при всех $n \geq \overline{n}_0$ выполнено

$$F^{Mn}(x_0;\, y_0) \in U' \;\; [19, \text{гл}\,5,\, 3]. \tag{2.4.7}$$

Горизонтальный промежуток $V_{1\,+}(x^0) \times \{\overline{y}\}$ разбивает открытое множество U' на два прямоугольника

$$P_1 = V_{1\,+}(x^0) \times [\overline{y},\;\; \beta(pr_2U')] \quad \text{и} \quad U' \setminus P_1,$$

где $\beta(pr_2U')$ – правая граничная точка интервала pr_2U'.

Предположим, для определенности, что верно первое из неравенств (2.4.6) и рассмотрим диффеоморфизм $F^M_{|P_1} : P_1 \to F^M(P_1)$. Тогда $F^M(V_{1\,+}(x^0) \times \{\overline{y}\}) \subset P_1$, и для любой точки $(x;\, y) \in P_1$ справедливо неравенство

$$g_{x,\,M}(y) \geq \overline{y} \;\; [30,\; \text{гл.}\,1,\; \text{п.}\,13]. \tag{2.4.8}$$

Так как $\omega_{F^M}((x_0;\, y_0)) = \{x^0\} \times [\alpha',\, \beta']$, то найдется натуральное число $n_* \geq \overline{n}_0$ такое, что $g_{x_0,\,Mn_*}(y_0) \in (\overline{y},\;\beta')$. Используя (2.4.7) – (2.4.8), получаем отсюда, что при всех $n \geq n_*$ выполнено

$$g_{x_0,\,Mn}(y_0) \geq \overline{y}.$$

Последнее противоречит тому, что $\omega_{F^M}((x_0;\, y_0)) = \{x^0\} \times [\alpha',\, \beta']$. Следовательно, сделанное предположение неверно, и интервал $U''_{1\,+}(x^0)$ содержит последовательность (2.4.5), сходящуюся по j к точке x^0 при любом $y \in (\alpha',\, \beta')$.

Отсюда получаем, что $Z^+(y) \neq \emptyset$ ($Z^-(y) \neq \emptyset$), и срез $Z^+(y)$ (срез $Z^-(y)$) открыт в промежутке I_1. Так как выполнено условие (iii), то для множеств $Z^+(y)$ и $Z^-(y)$ верно одно из следующих двух строгих неравенств:

$$\sup Z^+(y) > \sup Z^-(y) \;\; \text{либо} \;\; \sup Z^+(y) < \sup Z^-(y).$$

Действительно, допустим, что $\sup Z^+(y) = \sup Z^-(y) = C^*$. Тогда в любой окрестности $U_{1,\,\delta}(C^*)$ точки C^* найдутся, как точки $x' \in Z^+(y)$, так и точки $x'' \in Z^-(y)$. Поэтому $g_{C^*,\,M}(y) = y$, а отображение $g_{x,\,M}(y) - y$ не является монотонным по переменной x (даже в широком смысле) в промежутке $U_{1,\,\delta}(C^*) \times \{y\}$. Последнее противоречит условию (iii). Таким образом, сделанное предположение неверно, и $\sup Z^+(y) \neq \sup Z^-(y)$.

6. Возьмем произвольно и зафиксируем $y \in (\alpha', \beta')$. Пусть, для определенности, $\sup Z^+(y) > \sup Z^-(y)$. Так как множество $Z^+(y)$ ($Z^-(y)$) открыто на I_1, то оно представимо в виде объединения не более, чем счетного семейства попарно непересекающихся составляющих интервалов, граничные точки которых принадлежат множеству нулей функции $g_{x,M}(y) - y$, возможно также существование не более, чем двух полуинтервалов, одна из граничных точек каждого из которых является и граничной точкой отрезка I_1 [153, гл.2, §5]. Поэтому при сделанном предположении корректно определен промежуток

$$Z_1^+(y) = \{x \in Z^+(y) : x > \sup Z^-(y)\}$$

такой, что множество $Z^+(y) \setminus Z_1^+(y)$ непусто и открыто в I_1. Последнее вместе с тем, что $Z^-(y)$ открыто на отрезке I_1, и условием (iii) влечет за собой выполнение неравенства $\sup(Z^+(y) \setminus Z_1^+(y)) < \sup Z^-(y)$. Тогда корректно определен интервал

$$Z_1^-(y) = \{x \in Z^-(y) : \sup(Z^+(y) \setminus Z_1^+(y)) < x < \sup Z^-(y)\}$$

такой, что $Z^-(y) \setminus Z_1^-(y)$ непусто и открыто на отрезке I_1. Из определения $Z_1^+(y)$ и $Z_1^-(y)$ следует, что $Z_1^+(y) \succ Z_1^-(y)$ (то есть для любых $x' \in Z_1^+(y)$, $x'' \in Z_1^-(y)$ верно неравенство $x' > x''$).

Предположим, что проделано $j \geq 1$ шагов, в результате которых на отрезке I_1 указаны интервалы

$$Z_1^+(y) \succ Z_1^-(y) \succ \cdots \succ Z_j^+(y) \succ Z_j^-(y)$$

такие, что при любом $2 \leq p \leq j$ выполнено

$$Z_p^+(y) = \{x \in Z^+(y) : \sup(Z^-(y) \setminus \ldots \setminus Z_{p-1}^-(y)) < x < \sup(Z^+(y) \setminus \ldots \setminus Z_{p-1}^+(y))\},$$

и $Z^+(y) \setminus Z_1^+(y) \setminus \ldots \setminus Z_p^+(y)$ – непустое открытое на I_1 множество;

$$Z_p^-(y) = \{x \in Z^-(y) : \sup(Z^+(y) \setminus \ldots \setminus Z_p^+(y)) < x < \sup(Z^-(y) \setminus \ldots \setminus Z_{p-1}^-(y))\},$$

а множество $Z^-(y) \setminus Z_1^-(y) \setminus \ldots \setminus Z_p^-(y)$ непусто и открыто на I_1.

Опишем $(j+1)$-й шаг.

Из результатов п.5 следует, что найдется $x \in Z^+(y)$ такое, что $Z_j^-(y) \succ x$ (то есть

$x' > x$ при любом $x' \in Z_j^-(y)$). Используя определение интервала $Z_j^-(y)$, получаем отсюда, что для всех таких x верно неравенство

$$x < \sup(Z^+(y) \setminus Z_1^+(y) \setminus \ldots \setminus Z_j^+(y)) = C_*,$$

и в произвольной левосторонней окрестности $U_{1,\,\delta}^-(C_*)$ точки C_* существуют точки множества $Z^+(y) \setminus Z_1^+(y) \setminus \ldots \setminus Z_j^+(y)$. В силу условия (iii) $Z^+(y) \setminus Z_1^+(y) \setminus \ldots \setminus Z_j^+(y)$ содержит левостороннюю окрестность $U_{1,\,\delta_*}^-(C_*)$ точки C_* при некотором $\delta_* \ > 0$. Поэтому

$$\sup(Z^-(y) \setminus Z_1^-(y) \setminus \ldots \setminus Z_j^-(y)) < \sup(Z^+(y) \setminus Z_1^+(y) \setminus \ldots \setminus Z_j^+(y)),$$

и корректно определен интервал

$$Z_{j+1}^+(y) = \{x \in Z^+(y) : \sup(Z^-(y) \setminus \ldots \setminus Z_j^-(y)) < x < \sup(Z^+(y) \setminus \ldots \setminus Z_j^+(y))\}$$

такой, что $Z^+(y) \setminus \ldots \setminus Z_j^+(y) \setminus Z_{j+1}^+(y)$ открыто на I_1.

Аналогично на I_1 определим интервал

$$Z_{j+1}^-(y) = \{x \in Z^-(y) : \sup(Z^+(y) \setminus \ldots \setminus Z_{j+1}^+(y)) < x < \sup(Z^-(y) \setminus \ldots \setminus Z_j^-(y))\}$$

такой, что $Z^-(y) \setminus \ldots \setminus Z_j^-(y) \setminus Z_{j+1}^-(y)$ открыто на I_1 и т.д.

Продолжая приведенную индуктивную процедуру, в промежутке I_1 укажем последовательность интервалов

$$Z_1^+(y) \succ Z_1^-(y) \succ \cdots \succ Z_j^+(y) \succ Z_j^-(y) \succ \ldots$$

В силу условия (iii) при каждом $j \geq 1$ на промежутке I_1 найдется по одной единственной точке $x_{j,\,1}(y)$ и $x_{j,\,2}(y)$ такой, что

$$\begin{aligned} Z_j^+(y) \succ x_{j,\,1}(y) \succ Z_j^-(y), \ \text{ и } \ g_{x_{j,\,1}(y),\,M}(y) - y = 0; \\ Z_j^-(y) \succ x_{j,\,2}(y) \succ Z_{j+1}^+(y), \ \text{ и } \ g_{x_{j,\,2}(y),\,M}(y) - y = 0. \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

7. Убедимся в том, что при любом $j \geq 1$ существуют непрерывные функции $x = x_j^1(y)$ и $x = x_j^2(y)$, определенные на $[\alpha',\, \beta']$ так, что при любом $y \in (\alpha',\, \beta')$ выполнено

$$x_j^1(y) = x_{j,\,1}(y), \quad x_j^2(y) = x_{j,\,2}(y),$$

а при $y = \alpha'$ $(y = \beta')$ выполнено

$$x_j^1(\alpha') = \lim_{y\to\alpha'} x_j^1(y),\ \ x_j^2(\alpha') = \lim_{y\to\alpha'} x_j^2(y)$$
$$(x_j^1(\beta') = \lim_{y\to\beta'} x_j^1(y),\ \ x_j^2(\beta') = \lim_{y\to\beta'} x_j^2(y)).$$

Действительно, возьмем произвольно и зафиксируем $j \geq 1$. Для определенности, последующие рассуждения проведем для функции $x = x_j^1(y)$. Пусть $\overline{y}$ – произвольная точка интервала $(\alpha',\, \beta')$. В силу условия (iii) и соотношений (2.4.9) для каждой точки $(x_j^1(\overline{y});\, \overline{y})$ найдется окрестность

$$U_\delta((x_j^1(\overline{y});\, \overline{y})) = U_{\delta,1}(x_j^1(\overline{y})) \times U_{\delta,2}(\overline{y}),\ \text{ где }\ \delta = \delta((x_j^1(\overline{y});\, \overline{y})),$$

такая, что соотношение $g_{x,M}(y) - y = 0$ в интервале $U_{\delta,2}(\overline{y})$ определяет единственную локальную непрерывную неявную функцию $x = x_j^{1,loc}(y)$ со значениями в интервале $U_{\delta,1}(x_j^1(\overline{y}))$. Положим $U_{\delta,2}(\overline{y}) = (c^1,\, d^1)$, $x_j^{1,loc}(c^1) = \lim\limits_{y\to c^1} x_j^{1,loc}(y)$, $x_j^{1,loc}(d^1) = \lim\limits_{y\to d^1} x_j^{1,loc}(y)$. Тогда в силу замкнутости множества неподвижных точек отображения $g_{x,M} : I_2 \to I_2$ справедливы равенства

$$g_{x_j^{1,loc}(c^1),M}(c^1) = c^1;\ \ g_{x_j^{1,loc}(d^1),M}(d^1) = d^1,$$

и непрерывная функция $x = x_j^{1,loc}(y)$ определена на отрезке $[c^1,\, d^1]$. В том случае, если $[c^1,\, d^1] \neq [\alpha',\, \beta']$, используя условие (iii) либо для точки $(x_j^{1,loc}(c^1);\, c^1)$ (если $c^1 \neq \alpha'$), либо для точки $(x_j^{1,loc}(d^1);\, d^1)$ (если $d^1 \neq \beta'$), либо для обеих точек одновременно (если выполнены оба неравенства) построим единственное непрерывное расширение функции $x = x_j^{1,loc}(y)$ на некоторый отрезок $[c^2,\, d^2] \supset [c^1,\, d^1]$. Полученную функцию обозначим $x = x_{j,2}^1(y)$. Тогда при любом $y \in [c^2,\, d^2]$ верно $g_{x_{j,2}^1(y),M}(y) = y$. Предположим, что проделано n шагов, и построены отрезки $[c^1,\, d^1] \subset [c^2,\, d^2] \subset \ldots \subset [c^n,\, d^n]$, на каждом из которых определена единственная непрерывная функция $x = x_{j,n}^1(y)$ (здесь $n \geq 1$, а $x_{j,1}^1(y) = x_j^{1,loc}(y)$) со следующими свойствами:

(7.1) $g_{x_{j,n}^1(y),M}(y) \equiv y$ на отрезке $[c^n,\, d^n]$;

(7.2) $x_{j,n}^1(y)_{|[c^{n-1},\, d^{n-1}]} = x_{j,n-1}^1(y)$.

Если $[c^n,\, d^n] \neq [\alpha',\, \beta']$, то применяя условие (iii) к точкам $(x_{j,n}^1(c^n);\, c^n)$ и $(x_{j,n}^1(d^n);\, d^n)$ так, как это было сделано при $n = 1$, на $(n+1)$-м шаге построим единственное непрерывное расширение функции $x = x^1_{j,\,n}(y)$ на некоторый отрезок $[c^{n+1},\, d^{n+1}]$, где $[c^{n+1},\, d^{n+1}] \supset [c^n,\, d^n]$. Получим функцию $x = x^1_{j,\,n+1}(y)$ такую, что на отрезке $[c^{n+1},\, d^{n+1}]$ справедливо $g_{x^1_{j,\,n+1}(y),\,M}(y) \equiv y$ и т.д. Продолжая описанную индуктивную процедуру, построим упорядоченную по включению систему отрезков

$$[c^1,\, d^1] \subset [c^2,\, d^2] \subset \ldots \subset [c^n,\, d^n] \subset [c^{n+1},\, d^{n+1}] \subset \ldots, \tag{2.4.10}$$

на каждом из которых определена единственная непрерывная функция $x = x^1_{j,\,n}(y)$, обладающая свойствами (7.1) и (7.2). В силу теоремы Бэра-Хаусдорфа [58, гл.4, §7] существует трансфинит λ не выше второго класса, начиная с которого отрезки системы (2.4.10) совпадают:

$$[c^\lambda,\, d^\lambda] = [c^{\lambda+1},\, d^{\lambda+1}] = \ldots \tag{2.4.11}$$

Тогда $[c^\lambda,\, d^\lambda] = [\alpha',\, \beta']$, поскольку в противном случае, применяя условие (iii) к точкам $(x^1_{j,\,\lambda}(c^\lambda);\, c^\lambda)$ и $(x^1_{j,\,\lambda}(d^\lambda);\, d^\lambda)$ так, как это было сделано выше, построили бы непрерывное расширение $x = x^1_{j,\,\lambda+1}(y)$ функции $x = x^1_{j,\,\lambda}(y)$ на отрезок $[c^{\lambda+1},\, d^{\lambda+1}]$, содержащий $[c^\lambda,\, d^\lambda]$ в качестве собственного подмножества. Последнее противоречит (2.4.11). Таким образом, на $[\alpha',\, \beta']$ определена единственная непрерывная функция $x = x^1_j(y)$, где $x^1_j(y) \equiv x^1_{j,\,\lambda}(y)$, такая, что $g_{x^1_j(y),\,M}(y) \equiv y$ на $[\alpha',\, \beta']$.

Обозначим через Γ^1_j (Γ^2_j), $j \geq 1$, график непрерывной на отрезке $[\alpha',\, \beta']$ функции $x = x^1_j(y)$ $(x = x^2_j(y))$. Из результатов п.п.6 и 7 следует, что при всех $j \geq 1$ графики Γ^1_j, Γ^2_j и Γ^1_{j+1} упорядочены следующим образом: $\Gamma^1_j \succ \Gamma^2_j \succ \Gamma^1_{j+1}$, то есть каково бы ни было $y \in [\alpha',\, \beta']$, для точек $x_1 = x^1_j(y)$, $x_2 = x^2_j(y)$, $x_3 = x^1_{j+1}(y)$ верны неравенства $x_1 > x_2 > x_3$. Следовательно, непрерывные кривые Γ^1_j и Γ^2_j $(j \geq 1)$ разбивают прямоугольник $U''_{1+}(x^0) \times [\alpha',\, \beta']$ на области (криволинейные трапеции относительно оси ординат) так, что, если для абсциссы точки $(x;\, y) \in U''_{1+}(x^0) \times [\alpha',\, \beta']$ выполнено $x^2_j(y) \succ x \succ x^1_{j+1}(y)$, то $g_{x,\,M}(y) - y > 0$; если же $x^1_j(y) \succ x \succ x^2_j(y)$, то $g_{x,\,M}(y) - y < 0$. Каждая точка $(x;\, y)$, удовлетворяющая соотношению $g_{x,\,M}(y) - y = 0$, принадлежит либо Γ^1_j, либо Γ^2_j при некотором $j \geq 1$.

8. Перейдем к доказательству неограниченности частной производной $\frac{\partial}{\partial x} g_{x,\,M}(y)$. Положим

$$N'_{[\alpha',\,\beta']} = \{k \in N_{[\alpha',\,\beta']} : \psi(x_{Mk},\, y_{Mk}) \neq 0\},$$

здесь $x_{Mk} = f^{Mk}(x_0)$, $y_{Mk} = g_{x_0,\,Mk}(y_0)$ (см. п.4). Используя предложение 2.2.2 и теорему 2.2.1, получаем, что расходятся знаконеотрицательный ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |y_{M(k+1)} - y_{Mk}| \tag{2.4.12}$$

и знакоположительный ряд

$$\sum_{k\in N'_{[\alpha',\,\beta']}} (x_{Mk} - x^0)|\psi(x_{Mk},\, y_{Mk})| \tag{2.4.13}$$

соответственно.

В силу теоремы 2.2.4 расходится знакоположительный ряд

$$\sum_{k\in N'_{[\alpha',\,\beta']}} ||g_{x_{Mk},\,M|[\alpha',\,\beta']} - id_{|[\alpha',\,\beta']}||_{0,\,2} \tag{2.4.14}$$

Знакоположительные ряды

$$\sum_{k=1}^{+\infty} l_{Mk} \quad \text{и} \sum_{k\in N'_{[\alpha',\,\beta']}} l_{Mk} \tag{2.4.15}$$

сходятся, где $l_{Mk} = l([x_{Mk},\, x_{M(k-1)}])$ $(k \geq 1)$, $l(\cdot)$ – длина отрезка.

Сравнивая расходящийся ряд (2.4.13) со вторым из сходящихся рядов (2.4.15), заключаем, что последовательность положительных чисел

$$\left\{ \frac{(x_{Mk} - x^0)|\psi(x_{Mk},\, y_{Mk})|}{l_{Mk}} \right\}_{k\in N'_{[\alpha',\,\beta']}} \tag{2.4.16}$$

не ограничена сверху. Возможны следующие случаи:

(8.1) последовательность (2.4.16)– бесконечно большая;

(8.2) множество частичных пределов (2.4.16) содержит и неотрицательные числа (при этом $+\infty$ может быть, как изолированной, так и предельной точкой множества частичных пределов последовательности (2.4.16)).

Рассмотрим случай (8.1). В силу (2.2.23) при любом $k \in N'_{[\alpha',\,\beta']}$ выполнено

$$\frac{(x_{Mk} - x^0)|\psi(x_{Mk},\, y_{Mk})|}{l_{Mk}} \leq \frac{||g_{x_{Mk},\,M|[\alpha',\,\beta']} - id_{|[\alpha',\,\beta']}||_{0,\,2}}{l_{Mk}}.$$

Поэтому

$$\lim_{\substack{k\to+\infty \\ k\in N'_{[\alpha',\,\beta']}}} \frac{||g_{x_{Mk},\,M|[\alpha',\,\beta']} - id_{|[\alpha',\,\beta']}||_{0,\,2}}{l_{Mk}} = +\infty. \tag{2.4.17}$$

Используя непрерывность функции $(g_{x,\,M} - id)_{|[\alpha',\,\beta']}$, компактность отрезка $[\alpha',\,\beta']$ и определение C^0-нормы для непрерывной функции одного переменного (см. Введение), при любом $k \in N'_{[\alpha',\,\beta']}$ укажем точку $y^*_k \in [\alpha',\,\beta']$ так, что

$$||g_{x_{Mk},\,M}{}_{|[\alpha',\,\beta']} - id_{|[\alpha',\,\beta']}||_{0,\,2} = |g_{x_{Mk},\,M}(y^*_k) - y^*_k| > 0.$$

Из результатов п.7 и определения множества $N'_{[\alpha',\,\beta']}$ следует, что для любого $k \in N'_{[\alpha',\,\beta']}$ найдется $j = j(k)$ такое, что

$$x^1_j(y_{Mk}) \succ x_{Mk} \succ x^2_j(y_{Mk}) \text{ или } x^2_j(y_{Mk}) \succ x_{Mk} \succ x^1_{j+1}(y_{Mk}). \tag{2.4.18}$$

Пусть $(x^{1\,*}_k;\, y^*_k)$ и $(x^{2\,*}_k;\, y^*_k)$ – точки пересечения промежутка $U''_{1+}(x^0) \times \{y^*_k\}$ $(k \in N'_{[\alpha',\,\beta']})$ с графиками $\Gamma^1_{j(k)}$ и $\Gamma^2_{j(k)}$ соответственно, если верно первое из соотношений (2.4.18); и $\Gamma^1_{j(k)+1}$ и $\Gamma^2_{j(k)}$ соответственно, если верно второе из соотношений (2.4.18). Тогда найдется последовательность отрезков $\{[x_{Mk_s},\, x_{M(k_s-1)}]\}_{s\geq 1}$ (здесь $1 < k_1 < k_2 < \ldots < k_s < \ldots$) таких, что

(8.1.1) либо $k_s \in N'_{[\alpha',\,\beta']}$, либо $k_s - 1 \in N'_{[\alpha',\,\beta']}$;

(8.1.2) отрезки $\{[x_{Mk_s},\, x_{M(k_s-1)}]\}_{s\geq 1}$ образуют покрытие множества $\{x^{1\,*}_k,\, x^{2\,*}_k\}_{k\in N'_{[\alpha',\,\beta']}}$;

(8.1.3) при любом $s \geq 1$ верно $[x_{Mk_s},\, x_{M(k_s-1)}] \bigcap \{x^{1\,*}_k,\, x^{2\,*}_k\}_{k\in N'_{[\alpha',\,\beta']}} \neq \emptyset$.

Из последовательности

$$\{||g_{x_{Mk},\,M}{}_{|[\alpha',\,\beta']} - id_{|[\alpha',\,\beta']}||_{0,\,2}\}_{k\in N'_{[\alpha',\,\beta']}}$$

выделим подпоследовательность $\{a_{k_s}\}_{s\geq 1}$, где

$$a_{k_s} = ||g_{x_{Mk_s},\,M}{}_{|[\alpha',\,\beta']} - id_{|[\alpha',\,\beta']}||_{0,\,2}, \text{ если } k_s \in N'_{[\alpha',\,\beta']};$$

$$a_{k_s} = ||g_{x_{M(k_s-1)},\,M}{}_{|[\alpha',\,\beta']} - id_{|[\alpha',\,\beta']}||_{0,\,2}, \text{ если } k_s \notin N'_{[\alpha',\,\beta']}.$$

Отметим, что в силу (8.1.1) во втором случае $k_s - 1 \in N'_{[\alpha',\,\beta']}$. При любом $k \geq 1$ имеем:

$$l_{Mk} = (f^M)'(c_{k-1})l_{M(k-1)} \text{ для некоторого } c_{k-1} \in (x_{M(k-1)},\, x_{M(k-2)}), \tag{2.4.19}$$

и, в частности, соотношение (2.4.19) справедливо для $k = k_s$. Используя равенство (2.4.1) и C^1-гладкость функции f, укажем $s_0 \geq 1$ так, чтобы при всех $s \geq s_0$

выполнялось $0 < (f^M)'(c_{k_s-1}) < \frac{3}{2}$. Поэтому при $k_s - 1 \in N'_{[\alpha',\,\beta']}$ верно $\frac{a_{k_s}}{l_{Mk_s}} > \frac{2a_{k_s}}{3l_{M(k_s-1)}}$, и из равенства (2.4.17) следует, что

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{a_{k_s}}{l_{Mk_s}} = +\infty. \tag{2.4.20}$$

Так как $y^*_{k_s} = g_{x^{1*}_{k_s}}(y^*_{k_s})$ или $y^*_{k_s} = g_{x^{2*}_{k_s}}(y^*_{k_s})$ (для определенности, будем считать, что выполнено первое равенство), то, используя классическую теорему Лагранжа для функции одного переменного, найдем точку $\xi_s \in (x_{Mk_s},\, x^{1*}_{k_s})$, если $k_s \in N'_{[\alpha',\,\beta']}$; и $\xi_s \in (x^{1*}_{k_s},\ x_{M(k_s-1)})$, если $k_s \notin N'_{[\alpha',\,\beta']}$ так, чтобы в первом случае выполнялось

$$|\frac{\partial}{\partial x} g_{\xi_s,\,M}(y^*_{k_s})| = \frac{|g_{x_{Mk_s},\,M}(y^*_{k_s}) - g_{x^{1*}_{k_s},\,M}(y^*_{k_s})|}{x^{1*}_{k_s} - x_{Mk_s}} > \frac{a_{k_s}}{l_{Mk_s}},$$

а во втором

$$|\frac{\partial}{\partial x} g_{\xi_s,\,M}(y^*_{k_s})| = \frac{|g_{x_{M(k_s-1)},\,M}(y^*_{k_s}) - g_{x^{1*}_{k_s},\,M}(y^*_{k_s})|}{x_{M(k_s-1)} - x^{1*}_{k_s}} > \frac{a_{k_s}}{l_{Mk_s}}.$$

Последнее вместе с (2.4.20) влечет за собой неограниченность частной производной $\frac{\partial}{\partial x} g_{x,\,M}(y)$ в произвольной окрестности ω-предельного множества $\omega_{F^M}((x';\, y'))$, если выполнено свойство (8.1).

Перейдем к рассмотрению случая (8.2). Так как ряд (2.4.13) содержит члены ряда (2.4.12) только лишь с номерами из множества $N'_{[\alpha',\,\beta']}$, то последовательность (2.4.16) является подпоследовательностью последовательности

$$\left\{ \frac{|y_{M(k+1)} - y_{Mk}|}{l_{Mk}} \right\}_{k\geq 0}. \tag{2.4.21}$$

Поэтому множество частичных пределов неограниченной последовательности (2.4.21) содержит и неотрицательные числа. Покажем, что найдется последовательность натуральных чисел $k'_1 < k'_2 < \ldots < k'_i < \ldots$ такая, что существуют

$$\lim_{i\to+\infty} \frac{|y_{M(k'_i+1)} - y_{Mk'_i}|}{l_{Mk'_i}} = +\infty; \quad \text{а} \quad \lim_{i\to+\infty} \frac{|y_{Mk'_i} - y_{M(k'_i-1)}|}{l_{M(k'_i-1)}} \neq \infty. \tag{2.4.22}$$

Предположим противное, и из последовательности (2.4.21) извлечем бесконечно большую подпоследовательность

$$\left\{ \frac{|y_{M(k_i+1)} - y_{Mk_i}|}{l_{Mk_i}} \right\}_{i\geq 0}.$$

Положим $K_0 = \{k_i\}_{i\geq 1}$. Тогда $\mathbf{N}\setminus\ K_0$ – счетное подмножество $\mathbf{N}$. Поэтому существует последовательность интервалов $\{(k_j^{0,\,1},\, k_j^{0,\,2})\}_{j\geq 1}$ таких, что

(8.2.1) $k_j^{0,\,1},\, k_j^{0,\,2} \in K_0$ при любом $j \geq 1$, причем $k_j^{0,\,1} < k_j^{0,\,2} \leq k_{j+1}^{0,\,1}$;

(8.2.2) $\mathbf{N}\setminus\ K_0 = \bigcup\limits_{j=1}^{+\infty}((k_j^{0,\,1},\, k_j^{0,\,2})\bigcap \mathbf{N})$.

Из (8.2.1) – (8.2.2) следует, что $k_1^{0,\,2} < k_2^{0,\,2} < \cdots < k_j^{0,\,2} < \ldots$, и последовательность $\{k_j^{0,\,2}\}_{j\geq 1}$ является подпоследовательностью $\{k_i\}_{i\geq 0}$, причем при любом $j \geq 1$ выполнено $k_j^{0,\,2} - 1 \in \mathbf{N}\setminus K_0$. Поэтому

$$\lim_{j\to+\infty}\frac{|y_{M(k_j^{0,\,2}+1)} - y_{Mk_j^{0,\,2}}|}{l_{Mk_j^{0,\,2}}} = +\infty$$

Из $\{k_j^{0,\,2}\}_{j\geq 1}$ извлечем произвольную подпоследовательность $\{k_{j_r}^{0,\,2}\}_{r\geq 1}$. При сделанном предположении

$$\left\{\frac{|y_{Mk_{j_r}^{0,\,2}} - y_{M(k_{j_r}^{0,\,2}-1)}|}{l_{M(k_{j_r}^{0,\,2}-1)}}\right\}_{r\geq 1} \tag{2.4.23}$$

– расходящаяся последовательность. Если предположить, что (2.4.23) содержит сходящуюся подпоследовательность

$$\left\{\frac{|y_{Mk_{j_{r(p)}}^{0,\,2}} - y_{M(k_{j_{r(p)}}^{0,\,2}-1)}|}{l_{M(k_{j_{r(p)}}^{0,\,2}-1)}}\right\}_{p\geq 1},$$

то, выбирая из $\{k_j^{0,\,2}\}_{j\geq 1}$ подпоследовательность $\{k_{j_{r(p)}}^{0,\,2}\}_{p\geq 1}$, получаем противоречие со сделанным предположением. Поэтому

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{|y_{Mk_{j_r}^{0,\,2}} - y_{M(k_{j_r}^{0,\,2}-1)}|}{l_{M(k_{j_r}^{0,\,2}-1)}} = +\infty. \tag{2.4.24}$$

Положим $K_1 = K_0\bigcup\{k_{j_r}^{0,\,2} - 1\}_{r\geq 1}$. Тогда все элементы множества K_1 попарно различны. Расположим их в порядке возрастания численных значений: $k_1^1 < k_2^1 < \ldots < k_i^1 < \ldots$. Из определения множеств K_0, K_1 и равенства (2.4.24) следует

$$\lim_{i\to+\infty}\frac{|y_{M(k_i^1+1)} - y_{Mk_i^1}|}{l_{Mk_i^1}} = +\infty.$$

Так как в случае (8.2) множество частичных пределов последовательности (2.4.21), кроме $+\infty$, содержит и действительные числа, то $\mathbf{N}\setminus K_1 \neq \emptyset$. Повторяя предыдущие рассуждения, из последовательности $\{k_i^1\}_{i\geq 1}$ выделим подпоследовательность

$$1 < k_1^{1,\,2} < k_2^{1,\,2} < \ldots < k_j^{1,\,2} < \ldots$$

так, что при каждом $j \geq 1$ верно $k_j^{1,\,2} - 1 \in \mathbf{N} \setminus K_1$; а из $\{k_j^{1,\,2}\}_{j\geq 1}$ выделим подпоследовательность $\{k_{j_r}^{1,\,2}\}_{r\geq 1}$ так, что при сделанном предположении справедливо

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{|y_{Mk_{j_r}^{1,\,2}} - y_{M(k_{j_r}^{1,\,2}-1)}|}{l_{M(k_{j_r}^{1,\,2}-1)}} = +\infty.$$

Определим множество K_2, полагая $K_2 = K_1 \bigcup \{k_{j_r}^{1,\,2} - 1\}_{r\geq 1}$ и т.д.. Предположим, что проделано n шагов, в результате которых указана строго возрастающая по включению совокупность подмножеств множества натуральных чисел

$$K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n, \quad \text{где} \quad K_n = K_{n-1} \bigcup \{k_{j_r}^{n-1,\,2} - 1\}_{r\geq 1},$$

причем K_n состоит из попарно различных элементов $k_1^n < k_2^n < \ldots < k_i^n < \ldots$. В силу определения K_n справедливо равенство

$$\lim_{i\to+\infty} \frac{|y_{M(k_i^n+1)} - y_{Mk_i^n}|}{l_{Mk_i^n}} = +\infty. \tag{2.4.25}$$

Опишем $n+1$-й шаг.

Из (2.4.25) следует, что в рассматриваемом случае $\mathbf{N} \setminus K_n$ – счетное множество. Тогда в K_n найдутся натуральные числа

$$k_1^{n,\,1} < k_1^{n,\,2} \leq k_2^{n,\,1} < k_2^{n,\,2} \leq \ldots \leq k_j^{n,\,1} < k_j^{n,\,2} \leq k_{j+1}^{n,\,1} < k_{j+1}^{n,\,2} \leq \ldots$$

такие, что $\mathbf{N} \bigcap [k_j^{n,\,2},\, k_{j+1}^{n,\,1}] \subset K_n$, а $\mathbf{N} \bigcap (k_j^{n,\,1},\, k_j^{n,\,2}) \subset \mathbf{N} \setminus K_n$ при всех $j \geq 1$. Отсюда получаем немедленно, что $\{k_j^{n,\,2}\}_{j\geq 1}$ есть подпоследовательность последовательности $\{k_i^n\}_{i\geq 1}$; и $k_j^{n,\,2} - 1 \in \mathbf{N} \setminus K_n$. Поэтому

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{|y_{M(k_j^{n,\,2}+1)} - y_{Mk_j^{n,\,2}}|}{l_{Mk_j^{n,\,2}}} = +\infty.$$

Пусть $\{k_{j_r}^{n,\,2}\}_{r\geq 1}$ – произвольная подпоследовательность последовательности $\{k_j^{n,\,2}\}_{j\geq 1}$. Тогда при сделанном предположении

$$\left\{ \frac{|y_{Mk_{j_r}^{n,\,2}} - y_{M(k_{j_r}^{n,\,2}-1)}|}{l_{M(k_{j_r}^{n,\,2}-1)}} \right\}_{r\geq 1}$$

– расходящаяся последовательность, причем

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{|y_{Mk_{j_r}^{n,\,2}} - y_{M(k_{j_r}^{n,\,2}-1)}|}{l_{M(k_{j_r}^{n,\,2}-1)}} = +\infty$$

Множество K_{n+1} определим в силу равенства $K_{n+1} = K_n \bigcup \{k_{j_r}^{n,\,2} - 1\}_{r \geq 1}$ и т.д.. Продолжая описанную индуктивную процедуру, построим строго возрастающую по включению последовательность подмножеств в $\mathbf{N}$

$$K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots$$

Для такой системы подмножеств в $\mathbf{N}$ найдется трансфинит γ не выше второго класса, для которого справедливо равенство

$$K_\gamma = K_{\gamma+1} = \ldots \qquad [58, \text{ гл.4, §7}]. \tag{2.4.26}$$

Заметим, что $K_\gamma = \mathbf{N}$. Действительно, в противном случае при выполнении свойства (8.2) $\mathbf{N} \setminus K_\gamma$ – счетное множество. Повторяя предыдущие рассуждения, убеждаемся в том, что $K_{\gamma+1}$ содержит K_γ в качестве собственного подмножества. Полученное противоречие с (2.4.26) означает, что $K_\gamma = \mathbf{N}$. Но тогда последовательность (2.4.21) – бесконечно большая. Последнее невозможно, так как множество частичных пределов (2.4.21) содержит и неотрицательные числа. Следовательно, сделанное выше предположение неверно, и для некоторой последовательности натуральных чисел $k'_1 < k'_2 < \ldots < k'_i < \ldots$ справедливо свойство (2.4.22).

Используем полученные результаты для доказательства неограниченности частной производной $\frac{\partial}{\partial x} g_{x,\,M}(y)$, если имеет место свойство (8.2). Пусть последовательность $k'_1 < k'_2 < \ldots < k'_i < \ldots$ такова, что выполнено (2.4.22), причем

$$\lim_{i \to +\infty} \frac{|y_{Mk'_i} - y_{M(k'_i-1)}|}{l_{M(k'_i-1)}} = A, \;\; \text{где} \;\; A \in \mathbf{R}, \tag{2.4.27}$$

$\mathbf{R}$ означает, как обычно, множество действительных чисел. Имеем:

$$|y_{M(k'_i+1)} - y_{Mk'_i}| = |g_{x_{Mk'_i},\,M}(y_{Mk'_i}) - g_{x_{M(k'_i-1)},\,M}(y_{M(k'_i-1)})|$$

Будем рассматривать далее функцию $g_{x,\,M}(y)$ только на отрезке $[B_{k'_{i-1}},\, B_{k'_i}]$ с граничными точками $B_{k'_{i-1}}(x_{M(k'_i-1)};\, y_{M(k'_i-1)})$ и $B_{k'_i}(x_{Mk'_i};\, y_{Mk'_i})$ ($i \geq i_0$, где i_0 выбрано так, что при всех $i \geq i_0$ выполнено $x_{M(k'_i-1)} \in U''_{1+}(x^0)$). В силу выбора окрестности $U''_{1+}(x^0)$ (см. п.п.3 и 4) ни один из отрезков $[B_{k'_{i-1}},\, B_{k'_i}]$ не содержит точек множества $Per_e(f) \times I_2$. Поэтому условие "$F \in T_d(I)$"влечет за собой дифференцируемость $g_{x,\,M}(y)$ (как функции двух переменных) на каждом отрезке $[B_{k'_{i-1}},\, B_{k'_i}]$ при любом

$i \geq i_0$. Тогда, используя классическую теорему Лагранжа для вещественнозначной функции нескольких переменных [145, гл.8, §4], укажем точку $\zeta(\zeta^1_{k'_i};\, \zeta^2_{k'_i}) \in (B_{k'_{i-1}},\, B_{k'_i})$ так, что

$$|y_{M(k'_i+1)} - y_{Mk'_i}| = |\frac{\partial}{\partial x} g_{\zeta^1_{k'_i},\,M}(\zeta^2_{k'_i}) l_{Mk'_i} + \frac{\partial}{\partial y} g_{\zeta^1_{k'_i},\,M}(\zeta^2_{k'_i})(y_{Mk'_i} - y_{M(k'_i-1)})|.$$

Отсюда следует неравенство

$$\frac{|y_{M(k'_i+1)} - y_{Mk'_i}|}{l_{Mk'_i}} \leq |\frac{\partial}{\partial x} g_{\zeta^1_{k'_i},\,M}(\zeta^2_{k'_i})| + |\frac{\partial}{\partial y} g_{\zeta^1_{k'_i},\,M}(\zeta^2_{k'_i})| \frac{|y_{Mk'_i} - y_{M(k'_i-1)}|}{l_{Mk'_i}} \qquad (2.4.28)$$

Так как частная производная $\frac{\partial}{\partial y} g_{x,\,M}(y)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике I, то существует положительное число L такое, что при любом $i \geq i_0$ верно неравенство

$$|\frac{\partial}{\partial y} g_{\zeta^1_{k'_i},\,M}(\zeta^2_{k'_i})| \leq L. \qquad (2.4.29)$$

Воспользуемся равенством (2.4.19) для $k = k'_i$. Имеем

$$\frac{|y_{Mk'_i} - y_{M(k'_i-1)}|}{l_{Mk'_i}} = \frac{|y_{Mk'_i} - y_{M(k'_i-1)}|}{(f^M)'(c_{k'_i-1}) l_{M(k'_i-1)}}.$$

Так как $\lim\limits_{i \to +\infty} (f^M)'(c_{k'_i-1}) = 1$, то используя (2.4.27), получаем отсюда

$$\lim_{i \to +\infty} \frac{|y_{Mk'_i} - y_{M(k'_i-1)}|}{l_{Mk'_i}} = A.$$

Тогда найдется $i_1 \geq i_0$ такое, что при всех $i \geq i_1$ справедливо

$$0 \leq \frac{|y_{Mk'_i} - y_{M(k'_i-1)}|}{l_{Mk'_i}} < A + 1. \qquad (2.4.30)$$

Пусть E – произвольное положительное число. Используя первое из соотношений (2.4.22), укажем натуральное число $i_2 \geq i_1$ так, что при всех $i \geq i_2$ верно неравенство

$$\frac{|y_{M(k'_i+1)} - y_{Mk'_i}|}{l_{Mk'_i}} > E + L(A + 1). \qquad (2.4.31)$$

Из неравенств (2.4.28) – (2.4.31) следует, что при всех $i \geq i_2$ выполнено

$$|\frac{\partial}{\partial x} g_{\zeta^1_{k'_i},\,M}(\zeta^2_{k'_i})| \geq \frac{|y_{M(k'_i+1)} - y_{Mk'_i}|}{l_{Mk'_i}} - |\frac{\partial}{\partial y} g_{\zeta^1_{k'_i},\,M}(\zeta^2_{k'_i})| \frac{|y_{Mk'_i} - y_{M(k'_i-1)}|}{l_{Mk'_i}} > E,$$

то есть $\lim\limits_{i \to +\infty} |\frac{\partial}{\partial x} g_{\zeta^1_{k'_i},\,M}(\zeta^2_{k'_i})| = +\infty$. Последнее означает, что частная производная $\frac{\partial}{\partial x} g_{x,\,M}(y)$ не ограничена в произвольной окрестности множества $\omega_{F^M}((x';\, y'))$, если имеет место свойство (8.2). Так как $F \in T_d(I)$, то в силу (2.2.18), как в случае

(8.1), так и в случае (8.2), частная производная $\frac{\partial}{\partial x}g_x(y)$ не ограничена в произвольной окрестности ω-предельного множества $\omega_F((x'; y'))$.
Теорема 2.4.1 доказана.

Из теоремы 2.4.1 следует, что если $F \in T_d(I)$ является простейшим, удовлетворяющим условию (iii), а частная производная $\frac{\partial}{\partial x}g_x(y)$ ограничена в I, то ω-предельное множество произвольной траектории есть периодическая орбита. Таким образом, простейшие отображения из множества $T_d(I)$, удовлетворяющие условию (iii), обладают, в некотором естественном смысле, максимальными дифференциальными свойствами по переменной x среди простейших отображений вида (0.0.2), имеющих одномерные ω-предельные множества (и удовлетворяющих условию (iii)), то есть причиной возможного существования одномерных ω-предельных множеств у простейших косых произведений является "низкая регулярность"такого рода отображений.

Приведем непосредственное следствие теоремы 2.4.1, которое дает полное описание ω-предельных множеств простейших C^1-гладких косых произведений отображений интервала, удовлетворяющих условию (iii).

Теорема 2.4.2. *Пусть $F \in T^1(I)$ удовлетворяет условию (iii) . Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) множество $Per(F)$ периодических точек F замкнуто;

(b) ω-предельное множество траектории произвольной точки из I есть периодическая орбита.

Таким образом, асимтотическое поведение траекторий C^1-гладких (или более высокого класса гладкости!) простейших косых произведений отображений интервала, удовлетворяющих условию (iii), аналогично асимптотическому поведению траекторий непрерывных отображений с замкнутым множеством периодических точек, заданных на отрезке (ср. с [106]).

Результаты, приведенные в параграфе § 2.4, можно найти в статьях [81], [93].

Глава 3

О неблуждающем множестве косых произведений со сложной динамикой факторотображения

В третьей главе, в отличие от двух предыдущих глав, рассмотрены C^1-гладкие косые произведения отображений интервала, факторотображения которых имеют сложную динамику (то есть являются отображениями типа $\succ 2^\infty$) и удовлетворяют дополнительному условию Ω-устойчивости в пространстве C^1-гладких отображений отрезка в себя с инвариантной границей. При изучении отображений такого рода оригинальные многозначные функции, указнные во введении к диссертации (см. определения 0.0.6 и 0.0.7) играют бо́льшую роль, чем это было при рассмотрении косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек фактора в главе 1.

В § 3.1 с использованием понятий Ω-функции и функций, подходящих к Ω-функции (см. Введение, определения 0.0.6 и 0.0.7), указано представление пространства C^1-гладких косых произведений отображений интервала с Ω-устойчивым фактором типа $\succ 2^\infty$, в виде объединения четырех непустых попарно непересекающихся подпространств. Приведены примеры отображений, принадлежащих каждому из четырех выделенных подпространств. Доказательство этой фундаментальной теоремы о разложении основано на рассмотрении всех логических возможностей сочетания свойств непрерывности/разрывности указанных выше основных многозначных функций, связанных с косым произведением отображений интервала (см. Введение). Доказанная в § 3.1 теорема о разложении выделенного здесь пространства отображений может рассматриваться, как первый этап доказательства теоремы о неблуждающем множестве C^1-гладких косых произведений отображений интервала со сложной динамикой фактора.

Основные результаты §§ 3.2 и 3.3 посвящены полному описанию механизма формирования и структуры неблуждающего множества C^1-гладких косых произведений отображений интервала с Ω-устойчивым фактором типа $\succ 2^\infty$, принадлежащих каждому из четырех подпространств, выделенных теоремой о разложении.

3.1 Основные классы C^1-гладких косых произведений со сложной динамикой факторотображения

Как отмечалось во Введении, в главе 3 (также, как и в следующих главах 4, 5) рассматриваются отображения со сложной динамикой фактора из пространства $T^1_*(I)$, то есть такие C^1-гладкие косые произведения отображений интервала, факторотображения которых имеют тип $\succ 2^\infty$ и являются Ω-устойчивыми C^1-гладкими отображениями отрезка (см. определение 0.0.12).

Для того, чтобы сформулировать и доказать один из основных результатов третьей главы - теорему о разложении той части пространства $T^1_*(I)$, которая состоит из косых произведений с факторотображениями типа $\succ 2^\infty$, нам потребуются не только свойства отображений отрезка из множества $C^1_\omega(I_1)$, но и информация о динамике отображения $f \in C^1_\omega(I_1)$ на произвольном квазиминимальном множестве.

3.1.1 Вспомогательные утверждения

Введение к диссертации содержит предложение 0.0.1, в котором указаны основные свойства отображений отрезка из множества $C^1_\omega(I_1)$, являющегося открытым и всюду плотным в пространстве $C^1_{\partial_1}(I_1)$.

Из предложения 0.0.1 следует, что для любого косого произведения $F \in T^1_*(I)$ верны следующие свойства:

(1) $\Omega(f) = \Omega_r(f) \bigcup \Omega_p(f)$, где $\Omega_r(f)$ – непустая разреженная часть неблуждающего множества $\Omega(f)$, состоящая из конечного числа гиперболических периодических точек, $\Omega_p(f)$ – совершенная часть множества $\Omega(f)$, непустая в том и только том случае, если фактороотображение f имеет тип $\succ 2^\infty$; причем в том случае, когда f имеет тип $\succ 2^\infty$, множество $\Omega_p(f)$ состоит из конечного числа локально максимальных квазиминимальных гиперболических совершенных нигде неплотных множеств;

(2) $\Omega(f) = \Omega(f^n) = C(f) = \overline{Per(f)}$ при любом $n \geq 1$;

(3) множество $T^1_*(I)$ открыто и всюду плотно в подпространстве пространства $T^1(I)$, состоящем из косых произведений, фактороотображение каждого из которых сохраняет (в смысле включения) границу отрезка I_1.

Пусть $F \in T^1_*(I)$ – произвольное косое произведение отображений интервала с фактороотображением типа $\succ 2^\infty$ (тогда в силу предыдущего п. (1), справедливо: $\Omega_p(f) \neq \emptyset$).

Будем использовать последовательность натуральных чисел l^*_i, $i \geq i_*$, определенную в силу равенства (0.0.22), где i_* указано в формуле (0.0.21).

Замечание 3.1.1. Для любого локально максимального квазиминимального множества $K(f) \subset \Omega_p(f)$ натуральное число l^*_i, $i \geq i_*$, является элементом множества $\tau(f_{|K(f)})$.

Замечание 3.1.2. В силу предложения 0.0.1 непрерывность функций $\overline{\Omega}^F_{l^*_i}$ или функций $\Omega^F_{l^*_i}$ при всех $i \geq i^*$ равносильна непрерывности их сужений на $\Omega_p(f)$.

Замечание 3.1.3. Если отображение $F \in T^1_*(I)$ с фактором типа $\succ 2^\infty$ удовлетворяет условию **H** (сильному условию **H**) (см. Введение), то последовательность $\{\overline{\Omega}^F_{l^*_i}\}_{i\geq 1}$ ($\{\Omega^F_{l^*_i}\}_{i\geq 1}$) может содержать лишь конечное число разрывных функций.

Сформулируем необходимое нам в дальнейшем утверждение о качественных свойствах отображения отрезка из пространства $C^1_\omega(I_1)$ на произвольном квазиминимальном множестве (вытекающее из результатов [106] (см. также [22]), [103], [104]).

Предложение 3.1.1. *Пусть* $f \in C^1_\omega(I_1)$ *– отображение типа* $\succ 2^\infty$, $K(f)$ *– произвольное квазиминимальное множество* f. *Тогда*

(1) *существуют отрезок* $[a, b]$ *и попарно непересекающиеся его подотрезки* $\Delta^1_{k_1}$ *(называемые основными отрезками 1-го ранга), а также натуральные числа* n_{k_1} *(*$0 \le k_1 \le s-1$, $s \ge 2$*) такие, что* $f^{n_{k_1}}(\Delta^1_{k_1}) = [a, b]$*, здесь* $a, b \in K(f)$*;*

(2) *для основного отрезка произвольного ранга* $r \ge 2$ *верно включение* $\Delta^1_{k_1\dots k_{r-1}k_r} \subset \Delta^1_{k_1\dots k_{r-1}}$*, каковы бы ни были* $0 \le k_1, k_2, \dots, k_r \le s-1$*;*

(3) $f^{n'}(\Delta^1_{k_1\dots k_r}) = \Delta^1_{k_2\dots k_r}$ *при некотором* $n' = n'(\Delta^1_{k_1\dots k_r})$*;*

(4) $K(f) = \bigcap\limits_{r=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{0\le k_1\dots k_r\le s-1} Orb_f(\Delta^1_{k_1\dots k_r})$*, где* $Orb_f(\Delta^1 k_1\dots k_r) = \{f^i(\Delta^1_{k_1\dots k_r})\}_{i=0}^n$*,* $n = n'(\Delta^1_{k_1\dots k_r}) + n'(\Delta^1_{k_2\dots k_r}) + \dots + n'(\Delta^1_{k_{r-1}k_r}) + n_{k_r}$*,* $f^n(\Delta^1_{k_1\dots k_r}) = [a, b]$[1]*;*

(5) *для каждого* $\delta > 0$ *существует* $r_0 \ge 1$ *такое, что* $l(\Delta^*_{k_1\dots k_r}) < \delta$ *при всех* $r \ge r_0$*,* $0 \le k_1, k_2, \dots, k_r \le s^*-1$*, здесь* $l(\cdot)$ *означает длину отрезка;*

(6) *существуют* $\alpha = \alpha(f) > 0$ *и* $c = c(f) > 1$ *такие, что для любых* $x \in K(f)$ *и* $n \ge 1$ *справедливо неравенство* $|(f^n(x))'| > \alpha c^n$*;*

(7) *для любых* $\delta > 0$ *и* $r \ge 1$ *таких, что* $l(\Delta^*_{k_1\dots k_r}) < \delta$*,* $0 \le k_1, k_2, \dots, k_r \le s^*-1$*, существует периодическая орбита, обладающая следующим свойством: каждый отрезок* $\Delta^*_{k_1\dots k_r}$ r*-того ранга содержит, по крайней мере, одну ее точку*[2]*;*

(8) *во множестве* $K(f)$ *всюду плотны периодические точки сужения* $f_{|K(f)}$*, причем для любого натурального числа* $q > 1$ *периодические точки с периодами* $m_0 j$ *при некотором* m_0 *и любом натуральном достаточно большом* j*, где* j *кратно* q *(*j *не кратно* q*), всюду плотны в* $K(f)$*;*

(9) *множество* $\bigcup\limits_{j=0}^{+\infty}(f_{|K(f)})^{-j}(x)$ *плотно в* $K(f)$ *для любой точки* $x \in K(f)$*, где*

---

[1] Как показывают утверждения (1) и (4) предложения 3.1.1, множество основных отрезков произвольного ранга $r \ge 1$ дисконтинуума $K(f)$ является подмножеством (хотя бы при одном $n_k > 1$ собственным) множества всех отрезков ранга $r \ge 1$. Произвольный отрезок ранга $r \ge 1$ (в том числе, и любой основной отрезок ранга $r \ge 1$) множества $K(f)$ обозначим символом $\Delta^*_{k_1\dots k_r}$, где $0 \le k_1, k_2, \dots k_r \le s^*-1$, $s^* \ge s$; при этом, каково бы ни было $r' > r$, для каждого отрезка $\Delta^*_{k_1\dots k_r}$ найдется основной отрезок $\Delta^1_{k'_1\dots k'_{r'}}$ ранга r' такой, что $\Delta^*_{k_1\dots k_r} = f^i(\Delta^1_{k'_1\dots k'_{r'}})$ при некотором $1 \le i \le n-1$.

[2] В том случае, если периодическая орбита $Orb_f(x^0) = \{x^0, f(x^0), \dots, f^{m-1}(x^0)\}$, здесь $m = m(x^0)$ – (наименьший) период точки $x^0 \in Per(f)$, обладает свойством, указанным в утверждении (7) предложения 3.1.1, будем говорить, что периодическая орбита $Orb_f(x^0)$ аппроксимирует множество $K(f)$ с точностью до δ. Вопросы аппроксимации ω-предельных множеств непрерывных отображений отрезка периодическими орбитами рассматривались в [106], [154].

$(f_{|K(f)})^{-j}(\cdot)$ – j-*тый полный прообраз точки относительно отображения* $f_{|K(f)}$;

(10) *в* $K(f)$ *существует континуум различных* ω-*предельных множеств.*

3.1.2 Теорема о разложении пространства C^1-гладких косых произведений со сложной динамикой фактора

Во Введении к диссертации были выделены следующие попарно непересекающиеся подпространства той части пространства $T^1_*(I)$, которая состоит из отображений, фактор каждого из которых Ω-устойчив и имеет тип $\succ 2^\infty$:

$T^1_{*,1}(I)$, образованное косыми произведениями такими, что последовательность вспомогательных функций $\{\Omega^F_{l^*_i}\}_{i\geq 1}$ (а, следовательно, и последовательность функций $\{\Omega^F_{l^*_i,1}\}_{i\geq 1}$) содержит не более, чем конечное множество разрывных функций;

$T^1_{*,2}(I)$, состоящее из косых произведений таких, что последовательность вспомогательных функций $\{\Omega^F_{l^*_i}\}_{i\geq 1}$ (а, следовательно, и последовательность функций $\{\Omega^F_{l^*_i,1}\}_{i\geq 1}$) содержит счетное множество разрывных функций, но при этом последовательность подходящих функций $\{\overline{\Omega}^F_{l^*_i}\}_{i\geq 1}$ (а, следовательно, и последовательность функций $\{\overline{\Omega}^F_{l^*_i,1}\}_{i\geq 1}$) содержит не более, чем конечное множество разрывных функций;

$T^1_{*,3}(I)$, образованное косыми произведениями такими, что последовательность подходящих функций $\{\overline{\Omega}^F_{l^*_i}\}_{i\geq 1}$ содержит счетное множество разрывных функций, при этом Ω-функция отображения F непрерывна;

$T^1_{*,4}(I)$, состоящее из косых произведений таких, что последовательность подходящих функций $\{\overline{\Omega}^F_{l^*_i}\}_{i\geq 1}$ содержит счетное множество разрывных функций, при этом Ω-функция отображения F разрывна.

Фундаментальная теорема 3.1.1, доказанная в этой части работы, может рассматриваться как первая часть теоремы о структуре неблуждающего множества косых произведений из пространства $T^1_*(I)$ со сложной динамикой факторотображения.

Теорема 3.1.1 [74], [75], [81]. *Любое из подпространств* $T^1_{*,j}(I)$ $(1 \leq j \leq 4)$ *не пусто, а их объединение* $\bigcup\limits_{j=1}^{4} T^1_{*,j}(I)$ *совпадает с частью пространства* $T^1_*(I)$, *состоящей из косых произведений, факторотображение каждого из которых имеет тип*

$\succ 2^{\infty}$.

Доказательство теоремы 3.1.1 проведем поэтапно в предложениях 3.1.2 - 3.1.5, каждое из которых представляет собой теорему существования отображений в каждом из выделенных пространств $T^1_{*,\,j}(I)$, где $j = 1,\, 2,\, 3,\, 4$.

Предложение 3.1.2 [74], [75]. Существует отображение $F_1 \in T^1_{*,\,1}(I)$, Ω-функция которого разрывна в каждой точке множества $Per(f_{|\Omega_p(f)})$ и непрерывна в любой точке множества $P_t(f_{|\Omega_p(f)})$, где $P_t(f_{|\Omega_p(f)})$ – множество устойчивых по Пуассону точек отображения $f_{|\Omega_p(f)}$ с всюду плотными на $\Omega_p(f)$ траекториями.

Доказательство. Рассмотрим отображение $F_1 \in T^1_*([0,\, 1]^2)$, факторотображение f которого определено в силу равенства

$$f(x) = \begin{cases} \widetilde{h}(x), & \text{если} \quad x \in [0,\, \frac{1}{4}); \\ 9(\frac{1}{4} - x)(x - \frac{3}{4}) + \frac{1}{4}, & \text{если} \quad x \in [\frac{1}{4},\, \frac{3}{4}); \\ \widetilde{h}(1 - x), & \text{если} \quad x \in [\frac{3}{4},\, 1]. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

В качестве $\widetilde{h}$ может быть использована любая C^1-гладкая строго возрастающая на интервале $(0,\, 1/4)$ функция такая, что $\widetilde{h}(0) = 0$, $\widetilde{h}(1/4) = 1/4$, $\widetilde{h}'(1/4) = 9/2$.
Тогда $f \in C^1_{\omega}([0,\, 1])$, причем $f : [0,\, 1/4] \to [0,\, 1/4]$ – возрастающая биекция, $f : [3/4,\, 1] \to [0,\, 1/4]$ – убывающая биекция; $f^n([0,\, 1]) = [0,\, 13/16]$ при всех $n \geq 1$ (см. рис. 3.1); кроме того, выполнено $\Omega(f) = \{0\} \bigcup K(f)$, где $K(f)$ – единственное локально максимальное квазиминимальное множество f, $K(f) = \Omega_p(f) \subset [\frac{1}{4},\, \frac{3}{4}]$, и $\tau(f_{|K(f)}) = \mathbf{N}$.
Введем в рассмотрение два прямоугольных треугольника

$$I^* = \{(x;\, y) \in [0,\, 1]^2 : x \in [0,\, 1], 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

и

$$I_* = \{(x;\, y) \in [0,\, 1]^2 : x \in (0,\, 1], 1 - x < y \leq 1\}.$$

Положим

$$g_x(y) = \begin{cases} y, & \text{если} \quad (x;\, y) \in I^*; \\ 1 - x + \sin(y - 1 + x), & \text{если} \quad (x;\, y) \in I_*. \end{cases} \tag{3.1.2}$$

1. Будем рассматривать функции $(\Omega^{F_1}_n)^{ex}$ при $x \in [0,\, 1]$. Убедимся сначала в том, что функции $(\Omega^{F_1}_n)^{ex}$ косого произведения F_1 непрерывны при любых $n \geq 1$ и $x \in [0,\, 1]$

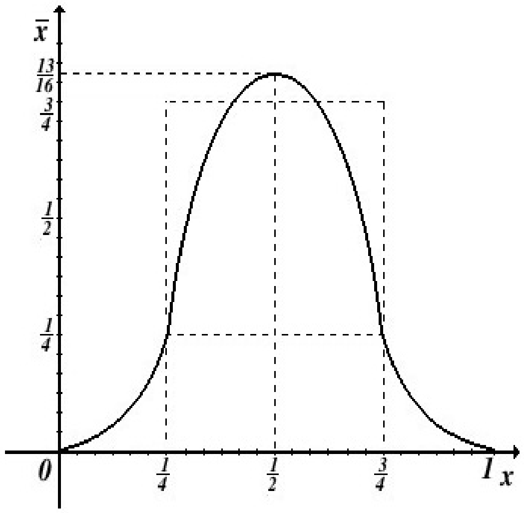


Рис. 3.1: *График функции* $\overline{x} = f(x)$.

(отсюда, в частности, следует, что $F_1 \in T^1_{*,1}(I)$).

Действительно, возьмем произвольно и зафиксируем натуральное число n. В силу равенства (3.1.2) отображение g_x в слое над произвольной точкой $x \in [0,\, 1]$ – возрастающий диффеоморфизм по переменной y отрезка $[0,\, 1]$ на отрезок $g_x([0,\, 1])$. Тогда $g_{x,\,n}$ – также возрастающий диффеоморфизм по y отрезка $[0,\, 1]$ на $g_{x,\,n}([0,\, 1])$ (см. формулу (0.0.3)), и из (3.1.2) следует, что, в частности, при любом $x \in [0,\, 1]$ справедливо

$$\Omega(g_{x,\,n}) = Fix(g_{x,\,n}) = [0,\, 1 - x^*_n(x)], \tag{3.1.3}$$

где $x^*_n(x) = \max\{x,\, f(x),\, \ldots,\, f^{n-1}(x)\}$.

Воспользуемся равномерной непрерывностью f (на компакте $[0,\, 1]$) и для любого числа $\varepsilon > 0$ укажем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, что для произвольных $x,\, x' \in [0,\, 1]$ таких, что $|x - x'| < \delta$, при всех $1 \le i \le n-1$ выполнено неравенство

$$|f^i(x) - f^i(x')| < \varepsilon. \tag{3.1.4}$$

Заметим, что неравенство (3.1.4) влечет неравенство

$$|x^*_n(x) - x^*_n(x')| < \varepsilon. \tag{3.1.5}$$

Действительно, справедливость (3.1.5) немедленно следует из (3.1.4), если

$$x^*_n(x) = f^{i^*}(x),\;\; x^*_n(x') = f^{i^*}(x')$$

для некоторого $0 \leq i^* \leq n-1$. Пусть

$$x_n^*(x) = f^{i^*}(x), \;\; x_n^*(x') = f^{j^*}(x')$$

для некоторых $0 \leq i^*$, $j^* \leq n-1$, $j^* \neq i^*$.

Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ найдутся x, $x' \in [0,\,1]$, $|x - x'| < \delta$ такие, что выполнено неравенство

$$|x_n^*(x) - x_n^*(x')| = |f^{i^*}(x) - f^{j^*}(x')| \geq \varepsilon. \tag{3.1.6}$$

Зафиксируем $\delta > 0$, и пусть x, $x' \in [0,\,1]$, $|x - x'| < \delta$ таковы, что выполнено неравенство (3.1.6).

Предположим, что $f^{i^*}(x) < f^{j^*}(x')$. Так как $f^{j^*}(x) < f^{i^*}(x)$, то

$$f^{j^*}(x') - f^{j^*}(x) \geq f^{j^*}(x') - f^{i^*}(x) \geq \varepsilon.$$

Последнее противоречит (3.1.4).

Пусть $f^{j^*}(x') < f^{i^*}(x)$. Так как $f^{i^*}(x') < f^{j^*}(x')$, то

$$f^{i^*}(x) - f^{i^*}(x') \geq f^{i^*}(x) - f^{j^*}(x') \geq \varepsilon.$$

Последнее также противоречит (3.1.4). Таким образом, верно неравенство (3.1.5).

Так как при любом $x \in [0,\,1]$ выполнено $(\Omega_n^{F_1})^{ex}(x) = \Omega(g_{x,\,n})$, то, используя (3.1.3), получаем отсюда, что

$$dist_{I_2}((\Omega_n^{F_1})^{ex}(x),\, (\Omega_n^{F_1})^{ex}(x')) < \varepsilon.$$

Следовательно, $(\Omega_n^{F_1})^{ex}$ – непрерывная функция (см. определение 1.1.3). Отсюда получаем, в частности, что $F_1 \in T^1_{*,\,1}(I)$.

2. В силу формулы (1.1.10) для всех $x \in [0,\,13/16]$, $n \geq 1$, справедливо равенство

$$\Omega_{n,\,1}^{F_1}(x) = \bigcup_{\overline{x} \in \{f^{-n}(x)\}} \Omega_n^{F_1}(\overline{x}) = [0,\,1 - x_n^{min}(x)]. \tag{3.1.7}$$

Здесь $\{f^{-n}(x)\}$, как обычно, есть полный прообраз x относительно f^n (отметим, что $\{f^{-n}(x)\}$ – конечное множество),

$$x_n^{min}(x) = \min_{\overline{x} \in \{f^{-n}(x)\}} \{x_n^*(\overline{x})\}.$$

Непрерывность многозначной функции $\Omega^{F_1}_{n,\,1}$ $(n \geq 1)$ следует из равенства (3.1.7), конечности множества $\{f^{-n}(x)\}$ при любом натуральном n и предыдущего п. 1 (см. [47, гл.1, §18, IV]) (см. также Введение).

3. Из п.п.1 и 2 следует, что для описания неблуждающего множества отображения F_1 достаточно рассмотреть сами функции $\Omega^{F_1}_n$ и $\Omega^{F_1}_{n,\,1}$, а не их расширения на отрезок $[0,\,1]$ или $[0,\,13/16]$ соответственно. Из формул (3.1.3) и (3.1.7) следует, что каковы бы ни были точка $x \in \Omega(f)$, натуральные числа $n' > n \geq 1$, справедливо включение

$$[0,\,1 - x^*_{n'}(x)] \subset [0,\,1 - x^*_n(x)]. \tag{3.1.8}$$

Следовательно, $\Omega^{F_1}_{n',\,1}(x) \subseteq \Omega^{F_1}_{n,\,1}(x)$, и множество $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \Omega^{F_1}_{n,\,1}$ не пусто. Рассмотрим последовательность $\{\Omega^{F_1}_{n!,\,1}\}_{n\geq 1}$. В силу п.п. 1 и 2 справедливы равенства

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{\Omega^{F_1}_{n!,\,1|Per(f)}} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \Omega^{F_1}_{n!,\,1} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \Omega^{F_1}_{n,\,1}. \tag{3.1.9}$$

Из (3.1.9) вытекает включение

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \Omega^{F_1}_{n,\,1} \subseteq \Omega(F_1). \tag{3.1.10}$$

Докажем, что

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \Omega^{F_1}_{n,\,1} = \Omega(F_1). \tag{3.1.11}$$

Положим $\Omega^*(F_1) = \Omega(f) \times [0,\,1]$. Из формул (3.1.8) и (3.1.9) следует, что

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \Omega^{F_1}_{n,\,1} \neq \Omega^*(F_1). \quad \text{Тогда} \quad \bigcap_{n=1}^{+\infty} \Omega^{F_1}_{n!,\,1} \neq \Omega^*(F_1).$$

Используя формулу (3.1.7), получаем

$$\Omega^*(F_1) \setminus \bigcap_{n=1}^{+\infty} \Omega^{F_1}_{n!,\,1} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (\bigcup_{x \in \Omega(f)} \{x\} \times (1 - x^{min}_{n!}(x),\,1]). \tag{3.1.12}$$

Пусть $(x^0;\, y^0) \notin \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \Omega^{F_1}_{n!,\,1}$, где $x^0 \in Per(f)$, $n(x^0)$ – наименьший период x^0. Тогда в силу соотношений (3.1.10) и (3.1.12) существует натуральное число n_0 такое, что $y^0 \in (1 - x^{min}_{n_0!}(x^0),\,1]$. Так как неравенство $x^{min}_n(x^0) \geq x^{min}_{n_0!}(x^0)$ верно для всех $n \geq n_0!$, то $y^0 \in (1 - x^{min}_{n!}(x^0),\,1]$ при любых $n \geq n(x^0)$. Заметим, что

$$F_{n!,\,1}(\{x^0\} \times \Omega(g_{x^0,\,n!})) = \{x^0\} \times \Omega(g_{x^0,\,n!}) = F_{n!}(\{x^0\} \times \Omega(g_{x^0,\,n!})).$$

Следовательно, $y^0 \in [0,\, 1] \setminus \Omega(g_{x^0,\, n!})$ при всех $n \geq n(x^0)!$, и точка $(x^0;\, y^0)$ блуждает в слое $x^0 \times [0,\, 1]$ по отношению к вспомогательному отображению $F_{n!,\, 1}$ для любого $n \geq n(x^0)$. В силу п. 2 многозначные функции $\Omega_{n,\, 1}^{F_1}$ непрерывны. Поэтому точка $(x^0;\, y^0)$ является блуждающей для отображения $F_{n!,\, 1}$ при всех $n \geq n(x^0)$. Тогда в силу включения (3.1.8) существует универсальная окрестность

$$U_{n(x^0)!}((x^0;\, y^0)) = U_{1,\, n(x^0)!}(x^0) \times U_{2,\, n(x^0)!}(y^0) \text{ точки } (x^0;\, y^0) \text{ в } \Omega^*(F_1)$$

такая, что равенство

$$U_{n(x^0)!}((x^0;\, y^0)) \bigcap F_{n!,\, 1}^j(U_{n(x^0)!}((x^0;\, y^0))) = \emptyset$$

справедливо для любых $n \geq n(x^0)$ и $j \geq 1$. Используя формулу (3.1.2), получаем, что для всех $n \geq n(x^0)$ и $j \geq 1$ равенство

$$U_{2,\, n(x^0)!}(y^0) \bigcap g_{x,\, n!}^j(U_{2,\, n(x^0)!}(y^0)) = \emptyset \tag{3.1.13}$$

справедливо для любого $x \in U_{1,\, n(x^0)!}(x^0)$. Используя (3.1.13) для $j = 1$, получаем равенство

$$U_{2,\, n_0}(y^0) \bigcap g_{x,\, n!}(U_{2,\, n_0}(y^0)) = \emptyset,$$

где $x \in U_{1,\, n(x^0)!}(x^0)$. Так как любое отображение в слое является гомеоморфизмом, то в силу предыдущего равенство

$$U_{n(x^0)!}((x^0;\, y^0)) \bigcap F_1^n(U_{n(x^0)!}(x^0;\, y^0)) = \emptyset \tag{3.1.14}$$

выполнено для любого $n \geq n(x^0)$. Последнее означает, что $(x^0;\, y^0) \notin \Omega(F_1)$, и все точки $(x;\, y) \in U_{n(x^0)!}((x^0;\, y^0))$ являются блуждающими для F_1.

Пусть $(x^0;\, y^0) \notin \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \Omega_{n!,\, 1}^{F_1}$, где $x^0 \notin Per(f)$. В силу формулы (3.1.2) неравенство

$$g_{x,\, n}(y) > g_{x,\, n+1}(y) \tag{3.1.15}$$

верно для всех $(x;\, y) \in \Omega_*(F_1)$ (в частности, для $(x;\, y) = (x_0;\, y_0)$) и всех $n \geq 1$. Тогда, используя (3.1.15), немедленно получаем, что $(x^0;\, y^0) \notin \Omega(F^*)$ для $x^0 \notin Per(f)$, т. е. справедливо следующее включение

$$\Omega(F_1) \subseteq \bigcap_{n=1}^{+\infty} \Omega_{n,\, 1}^{F_1}. \tag{3.1.16}$$

Включения (3.1.10) и (3.1.16) доказывают равенство (3.1.11).

4. Пусть, как обычно, $S_d(\Omega^{F_1})$ $(S_c(\Omega^{F_1}))$ - множество точек разрыва (множество точек непрерывности) Ω-функции отображения F_1. Покажем, что верны включения

$$Per(f_{|K(f)}) \subset S_d(\Omega^{F_1}), \;\; P_t(f_{|K(f)}) \subset S_c(\Omega^{F_1}), \tag{3.1.17}$$

где $P_t(f_{|K(f)})$ – множество устойчивых по Пуассону точек f, траектории которых всюду плотны на единственном локально максимальном квазиминимальном множестве $K(f)$ $(K(f) = \Omega_p(f))$ фактоespecially отображения f.

Сначала убедимся в том, что выполнено первое из включений (3.1.17). В самом деле, пусть x – произвольная точка множества $Per(f_{|K(f)})$, а $n = n(x)$ – (наименьший) период x. Покажем, что x не является точкой полунепрерывности снизу Ω-функции косого произведения F_1. Для этого достаточно доказать, что найдутся точка $y' \in \Omega^{F_1}(x)$ и последовательность $\{x'_r\}_{r\geq 1}$, сходящаяся к x, такие, что не существует последовательности $\{y'_r\}_{r\geq 1}$, сходящейся к y', где $y'_r \in \Omega^{F_1}(x'_r)$ при любом $r \geq 1$ (см. §1.1).

Из (3.1.3) следует, что при любом $0 \leq i \leq n-1$ выполнено

$$\Omega^{F_1}_{n,\,1}(f^i(x)) = [0,\, 1 - x^{min}_n(x)].$$

Положим $y' = x^{min}_n(x)$. Для построения последовательности $\{x'_r\}_{r\geq 1}$ с указанными выше свойствами воспользуемся утверждением (7) предложения 3.1.1. Положим

$$\lambda_r = \max_{k_1\,k_2\,\ldots\,k_r \in \{0,\,1\}} \{l(\Delta^*_{k_1\,k_2\,\ldots k_r})\}, \;\; r \geq 1.$$

Тогда $\lim\limits_{r\to+\infty} \lambda_r = 0$. Обозначим через $Per'(f)$ всюду плотное в $Per(f_{|K(f)})$ множество точек таких, что их f-периодические орбиты аппроксимируют $K(f)$ с точностью λ_r при каждом $r \geq 1$. Из утверждений (2) и (6) предложения 3.1.1 следует, что последовательность $\{\lambda_r\}_{r\geq 1}$ строго убывает. Тогда можно выбрать сходящуюся к x последовательность точек $\{x'_r\}_{r\geq 1} \subset Per'(f)$ так, чтобы f-периодическая орбита, порожденная точкой x'_r при каждом $r \geq 1$, аппроксимировала множество $K(f)$ с точностью до λ_r, но не аппроксимировала $K(f)$ с точностью до λ_{r+1}. Из равенства (3.1.1) следует, что $\lim\limits_{r\to+\infty} x^{min}_{n(x'_r)}(x'_r) = \frac{3}{4}$ (здесь $n = n(x'_r)$ – (наименьший) период x'_r), в то же время $x^{min}_n(x) < \frac{3}{4}$. Положим $\varepsilon = \frac{3}{4} - x^{min}_n(x)$ и укажем натуральное число r_0 так, чтобы при всех $r \geq r_0$ выполнялось неравенство $\frac{3}{4} - x^{min}_{n(x'_r)}(x'_r) < \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому

$|x^{min}_{n(x'_r)}(x'_r) - x^{min}_n(x)| > \frac{\varepsilon}{2}$, и каково бы ни было $y'_r \in [0,\, x^{min}_{n(x'_r)}(x'_r)]$, точка $y' = x^{min}_n(x)$ не является предельной для последовательности $\{y'_r\}_{r\geq 1}$. Таким образом, Ω-функция косого произведения F_1 не является полунепрерывной снизу в точке x. Первое из включений (3.1.17) доказано.

Убедимся в справедливости второго из включений (3.1.17). Пусть теперь x – произвольная точка множества $K(f)$ с всюду плотной в $K(f)$ траекторией. Тогда из формул (3.1.3) и (3.1.11) следует, что

$$\Omega^{F_{1|K}}(x) = (\bigcap_{n=1}^{+\infty} \Omega^{F_1}_{n,\,1|K(f)})(x) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \Omega^{F_1}_{n,\,1|K(f)}(x) =$$

$$= \bigcap_{n=1}^{+\infty} [0,\, 1 - x^{min}_n(x)] = [0,\, \frac{1}{4}], \text{ где } K = K(f) \times I_2. \tag{3.1.18}$$

Пусть теперь $\{x_r\}_{r\geq 1}$ – произвольная сходящаяся к x последовательность точек множества $K(f)$. Так как траектория точки x всюду плотна в $K(f)$, то найдется последовательность $\{f^{m_j}(x)\}_{j\geq 1}$, сходящаяся к точке 3/4. Тогда при каждом $j \geq 1$ имеем: $\lim\limits_{r\to+\infty} f^{m_j}(x_r) = f^{m_j}(x)$. Поэтому для любого числа $0 < \varepsilon' < 1/8$ найдется $j'_0 = j'_0(\varepsilon')$ такое, что при любом $j \geq j'_0$ существует $r_0(j)$ со следующим свойством: при всех $r \geq r_0(j)$ верно неравенство

$$-\varepsilon' < \frac{3}{4} - f^{m_j}(x_r) < \varepsilon'.$$

Отсюда следует, что для любого $j \geq j'_0$ можно указать натуральное число $n_j \geq m_j$ так, чтобы при каждом $r \geq r_0(j)$ выполнялось

$$\frac{3}{4} + \varepsilon' > x^{min}_{n_j}(x_r) \geq f^{m_j}(x_r) > \frac{3}{4} - \varepsilon'.$$

Таким образом, при всех $j \geq j'_0$ и $r \geq r_0(j)$ справедливо включение

$$[0,\, \frac{1}{4} - \varepsilon'] \subset [0,\, 1 - x^{min}_{n_j}(x_r)] \subset [0,\, \frac{1}{4} + \varepsilon'].$$

Отсюда с использованием включения (3.1.8) получаем

$$[0,\, \frac{1}{4} - \varepsilon'] \subset \bigcap_{j=j'_0}^{+\infty} [0,\, 1 - x^{min}_{n_j}(x_r)] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} [0,\, 1 - x^{min}_n(x_r)] \subset [0,\, \frac{1}{4} + \varepsilon'].$$

Последнее вместе с (3.1.18) означает, что при всех $r \geq r_0(j'_0)$ справедливо неравенство

$$dist(\Omega^{F_{1|K}}(x),\ \Omega^{F_{1|K}}(x_r)) < \varepsilon',$$

и Ω-функция непрерывна в точке x. Второе из включений (3.1.17) доказано. Справедливость предложения 3.1.2 установлена.

Отметим, что Ω-функция отображения F_1, построенного при доказательстве предложения 3.1.2, имеет максимально допустимое (для полунепрерывной сверху многозначной функции) множество точек разрыва и в этом смысле является многозначным аналогом функции Римана в классическом анализе. В то же время в главе 5 будет доказано, что Ω-устойчивые косые произведения отображений интервала, фактороотображения которых имеют тип $\succ 2^{\infty}$, содержатся в пространстве $T^1_{*,\,1}(I)$ и имеют непрерывную Ω-функцию.

Косое произведение $F \in T^1_*(I)$ с фактором типа $\succ 2^{\infty}$, удовлетворяющее сильному условию **H**, в силу замкнутости графиков непрерывных отображений $\Omega^{F_1}_{l_i}$, $i \geq i^*$, на компакте $\Omega(f)$ удовлетворяет также и условию **H**. Покажем, что в то же время существует отображение F_2, удовлетворяющее условию **H**, но не удовлетворяющее сильному условию **H**.

Предложение 3.1.3 [74], [75]. Существует отображение $F_2 \in T^1_{*,\,2}(I)$.

Доказательство. Пусть отображение $F_2 \in T^1_*([0,\,1] \times [-1,\,1+\varepsilon])$ $(\varepsilon > 0)$ имеет фактор $f(x)$, определенный на отрезке $[0,\,1]$ равенством (3.1.1).
Для построения отображений в слоях будем использовать функцию $\psi \in C^1([-1,\,1])$, заданную равенством (1.1.5) (см. §1.1). Для окончательного определения отображений в слоях косого произведения F_2 нам потребуются свойства (1), (2), (4) и (7) факторотображения f на его единственном локально максимальном квазиминимальном множестве $K(f)$ из предложения 3.1.1 при $s = 2$.
Для f-неподвижной точки $x = \frac{1}{4}$ выполнено $\{\frac{1}{4}\} = \bigcap\limits_{r=1}^{+\infty} \Delta^*_{\underbrace{0\,0\ldots0}_{r}}$. Сохраним обозначения предложения 3.1.1. Пусть x^0_r – самая левая точка произвольной периодической орбиты из $Per'(f)$, аппроксимирующей множество $K(f)$ с точностью до λ_r при каждом $r \geq 1$. Тогда $x^0_r \in \Delta^*_{\underbrace{0\,0\ldots0}_{r}}$. Поэтому $\lim\limits_{r\to+\infty} x^0_r = \frac{1}{4}$, и $E = \{x^0_r\}_{r\geq1} \bigcup \{\frac{1}{4}\}$ – замкнутое множество.
Следовательно, корректно определена "шапочка Урысона"$h \in C^1([0,\,1])$ такая, что

$$h(x) = 0 \ \text{ при } \ x \in E,$$

$$\text{и } \ 0 < h(x) < 1 \ \text{ при } \ x \in [0,\,1] \setminus E.$$

Определим семейство отображений в слоях косого произведения F_2, полагая

$$g_x(y) = \begin{cases} \psi(y), & \text{если} \quad (x;\, y) \in [0,\, 1] \times [-1,\, 1); \\ h(x)(y-1)^2, & \text{если} \quad (x;\, y) \in [0,\, 1) \times [1,\, 1+\varepsilon]. \end{cases}$$

Отсюда, в частности, следует, что при любом $x' \in Per'(f) \bigcup \{\frac{1}{4}\}$ и l_i, $i \geq 0$, кратных (наименьшему) периоду $n(x')$ точки x', справедливо $\Omega(g_{x'},\, l_i) = \overline{Per(g_{\frac{1}{4}})} \subset [-1,\, \frac{3}{4}]$; а для любой устойчивой по Пуассону непериодической точки x (целая траектория такой точки содержится в $K(f) \setminus E$) имеет место равенство $\Omega(g_{x'},\, l_i) = \overline{Per(g_{\frac{1}{4}})} \bigcup \{1\}$. Поэтому при любом $i \geq 0$ функции $\Omega_{l_i}^{F_2}$ разрывны, в частности, в f-неподвижной точке $x = \frac{1}{4}$; а подходящие функции $\overline{\Omega}_{l_i}^{F_2}$ непрерывны на множестве $K(f)$, так как $\overline{\Omega}_{l_i}^{F_2}(x) = \overline{Per(g_{\frac{1}{4}})} \bigcup \{1\}$ при любом $x \in K(f)$. Следовательно, $F_2 \in T^1_{*,\,2}(I)$.
Предложение 3.1.3 доказано.

Обратим внимание на то, что для отображения F_2 из предложения 3.1.3 при любых $x \in [0,\, 1]$, $i \geq 1$, справедливо равенство $(\overline{\Omega}_{l_i,\,1}^{F_2})^{ex}(x) = \overline{Per(g_{\frac{1}{4}})} \bigcup \{1\}$; при этом выполнено $\Omega^F = \Omega(F) = \Omega(f) \times (\overline{Per(g_{\frac{1}{4}})} \bigcup \{1\})$.

Убедимся в том, что подпространство $T^1_{*,\,3}(I)$ не пусто.

Предложение 3.1.4 [75]. Существует отображение $F_3 \in T^1_{*,\,3}(I)$.

Доказательство. Пусть, как и в доказательствах предложений 3.1.2 и 3.1.3, факторотображение f косого произведения $F_3 \in T^1_*([0,\, 1]^2)$ определено в силу равенства (3.1.1).
Положим $x_* = 1/4$. Тогда $x_* \in K(f)$, и x^* - неподвижная точка f. Используя формулу (3.1.1) и применяя свойство (9) из предложения 3.1.1 к прообразам x_*, укажем монотонно убывающую последовательность гомоклинических точек $\{x_*^{-j}\}_{j\geq 1}$ (см. далее подстрочное замечание 5), сходящуюся к x_* и такую, что $x_*^{-j} \in (f_{|K(f)})^{-j}(x_*)$. Тогда $E_* = \{x_*^{-j}\}_{j\geq 0}$ – замкнутое множество, здесь $x_*^{-0} = x_*$.
Следовательно, корректно определена "шапочка Урысона"$h_* \in C^1([0,\, 1])$, где

$$h_*(x) = 0 \ \text{ при } \ x \in E_*,$$

$$\text{и } \ 0 < h_*(x) < 1 \ \text{ при } \ x \in [0,\, 1] \setminus E_*.$$

Для определения отображений в слоях будем использовать два криволинейных треугольника:

$$I' = \{(x;\, y) \in [0,\, 1]^2 : x \in [0,\, 1], 0 \leq y \leq (x - x_*)^2\}$$

и

$$I'' = \{(x;\, y) \in [0,\, 1]^2 : x \in (0,\, 1], (x - x_*)^2 < y \leq 1\}.$$

Нам потребуется следующая C^1-гладкая функция

$$\chi_x(y) = \begin{cases} y, & \text{если} \quad (x;\, y) \in I^{'}; \\ (x - x_*)^2 + \sin(y - (x - x_*)^2), & \text{если} \quad (x;\, y) \in I''. \end{cases} \tag{3.1.19}$$

Семейство отображений в слоях для F_3 определим равенством

$$g_x(y) = (1 - h_*(x))\chi_x(y). \tag{3.1.20}$$

Отсюда следует, что при всех $(x;\, y) \in [0,\, 1]^2$ выполнено

$$y \geq g_x(y) \geq g_{x,\,2}(y) \geq \ldots \geq g_{x,\,n}(y) \geq \ldots,$$

причем для любого $x \in [0,\, 1]$ (в том числе, и для $x \in E_*,\ x \neq x_*$) найдется целое число $n_0 = n_0(x) \geq 0$ такое, что для всех $n > n_0$ и $y \in (0,\, 1]$ верно строгое неравенство

$$g_{x,\,n-1}(y) > g_{x,\,n}(y) \ \ (\text{здесь} \ \ g_{x,\,0}(y) = y). \tag{3.1.21}$$

Таким образом, существует

$$\lim_{n \to +\infty} g_{x,\,n}(y) = y_*(x,\, y) \geq 0,$$

и в силу равенства $\omega_f(x) = pr_1(\omega_{F_3}((x;\, y)))$, справедливого для ω-предельных множеств f-траектории точки x и F_3-траектории точки $(x;\, y)$ соответственно[3], верно $\omega_{F_3}((x;\, y)) = \omega_f(x) \times \{y_*(x,\, y)\}$.

Заметим, что $y_*(x;\, y) \equiv 0$ на $[0,\, 1]^2$. Действительно, $y_*(x;\, 0) \equiv 0$ при всех $x \in [0,\, 1]$, $y_*(x_*;\, y) \equiv 0$ при всех $y \in [0,\, 1]$. Предположим, что $y_*(x',\, y') > 0$ для некоторой точки $(x';\, y') \in [0,\, 1] \times (0,\, 1]$, $x' \neq x_*$. Тогда в силу полной инвариантности

---

[3] Свойство первой проекции для ω-предельных множеств косых произведений отображений интервала является простым следствием компактности фазового пространства. Действительно, в силу равенства (0.0.2) верно включение $pr_1(\omega_{F_3}((x;\, y))) \subset \omega_f(x)$. Пусть теперь a – произвольная точка множества $\omega_f(x)$. Тогда для некоторой последовательности натуральных чисел $\{n_q\}_{q \geq 1}$ выполнено $\lim\limits_{q \to +\infty} f^{n_q}(x) = a$. Из последовательности $\{F^{n_q}(x,\, y)\}_{q \geq 1}$ извлечем сходящуюся подпоследовательность $\{F^{n_{q_l}}(x,\, y)\}_{l \geq 1}$. Тогда найдется точка $b \in I_2$ такая, что $\lim\limits_{l \to +\infty} F^{n_{q_l}}(x,\, y) = (a;\, b)$. Следовательно, $\omega_f(x) \subset pr_1(\omega_{F_3}((x;\, y)))$ и тем самым установлено, что $\omega_f(x) = pr_1(\omega_{F_3}((x;\, y)))$ (см. [61], [62]).

множества $\omega_{F_3}((x';\, y'))$[4] для любых $x \in \omega_f(x')$ и $n \geq 1$ справедливо равенство $g_{x,\,n}(y_*(x',\, y')) = y_*(x',\, y')$. Последнее невозможно, так как для всех $n > n_0$ при некотором $n_0 \geq 0$ для точки $(x;\, y) = (x';\, y')$ верно строгое неравенство (3.1.21). Таким образом, $y_*(x;\, y) \equiv 0$ на $[0,\, 1]^2$.

В силу формул (3.1.19), (3.1.20) при каждом $l \geq 2$ подходящая функция $\overline{\Omega}_l^{F_3}$ разрывна в каждой точке $x_*^{-j} \in E_*$ при $j \geq l-1$, так как $\overline{\Omega}_l^{F_3}(x_*^{-j})$ –невырожденный отрезок, $\overline{\Omega}_l^{F_3}(x_*^{-j}) \subseteq [0,\, (x_*^{-j} - x_*)^2]$; а при $x \notin \{x_*^{-j}\}_{j \geq l-1}$ справедливо $\overline{\Omega}_l^{F_3}(x) = \{0\}$. Так как $\lim\limits_{j \to +\infty} (x_*^{-j} - x_*)^2 = 0$, и $\overline{\Omega}_l^{F_3}(x_*) = 0$, то используя (3.1.20), получаем что $\overline{\Omega}_l^{F_3}$ непрерывна во всех точках множества $\Omega(f) \setminus \{x \in E_*,\, x \neq x_*\}$.

Используя определение множества E_*, получаем из предыдущего, что

$$\Omega(F_3) = \Omega(f) \times \{0\}.$$

Тогда Ω-функция Ω^{F_3} непрерывна, так как $\Omega^{F_3}(x) = \{0\}$ при любом $x \in \Omega(f)$. Таким образом, отображение $F_3 \in T_*^1(I)$ принадлежит третьему из выделенных подпространств. Предложение 3.1.4 доказано.

Убедимся в том, что существует косое произведение отображений интервала из пространства $T_*^1(I)$ с факторотображением типа $\succ 2^\infty$, разрывной Ω-функцией и последовательностью подходящих функций $\{\overline{\Omega}_{l_i}^{F_4}\}_{i \geq 0}$, счетное число которых разрывно. Более того, в предложении 3.1.5 мы приведем необходимый нам в дальнейшем пример косого произведения из пространства $T_{*,\,4}^1(I)$ с произвольной допустимой глубиной центра (то есть с глубиной центра, представляющей собой произвольный конечный или счетный ординал).

Пример непрерывного (но не гладкого) косого произведения отображений интервала с произвольной конечной глубиной центра, основанный на использовании краевого эффекта отрезка I_2 относительно отображений в слоях, указан в [62].

Процедура построения косого произведения с требуемыми свойствами при доказательстве предложения 3.1.5 следует идеям классических работ [110] – [114] (см. также [55, гл.5, §5]). Существование гомоклинических траекторий[5] [155], [156] у непрерывных отображений отрезка типа $\succ 2^\infty$ (и только у непрерывных отображений отрезка

---

[4] Свойство полной инвариантности ω-предельного множества означает выполнение равенства $F_3(\omega_{F_3}((x';\, y'))) = \omega_{F_3}((x';\, y'))$.

[5] Непериодическая точка $t \in I_k$ ($k = 1$ или 2) называется гомоклинической к периодической точке

типа $\succ 2^\infty$) а также траекторий, которые имеют счетные ω-предельные множества, и при этом некоторые их отрицательные полутраектии имеют счетные α-предельные множества, позволяет распространить конструкцию А.Г. Майера, основанную на построении непериодических траекторий, все предельные точки которых содержатся в объединении траекторий, построенных на предыдущих этапах, на случай косых произведений из пространства $T^1_{*,4}(I)$ (см. [61], [75], [81]). Построения существенно используют разрывность счетного множества подходящих функций и разрывность Ω-функции отображений из $T^1_{*,4}(I)$.

Пусть $\widetilde{T}^1_*(I)$ есть подпространство всех тех отображений $F \in T^1_*(I)$, для каждого из которых верно включение $F(\partial I) \subseteq \partial I$, где ∂I – граница прямоугольника I.
При любом $1 \le j \le 4$ положим

$$\widetilde{T}^1_{*,j}(I) = \widetilde{T}^1_*(I) \bigcap T^1_{*,j}(I).$$

Предложение 3.1.5 [75], [81]. *Для любого конечного или счетного ординала γ существует отображение $F_{4,\gamma} \in \widetilde{T}^1_{*,4}(I)$, глубина центра которого $\gamma(F_{4,\gamma})$ не меньше, чем γ.*

Доказательство. Пусть $I = [0,\, 1]^2$, а фактор f отображения $F_{4,\gamma} \in \widetilde{T}^1_{*,4}(I)$ определен в силу равенства (3.1.1).
Определим отображения в слоях, полагая $g_x(y) = y - h_\gamma(x)y(1-y)$, где $h_\gamma(x)$ – C^1-гладкая "шапочка Урысона" такая, что

$$h_\gamma(x) = 0 \ \text{ для } \ x \in E_\gamma,$$

$$\text{и } \ 0 < h_\gamma(x) < 1 \ \text{ для } \ x \in [0,\, 1] \setminus E_\gamma,$$

---

t_0 периода $m \ge 1$ отображения $\varphi \in C^0(I_k)$, если 1) при некотором $i \ge 1$ выполнено $\varphi^{mi}(t) = t_0$, и 2) для любой окрестности $U_k(t_0)$ точки t_0 в I_k найдется натуральное число $l = l(U_k(t_0))$ такое, что $t \in \varphi^{ml}(U_k(t_0))$ [155], [156]. Из приведенного определения следует, что неотрицательная полутраектория (относительно φ) гомоклинической точки t состоит из конечного числа попарно различных точек. Под гомоклинической траекторией (относительно φ) понимается объединение неотрицательной полутраектории гомоклинической точки t и такой ее отрицательной полутраектории, α-предельным множеством которой является периодическая орбита точки t_0. Существование отрицательной полутраектории точки t с указанным свойством следует из условия 2) определения гомоклинической точки.

E_γ - замкнутое инвариантное множество в $K(f)$, описание которого для произвольного конечного или счетного ординала приведено ниже. Тогда $g_x(y)$ - тождественное отображение при всех $x \in E_\gamma$, и $g_x(y)$ - диффеоморфизм Морса-Смейла с двумя неподвижными точками: стоком $y = 0$ и источником $y = 1$ при всех $x \notin E_\gamma$.

1. Пусть $\gamma = m$, где $m \in \mathbf{N}$.

Все построения основаны на использовании свойства плотности в $K(f)$ множества всевозможных прообразов $\bigcup\limits_{j=0}^{+\infty} f^{-j}_{|K(f)}(1/4)$ неподвижной точки $x = 1/4$ (см. утверждение (9) предложения 3.1.1).

На 1-м шаге будем использовать гомоклиническую траекторию $\Gamma_1 = \{x^1_{-n}\}_{n\geq 0}$ к неподвижной точке $x^1_0 = 1/4$, где $x^1_{-1} = 3/4$, и при всех $n \geq 1$ x^1_{-n-1} (для определенности) – наименьший из двух первых прообразов относительно $f_{|K(f)}$ точки x^1_{-n}. Тогда $\alpha^1_f(x^1_{-1}) = \{1/4\}$ (через $\alpha(\cdot)$ обозначено α-предельное множество выделенной отрицательной полутраектории выбранной точки; верхний индекс указывает номер шага построения). Тогда Γ_1– замкнутое множество.

На 2-м шаге построим неположительную полутраекторию $\Gamma_2 = \{x^2_{-n}\}_{n\geq 0}$ точки $x^2_0 = x^1_0 = 1/4$, где $x^2_{-1} = x^1_{-1} = 3/4$, в качестве точки x^2_{-2} выбран наибольший из двух первых прообразов относительно $f_{|K(f)}$ точки x^2_{-1}. Используя утверждение (9) предложения 3.1.1, точки $\{x^2_{-n-1}\}$ $(f(x^2_{-n-1}) = x^2_{-n})$ при всех $n \geq 2$ выберем так, чтобы $\alpha^2_f(x^2_{-1}) = \Gamma_1$. Здесь Γ_2 – незамкнутое множество, но $\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ – замкнутое множество.

Используя принцип математической индукции, при любом k $(1 \leq k \leq m)$ построим неположительную полутраекторию $\Gamma_k = \{x^k_{-n}\}_{n\geq 0}$ так, чтобы $x^k_{-n} = x^{k-1}_{-n}$ при всех $0 \leq n \leq k-1$; в качестве точки x^k_{-k} выбран наибольший из двух первых прообразов относительно $f_{|K(f)}$ точки x^k_{-k+1}. Воспользуемся утверждением (9) предложения 3.1.1 и при всех $n \geq 2$ выберем точки $\{x^k_{-n-1}\}$ $(f(x^k_{-n-1}) = x^k_{-n})$ так, чтобы выполнялось равенство $\alpha^k_f(x^k_{-1}) = \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} \Gamma_j$. Тогда Γ_k – незамкнутое множество в то время, как $\bigcup\limits_{j=1}^{k} \Gamma_j$ – замкнутое множество. Таким образом, при любом натуральном $m \geq 1$ построена упорядоченная по включению совокупность α-предельных множеств

$$\alpha^1_f(x^1_{-1}) \subset \alpha^2_f(x^2_{-1}) \subset \ldots \subset \alpha^m_f(x^m_{-1}).$$

2. Пусть $\gamma = \lambda$, где λ – предельный счетный ординал, $\lambda \geq \omega$; причем построены мно-

жества $\alpha_f^{\gamma'}(x_{-1}^{\gamma'})$ при всех $\gamma' < \lambda$. Тогда существует последовательность порядковых чисел

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots < \lambda \text{ такая, что } \lambda = \lim_{n\to+\infty} \lambda_n.$$

Используя утверждение (9) предложения 3.1.1 и трансфинитную индукцию, получаем, что верны включения

$$\alpha_f^{\lambda_1}(x_{-1}^{\lambda_1}) \subset \alpha_f^{\lambda_2}(x_{-1}^{\lambda_2}) \subset \ldots \subset \alpha_f^{\lambda_n}(x_{-1}^{\lambda_n}) \subset \ldots.$$

Поэтому существует вполне инвариантное множество – топологический предел

$$\mathop{Lim}_{n\to+\infty} \alpha_f^{\lambda_n}(x_{-1}^{\lambda_n}) = \overline{\bigcup_{n=1}^{+\infty} \alpha_f^{\lambda_n}(x_{-1}^{\lambda_n})},$$

представляющий собой счетное замкнутое подмножество множества $\bigcup\limits_{j=0}^{+\infty} f_{|K(f)}^{-j}(1/4)$. Подобно тому, как это было сделано выше, используя утверждение (9) предложения 3.1.1, построим неположительную полутраекторию $\Gamma_\lambda = \{x_{-n}^\lambda\}_{n\geq 0}$ при $x_0^\lambda = 1/4$, $x_{-1}^\lambda = 3/4$ так, чтобы $\alpha_f^\lambda(x_{-1}^\lambda) = \mathop{Lim}\limits_{n\to+\infty} \alpha_f^{\lambda_n}(x_{-1}^{\lambda_n})$.

3. Пусть $\gamma = \lambda + m$, где $m \in \mathbf{N}$, λ – предельный счетный ординал. Предположим, что проделан $\lambda + m - 1$ шаг и указана совокупность множеств

$$\alpha_f^1(x_{-1}^1) \subset \alpha_f^2(x_{-1}^2) \subset \ldots \subset \alpha_f^k(x_{-1}^k) \subset \ldots \subset \alpha_f^\lambda(x_{-1}^\lambda) \subset \ldots \subset \alpha_f^{\lambda+m-1}(x_{-1}^{\lambda+m-1}),$$

где $\Gamma_{\lambda+m-1} = \{x_{-n}^{\lambda+m-1}\}_{n\geq 0}$, $x_0^{\lambda+m-1} = 1/4$, $x_{-1}^{\lambda+m-1} = 3/4$, а точки $\{x_{-n-1}^{\lambda+m-1}\}_{n\geq 1}$ выбраны с использованием утверждения (9) предложения 3.1.1 так, чтобы выполнялось равенство $\alpha_f^{\lambda+m-1}(x_{-1}^{\lambda+m-1}) = \alpha_f^\lambda(x_{-1}^\lambda) \bigcup \bigcup\limits_{k=0}^{m-1} \Gamma_{\lambda+k}$. Тогда множество $\alpha_f^\lambda(x_{-1}^\lambda) \bigcup \bigcup\limits_{k=0}^{m-1} \Gamma_{\lambda+k}$ замкнуто. На $(\lambda+m)$-м шаге с использованием утверждения (9) предложения 3.1.1 укажем неположительную полутраекторию точки $x_0^{\lambda+m} = 1/4$ относительно $f_{|K(f)}$, где $\Gamma_{\lambda+m} = \{x_{-n}^{\lambda+m}\}_{n\geq 0}$, $x_{-1}^{\lambda+m} = 3/4$, а точки $\{x_{-n-1}^{\lambda+m}\}_{n\geq 1}$ выбраны так, чтобы выполнялось $\alpha_f^{\lambda+m}(x_{-1}^{\lambda+m}) = \alpha_f^\lambda(x_{-1}^\lambda) \bigcup \bigcup\limits_{k=0}^{m} \Gamma_{\lambda+k}$.

Положим $E_\gamma = \alpha_f^\gamma(x_{-1}^\gamma)$. Из определения отображения $F_{4,\gamma}$ следует, что при любых $n \geq 1$ и $x \in E_\gamma$ справедливо $\Omega(g_{x,n}) = [0, 1]$, а при всех $x \in [0, 1] \setminus E_\gamma$ выполнено $\Omega(g_{x,n}) = \{0, 1\}$. Поэтому множество точек разрыва каждой подходящей функции $\overline{\Omega}_n^F$ совпадает с E_γ. При этом

$$\Omega(F_{4,\gamma}) = E_\gamma \times [0, 1] \bigcup ((K(f) \setminus E_\gamma) \times \{0, 1\})$$

или, что то же самое,

$$\Omega^{F_{4,\gamma}}(x) = \begin{cases} [0,\,1], & \text{если} \quad x \in E_\gamma; \\ \{0,\,1\}, & \text{если} \quad x \in K(f) \setminus E_\gamma. \end{cases}$$

С другой стороны, в силу теоремы Бэра-Хаусдорфа существует не более, чем счетный ординал $\gamma^* \geq \gamma$, такой, что $E_{\gamma^*} = E_{\gamma^*+1}$, и, таким образом,

$$C(F_{4,\gamma}) = \Omega_{\gamma^*}(F_{4,\gamma}) = \Omega_{\gamma^*+1}(F_{4,\gamma}).$$

Следовательно, $\gamma(F_{4,\gamma}) = \gamma^* \geq \gamma$. Предложение 3.1.5 доказано.

Таким образом, в силу предложений 3.1.2 - 3.1.5 все подпространства $T^1_{*,1}(I)$ – $T^1_{*,4}(I)$ не пусты, из их определения следует, что все эти подпространства попарно не пересекаются, а само пространство тех отображений из $T^1_*(I)$, каждое из которых имеет фактор типа $\succ 2^\infty$, представимо в виде объединения четырех выделенных подпространств. Теорема 3.1.1 доказана.

Замечание 3.1.4. Глубина центра косого произведения отображений интервала является инвариантом Ω-сопряженности (относительно гомеоморфизмов - косых произведений). Поэтому отображения F_{4,γ_1} и F_{4,γ_2} при $\gamma_1 \neq \gamma_2$ принадлежат различным классам Ω-сопряженности.

Замечание 3.1.5. Используя "шапочку" Урысона класса C^∞ и аналог класса C^∞ фактороотображения $f \in C^1_\omega(I_1)$ косого произведения $F_{4,\gamma}$, получаем C^∞-гладкое косое произведение отображений интервала, обладающее теми же свойствами, что и отображение $F_{4,\gamma}$, построенное в доказательстве предложения 3.1.5 (ср. с [114]).

Непосредственным следствием предложения 3.1.5 и несчетности множества счетных ординалов является следующее утверждение.

Теорема 3.1.2 [75], [81]. *Множество классов Ω-сопряженности отображений из пространства $\widetilde{T}^1_{*,4}(I)$ несчетно и имеет мощность $\geq \aleph_1$ (где $\aleph_1$ – мощность множества счетных ординалов.*

В [58, гл.3, §4] доказано, что $\aleph_1 \leq \mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ – мощность континуума. Вопрос о том, верно ли равенство $\aleph_1 = \mathbf{c}$ или имеет место неравенство $\aleph_1 < \mathbf{c}$ составляет содержание решенной П. Коэном в 1963 г. континуум-проблемы [157, §18].

Теорема 3.1.2 будет дополнена в § 5.3 главы 5 информацией о структуре границы объединения относительных областей в подпространстве $\widetilde{T}^1_{*,\,4}(I)$, состоящих из Ω-сопряженных отображений.

Результаты § 3.1 опубликованы в статьях [74], [75], [81].

3.2 О неблуждающем множестве косых произведений из подпространств $T^1_{*,\,1}(I)$, $T^1_{*,\,2}(I)$

В этой части работы приведено доказательство теорем 3.2.1 и 3.2.2 о структуре неблуждающего множества C^1-гладкого косого произведения отображений интервала из пространств $T^1_{*,\,1}(I)$ и $T^1_{*,\,2}(I)$ соответственно.

Будем использовать подпоследовательность $\{l_i\}_{i\geq i^*}$ при $l_i = m_* n_* i!$ указанной во Введении последовательности натуральных чисел $\{l^*_i\}_{i\geq i^*}$ (см. формулу (0.0.22)) . Натуральное число $i!$ представимо в виде

$$i! = 2^{j(i)}(2j'(i)+1), \quad \text{где} \quad j(i) \geq 0,\, j'(i) \geq 1.$$

Во Введении к диссертации были определены многозначные функции

$$(\overline{\Omega}^F_{l_i})' = \bigcup_{\gamma=0}^{j(i)} \overline{\Omega}^F_{2^{-\gamma} l_i}; \quad (\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})' = \bigcup_{\gamma=0}^{j(i)} \overline{\Omega}^F_{2^{-\gamma} l_i,\,1}. \tag{3.2.1}$$

$$(\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})^{P^*} = F_{l_i,\,1|Per^*_p(f)\times I_2}((\overline{\Omega}^F_{l_i})^{P^*}). \tag{3.2.2}$$

В (3.2.2) используются графики функций $(\overline{\Omega}^F_{l_i})^{P^*}$ и $(\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})^{P^*}$; где $(\overline{\Omega}^F_{l_i})^{P^*}$ есть сужение функции $\overline{\Omega}^F_{l_i}$ на множество $Per^*_p(f)$; а $Per^*_p(f)$ – произвольное инвариантное всюду плотное в $\Omega_p(f)$ подмножество множества $Per_p(f)$ периодических точек $f_{|\Omega_p(f)}$.

Пусть $Per_p(f,\, n)$ $(Per^*_p(f,\, n))$ есть конечное множество всех тех точек из $Per_p(f)$ $(Per^*_p(f))$, (наименьший) период каждой из которых делит $n \in \tau(f_{|\Omega_p(f)})$. Для любого $i \geq i^*$ будем использовать следующие сужения функций, определенных равенствами (3.2.1):

$$(\overline{\Omega}^F_{l_i})'_{\;|Per^*_p(f,\,l_i)} = \bigcup_{\gamma=0}^{j(i)} \overline{\Omega}^F_{2^{-\gamma} l_i\;|Per^*_p(f,\,2^{-\gamma} l_i)}; \tag{3.2.3}$$

$$((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}_{\;|Per^*_p(f,\,l_i)} = \bigcup_{\gamma=0}^{j(i)} (\overline{\Omega}^F_{2^{-\gamma} l_i,\,1})^{P^*}_{\;|Per^*_p(f,\,2^{-\gamma} l_i)}. \tag{3.2.4}$$

Обратим внимание на то, что последовательность натуральных чисел

$$\{l_i, \dots 2^{-j(i)} l_i\}_{i \geq i^*}$$

является подпоследовательностью последовательности $\{l_i^*\}_{i \geq i^*}$. Поэтому для произвольного отображения $F \in T^1_{*,1}(I)$ многозначные функции $\Omega^F_{2^{-\gamma} l_i}$ непрерывны на множестве $\Omega(f)$ при каждом $0 \leq \gamma \leq j(i)$ при $i \geq i^*$.

Замечание 3.2.1. Для любого отображения $F \in T^1_{*,1}(I)$ знаки замыкания множеств в равенствах (3.2.1) – (3.2.4) можно опустить, так как графики используемых здесь непрерывных (при $i \geq i^*$) многозначных функций – замкнутые множества.

В дальнейшем будем использовать естественные расширения $(\Omega^F_n)^{ex}$ на отрезок I_1 и $(\Omega^F_{n,1})^{ex}$ на отрезок $f^n(I_1)$ функций Ω^F_n и $\Omega^F_{n,1}$ соответственно (ср. с § 1.2).

Важную роль будут играть также определенные на множестве $\bigcap\limits_{\gamma=0}^{\overline{j}(i)} f^{2^{-\gamma} l_i^*}(I_1)$ (здесь $i = 2^{\overline{j}(i)}(2\overline{j}'(i)+1)$, $\overline{j}(i) \geq 0$, $\overline{j}'(i) \geq 1$) функции

$$(\Omega^F_{l_i^*,1})^{ex'} = \bigcup_{\gamma=0}^{\overline{j}(i)} (\Omega^F_{2^{-\gamma} l_i^*,1})^{ex}. \tag{3.2.5}$$

Положим $\Omega^*_p(F) = \Omega_p(f) \times I_2$.

Сформулируем основные результаты этой части работы.

Теорема 3.2.1. [81], [107], [108]. *Пусть* $F \in T^1_{*,1}(I)$, *а* $Per^*_p(f)$ *– произвольное инвариантное всюду плотное в* $\Omega_p(f)$ *подмножество множества* $Per_p(f)$. *Тогда существует топологический предел* $\underset{i \to +\infty}{Lim} ((\Omega^F_{l_i,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,l_i)}$, *не зависящий от множества* $Per^*_p(f)$, *и справедливы равенства:*

$$\begin{gathered}\Omega^{F^{m_* n_*}_{|\Omega^*_p(F)}} = \underset{i \to +\infty}{Ls} (\Omega^F_{l_i,1})' = \underset{i \to +\infty}{Ls} ((\Omega^F_{l_i,1})')^{P^*} = \\ \underset{i \to +\infty}{Lim} ((\Omega^F_{l_i,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,l_i)} = \overline{\bigcup_{x \in Per^*_p(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)}\end{gathered} \tag{3.2.6}$$

(здесь $\Omega^*_p(F) = \Omega_p(f) \times I_2$, $\Omega^{F^{m_* n_*}_{|\Omega^*_p(F)}}$, $(\Omega^F_{l_i,1})'$, $((\Omega^F_{l_i,1})')^{P^*}$, $((\Omega^F_{l_i,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,l_i)}$ *– графики соответствующих функций в* I*),* $\underset{i \to +\infty}{Ls} (\cdot)_i$ *– верхний топологический предел последовательности множеств;*

более того, значение $\Omega^{F^{m_* n_*}}(x)$ Ω*-функции отображения* $F^{m_* n_*}$ *в любой точке* $x \in \Omega_p(f)$ *определено в силу равенства*

$$\Omega^{F^{m_* n_*}}(x) = (\underset{i \to +\infty}{Ls} (\Omega^F_{m^* n^* i,1})^{ex'}{}_{|U_{1,\,\varepsilon_i}(x)})(x), \tag{3.2.7}$$

где $U_{1,\,\varepsilon_i}(x)$ *– произвольная* ε_i*-окрестность в* I_1 *точки* $x \in \Omega_p(f)$*, причем* $\lim\limits_{i\to+\infty} \varepsilon_i = 0$.

Теорема 3.2.1 содержит полную информацию о том, как формируется та часть неблуждающего множества косого произведения отображений интервала из пространства $T^1_{*,\,1}(I)$, которая проектируется на совершенную часть множества $\Omega(f)$. В частности, первое из равенств в (3.2.6) означает, что неблуждающее множество отображения $F^{m_*n_*}_{|\Omega^*_p(F)}$ можно аппроксимировать с произвольной степенью точности в метрике Хаусдорфа $dist_I$ (см. раздел 1.1.1) в пространстве 2^I замкнутых подмножеств прямоугольника I подпоследовательностями графиков функций $(\Omega^F_{l_i,\,1})'$, содержащих информацию о неблуждающих множествах отображений в слоях над всевозможными прообразами каждой точки $x \in \Omega_p(f)$ относительно $f^{l_i}_{|\Omega_p(f)}$ вспомогательных косых произведений F_{l_i} (см. равенства (1.1.10), (3.2.1) и замечание 3.2.1).

Укажем отображение $F_2 \in T^1_{*,\,2}(I)$, для которого множество $\overline{\bigcup\limits_{x\in Per^*_p(f)} \{x\}\times\Omega(\widetilde{g}_x)}$ зависит от выбора подмножества $Per^*_p(f)$ в $\Omega_p(f)$.

Пример 3.2.1 [81]. Пусть $I = [0,\,1] \times [-1,\,1{,}01]$, а факторотображение f косого произведения $F_2 \in T^1_{*,\,2}(I)$ определено в силу формулы (3.1.1). Для того, чтобы определить отображения в слоях, воспользуемся утверждениями (8), (9) предложения 3.1.1 и выберем множество $Per^{(*,\,1)}_p(f)$, состоящее из периодических орбит, равномерно аппроксимирующих единственное локально максимальное квазиминимальное множество $K(f) = \Omega_p(f)$ фактора f и имеющих (наименьшие) периоды $2j$. Пусть $Per^{(*,\,2)}_p(f)$ – произвольное инвариантное всюду плотное в $K(f)$ множество периодических орбит с (наименьшими) периодами $2j-1$ $(j \geq 1)$. Тогда $Per^{(*,\,1)}_p(f) \bigcap Per^{(*,\,2)}_p(f) = \emptyset$. Так как множество $Per^{(*,\,1)}_p(f)$ состоит из периодических орбит, равномерно аппроксимирующих множество $K(f)$ с произвольной степенью точности, то существует последовательность натуральных чисел $r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots$ такая, что $\lim\limits_{n\to+\infty} l(\Delta_{\underbrace{0\,\ldots\,0}_{r_n}}) = 0$; причем при каждом $n \geq 1$ существует точка $x_{r_n} \in Per^{(*,\,1)}_p(f) \bigcap \Delta_{\underbrace{0\,\ldots\,0}_{r_n}}$. Следовательно, $E = \{1/4,\, \{x_{r_n}\}_{n\geq 1}\}$ - замкнутое множество.

Будем использовать функцию $\psi \in C^1([-1,\,1])$, заданную равенством (1.1.5). График функции ψ представлен на рис. 1.1.

Определим "шапочку Урысона” $h \in C^1([0,\,1])$ так, чтобы $h(x) = 0$ при всех $x \in E$, и

$0 < h(x) < 1$ при любых $x \in [0,\,1] \setminus E$.

Построим отображения в слоях $g_x(y)$, полагая

$$g_x(y) = \begin{cases} \psi(y), & \text{если} \quad (x,\,y) \in [0,\,1] \times [-1,\,1); \\ h(x)(y-1)^2, & \text{если} \quad (x,\,y) \in [0,\,1] \times [1,\,1{,}01]. \end{cases}$$

Укажем, что отображения в слоях над точками множества E допускают гомоклинический C^1- Ω-взрыв[6], в результате которого у отображений в слоях над точками множества $[0,\,1] \setminus E$ появляются неблуждающие, но не ω-предельные гомоклинические траектории.

Обозначим через E^* всюду плотное в $\Omega_p(f)$ множество периодических орбит, содержащихся в E. Тогда

$$\overline{\bigcup_{x \in E^*} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)} \neq \overline{\bigcup_{x \in Per_p^{(*,\,2)}(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)}.$$

Таким образом, для косого произведения $F_2 \in T^1_{*,\,2}(I)$ множество $\overline{\bigcup_{x \in Per_p^*(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)}$ зависит от выбора подмножества $Per_p^*(f)$ в $\Omega_p(f)$. Последнее означает, что утверждение теоремы 3.2.1 несправедливо для отображений из пространства $T^1_{*,\,2}(I)$.

Обратим внимание на то, что любая точка разрыва произвольной вспомогательной функции $\Omega_n^{F_2}$ $(n \geq 1)$ отображения F_2 из примера 3.2.1 не является точкой полунепрерывности сверху для $\Omega_n^{F_2}$.

Отображение F_2 из примера 3.2.1 иллюстрирует следующее общее свойство точек разрыва вспомогательных функций отображений из пространства $T^1_{*,\,2}(I)$.

Предложение 3.2.1 [75]. *Пусть $F \in T^1_{*,\,2}(I)$. Тогда, если множество точек разрыва $S_d(\Omega^F_{l_i})$ вспомогательной функции $\Omega^F_{l_i}$ $(i \geq i^*)$ непусто, то в нем всюду плотны точки, не являющиеся точками полунепрерывности сверху.*

Доказательство. Предположим, что при некотором $i \geq i^*$ существует разрывная вспомогательная функция $\Omega^F_{l_i}$ (заметим, что $S_d(\Omega^F_{l_i}) \subset \Omega_p(f)$) такая, что те ее точки разрыва, которые не являются точками полунепрерывности сверху, не образуют всюду плотного подмножества (обозначим его через $S^*_d(\Omega^F_{l_i})$) множества $S_d(\Omega^F_{l_i})$.

---

[6] По поводу определения C^1- Ω-взрыва в C^1-гладких отображениях отрезка см. Введение, подстрочное замечание 8.

Тогда найдется точка $x^* \in S_d(\Omega^F_{l_i}) \setminus \overline{S^*_d}(\Omega^F_{l_i})$, которая является точкой полунепрерывности сверху, но не снизу вспомогательной функции $\Omega^F_{l_i}$; причем в некоторой замкнутой окрестности $\overline{U}_1(x^*)$ точки x^* в $\Omega_p(f)$ сужение $\Omega^F_{l_i\,|\overline{U}_1(x^*)}$ полунепрерывно сверху, но не снизу. В силу определения полунепрерывности сверху (см. подпараграф 1.1.1) график функции $\Omega^F_{l_i\,|\overline{U}_1(x^*)}$ – замкнутое множество. Поэтому $\overline{\Omega}^F_{l_i\,|\overline{U}_1(x^*)} = \Omega^F_{l_i\,|\overline{U}_1(x^*)}$, и подходящая функция $\overline{\Omega}^F_{l_i}$ к Ω-функции не является непрерывной. Последнее противоречит тому, что $F \in T^1_{*,\,2}(I)$. Предложение 3.2.1 доказано.

С динамической точки зрения предложение 3.2.1 можно интерпретировать следующим образом: отображения в слоях l_i-той итерации косого произведения $F \in T^1_{*,\,2}(I)$ такой, что вспомогательная функция $\Omega^F_{l_i}$ $(i \geq i^*)$ разрывна, допускают C^1- Ω-взрыв.

Теорема 3.2.2 [81], [108]. *Пусть $F \in T^1_{*,\,2}(I)$, а множество $Per^*_p(f)$ выбрано также, как в теореме 3.2.1. Тогда существует топологический предел $\underset{i\to+\infty}{Lim}((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,\,l_i)}$, не зависящий от множества $Per^*_p(f)$, и верно:*

$$\begin{aligned}
&\Omega^{F^{m_* n_*}_{|\Omega^*_p(F)}} = \underset{i\to+\infty}{Ls}(\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})' = \underset{i\to+\infty}{Ls}((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*} = \\
&\underset{i\to+\infty}{Lim}((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,\,l_i)} = \overline{\bigcup_{x\in Per^*_p(f)} \{x\} \times WN_{\Omega_p}(\widetilde{g}_x)},
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

здесь $(\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})'$, $((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}$, $((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,\,l_i)}$ – графики соответствующих функций в I, $WN_{\Omega_p}(\widetilde{g}_x)$ – множество точек $y \in I_2$ таких, что любая точка $(x,\,y)$ является слабо неблуждающей относительно семейства отображений в слоях над точками множества $\Omega_p(f)$ косого произведения F_m (см. формулу (0.0.13)), где $m = m(x)$ – (наименьший) период x;
более того, значение $\Omega^{F^{m_* n_*}}(x)$ Ω-функции отображения $F^{m_* n_*}$ в произвольной точке $x \in \Omega_p(f)$ определено в силу равенства (3.2.7) для любых окрестностей $U_{1,\,\varepsilon_i}(x)$ в I_1 точки $x \in \Omega_p(f)$, где $\lim\limits_{i\to+\infty} \varepsilon_i = 0$.

3.2.1 Доказательство 1-ой части теорем о неблуждающем множестве

Основные рассмотрения настоящего раздела связаны с доказательством равенств (3.2.6) и (3.2.8). Указанные равенства будут доказаны поэтапно в приведенных здесь леммах 3.2.1 – 3.2.3 и следствиях 3.2.1 - 3.2.3.

Лемма 3.2.1. *Пусть* $F \in T^1_{*,1}(I) \bigcup T^1_{*,2}(I)$, *а инвариантное множество* $Per^*_p(f)$ *всюду плотно в* $\Omega_p(f)$. *Тогда справедливо равенство*

$$\mathop{Ls}_{i\to+\infty} (\overline{\Omega}^F_{l_i,1})' = \mathop{Ls}_{i\to+\infty} ((\overline{\Omega}^F_{l_i,1})')^{P^*}. \tag{3.2.9}$$

Доказательство. 1. Убедимся в справедливости равенства

$$\overline{(\overline{\Omega}^F_{l_i,1})^{P^*}} = \overline{\Omega}^F_{l_i,1}. \tag{3.2.10}$$

Так как $F \in T^1_{*,1}(I) \bigcup T^1_{*,2}(I)$, то функции $\overline{\Omega}^F_{l_i,1}$ непрерывны при любом $i \geq i^*$. Возьмем произвольно натуральное число $i \geq i^*$, точку $(x;\, y)$ на графике $\overline{\Omega}^F_{l_i,1}$ и прямоугольную ε-окрестность $U_\varepsilon((x;\, y)) = U_{1,\varepsilon}(x) \times U_{2,\varepsilon}(y)$ точки $(x;\, y)$ в I. Для доказательства равенства (3.2.10) достаточно убедиться в том, что

$$(\overline{\Omega}^F_{l_i,1})^{P^*} \bigcap U_\varepsilon((x;\, y)) \neq \emptyset. \tag{3.2.11}$$

В самом деле, воспользуемся равномерной непрерывностью отображения $F_{l_i,1}$ (см. формулу (0.0.14)) и для числа $\varepsilon > 0$ укажем $0 < \delta_i \leq \varepsilon$ так, чтобы для любых точек $(x';\, y')$, $(x'';\, y'') \in I$, удовлетворяющих неравенствам $|x' - x''|$, $|y' - y''| < \delta_i$, было справедливо неравенство

$$|f^{l_i}(x') - f^{l_i}(x'')| < \varepsilon \tag{3.2.12}$$

(неравенство $|id(y') - id(y'')| = |y' - y''| < \varepsilon$ верно в силу выбора δ_i).

Используя равномерную непрерывность подходящей функции $\overline{\Omega}^F_{l_i}$ на компакте $\Omega_p(f)$, для числа $\delta_i > 0$ найдем $0 < \vartheta_i \leq \delta_i$ так, чтобы для любых $\overline{x}$, $\overline{x}' \in \Omega_p(f)$, удовлетворяющих неравенству $|\overline{x} - \overline{x}'| < \vartheta_i$, выполнялось

$$dist_{I_2}(\overline{\Omega}^F_{l_i}(\overline{x}), \overline{\Omega}^F_{l_i}(\overline{x}')) < \delta_i. \tag{3.2.13}$$

Так как точка $(x;\, y)$ лежит на графике функции $\overline{\Omega}^F_{l_i,1}$, то в силу определения функций $\overline{\Omega}^F_{l_i,1}$ найдется прообраз $(\overline{x};\, y)$ точки $(x;\, y)$ (относительно отображения $F_{l_i,1}$) такой, что $\overline{x} \in \{(f_{|\Omega_p(f)})^{-l_i}(x)\}$, $y \in \overline{\Omega}^F_{l_i}(\overline{x})$. Так как множество $Per^*_p(f)$ всюду плотно в $\Omega_p(f)$, то в качестве точки $\overline{x}'$ такой, что $|\overline{x} - \overline{x}'| < \vartheta_i$, выберем произвольную точку из $Per^*_p(f)$, лежащую в ϑ_i-окрестности точки $\overline{x}$. Используя неравенство (3.2.13), укажем точку $y' \in \overline{\Omega}^F_{l_i}(\overline{x}')$ так, чтобы $|y - y'| < \delta_i$. Положим $x' = \overline{x}'$, $x'' = \overline{x}$, $y'' = y$. Так как $\vartheta_i \le \delta_i$, то, из неравенства (3.2.12) следует, что $F_{l_i,1}(x',\, y') \in U_\varepsilon((x;\, y))$. В силу выбора точки $\overline{x}'$ имеем: $F_{l_i,1}(x',\, y') \in (\overline{\Omega}^F_{l_i,1})^{P^*}$ (здесь $(\overline{\Omega}^F_{l_i,1})^{P^*}$ – график соответствующей многозначной функции). Таким образом, неравенство (3.2.11), а вместе с ним и равенство (3.2.10), доказано.

2. Используя формулы (3.2.1) – (3.2.2), (3.2.10), получаем

$$\overline{((\overline{\Omega}^F_{l_i,1})')^{P^*}} = (\overline{\Omega}^F_{l_i,1})'. \qquad (3.2.14)$$

3. Применяя свойства операции замыкания конечного объединения множеств и свойства верхнего предела последовательности множеств (см. [47, гл.2, §29, IV] и подпараграф 1.1.1), убеждаемся в справедливости равенства (3.2.9).

Лемма 3.2.1 доказана.

Если $F \in T^1_{*,1}(I)$, то графики непрерывных функций $(\Omega^F_{l_i,1})'$ - замкнутые множества. Поэтому в силу леммы 3.2.1 справедливо

Следствие 3.2.1. *Для произвольного отображения $F \in T^1_{*,1}(I)$, удовлетворяющего условиям теоремы 3.2.1, верно равенство*

$$\underset{i\to+\infty}{Ls}(\Omega^F_{l_i,1})' = \underset{i\to+\infty}{Ls}((\Omega^F_{l_i,1})')^{P^*}.$$

Рассмотрим множество $((\overline{\Omega}^F_{l_i,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,\,l_i)}$ при любом $i \ge i^*$. Пусть x – произвольная точка из $Per^*_p(f,\, 2^{-\gamma}l_i)$ при некотором $0 \le \gamma \le j(i)$. Тогда единственный прообраз x относительно отображения $(f_{|Per^*_p(f)})^{l_i}$ совпадает с x. Поэтому в силу равенств (3.2.2) и (3.2.4) выполнено

$$((\overline{\Omega}^F_{l_i,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,\,l_i)} = \overline{\Omega}^F_{l_i\;|Per^*_p(f,\,l_i)}. \qquad (3.2.15)$$

Лемма 3.2.2. *Пусть $F \in T^1_{*,1}(I)\bigcup T^1_{*,2}(I)$, а инвариантное множество $Per^*_p(f)$ всюду плотно в $\Omega_p(f)$. Тогда существует топологический предел $\underset{i\to+\infty}{Lim}((\overline{\Omega}^F_{l_i,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,\,l_i)}$, и справедливо равенство*

$$\underset{i\to+\infty}{Lim}((\overline{\Omega}^F_{l_i,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,\,l_i)} = \overline{\bigcup_{x\in Per^*_p(f)} \{x\} \times WN_{\Omega_p}(\widetilde{g}_x)}. \qquad (3.2.16)$$

Доказательство. 1. Покажем сначала, что при любом $x \in Per^*_p(f)$ (m - период x) выполнено

$$(\overline{\Omega}^F_m)(x) = WN_{\Omega_p}(\widetilde{g}_x). \qquad (3.2.17)$$

Действительно, пусть y – произвольная точка множества $WN_{\Omega_p}(\widetilde{g}_x)$. Тогда в силу определения 1.2.3 $(x,\, y) \in \Omega^{F_{m|\Omega_p^*(F)}}$. Используя замечание 1.2.2, получаем отсюда, что $(x,\, y) \in \overline{\Omega}^F_m$, и верно включение $WN_{\Omega_p}(\widetilde{g}_x) \subseteq (\overline{\Omega}^F_m)(x)$.

Обратно, пусть $y \in (\overline{\Omega}^F_m)(x)$. Так как любая точка множества $\Omega_p(f)$ не изолирована в $\Omega_p(f)$, а $F \in T^1_{*,\,1}(I) \bigcup T^1_{*,\,2}(I)$, то в силу определения 0.0.7 выполнено включение $(\overline{\Omega}^F_m)(x) \subseteq WN_{\Omega_p}(\widetilde{g}_x)$. Поэтому верно равенство (3.2.18).

2. В силу формулы (3.2.15) доказательство существования $\underset{i\to+\infty}{Lim}\,((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}{}_{|Per_p^*(f,\,l_i)}$ достаточно провести, используя последовательность функций $\{\overline{\Omega}^F_{l_i}{}_{|Per_p^*(f,\,l_i)}\}_{i\geq i^*}$.

Из формул (3.2.3) и (3.2.18) следует, что при любом $x \in Per_p^*(f,\, l_i)$ выполнено

$$(\overline{\Omega}^F_{l_i})'(x) = WN_{\Omega_p}(\widetilde{g}_x). \tag{3.2.18}$$

Так как $l_i = m^* n^* i!$, то, вновь используя равенства (3.2.3) и (3.2.18), убеждаемся в справедливости включений

$$(\overline{\Omega}^F_{l_i})'{}_{|Per_p^*(f,\,l_i)} \subseteq (\overline{\Omega}^F_{l_{i+1}})'{}_{|Per_p^*(f,\,l_{i+1})}. \tag{3.2.19}$$

Из (3.2.19) следует существование топологического предела $\underset{i\to+\infty}{Lim}\,(\overline{\Omega}^F_{l_i})'{}_{|Per_p^*(f,\,l_i)}$, а следовательно, в силу формулы (3.2.15) и существование равного ему $\underset{i\to+\infty}{Lim}\,((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}{}_{|Per_p^*(f,\,l_i)}$. Последнее вместе с формулой (3.2.18) влечет за собой справедливость равенства

$$\underset{i\to+\infty}{Lim}\,((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}{}_{|Per_p^*(f,\,l_i)} = \overline{\bigcup_{x\in Per_p^*(f)} \{x\} \times WN_{\Omega_p}(\widetilde{g}_x)}. \tag{3.2.20}$$

3. Установим справедливость равенства

$$\underset{i\to+\infty}{Ls}\,((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*} = \underset{i\to+\infty}{Lim}\,((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}{}_{|Per_p^*(f,\,l_i)}. \tag{3.2.21}$$

В самом деле, при любом $i \geq i^*$ верно включение

$$((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}{}_{|Per_p^*(f,\,l_i)} \subset ((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}. \tag{3.2.22}$$

Поэтому

$$\underset{i\to+\infty}{Lim}\,((\overline{\Omega}^F_{l_i,1})')^{P^*}{}_{|Per_p^*(f,\,l_i)} \subseteq \underset{i\to+\infty}{Ls}\,((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}. \tag{3.2.23}$$

Убедимся в справедливости противоположного включения

$$\underset{i\to+\infty}{Ls}\,((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*} \subseteq \underset{i\to+\infty}{Lim}\,((\overline{\Omega}^F_{l_i,1})')^{P^*}{}_{|Per_p^*(f,\,l_i)}. \tag{3.2.24}$$

Действительно, возьмем произвольно точку $(x;\, y) \in \underset{i \to +\infty}{Ls}((\overline{\Omega}^F_{l_i,1})')^{P^*}$. Последнее равносильно тому, что существует последовательность точек $(x_{i_\nu},\, y_{i_\nu}) \in ((\overline{\Omega}^F_{l_{i_\nu},1})')^{P^*}$ $(\nu \geq 1)$, сходящаяся к $(x;\, y)$ (см. [47, гл. 2, § 29, III]).

Используя компактность I, к последовательности множеств $\{((\overline{\Omega}^F_{l_{i_\nu},1})')^{P^*}\}_{\nu \geq 1}$ (если она не является сходящейся) применим обобщенную лемму Больцано-Вейерштрасса [47, гл. 2, § 29, VIII] и извлечем сходящуюся подпоследовательность $\{((\overline{\Omega}^F_{l_{i_{\nu(s)}},1})')^{P^*}\}_{s \geq 1}$ (предел которой может быть и пустым множеством). Из предыдущего п. 2 доказательства и включений (3.2.22) следует неравенство

$$\underset{s \to +\infty}{Lim}((\overline{\Omega}^F_{l_{i_{\nu(s)}},1})')^{P^*} \neq \emptyset; \;\; \text{более того,} \;\; (x;\, y) \in \underset{s \to +\infty}{Lim}((\overline{\Omega}^F_{l_{i_{\nu(s)}},1})')^{P^*}.$$

Возьмем произвольно и зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу критерия Коши сходимости последовательности замкнутых множеств полного пространства [47, гл. 3, § 33, III] по числу $\varepsilon > 0$ укажем $s_0 \geq 1$ так, что при любых s', $s'' \geq s_0$ верно неравенство

$$dist_I(((\overline{\Omega}^F_{l_{i_{\nu(s')}},1})')^{P^*},\, ((\overline{\Omega}^F_{l_{i_{\nu(s'')}},1})')^{P^*}) < \varepsilon, \tag{3.2.25}$$

Будем считать выполненным неравенство $s \geq s_0$. Имеем:

$$(x_{i_{\nu(s)}},\, y_{i_{\nu(s)}}) \in ((\overline{\Omega}^F{}_{l_{i_{\nu(s)}},1})')^{P^*}.$$

Выбор последовательности $\{l_i\}_{i \geq i^*}$ влечет за собой справедливость равенства

$$Per^*_p(f) = \bigcup_{i=i^*}^{+\infty} Per^*_p(f,\, l_i).$$

Отсюда следует, что для любого $s \geq s_0$ существует $s' \geq s$ такое, что

$$x_{i_{\nu(s)}} \in Per^*_p(f,\, l_{i_{\nu(s')}}). \tag{3.2.26}$$

Так как $F \in T^1_{*,1}(I) \bigcup T^1_{*,2}(I)$, то, используя равномерную непрерывность функции $(\overline{\Omega}^F_{l_{i_{\nu(s')}},1})'$ на компакте $\Omega_p(f)$ (относительно метрики Хаусдорфа $dist_{I_2}$ в пространстве 2^{I_2} замкнутых подмножеств отрезка I_2), по числу $\varepsilon > 0$ укажем $\delta(s') > 0$ ($\delta(s') \leq \varepsilon$) так, чтобы для любых x', $x'' \in \Omega_p(f)$, удовлетворяющих неравенству $|x' - x''| < \delta(s')$, выполнялось

$$dist_{I_2}((\overline{\Omega}^F_{l_{i_{\nu(s')}},1})'(x'),\, (\overline{\Omega}^F_{l_{i_{\nu(s')}},1})'(x'')) < \varepsilon. \tag{3.2.27}$$

В силу (3.2.25) существует точка $(x',\, y') \in ((\overline{\Omega}^F_{l_{i_{\nu(s')}},1})')^{P^*}$, для которой верны неравенства $|x_{i_{\nu(s')}} - x'| < \delta(s') \le \varepsilon$, $|y_{i_{\nu(s')}} - y'| < \varepsilon$. Применяя неравенство (3.2.27), укажем точку $(x_{i_{\nu(s')}},\, y'') \in (\overline{\Omega}^F_{l_{i_{\nu(s')}},1})'$, для которой выполнено $|y'' - y'| < \varepsilon$. Положим $x_{i_{\nu(s)}} = x_{i_{\nu(s')}}$ и $y'' = y_{i_{\nu(s')}}$. Используя (3.2.26), получаем отсюда, что

$$(x_{i_{\nu(s')}},\, y_{i_{\nu(s')}}) \in ((\overline{\Omega}^F_{l_{i_{\nu(s')}},1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,l_{i_{\nu(s')}})}, \quad \text{причем} \quad |y_{i_{\nu(s)}} - y_{i_{\nu(s')}}| < 2\varepsilon.$$

Таким образом, $(x,\, y) = \lim\limits_{s' \to +\infty} (x_{i_{\nu(s')}},\, y_{i_{\nu(s')}})$, и в силу предыдущего п. 2 верно

$$(x,\, y) \in \underset{i\to+\infty}{Lim}\, ((\overline{\Omega}^F_{l_i,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,l_i)}.$$

Включение (3.2.24) доказано. Последнее вместе с включением (3.2.23) устанавливает справедливость равенства (3.2.21). Из равенств (3.2.9) и (3.2.21) вытекает также независимость топологического предела $\underset{i\to+\infty}{Lim}\, ((\overline{\Omega}^F_{l_i,1})^{P^*})'_{|Per^*_p(f,l_i)}$ от выбора множества $Per^*_p(f)$. Лемма 3.2.2 доказана.

Если $F \in T^1_{*,1}(I)$, то равенство (3.2.18) при любом $x \in Per^*_p(f,\, l_i)$ допускает "продолжение":

$$(\overline{\Omega}^F_{l_i})'(x) = (\Omega^F_{l_i})'(x) = WN_{\Omega_p}(\widetilde{g}_x) = \Omega(\widetilde{g}_x).$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Следствие 3.2.2. *Для произвольного отображения* $F \in T^1_{*,1}(I)$, *удовлетворяющего условиям теоремы 3.2.1, существует топологический предел* $\underset{i\to+\infty}{Lim}\, ((\Omega^F_{l_i,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,l_i)}$, *и верно равенство*

$$\underset{i\to+\infty}{Lim}\, ((\Omega^F_{l_i,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,l_i)} = \overline{\bigcup_{x \in Per^*_p(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)}. \tag{3.2.28}$$

Лемма 3.2.3. *Пусть* $F \in T^1_{*,1}(I) \bigcup T^1_{*,2}(I)$, *а инвариантное множество* $Per^*_p(f)$ *всюду плотно в* $\Omega_p(f)$. *Тогда справедливо равенство*

$$\Omega^{F^{m_* n_*}_{|\Omega^*_p(F)}} = \underset{i\to+\infty}{Lim}\, ((\overline{\Omega}^F_{l_i,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,l_i)}. \tag{3.2.29}$$

Доказательство. В силу формул (3.2.20) и (3.2.28) справедливо включение

$$\underset{i\to+\infty}{Lim}\, ((\overline{\Omega}^F_{l_i,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,l_i)} \subset \Omega^{F^{m_* n_*}_{|\Omega^*_p(F)}}. \tag{3.2.30}$$

Покажем, что верно противоположное включение

$$\Omega^{F^{m_* n_*}_{|\Omega^*_p(F)}} \subset \underset{i\to+\infty}{Lim}\,((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,\,l_i)}. \tag{3.2.31}$$

Для этого убедимся в том, что для произвольной точки $(x,\,y) \in \Omega^*_p(F)$ такой, что $(x,\,y) \notin \underset{i\to+\infty}{Lim}\,((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,\,l_i)}$, выполнено $(x,\,y) \notin \Omega^{F^{m_* n_*}_{|\Omega^*_p(F)}}$.
В самом деле, пусть окрестности $U((x,\,y))$ точки $(x,\,y) \in \Omega^*_p(F)$ и $U(L^*)$ замкнутого множества $L^* = \underset{i\to+\infty}{Lim}\,((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,\,l_i)}$ таковы, что

$$U((x,\,y)) \bigcap U(L^*) = \emptyset.$$

Тогда $U((x,\,y))$ может пересекаться лишь с конечным числом множеств последовательности $\{((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,\,l_i)}\}_{i\ge i^*}$. Используя формулу (3.2.9), выберем окрестность $U'((x,\,y))$ точки $(x,\,y)$, $U'((x,\,y)) \subseteq U((x,\,y))$, так, чтобы она не пересекалась не только ни с одним из множеств указанной выше последовательности, но и ни с одним из множеств последовательности $\{(\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})'\}_{i\ge i^*}$. Может случиться, что при некотором $\tilde{i} \ge i^*$ для полного прообраза порядка $m_* n_* \tilde{i}$ окрестности $U'((x,\,y))$ относительно отображения $F_{|\Omega^*_p(F)}$ выполнено

$$F_{|\Omega^*_p(F)}{}^{-m_* n_* \tilde{i}}(U'((x,\,y))) = \emptyset.$$

Тогда при всех $i \ge \tilde{i}$ имеем:

$$U'((x,\,y)) \cap F_{|\Omega^*_p(F)}{}^{-m_* n_* i}(U'((x,\,y))) = \emptyset, \quad \text{и} \quad (x,\,y) \notin \Omega^{F^{m_* n_*}_{|\Omega^*_p(F)}}.$$

Пусть при всех $i \ge i^*$ выполнено $F_{|\Omega^*_p(F)}{}^{-m_* n_* i}(U'((x,\,y))) \ne \emptyset$. Тогда полный прообраз $(F_{l_i,\,1|\Omega^*_p(F)})^{-1}(U'((x,\,y)))$ непуст и открыт в $\Omega^*_p(F)$. Окрестность $U'((x,\,y))$ выбрана так, что она не пересекается с $(\overline{\Omega}^F_{l_i})'$ при любом $i \ge i^*$ и, следовательно, состоит из блуждающих точек каждого отображения $F_{l_i|\Omega^*_p(F)}$. Поэтому в силу непрерывности функций $(\overline{\Omega}^F_{l_i})'$ при $i \ge i^*$ найдется универсальная окрестность $U''((x,\,y)) = U''_1(x) \times U''_2(y)$ точки $(x,\,y)$, $U''((x,\,y)) \subseteq U'((x,\,y))$, для которой, в частности, верно

$$\begin{gathered}(F_{l_i,\,1|\Omega^*_p(F)})^{-1}(U''((x,\,y))) \bigcap \\ F_{l_i|\Omega^*_p(F)}((F_{l_i,\,1|\Omega^*_p(F)})^{-1}(U''((x,\,y)))) = \emptyset.\end{gathered} \tag{3.2.32}$$

К обеим частям равенства (3.2.32) применим отображение $F_{l_i,\,1|\Omega_p^*(F)}$ $(i \geq i^*)$ и воспользуемся формулами (0.0.13) – (0.0.14). Тогда при всех $x'' \in \Omega_p(f) \cap f^{-l_i}(U_1''(x))$, $x' = f^{l_i}(x'')$ $(x' \in \Omega_p(f) \bigcap U_1''(x))$, получаем:

$$U_2''(y) \bigcap g_{x'',\,2l_i}(U_2''(y)) = U_2''(y) \bigcap g_{x',\,l_i}(U_2''(y)) = \emptyset.$$

Отсюда следует, что $(x,\, y) \notin \Omega^{F^{m_* n_*}_{|\Omega_p^*(F)}}$, и верно включение (3.2.31). Последнее вместе с включением (3.2.30) устанавливает справедливость равенства (3.2.29).

Лемма 3.2.3 доказана.

Следствие 3.2.3. *Пусть* $F \in T^1_{*,\,1}(I)$ *и удовлетворяет условиям теоремы 3.2.1. Тогда справедливо равенство*

$$\Omega^{F^{m^* n^*}_{|\Omega_p^*(F)}} = \underset{i \to +\infty}{Lim}\, ((\Omega^F_{l_i,\,1})')^{P^*}{}_{|Per(f_{|\Omega_p(f)}, l_i)}. \tag{3.2.33}$$

Таким образом, леммы 3.2.1 - 3.2.3 и следствия 3.2.1 - 3.2.3 доказывают справедливость равенств (3.2.6) и (3.2.8).

3.2.2 Слабо неблуждающие точек относительно семейства отображений в слоях над блуждающими точками фактора. Завершение доказательства теорем о неблуждающем множестве

В случае косых произведений отображений интервала из пространства $T^1_*(I)$, имеющих факторотображения типа $\succ 2^\infty$, влияние на структуру неблуждающего множества (над $\Omega_p(f)$) могут оказывать слабо неблуждающие точки относительно семейства отображений в слоях над блуждающими точками фактора из произвольного множества с замыканием, пересекающимся с $\Omega_p(f)$, но не содержащимся в $\Omega_p(f)$[7].

Эту часть работы мы начнем с доказательства следующего общего свойства косых произведений из пространства $T^1_*(I)$, имеющих факторотображения типа $\succ 2^\infty$.

---

[7] Подтверждающий пример получается, если, в частности, в косом произведении, указанном в примере 1.2.2 из подраздела 1.2.3, вместо тождественного факторотображения использовать "модельное"отображение (3.1.1), но при этом сохранить отображения в слоях.

Предложение 3.2.2 [81], [108]. *Пусть* $F \in T^1_*(I)$ *имеет фактороотображение типа* $\succ 2^\infty$. *Тогда значение* $\Omega^{F^{m_*n_*}}(x)$ Ω*-функции отображения* $F^{m_*n_*}$ *в любой точке* $x \in \Omega_p(f)$ *определено в силу равенства*

$$\Omega^{F^{m_*n_*}}(x) = (\mathop{Ls}\limits_{i\to+\infty} (\Omega^F_{m^*n^*i,1})^{ex'}{}_{|U_{1,\,\varepsilon_i}(x)})(x),$$

где $U_{1,\,\varepsilon_i}(x)$ *– произвольная* ε_i*-окрестность в* I_1 *точки* $x \in \Omega_p(f)$, *причем* $\lim\limits_{i\to+\infty} \varepsilon_i = 0$.

Доказательство. 1. Убедимся в том, что при любом $x \in \Omega_p(f)$ верно включение

$$(\mathop{Ls}\limits_{i\to+\infty} (\Omega^F_{m^*n^*i,1})^{ex'}{}_{|U_{1,\,\varepsilon_i}(x)})(x) \subset \Omega^{F^{m_*n_*}}(x). \tag{3.2.34}$$

Имеем: $\Omega^{F^{m_*n_*}_{|\Omega^*_p(F)}} \subseteq \Omega^{F^{m_*n_*}}$. Поэтому, если $\mathop{Ls}\limits_{i\to+\infty} (\Omega^F_{m^*n^*i,1})^{ex'}{}_{|U_{1,\,\varepsilon_i}(x)} \subset \Omega^{F^{m_*n_*}_{|\Omega^*_p(F)}}$, то включение (3.2.34) выполнено.

Будем предполагать, что множество $\mathop{Ls}\limits_{i\to+\infty} (\Omega^F_{m^*n^*i,1})^{ex'}{}_{|U_{1,\,\varepsilon_i}(x)} \setminus \Omega^{F^{m_*n_*}_{|\Omega^*_p(F)}}$ непусто. Установим справедливость включения (3.2.34) для точек

$$(x,\, y) \in \mathop{Ls}\limits_{i\to+\infty} (\Omega^F_{m^*n^*i,1})^{ex'}{}_{|U_{1,\,\varepsilon_i}(x)} \setminus \Omega^{F^{m_*n_*}_{|\Omega^*_p(F)}} \tag{3.2.35}$$

при $x \in \Omega_p(f)$, где $\{\varepsilon_i\}_{i \ge i^*}$ – произвольная бесконечно малая последовательность положительных чисел.

Покажем, что для любой окрестности $U_\varepsilon((x,\, y))$ точки $(x,\, y)$ в I, где $x \in \Omega_p(f)$, можно указать натуральное число $r = r(\varepsilon)$ и точку $(x_r,\, y_r) \in U_\varepsilon((x,\, y))$ так, чтобы для некоторого $j = j(r)$ выполнялось

$$(x_r,\, y_r),\ F^{m^*n^*j}(x_r,\, y_r) \in U_\varepsilon((x,\, y)). \tag{3.2.36}$$

Действительно, в силу утверждения (6) предложения 3.1.1 $\Omega_p(f)$ – совершенное нигде не плотное инвариантное гиперболическое множество, для которого найдутся числа $\alpha = \alpha(f) > 0$ и $c = c(f) > 1$ такие, что для любых $x \in \Omega_p(f)$ и $n \ge 1$ верно неравенство $|(f^n(x))'| > \alpha c^n$. Отсюда следует, что существует $\bar{i} \ge i^*$, для которого выполнено

$$\inf_{x \in \Omega_p(f)} \{|(f^{\bar{i}}(x))'|\} > 1. \tag{3.2.37}$$

Используя неравенство (3.2.37) и C^1-гладкость f, укажем окрестность $U_1(\Omega_p(f))$ множества $\Omega_p(f)$ так, чтобы при всех $k \ge 1$ выполнялось

$$(f_{|U_1(\Omega_p(f))})^{-k\bar{i}}(\overline{U_1(\Omega_p(f))}) \subset U_1(\Omega_p(f)). \tag{3.2.38}$$

В силу (3.2.38) при $k = m^* n^* i$ выполнено

$$\begin{gathered}\bigcap_{i=i^*}^{+\infty} (f_{|U_1(\Omega_p(f))})^{(-m^* n^* \bar{i}) i}(U_1(\Omega_p(f))) = \\ \mathop{Lim}_{i\to+\infty} (f_{|U_1(\Omega_p(f))})^{(-m^* n^* \bar{i}) i}(U_1(\Omega_p(f))) = \Omega_p(f).\end{gathered} \tag{3.2.39}$$

Используя (3.2.35) и (3.2.39), укажем сходящуюся к $(x,\, y)$ последовательность точек $\{(x_{i_r},\, y_{i_r})\}_{r\geq 1}$ такую, что $x_{i_r} \notin \Omega_p(f)$, и

$$x_{i_r} \in (f_{|U_1(\Omega_p(f))})^{(-m^* n^* \bar{i}) i_r}(U_1(\Omega_p(f))), \quad y_{i_r} \in ((\Omega^F_{(m^* n^* \bar{i}) i_r, 1})^{ex'}{}_{|U_{1,\, \varepsilon_{i_r}}})(x_{i_r}). \tag{3.2.40}$$

Из условия равномерной непрерывности $F^{m^* n^* \bar{i}}$ на $\overline{U_1(\Omega_p(f))} \times I_2$ по числу $\varepsilon > 0$ найдем положительное число δ так, чтобы для любых $(x',\, y'),\, (x'',\, y'') \in \overline{U_1(\Omega_p(f))} \times I_2$ таких, что $|x' - x''|,\, |y' - y''| < \delta$, выполнялись неравенства

$$|f^{m^* n^* \bar{i}}(x') - f^{m^* n^* \bar{i}}(x'')|,\ |g_{x',\, m^* n^* \bar{i}}(y') - g_{x'',\, m^* n^* \bar{i}}(y'')| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.2.41}$$

Для определенности, рассмотрим случай, когда второе неравенство в (3.2.41) также, как и первое, удовлетворяется лишь при $\delta < \varepsilon/3$ (каково бы ни было $\varepsilon > 0$).

По числу $\delta > 0$ укажем натуральное число $\overline{r} \geq 1$ так, чтобы при всех $r \geq \overline{r}$ было выполнено $(x_{i_r},\, y_{i_r}) \in U_{\delta/3}((x,\, y))$, где $U_{\delta/3}((x,\, y))$ – $\delta/3$-окрестность точки $(x,\, y)$ в I. В силу второго из соотношений (3.2.40) справедливо $y_{i_r} \in \Omega(g_{x_{i_r},\, k(r)})$, где $k(r) = 2^{-\gamma(r)}(m^* n^* \bar{i}) i_r$, $i_r = 2^{\bar{j}(r)}(2\bar{j}'(r) + 1)$, $(\bar{j}(r) \geq 0,\, \bar{j}'(r) \geq 1)$, $0 \leq \gamma(r) \leq \bar{j}'(r)$ (см. формулу (0.0.27)).

Используя соотношение (0.0.22), выберем число $r \geq \overline{r}$ столь большим, чтобы в $\delta/3$-окрестности $U_{1,\, \delta/3}(x)$ точки x в I_1 существовала периодическая точка $\tilde{x}$ с (наименьшим) периодом $m(\widetilde{x})$, являющимся делителем числа $k(r)$, кратным $m^* n^* \bar{i}$. При этом верно

$$|x_{i_r} - \tilde{x}| < \frac{2}{3}\delta < \delta. \tag{3.2.42}$$

Отметим, что в силу выбора точки $\tilde{x}$ при любом $y \in I_2$ верно равенство $F_{k_r}(x,\, y) = F^{k(r)/m(\tilde{x})}_{m(\tilde{x})}(x,\, y)$ (см. формулу (0.0.13)).

Так как $y_{i_r} \in \Omega(g_{x_{i_r},\, k(r)})$, то в любой окрестности $U_{2,\, \theta}(y_{i_r})$ $(0 < \theta < \delta/3)$ точки y_{i_r} в I_2 найдется точка y'_{i_r} такая, что при некотором $q = q(\theta)$, $q \geq 1$, справедливо равенство

$$g^q_{x_{i_r},\, k(r)}(y'_{i_r}) = y_{i_r} \text{ (см. предложение 1.2.4).} \tag{3.2.43}$$

В силу соотношений (3.2.41) – (3.2.43) и неравенства $\delta < \varepsilon/3$ существуют отрезки отрицательных полутраекторий точек $(x_{i_r},\, y_{i_r})$ и $(\tilde{x},\, y_{i_r})$ относительно F_{k_r}, состоящие из некоторых прообразов этих точек до порядка q включительно и аппроксимирующие друг друга с точностью до $\varepsilon/3$.

Пусть точка $\tilde{y}_{i_r} \in I_2$ такова, что $g^q_{\tilde{x},\, k(r)}(\tilde{y}_{i_r}) = y_{i_r}$, причем $|y'_{i_r} - \tilde{y}_{i_r}| < \varepsilon/3$. Так как одновременно $|y'_{i_r} - y_{i_r}| < \theta$ и $|y_{i_r} - y| < \varepsilon/3$, то $|\tilde{y}_{i_r} - y| < \varepsilon$. Таким образом, $(\tilde{x},\, \tilde{y}_{i_r}) \in U_\varepsilon((x,\, y))$ и $F^{k_r q}(\tilde{x},\, \tilde{y}_{i_r}) = (\tilde{x},\, y_{i_r}) \in U_\varepsilon((x,\, y))$. Последнее означает, что свойство (3.2.36) выполнено для $(x_r,\, y_r) = (\tilde{x},\, \tilde{y}_{i_r})$ и $j = 2^{-\gamma(r)}\bar{i} i_r q$. Следовательно, $(x,\, y) \in \Omega^{F^{m^* n^*}}$, и включение (3.2.34) доказано.

2. По аналогии с тем, как это было сделано при доказательстве леммы 3.2.3, убеждаемся, что при любом $x \in \Omega_p(f)$ верно и противоположное (3.2.34) включение $\Omega^{F^{m_* n_*}}(x) \subset (\underset{i \to +\infty}{Ls}(\Omega^F_{m^* n^* i,1})^{ex'}{}_{|U_{1,\, \varepsilon_i}(x)})(x)$. Последнее вместе с (3.2.34) устанавливает справедливость предложения 3.2.2. Предложение 3.2.2 доказано.

Подчеркнем, что утверждение предложения 3.2.2 верно для косых произведений, принадлежащих любому из подпространств $T^1_{*,\, j}$ $(1 \le j \le 4)$. В частности, предложение 3.2.2 доказывает равенство (3.2.7) для отображений из подпространств $T^1_{*,\, 1}(I)$, $T^1_{*,\, 2}(I)$ и, тем самым, завершает доказательство теорем 3.2.1 и 3.2.2.

Теоремы 3.2.1 и 3.2.2 доказаны.

Результаты подпараграфов 3.2.1 и 3.2.2 опубликованы в статьях [75], [81], [107], [108].

3.2.3 Хаотический аттрактор - одномерный разветвленный континуум с множеством точек ветвления мощности континуум

В § 2.3 главы 2 построен пример нехаотического аттрактора у простейшего косого произведения отображений интервала, представляющего собой невырожденный вертикальный отрезок.

В этой части работы, используя результаты раздела 3.1.2, мы укажем отображение $F \in T^1_{*,\, 1}(I)$, обладающее глобальным хаотическим аттрактором, представляющим собой "дико"разветвленный (имеющий множество точек ветвления мощности континуум) одномерный континуум[8].

Отметим, что в настоящее время дискретные динамические системы на одномерных разветвленных континуумах являются одним из наиболее активно изучаемых объектов низкоразмерностной динамики (см., например, [25] - [27], [158] – [160]).

Определение 3.2.1. Под *хаотическим аттрактором* косого произведения отображений интервала $F \in T^1(I)$ будем понимать замкнутое множество $A^* \subset I$, обладающее поглощающей окрестностью и такое, что сужение $F_{|A^*}$ имеет положительную топологическую энтропию (ср. с определением 2.3.1 нехаотического аттрактора, приведенным в § 2.3).

Рассмотрим отображение

$$F(x,\, y) = (4x(1-x),\, g_x(y)),$$

с отображениями в слоях $g_x(y)$, определенными в силу (3.1.2). Тогда $F \in T^1([0,\, 1]^2)$, но $F \notin T^1_*([0,\, 1]^2)$ (f – топологически транзитивное отображение).

Основные свойства отображения F сформулированы в следующем утверждении.

Предложение 3.2.3 [40]. *Неблуждающее множество* $\Omega(F)$ *косого произведения* F *обладает следующими свойствами:*

(1) $A^* = \Omega(F)$ *– глобальный аттрактор* F*;*

(2) A^* *– одномерный разветвленный континуум такой, что мощность множества его точек ветвления* $R(A^*)$ *есть континуум, и верно равенство* $\overline{R(A^*)} = [0,\, 1]\times\{0\}$[9]*; кроме того,* $ord_{A^*}((x;0)) = 3$ *для всех* $(x;0) \in R(A^*)$*, и* A^* *не содержит простой замкнутой кривой (то есть кривой, гомеоморфной окружности);*

(3) *любая точка из массивного множества (в* $[0,\, 1] \times \{0\}$*) точек с всюду плотны-*

---

[8] Компактное метрическое пространство называется *континуумом.* Пусть X – одномерный континуум, а точка x такова, что число компонент множества $X \setminus \{x\}$ конечно. Число этих компонент называется *порядком точки* x (обозначается через $ord_X(x)$). Точка $x \in X$ порядка, удовлетворяющего неравенству $ord_X(x) \geq 3$, называется *точкой ветвления* X (множество точек ветвления X обозначим через $R(X)$) (см. [47, гл. 5, 6, §§47, 51, I, VI]).

[9] Среди точек множества $R(A^*)$ содержатся точки $(x;\, 0)$, где (i) $x \in Per(f) \setminus \{0\}$; (ii) x – произвольная гомоклиническая точка к произвольной периодической точке из интервала $(0,\, 1)$; (iii) x – произвольная f-рекуррентная точка.

ми траекториями в $[0,\,1]\times\{0\}$ *имеет порядок 2; более того, произвольная точка этого множества является точкой локальной связности* A^**; в то же время любая точка* $(x;\,y)$*, где* y *принадлежит срезу* $(\Omega(F))(x)$*, не является точкой локальной связности* A^* *для произвольной* f*-рекуррентной непериодической точки* x*;*

(4) *отображение* F *демонстрирует смешанную динамику на аттракторе* A^* *в следующем естественном смысле: любое замкнутое инвариантное множество вертикальных отрезков из* A^* *над точками* $\{(x;\,0),\,\ldots(f^{n-1}(x);\,0)\}$ *для произвольной точки* $x\in Per(f)$ *(*n *– (наименьший) период* x *относительно* f*, совпадающий с (наименьшим) периодом точки* $(x;\,0)$ *относительно* F*) состоит из* F*-периодических орбит с тем же самым (наименьшим) периодом* n*;* F *– хаотическое отображение на горизонтальном инвариантном отрезке* $[0,\,1]\times\{0\}$ *аттрактора* A^**.*

Обозначим через A^*_x замкнутое инвариантное множество вертикальных отрезков из A^* над точками $\{(x;\,0),\,\ldots(f^{n-1}(x);\,0)\}$ для любого $x\in Per(f)$. Тогда из формул (3.1.2) следует, что $h(F_{|A^*_x})=0$; в тоже время $h(F_{|[0,\,1]\times\{0\}})>0$, где $h(\cdot)$ – топологическая энтропия отображения.

Доказательство. 1. В рассматриваемом случае $\Omega(f)=[0,\,1]$. В силу формул (3.1.2) функции Ω^F_n и $\Omega^F_{n,\,1}$ непрерывны на отрезке $[0,\,1]$ при любом $n\geq 1$ (см. п.п. 1 и 2 доказательства предложения 3.1.2). Используя компактность $[0,\,1]^2$, получаем отсюда, что множество $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}\Omega^F_{n,\,1}$ – континуум (см. [47, гл.5, §47,II]).

2. Повторяя рассуждения, проведенные в п. 3 доказательства предложения 3.1.2, убеждаемся в том, что $\Omega(F)=\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}\Omega^F_{n!,\,1}=\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}\Omega^F_{n,\,1}$. Следовательно, $A^*=\Omega(F)$ – континуум. Покажем, что A^* – глобальный аттрактор отображения F.

В самом деле, применим неравенство (3.1.15) для любого $x\in[0,\,1]$ и $y=1$. Тогда

$$[0,\,1]^2\supset F([0,\,1]^2)\supset\ldots\supset F^n([0,\,1]^2)\supset\ldots\supset A^*. \qquad (3.2.44)$$

Имеем: $\omega_F((x;\,y))\subset\Omega(F)$ для любой точки $(x;\,y)\in[0,\,1]^2$ ($\omega_F(\cdot)$ – ω-предельное множество траектории относительно F). Тогда (3.2.44) влечет за собой равенство $A^*=\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}F^n([0,\,1]^2)$, то есть поглощающая окрестность A^* совпадает с фазовым пространством $[0,\,1]^2$, и $A^*=\Omega(F)$ – глобальный аттрактор F.

Так как $h(F_{|A^*})\geq h(F_{|[0,\,1]\times\{0\}})>0$, то A^* – хаотический аттрактор отображения F (см. определение 3.2.1).

3. Заметим, что для множеств точек разрыва $S_d(\Omega^F)$ и периодических точек $Per(f)$ фактора $f(x) = 4x(1-x)$; точек непрерывности $S_c(\Omega^F)$ Ω-функции и множества транзитивных точек $P_t(f)$ фактора f отображения F справедливы включения

$$Per(f) \subset S_d(\Omega^F), \;\; P_t(f) \subset S_c(\Omega^F)$$

(см. п.4 доказательства предложения 3.1.2). Повторяя рассуждения п.4 доказательства предложения 3.1.2, убеждаемся в том, что для произвольной точки $x \in P_t(f)$ справедливо равенство

$$\Omega^F(x) = \{0\}, \tag{3.2.45}$$

а для произвольной точки $x \in Per(f)$ – включение

$$\Omega^F(x) \supset [0,\, x_n^*(x)], \tag{3.2.46}$$

где n – наименьший период x, а $x_n^*(x) = \max\{x,\, f(x),\, \ldots,\, f^{n-1}(x)\}$.

Обратим внимание на то, что множество $C_t(\Omega^F) = S_c(\Omega^F) \bigcap P_t(f) = P_t(f)$ есть множество 2-ой категории Бэра, всюду плотное на отрезке $[0,\, 1] \times \{0\}$.

4. Убедимся в том, что не существует дуги γ в A^* такой, что $pr_1(\gamma)$ – невырожденный промежуток, причем $\gamma \bigcap ([0,\, 1] \times \{0\}) = \emptyset$.

Предположим противное. Тогда в силу п. 3 невырожденный промежуток $pr_1(\gamma)$ содержит точку $x \in C_t(\Omega^F)$. При сделанном предположении срез $(A^*)(x)$ содержит хотя бы точки $y = 0$ и $y = (\gamma)(x)$, где $(\gamma)(x) \neq 0$. Полученное противоречие с равенством (3.2.45) доказывает отсутствие дуги γ в A^* с указанными выше свойствами.

Отсюда немедленно получаем, что, во-первых, A^* не содержит простой замкнутой кривой; во-вторых, любая ветвь, исходящая из отрезка $[0,\, 1] \times \{0\}$ и несовпадающая с этом отрезком (существование таких ветвей следует из связности A^* и разрывности Ω-функции в точках множества $Per(f) \setminus \{0\}$), вертикальна; в-третьих, $R(A^*) \subset [0,\, 1] \times \{0\}$; в четвертых, топологическая размерность $dimA^*$ равна 1.

Используя соотношения (3.2.45) and (3.2.46), получаем, что $ord_{A^*}(x;\, 0) = 2$ для каждой точки $x \in C_t(\Omega^F)$, и $ord_{A^*}(x;\, 0) = 3$ для каждой точки $x \in Per(f) \setminus \{0\}$. Последнее означает, что $(Per(f) \setminus \{0\}) \times \{0\} \subset R(A^*)$, и $\overline{R(A^*)} = [0,\, 1] \times \{0\}$. Отметим также, что доказанное в п.4 геометрическое свойство аттрактора A^* влечет за собой справедливость равенств $ord_{A^*}(x;\, 0) = 3$ для любой точки $(x;\, 0) \in R(A^*)$, и $ord_{A^*}(0;\, 0) = 2$.

5. Топологическая структура A^* сложнее, чем топологическая структура дендрита[10]. Действительно, факторотображение $f(x) = 4x(1-x)$ содержит континуум минимальных множеств (см. [22, гл. 1, § 3]). Пусть $M(f)$ – произвольное бесконечное минимальное множество f. Тогда $M(F) = M(f) \times \{0\}$ – бесконечное минимальное множество F. Пусть $x \in M(f)$ – произвольная рекуррентная точка f. Используя формулы (3.1.7) и (3.1.11), получаем включение

$$(\Omega(F))(x) \supset [0, \, s(M(f))], \tag{3.2.47}$$

где $s(M(f))$ – точная верхняя граница множества $M(f)$, $0 < s(M(f)) < 1$. Следовательно, $M(F) \subset R(A^*)$, и множество $R(A^*)$ имеет мощность континуума. В то же время произвольный дендрит имеет не более, чем счетное множество точек ветвления [47, гл. 6, § 51, VI]. Так как $x = \lim\limits_{q \to +\infty} f^{p_q}(x)$ для некоторой последовательности $\{p_q\}_{q \geq 1}$, то из (3.2.47) следует, что A^* не является локально связным континуумом в произвольной точке $(x; \, y)$ при $x \in M(f)$, $y \in (A^*)(x)$. В то же время любой дендрит есть локально связный континуум [47, гл. 6, § 51, VI].

6. Отметим, что множество точек локальной связности аттрактора A^* непусто. В самом деле, силу равенства (3.2.45) для любой точки $x \in C_t(\Omega^F)$ и произвольной последовательности точек $\{x_m\}_{m \geq 1} \subset R(A^*)$, сходящейся к x, верно равенство

$$\lim_{m \to +\infty} l(\gamma_m) = 0,$$

где $l(\gamma_m)$ – длина вертикального отрезка γ_m, исходящего из точки ветвления x_m $(m \geq 1)$ аттрактора A^*. Поэтому все точки множества $C_t(\Omega^F)$ есть точки локальной связности A^*. Предложение 3.2.3 доказано.

Для сравнения укажем, что странный гиперболический аттрактор в плоскости (аттрактор Р.В.Плыкина [161]) не содержит точек локальной связности. Отображение F, указанное в данном разделе работы, не обладает даже частичной гиперболичностью по переменной y.

Ω-функция Ω^F косого произведения отображений интервала, указанного в этой части работы, имеет максимально допустимое (для функции, полунепрерывной сверху)

---

[10] *Дендритом* называется локально связный континуум, несодержащий дуг, гомеоморфных окружности [47, гл. 6, § 51, VI].

множество точек разрыва, и также, как Ω-функция Ω^{F_1} отображения F_1, указанного в доказательстве предложения 3.1.2, может рассматриваться, как аналог функции Римана в классическом анализе.

Приведенный в разделе 3.2.3 пример хаотического аттрактора с разрывной Ω-функцией показывает, что свойство разрывности Ω-функции не может быть положено в основу общего определения нехаотического аттрактора динамической системы (ср. с [71]).

Результаты подраздела 3.2.3 опубликованы в статье [40].

3.3 О неблуждающем множестве отображений из подпространств $T^1_{*,\,3}(I)$ и $T^1_{*,\,4}(I)$

В этой части работы дано описание неблуждающего множества косых произведений отображений интервала из подпространств $T^1_{*,\,3}(I)$ и $T^1_{*,\,4}(I)$. Отметим, в частности, что отображение, построенное при доказательстве предложения 3.1.5, показывает, что теоремы 3.2.1 и 3.2.2 неверны для косых произведений из подпрострacтва $T^1_{*,\,4}(I)$.

Пусть F – произвольное косое произведение отображений интервала из множества $T^1_{*,\,3}(I) \bigcup T^1_{*,\,4}(I)$, а $\{\overline{\Omega}^F_{l^*_{i_k},\,1}\}_{k\geq 1}$ – подпоследовательность всех разрывных функций последовательности $\{\overline{\Omega}^F_{l^*_i,1}\}_{i\geq i^*}$. Пусть, как обычно, $S_d(\overline{\Omega}^F_{l^*_{i_k},1})$ – множество точек разрыва (1-ой категории Бэра) полунепрерывной сверху функции $\overline{\Omega}^F_{l^*_{i_k},1}$ $(k \geq 1)$, а $S_c(\overline{\Omega}^F_{l^*_i})$ $(S_c(\overline{\Omega}^F_{l^*_i,\,1}))$ множество точек непрерывности (2-ой категории Бэра) полунепрерывной сверху многозначной функции $\overline{\Omega}^F_{l^*_i}$ $(\overline{\Omega}^F_{l^*_i,\,1})$ $(i \geq i^*)$. Тогда, если точка $x \in \Omega_p(f)$ такова, что $\{(f_{|\Omega_p(f)})^{-l^*_i}(x)\} \subset S_c(\overline{\Omega}^F_{l^*_i})$, где $\{(f_{|\Omega_p(f)})^{-l^*_i}(x)\}$ – полный прообраз точки x относительно $(f_{|\Omega_p(f)})^{l^*_i}$ (состоящий из конечного числа точек для любого отображения $f \in C^1_\omega(I_1)$), то $x \in S_c(\overline{\Omega}^F_{l^*_i,\,1})$ (см. равенства (1.1.10)).

Построим независящее от индекса i множество, состоящее из точек непрерывности всех функций $\overline{\Omega}^F_{l^*_i,\,1}$ $(i \geq i^*)$. Для этого определим непустое всюду плотное в $\Omega_p(f)$ множество 2-ой категории Бэра

$$S_{c,\,P(f)} = \bigcap_{i=i^*}^{+\infty} (\bigcap_{r=0}^{+\infty} (f_{|\Omega_p(f)})^{-l^*_r}(P(f^{l^*})) \bigcap S_c(\overline{\Omega}^F_{l^*_i})),$$

где $l_0^* = 0$, $l_1^* = l^* = m_* n_*$, $(f_{|\Omega_p(f)})^{-l_r^*}(P(f^{l^*}))$ – полный прообраз порядка l_r^* относительно отображения $f_{|\Omega_p(f)}$ множества $P(f^{l^*})$ непериодических устойчивых по Пуассону точек отображения f^{l^*}. Из определения множества $S_{c,\, P(f)}$ следует, что f^{l^*}-траектория произвольной точки $x \in S_{c,\, P(f)}$ (обозначим ее через $O(x,\, f^{l^*})$) принадлежит $S_c(\overline{\Omega}^F_{l_i^*,\,1})$ при любом $i \geq i^*$.

Положим

$$S_c^* = \bigcup_{x \in S_{c,\, P(f)}} O(x,\, f^{l^*}) \tag{3.3.1}$$

Теорема 3.3.1 [81], [108]. *Пусть* $F \in T^1_{*,\,3}(I) \bigcup T^1_{*,\,4}(I)$. *Тогда справедливы равенства*

$$\Omega^{F^{m^*n^*}_{|\Omega_p^*(F)}} = \underset{i \to +\infty}{Ls}\, \overline{\Omega}^F_{l_i^*,1} = \underset{k \to +\infty}{Ls}\, \overline{\Omega}^F_{l_{i_k}^*,1}{}_{|S_d(\overline{\Omega}^F_{l_{i_k}^*,1})} \bigcup \underset{i \to +\infty}{Ls}\, \overline{\Omega}^F_{l_i^*,1}{}_{|S_c^*} =$$

$$= \underset{k \to +\infty}{Ls}\, \overline{\Omega}^F_{l_{i_k}^*,1}{}_{|S_d(\overline{\Omega}^F_{l_{i_k}^*,1})} \bigcup \overline{\bigcup_{x \in Per_p(f)} \{x\} \times WN_{S_c^*}(\widetilde{g}_x)} =$$

$$= \underset{k \to +\infty}{Ls}\, \overline{\Omega}^F_{l_{i_k}^*,1}{}_{|S_d(\overline{\Omega}^F_{l_{i_k}^*,1})} \bigcup \overline{\bigcup_{x \in S_c^*} \{x\} \times \Omega(g_{x,\, l_i^*(x)})},$$

где $\Omega^{F^{m^*n^*}_{|\Omega_p^*(F)}}$, $\overline{\Omega}^F_{l_{i_k}^*,1}{}_{|S_d(\overline{\Omega}^F_{l_{i_k}^*,1})}$, $\overline{\Omega}^F_{l_i^*,1}{}_{|S_c^*}$ *– графики соответствующих многозначных функций в прямоугольнике* I, $WN_{S_c^*}(\widetilde{g}_x)$ *– множество точек* $y \in I_2$ *таких, что каждая точка* $(x,\, y)$ *является слабо неблуждающей относительно семейства отображений в слоях над точками множества* S_c^* *косого произведения* F_m *(*$m = m(x)$ *– наименьший период* x*).*

Для произвольной точки $x \in \Omega_p(f)$ *и любой ее окрестности* $U_{1,\,\varepsilon_i}(x)$ *такой, что* $\lim\limits_{i \to +\infty} \varepsilon_i = 0$, *справедливо равенство*

$$\Omega^{F^{m^*n^*}}(x) = \Big(\underset{i \to +\infty}{Ls}\, (\Omega^F_{l_i^*,1})^{ex'}{}_{|U_{1,\,\varepsilon_i}(x)}\Big)(x);$$

более того, если $F \in T^1_{*,\,3}(I)$, *то для любой точки* $x \in \Omega_p(f)$ *верно равенство*

$$\Omega^{F^{m^*n^*}}(x) = \Big(\overline{\bigcup_{x \in Per_p(f)} \{x\} \times WN_{U_1(\Omega_p(f))}(\widetilde{g}_x)}\Big)(x),$$

где $WN_{U_1(\Omega_p(f))}(\widetilde{g}_x)$ *– множество точек* $y \in I_2$ *таких, что каждая точка* $(x,\, y)$ *является слабо неблуждающей относительно семейства отображений в слоях над точками произвольной окрестности* $U_1(\Omega_p(f))$ *множества* $\Omega_p(f)$ *в* I_1 *относительно косого произведения* F_m *(см. формулу (0.0.13)).*

Доказательство первой части теоремы 3.3.1 использует идеи, аналогичные примененным при доказательстве теоремы 3.2.2. Справедливость утверждения второй части теоремы 3.3.1 вытекает из предложения 3.2.2.

Так как равенство $\Omega_p(f) = \Omega_p(f^j)$ выполнено при любом $j \geq 1$, то верно следующее утверждение.

Следствие 3.3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 3.3.1. Тогда*

$$\Omega^{F^{m^* n^*}_{|\Omega^*_p(F)}} = \Omega^{F_{\Omega^*_p(F)}}.$$

Теоремы 3.2.1 – 3.3.1 содержат универсальный алгоритм формирования неблуждающего множества отображений из подпространств $T^1_{*,1}(I) - T^1_{*,4}(I)$ над совершенной частью неблуждающего множества C^1-гладкого Ω-устойчивого факторотображения. Утверждение каждой из этих теорем разбито на две части, первая из которых характеризует вклад семейства отображений в слоях над точками совершенной части неблуждающего множества фактора в формирование неблуждающего множества косого произведения, а вторая – вклад семейства отображений в слоях над теми блуждающими точками фактора, предельными для которых являются точки множества $\Omega_p(f)$, в формирование неблуждающего множества косого произведения.

Завершая настоящий параграф, отметим, что теоремы 3.2.1 – 3.3.1 применяются в главе 4 при описании глубины центра отображений из пространств $T^1_{*,j}(I)$ при $1 \leq j \leq 4$, а также в главе 5 при функциональном описании весьма содержательных подмножеств отображений (см. далее) из этих пространств.

Результаты § 3.3 приведены в статьях автора [81], [108].

Глава 4

Проблема Биркгофа о глубине центра для косых произведений со сложной динамикой фактоотображения

В главе 4 рассмотрены вопросы глубины центра C^1-гладких косых произведений отображений интервала, принадлежащих каждому из подпространств $T^1_{*,\,j}(I)$ при $1 \leq j \leq 4$.

В §4.1, кроме множества центральных движений, рассмотрено притягивающее множество $\bigcup\limits_{(x;\,y)\in I} \omega_F((x;\,y))$, установлена его замкнутость для произвольного косого произведения отображений интервала $F \in T^1_{*,\,1}(I)$. Для притягивающего множества доказан аналог классической теоремы о константе Биркгофа для неблуждающего множества. Полученные результаты применены к описанию структуры и глубины центра для отображений из пространства $T^1_{*,\,1}(I)$.

В §4.2 в каждом из подпространств $T^1_{*,\,j}(I)$ при $2 \leq j \leq 4$ доказано существование отображений с незамкнутым притягивающим множеством. Даны оценки глубины центра отображений из пространств $T^1_{*,\,2}(I)$ и $T^1_{*,\,3}(I)$. Что касается отображений из подпространства $T^1_{*,\,4}(I)$, то доказанное в главе 3 предложение 3.1.5 показывает, что в этом случае любой не более, чем счетный ординал, может быть реализован как глубина центра некоторого косого произведения из $T^1_{*,\,4}(I)$.

4.1 О притягивающем множестве и центре отображений из $T^1_{*,1}(I)$

Наряду с неблуждающим множеством и центром, важную роль в свойствах динамической системы играет ее притягивающее множество $\bigcup\limits_{(x;\,y)\in I} \omega_F((x;\,y))$. Справедливы следующие включения, связывающие эти три множества:

$$C(F) \subseteq \bigcup_{(x;\,y)\in I} \omega_F((x;\,y)) \subseteq \Omega(F). \tag{4.1.1}$$

Начнем с формулировок основных результатов данного параграфа. Так, приведенная далее теорема 4.1.1, с одной стороны, распространяет известный результат статьи [162], полученный для непрерывных отображений отрезка, на случай косых произведений отображений интервала из пространства $T^1_{*,1}(I)$; а с другой стороны, вторая часть этой теоремы является аналогом классической теоремы о константе Биркгофа (см. [2, гл. VII, §2] и следующий раздел 4.1.1), но в теореме 4.1.1 неблуждающее множество заменено меньшим по включению притягивающим множеством $\bigcup\limits_{(x;\,y)\in I} \omega_F((x;\,y))$.

Теорема 4.1.1 [81]. *Пусть* $F \in T^1_{*,1}(I)$ *Тогда* $\bigcup\limits_{(x;\,y)\in I} \omega_F((x;\,y))$ *– замкнутое множество, и для любой окрестности* U *множества* $\bigcup\limits_{(x;\,y)\in I} \omega_F((x;\,y))$ *существует* $m = m(U)$ *такое, что время пребывания траектории любой точки из* I *вне* U *не превосходит* m.

Из теоремы 4.1.1 непосредственно следует

Теорема 4.1.2 [81]. *Для множества центральных движений* $C(F)$ *косого произведения* $F \in T^1_{*,1}(I)$ *справедливы равенства*

$$C(F) = \overline{Per(F)} = \Omega(F_{|\Omega(F)}) = \overline{\bigcup_{x\in Per(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_{x|\Omega(\widetilde{g}_x)})}.$$

Таким образом, глубина центра $\gamma(F)$ произвольного отображения $F \in T^1_{*,1}(I)$ не превосходит 2. В то же время существует отображение из пространства $T^1_{*,1}(I)$ с глубиной центра, равной 2.

Приведенная далее теорема 4.1.3 объясняет механизм формирования множества центральных движений косых произведений из пространства $T^1_{*,1}(I)$ над совершенной частью неблуждающего множества факторотображения.

Теорема 4.1.3 [81]. *Пусть* $F \in T^1_{*,1}(I)$. *Тогда существует топологический предел* $\underset{i \to +\infty}{Lim}\, C^F_{l_i\,|\Omega_p(f)}$ *последовательности множеств* $C^F_{l_i\,|\Omega_p(f)}$, *и справедливо равенство*

$$C^F_{|\Omega_p(f)} = \underset{i \to +\infty}{Lim}\, C^F_{l_i\,|\Omega_p(f)},$$

здесь $C^F_{|\Omega_p(f)}$ $(C^F_{l_i\,|\Omega_p(f)})$ *– график сужения* C*-функции (функции* $C^F_{l_i}$*) отображения* F *на множество* $\Omega_p(f)$.

4.1.1 Константа Биркгофа и необходимые результаты об основных динамически предельных множествах отображений отрезка

Эту часть работы мы начнем с классической теоремы о константе Биркгофа [2, гл. VII, §2], которую сформулируем для косых произведений отображений интервала.

Теорема Биркгофа. *Пусть* $U = U(\Omega(F))$ *– произвольная окрестность неблуждающего множества* $\Omega(F)$ *отображения* $F \in T^0(I)$.
Существует натуральное число $\widetilde{n} = \widetilde{n}(U)$ *(константа Биркгофа) такое, что время пребывания траектории любой точки* $(x,\, y) \in I$ *вне* U *не превосходит* $\widetilde{n}$:

$$card\{i : F^i(x,\, y) \notin U(\Omega(F))\} \le \widetilde{n},$$

где $card\{\cdot\}$ *– мощность множества.*

Тонкие взаимосвязи множеств $\Omega(g)$ и $C(g)$ с притягивающим множеством $\bigcup\limits_{t \in J} \omega_g(t)$ для непрерывного отображения g отрезка J в себя исследованы в [162] и для C^1-гладкого отображения g – в [163]. Так, в [162] доказана замкнутость притягивающего множества $\bigcup\limits_{t \in J} \omega_g(t)$ непрерывного отображения g отрезка J в себя, там же установлена справедливость равенства

$$\bigcup_{t \in J} \omega_g(t) = Per(g) \bigcup \Omega^-(g) \bigcup \Omega^+(g), \tag{4.1.2}$$

где через $\Omega^-(g)$ $(\Omega^+(g))$ обозначено множество левосторонне (правосторонне) неблуждающих точек отображения g, то есть таких точек $t \in J$, что для произвольной левосторонней (правосторонней) окрестности $U_1^-(t)$ $(U_1^+(t))$ каждой такой точки существует натуральное число n, для которого верно равенство

$$U_1^-(t) \bigcap g^n(U_1^-(t)) \neq \emptyset \quad (U_1^+(t) \bigcap g^n(U_1^+(t)) \neq \emptyset).$$

Обратим внимание на следующие особенности неблуждающих точек отображений отрезка. Так, если точка $t \in \Omega(g)$ не является ω-предельной, то в силу равенства (4.1.2) выполнено: $t \notin \Omega^-(g) \bigcup \Omega^+(g)$, и, следовательно, t является общей граничной точкой двух смежных для $\Omega(g)$ интервалов (состоящих из блуждающих точек g). Поэтому t – изолированная точка множества $\Omega(g)$. Кроме того, в [163] показано, что все точки из $\bigcup\limits_{t \in G} \omega_g(t) \setminus C(g)$ изолированы в $\Omega(g)$.

Непосредственным следствием равенства (4.1.2) является следующее утверждение.

Критерий различения ω-предельных точек [162]. *Пусть $\varphi \in C^0(J)$. Точка $t \in J$ является ω-предельной для некоторой траектории относительно φ в том и только том случае, если для любой окрестности $U = U(t)$ точки t найдутся точка $t' \in U(t)$ и натуральные числа $m_1 < m_2$ такие, что $f^{m_i}(t') \in U(t)$ $(i = 1,\, 2)$.*

4.1.2 Доказательство основных результатов для отображений из подпространства $T^1_{*,\,1}(I)$

Доказательство теоремы 4.1.1. 1. Так как $f \in C^1_\omega(f)$, то в силу предложения 0.0.1 доказательство теоремы 4.1.1 достаточно провести для вполне инвариантного множества

$$\omega_K(F) = pr_1^{-1}(K(f)) \bigcap (\bigcup_{(x;\, y) \in I} \omega_F((x;\, y))),$$

где $K(f)$ – произвольное локально максимальное квазиминимальное множество отображения f, а $K = pr_1^{-1}(K(f))$. В силу утверждения (6) предложения 3.1.1 и равенства

$$pr_1(\bigcup_{(x;\, y) \in I} \omega_F((x;\, y))) = \bigcup_{x \in I_1} \omega_f(x) \quad \text{(см. раздел 3.1.2)} \tag{4.1.3}$$

для любого ω-предельного множества $\omega_F((x;\,y)) \subset \omega_K(F)$ найдется натуральное число $s \geq 1$ такое, что $(f^s(x),\, g_{x,\,s}(y)) \in K$, и, более того, $f^s(x) \in \omega_f(x)$.

Из определения ω-предельного множества следует, что $f^s(x) \in \omega_f(f^s(x))$, и $\omega_f(f^s(x)) = \omega_f(x)$. Поэтому $(f^s(x);\, g_{x,\,s}(y)) \in pr^{-1}(\omega_{f_{|K(f)}}(f^s(x)))$.

Так как $\omega_F((x;\,y)) = \omega_{F_{|K}}(F^s(x,\,y))$, то получили, что для любой точки $(x,\,y) \in I$ такой, что $\omega_F((x;\,y)) \subset \omega_K(F)$, можно указать точку $(x',\,y') \in K$ (здесь $(x',\,y') = (f^s(x),\, g_{x,\,s}(y))$ при некотором $s \geq 1$), для которой верно $\omega_F((x;\,y)) = \omega_{F_{|K}}((x';\,y'))$. Таким образом, справедливо равенство

$$\omega_K(F) = \bigcup_{(x;\,y)\in K} \omega_{F_{|K}}((x;\,y)).$$

Обратим внимание на то, что точка $f^s(x')$ устойчива по Пуассону, и, следовательно, $\omega_f(f^s(x'))$ есть либо периодическая орбита, либо бесконечное минимальное множество, либо бесконечное квазиминимальное множество f.

2. Теорема 4.1.1 верна, если $\Omega(F_{|K}) = C(F_{|K})$. Поэтому рассмотрим случай, когда $\Omega(F_{|K}) \neq C(F_{|K})$. Пусть $(x^0;\,y^0)$ – произвольная точка множества $\Omega(F_{|K}) \setminus C(F_{|K})$. Так как справедливо

$$\overline{Per(F_{|K}^{m^*n^*})} = \overline{Per(F_{|K})} = \overline{\bigcup_{x\in Per(f_{|K(f)})} \{x\} \times C(\widetilde{g}_x)} \subset C(F_{|K}),$$

то $(x^0;\,y^0) \notin \overline{\bigcup_{x\in Per(f_{|K(f)})} \{x\} \times C(\widetilde{g}_x)}$. Поэтому любая сходящаяся к $(x^0;\,y^0)$ последовательность точек $\{(x_i;\,y_i)\}_{i\geq 1} \in \bigcup_{x\in Per(f_{|K(f)})} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)$ (в силу теоремы 3.2.1 такая последовательность существует) обладает следующим свойством: $y_i \notin C(\widetilde{g}_x)$, и точка y_i изолирована во множестве $\Omega(\widetilde{g}_{x_i})$.

3. Последовательность $\{(x_i;\,y_i)\}_{i\geq 1} \in \bigcup_{x\in Per(f_{|K(f)})} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)$, указанную в п.2, выберем так, чтобы периодические орбиты, порожденные точками последовательности $\{x_i\}_{i\geq 1}$, равномерно аппроксимировали множество $K(f)$ с произвольной степенью точности (см. утверждение (7) предложения 3.1.1). Тогда из п.2 следует, что существует замкнутое множество $\Omega_{(x^0;\,y^0)}(F_{|K}) \subset \Omega(F_{|K})$ со следуюшими свойствами:

(i) $(x^0;\,y^0) \in \Omega_{(x^0;\,y^0)}(F_{|K})$;

(ii) $pr_1(\Omega_{(x^0;\,y^0)}(F_{|K})) = K(f)$;

(iii) существуют окрестности $V'(\Omega_{(x^0;\,y^0)}(F_{|K}))$ множества $\Omega_{(x^0;\,y^0)}(F_{|K})$ и $V''(C(F_{|K}))$

множества $C(F_{|K})$ такие, что

$$V'(\Omega_{(x^0;\,y^0)}(F_{|K}))\bigcap V''(C(F_{|K}))=\emptyset.$$

4. Определим многозначную функцию $\Omega^{F_{|K}}_{(x^0;\,y^0)} : K(f)\to(2^{I_2})_m$, полагая

$$\Omega^{F_{|K}}_{(x^0;\,y^0)}(x)=(\Omega_{(x^0;\,y^0)}(F_{|K}))(x)$$

при любом $x\in K(f)$, где $(\cdot)(x)$, как и ранее, означает срез множества слоем над x. Из п.п.2, 3 следует, что функция $\Omega^{F_{|K}}_{(x^0;\,y^0)}$ полунепрерывна снизу (см. подраздел 1.1.1). В силу свойства (iii) множества $\Omega_{(x^0;\,y^0)}(F_{|K})$ и полунепрерывности сверху Ω-функции введенная выше функция $\Omega^{F_{|K}}_{(x^0;\,y^0)}$ одновременно и полунепрерывна сверху (см. там же). Таким образом, функция $\Omega^{F_{|K}}_{(x^0;\,y^0)}$ непрерывна. Обратим внимание на то, что значение $\Omega^{F_{|K}}_{(x^0;\,y^0)}(x)$ может быть совершенным множеством при любых $x\in K(f)$.

5. Убедимся в том, что $(x^0;\,y^0)\in\omega_K(F)$ в том и только том случае, если существует последовательность точек $(x_i;\,y_i)\in\omega_K(F)$ при всех $i\geq i_1$ при некотором $i_1\geq 1$, удовлетворяющая условиям, указанным в п. 2.

5.1. Действительно, сначала рассмотрим случай, когда $(x^0;\,y^0)\in\omega_{|K}(F)$. Напомним, что $(x^0,\,y^0)$ выбрана так, что $(x^0;\,y^0)\in\Omega(F)\setminus C(F)$.

Пусть $(x^0;\,y^0)\in\omega_{F_{|K}}((x(x^0);\,y(y^0)))$, причем

$$(x(x^0);\,y(y^0))\in V'(\Omega_{(x^0;\,y^0)}(F_{|K}))\bigcap pr^{-1}(\omega_{f_{|K(f)}}(x(x^0)))\quad\text{(см. п.1).}$$

Выберем последовательность точек $\{(x_i;\,y_i)\}_{i\geq1}\in\bigcup\limits_{x\in Per(f_{|K(f)})}\{x\}\times\Omega(\widetilde{g}_x)$, указанную в п.2, так, чтобы периодические орбиты, порожденные точками последовательности $\{x_i\}_{i\geq1}$, равномерно аппроксимировали множество $\omega_{f_{|K(f)}}(x(x^0))$ с произвольной степенью точности. Отметим, что, если $\omega_{f_{|K(f)}}(x(x^0))$ – минимальное множество, то периодические орбиты, порожденные точками $\{x_i\}_{i\geq1}$, не принадлежат этому множеству.

Для определенности, рассмотрим случай, когда $\{F^j(x(x^0);\,y(y^0))\}_{j\geq0}\subset K\setminus\Omega(F_{|K})$. Так как K – компакт, то выполнено

$$\lim_{i\to+\infty} dist_I(\omega_{F_{|K}}((x(x^0);\,y(y^0))),\ \{F^j(x(x^0);\,y(y^0)\}_{j\geq0})=0\ \text{[55, гл. 5, § 3].}\qquad(4.1.4)$$

Воспользуемся равномерной непрерывностью $F_{|K}$ и для произвольного $\varepsilon>0$ и укажем $\delta>0$, $\delta<\varepsilon/3$, выбрав δ столь малым, чтобы для δ-окрестности

$U_\delta(\omega_{F_{|K}}((x(x^0);\, y(y^0))))$ ω-предельного множества $\omega_{F_{|K}}((x(x^0);\, y(y^0)))$ в K выполнялось включение

$$U_\delta(\omega_{F_{|K}}((x(x^0);\, y(y^0)))) \subset V'(\Omega_{(x^0;\, y^0)}(F_{|K})).$$

Из условия равномерной непрерывности многозначной функции $\Omega^{F_{|K}}_{(x^0;\, y^0)}$ на множестве $K(f)$ по числу δ выберем $\delta' > 0$, $\delta' < \delta$.

Из (4.1.4), в частности, следует, что для δ'-окрестности $U_{\delta'}(\omega_{F_{|K}}((x(x^0);\, y(y^0))))$ найдется натуральное число j_0 такое, что при всех $j \geq j_0$ верно включение

$$\{F^j(x(x^0);\, y(y^0))\}_{j \geq j_0} \subset U_{\delta'}(\omega_{F_{|K}}((x(x^0);\, y(y^0)))).$$

Возьмем произвольно натуралные числа $j_3 > j_2 > j_1 \geq j_0$ так, чтобы

$$F^{j_r}(x(x^0);\, y(y^0)) \in U_{\delta'}((x^0;\, y^0)) \ \text{ при } \ r = 1,\, 2,\, 3.$$

По числу $\delta' > 0$ укажем $i_1 \geq 1$ так, чтобы периодические орбиты $Orb_{f_{|K(f)}}(x_i)$, порожденные точками $\{x_i\}_{i \geq i_1}$ равномерно аппроксимировали ω-предельное множество $\omega_{f_{|K(f)}}((x(x^0))$ с точностью до δ'.

Пусть $J_x(y)$ есть смежный интервал к срезу $(\Omega_{(x^0;\, y^0)}(F_{|K}))(x)$ множества $\Omega_{(x^0;\, y^0)}(F_{|K})$ слоем над произвольной точкой $x \in K(f))$, содержащий произвольную точку y и пересекающийся со срезом $(V'(\Omega_{(x^0;\, y^0)}(F_{|K})))(x)$ окрестности $V'(\Omega_{(x^0;\, y^0)}(F_{|K}))$ тем же слоем.

Положим $j = j_3$, $\overline{x} = f^{j_3}(x(x^0))$, $\overline{y} = g_{x(x^0),\, j_3}(y(y^0))$. Обозначим через $U_{\delta',\, \delta}(J_{\overline{x}}(\overline{y}))$ окрестность смежного интервала $J_{\overline{x}}(\overline{y})$, где $U_{\delta',\, \delta}(J_{\overline{x}}(\overline{y})) = U_{1,\, \delta'}(\overline{x}) \times U_{2,\, \delta}(J_{\overline{x}}(\overline{y}))$. В силу равномерной непрерывности функции $\Omega^{F_{|K}}_{(x^0;\, y^0)}$ и свойства равномерной аппроксимируемости множества $\omega_{f_{|K(f)}}(x(x^0))$ периодическими орбитами точек последовательности $\{x_i\}_{i \geq i_1}$ существует последовательность точек $\{\overline{x}_i\}_{i \geq i_1}$, где $\overline{x}_i \in Orb_{f_{|K(f)}}(x_i)$, для которой найдутся смежные интервалы $J_{\overline{x}_i}(y)$, удовлетворяющие неравенству

$$dist_{I_2}((\overline{J_{\overline{x}_i}}(y) \bigcap \overline{U}_{2,\, \delta}(J_{\overline{x}}(\overline{y}))),\, (\overline{J_{\overline{x}}}(\overline{y}) \bigcap \overline{U}_{2,\, \delta}(J_{\overline{x}}(\overline{y})))) < \delta. \tag{4.1.5}$$

Используя неравенство (4.1.5) и $\delta' < \delta$, укажем точки $\overline{y}_i \in J_{\overline{x}_i}(y)$, для которых выполнено $(\overline{x}_i;\, \overline{y}_i) \in U_\delta((x^0,\, y^0))$, причем $\overline{x}_i \in U_{1,\, \delta'}(x^0)$. Тогда в силу выбора числа δ для отрезка траектории $\{F^j(x(x^0);\, y(y^0))\}_{j=j_3}^{j=j_1}$ найдется отрезок отрицательной полутраектории, обозначим его через $\{F^{-j}(\overline{x}_i;\, \overline{y}_i)\}_{j=0}^{j=j_3-j_1}$, каждой точки $(\overline{x}_i;\, \overline{y}_i)$ при $i \geq i_1$, аппроксимирующий $\{F^j(x(x^0);\, y(y^0))\}_{j=j_3}^{j=j_1}$ с точностью до δ' по переменной x и до δ по переменной y. Отсюда, в частности, получаем, что

$$F^{j_1-j_2}(\overline{x}_i;\, \overline{y}_i),\ \ F^{j_1-j_3}(\overline{x}_i;\, \overline{y}_i) \in U_\delta((x^0;\, y^0)), \quad \text{причем} \tag{4.1.6}$$

$$f^{j_1-j_2}(\overline{x}_i),\ f^{j_1-j_3} \in U_{1,\,\delta'}(x^0). \tag{4.1.7}$$

Положим $F^{j_1-j_3}(\overline{x}_i;\, \overline{y}_i) = (\overline{x}'_i;\, \overline{y}'_i)$. Используя соотношения (4.1.6) и (4.1.7), получаем:

$$(\overline{x}'_i;\, \overline{y}'_i),\ F^{j_3-j_2}(\overline{x}'_i;\, \overline{y}'_i),\ F^{j_3}(\overline{x}'_i;\, \overline{y}'_i) \in \{\overline{x}'_i\} \times U_\varepsilon(\Omega(\widetilde{g}_{\overline{x}'_i})). \tag{4.1.8}$$

Так как $\overline{x}'_i \in Orb_{f_{|K(f)}}(x_i)$, то в силу (4.1.6)– (4.1.8) для произвольной окрестности $U_{2,\,\varepsilon}(y_i)$ точки y_i, $i \geq i_1$, найдутся точка $y'_i \in U_{2,\,\varepsilon}(y_i)$ и числа $1 \leq m_1 < m_2$ такие, что

$$y'_i,\ \widetilde{g}^{m_1}_{x_i}(y'_i),\ \widetilde{g}^{m_2}_{x_i}(y'_i) \in U_{2,\,\varepsilon}(y_i).$$

Используя критерий различения ω-предельных точек (см. раздел 4.1.1), получаем отсюда, что y_i принадлежит ω-предельному множеству траектории некоторой точки относительно отображения $\widetilde{g}_{x_i}$.

5.2. Обратно, пусть найдется последовательность точек $(x_i;\, y_i) \in \omega_K(F)$ при всех $i \geq i_1$ такая, что $x_i \in Per(f_{|K(f)})$, $y_i \in \omega_{\widetilde{g}_{x_i}}((y(y_i)))$. Покажем, что $(x^0;\, y^0) \in \omega_K(F)$, где $(x^0;\, y^0) \in \Omega(F_{|K}) \setminus C(F)$.

Имеем: $x^0 \in \omega_{f_{|K(f)}}(x(x^0))$, а точки последовательности $\{x_i\}_{i \geq i_1} \subset Per(f_{K(f)})$ равномерно аппроксимируют множество $\omega_{f_{|K(f)}}(x(x^0))$ с произвольной степенью точности. Так как $y_i \notin C(\widetilde{g}_{x_i})$ $(i \geq i_1)$, то y_i – изолированная непериодическая точка множества $\Omega(\widetilde{g}_{x_i})$. Поэтому траектория $\{\widetilde{g}^m_{x_i}(y(y_i))\}_{m \geq 0}$ содержится во множестве смежных интервалов к $\Omega(\widetilde{g}_{x_i})$, причем найдется $m_0 \geq 1$ такое, что любые две различные точки подтраектории $\{\widetilde{g}^m_{x_i}(y(y_i))\}_{m \geq m_0}$ принадлежат различным смежным интервалам множества $\Omega(\widetilde{g}_{x_i})$. Заметим, что при m, стремящемся к $+\infty$, длины смежных интервалов, содержащих точки подтраектории $\{\widetilde{g}^m_{x_i}(y(y_i))\}_{m \geq m_0}$, стремятся к 0.

Пусть ε – произвольное положительное число, а δ, $\delta' > 0$ выбраны также, как в п.5.1. Точки периодических орбит $Orb_{f_{|K(f)}}(x_i)$ $(i \geq i_1)$ выберем так, чтобы они отслеживали множество $\omega_{f_{|K(f)}}(x(x^0))$ с точностью до δ'. Рассуждая по аналогии с тем, как это было сделано в п.5.1, укажем точку $y(y^0)$ так, чтобы объединение отрезков траекторий $\{F^j(x_i;\, y(y_i))\}_{j=j(i^{(1)})}^{j=j(i^{(2)})}$ при некоторых различных $i^{(1)} = i^{(1)}(i)$, $i^{(2)} = i^{(2)}(i)$

отслеживало с точностью до δ реальную траекторию $\{F^j(x(x^0;\, y(y^0))\}_{j\geq 0}$. Отсюда немедленно получаем, что $(x^0;\, y^0) \in \omega_K(F)$.

6. Из результатов п.5 следует замкнутость множества $\omega_K(F)$. Действительно, в противном случае нашлась бы предельная точка множества $\omega_K(F)$, для которой выполнено $(x^0;\, y^0) \in \Omega(F_{|K}) \setminus \omega_K(F)$. Последнее противоречит результатам п.5. Таким образом, доказано, что $\bigcup\limits_{(x;\, y)\in I} \omega_F((x;\, y))$ – замкнутое множество.

7. Возьмем произвольно точку $(x^0;\, y^0) \in \Omega(F_{|K}) \setminus \omega_K(F)$. Тогда из рассуждений п.5 следует, что точка $(x^0;\, y^0)$ – предельная для тех точек множества

$$\bigcup_{x\in Per^*(f_{K(f)})} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x),$$

которые не являются ω-предельными (здесь $Per^*(f_{K(f)})$ – произвольное инвариантное всюду плотное подмножество множества периодических точек из $K(f)$).

Тогда произвольная окрестность $U = U(\Omega(F_{|K}))$ множества $\Omega(F_{|K})$ такая, что составляющие ее окрестности точек $\Omega(F_{|K})$, имеют достаточно малые радиусы, представима в виде объединения двух окрестностей с непересекающимися замыканиями:

$$U(\Omega(F_{|K})) = U'(\Omega'(F_{|K}))\bigcup U''(\Omega''(F_{|K})),$$

где $U'(\Omega'(F_{|K}))$ – окрестность (в K) множества тех неблуждающих точек отображения $F_{|K}$, которые не являются ω-предельными для F (множество всех таких точек обозначено через $\Omega'(F_{|K})$); а через $U''(\Omega''(F_{|K}))$ – окрестность (в K) множества тех неблуждающих точек отображения $F_{|K}$, которые являются ω-предельными для F (множество всех таких точек обозначено через $\Omega''(F_{|K})$, где $\Omega''(F_{|K}) = \bigcup\limits_{(x;\, y)\in I} \omega_{F_{|K}}((x;\, y)))$.

В силу теоремы Биркгофа (см. предыдущий раздел 4.1.1) найдется натуральное число $m^* = m^*(U)$ такое, что время пребывания траектории любой точки из I вне U не превосходит m^*.

С другой стороны, в силу выбора окрестности $U'(\Omega'(F_{|K}))$, теоремы 3.2.1 и равенства (4.1.2) любая траектория (в том числе, и принадлежащая множеству $\Omega'(F_{|K})$), попадающая в окрестность $U'(\Omega'(F_{|K}))$, на следующем шаге покидает эту окрестность. Поэтому время пребывания траектории произвольной точки вне окрестности

$U''(\Omega''(F_{|K}))$ множества $\Omega''(F_{|K}) = \omega_K(F)$ ограничено сверху, например, константой $m = m^* + 2$. Теорема 4.1.1 доказана.

Вторая часть утверждения теоремы 4.1.1 является аналогом классической теоремы Биркгофа (см. раздел 4.1.1), в которой множество неблуждающих точек заменено меньшим (по включению) множеством $\bigcup\limits_{(x;\, y)\in I} \omega_F((x;\, y))$. Теорема 4.1.1 распространяет известный результат статьи [126], полученный для непрерывных отображений отрезка, на случай косых произведений отображений интервала из $T^1_{*,\,1}(I)$.

Из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 4.1.1, вытекает следующее утверждение.

Следствие 4.1.1. *Пусть* $F \in T^1_{*,\,1}(I)$ *имеет фактороотображение типа* $\succ 2^\infty$, *а* $(x^0;\, y^0) \in \omega_K(F)$. *Тогда* $(x^0;\, y^0) \in C(F)$ *в том и только том случае, если эта точка является предельной для произвольной последовательности точек* $\{(x_n;\, y_n)\}_{n\geq 1}$, *где* $x_n \in Per(f), y_n$ *– неизолированная* ω*-предельная точка в неблуждающем множестве* $\Omega(\widetilde{g}_{x_n})$ *отображения* $\widetilde{g}_{x_n}$.

Так как для каждой неизолированной ω-предельной точки y_n отображения $\widetilde{g}_{x_n}$ верно $y_n \in C(\widetilde{g}_{x_n})$, то с использованием предложения 3.1.1, теорем 1.3.1, 4.1.1 и результатов статьи [126] убеждаемся в справедливости теоремы 4.1.2.

Утверждение теоремы 4.1.2 показывает, что глубина центра $\gamma(F)$ отображения $F \in T^1_{*,\,1}(I)$ удовлетворяет неравенству $\gamma(F) \leq 2$. Рассмотрим косое произведение отображений интервала с фактором, определенным в силу формулы (3.1.1) и используем те же идеи для отображений в слоях, которые применяются при построении примера 1.1.1. Такое косое произведение из пространства $T^1_{*,\,1}(I)$ имеет глубину центра, равную 2.

Теорема 4.1.3 является прямым следствием теоремы 4.1.2.

Укажем также статьи [140], [164] – [167], в которых найдены условия совпадения замыкания множества периодических точек с неблуждающим множеством и центром гиперболических динамических систем.

Результаты этой части диссертации приведены в статье [81].

4.2 Незамкнутость притягивающего множества отображений из подпространств $T^1_{*,\,2}(I) - T^1_{*,\,4}(I)$. Описание глубины центра

Сформулируем основные результаты этой части работы.

Теорема 4.2.1. *При любом* $j = 2,\, 3,\, 4$ *существует отображение* $F \in T^1_{*,\,j}(I)$ *с незамкнутым притягивающим множеством* $\bigcup\limits_{(x;\,y)\in I} \omega_F((x;\,y))$.

Следующая теорема 4.2.2 дает оценку глубины центра отображений из подпространств $T^1_{*,\,2}(I)$ и $T^1_{*,\,3}(I)$.

Теорема 4.2.2. *Пусть* $F \in T^1_{*,\,2}(I) \bigcup T^1_{*,\,3}(I)$, *причем, если* $F \in T^1_{*,\,3}(I)$, *то* $\Omega^{F|_{\Omega^*_p(F)}}$ *– непрерывная функция. Тогда* $\gamma(F) \leq 2$.

В то же время в предложении 3.1.5 (см. подпараграф 3.1.2) показано, что в подпространстве $T^1_{*,\,4}(I)$ существуют косые произведения отображений интервала с глубиной центра, представляющей собой произвольный конечный или счетный ординал.

4.2.1 Доказательства основных утверждений § 4.2

Эту часть работы мы начнем с доказательства теоремы 4.2.1.

Доказательство теоремы 4.2.1. Для определенности, убедимся в том, что существует отображение $F \in \widetilde{T}^1_{*,\,2}(I)$ (по поводу определения подпространств $\widetilde{T}^1_{*,\,j}$ при любом $j = 1,\, 2,\, 3,\, 4$ см. подпараграф 3.1.2) с незамкнутым множеством $\bigcup\limits_{(x;\,y)\in I} \omega_F((x;\,y))$.

В стандартном единичном квадрате $[0,\, 1]^2$ зададим C^1-гладкое отображение $F(x,\, y) = (f(x),\, g_x(y)$, где факторотображение $f(x)$ определено в силу равенства (3.1.1), а C^1-гладкая (по совокупности переменных) функция $g_x(y)$ обладает следующими свойствами (см. рис. 4.1):

(i) $g_x(0) = g_x(1) = 0$, $g_x(1/2) = 1$, $g_x(1/12) = g_x(1/6) = g_x(1/4) = g_x(3/4) = 1/4$ при всех $x \in [0,\, 1]$;

(ii) на прямоугольнике $[0,\,1]\times[0,\,1/12]$ функция $g_x(y)$ не зависит от x и строго возрастает по y от 0 до 1/4 при $y\in[0,\,1/12]$, причем $\frac{\partial}{\partial y}g_x(y)=0$ при $y=1/12$;

(iii) на прямоугольнике $[0,\,1]\times(1/12,\,1/6]$ функция $g_x(y)$ определена в силу равенства $g_x(y)=1/4+h_x(y)$, где $h_x(y)$ - C^1-гладкая "шапочка Урысона"такая, что $h_x(1/12)=h_x(1/6)=0$ при всех $x\in[0,\,1]$; $h_{1/4}(y)=0$ при всех $y\in(1/12,\,1/6)$; $0<h_x(1/8)\leq 10^{-4}$ при всех $x\in[0,\,1]$, $x\neq 1/4$, причем при каждом указанном x функция $h_x(y)$ строго возрастает по y при $y\in(1/12,\,1/8)$ и строго убывает по y при $y\in(1/8,\,1/6)$;

(iv) на прямоугольнике $[0,\,1]\times(1/6,\,1/4]$ функция $g_x(y)$ не зависит от x, строго убывает по y от 1/4 до 11/48 при $y\in[1/6,\,5/24]$, строго возрастает по y от 11/48 до 1/4 при $y\in(5/24,\,1/4]$, причем $\frac{\partial}{\partial y}g_x(y)=1$ при $y=1/4$;

(v) на прямоугольнике $[0,\,1]\times(1/4,\,1]$ функция $g_x(y)$ также не зависит от x, является строго возрастающей по y при $y\in[1/4,\,1/2]$ и строго убывающей по y при $y\in(1/2,\,1]$.

(vi) множество существующих у $\widetilde{g}_x(y)$ при каждом $x\in Per(f)$ периодических точек любого периода n конечно.

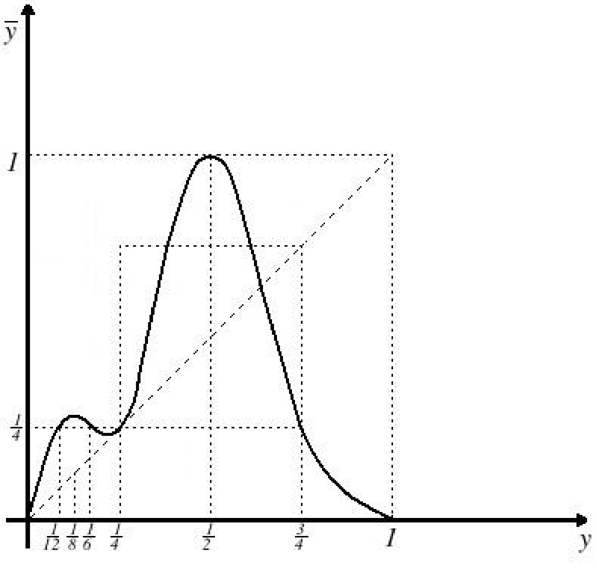


Рис. 4.1: *График функции* $\overline{y}=g_x(y)$ *при* $x\neq\frac{1}{4}$.

Тогда отображение в слое $g_{1/4,\,n}(y)=\widetilde{g}^{\,n}_{1/4}(y)$ над f-неподвижной точкой $x=1/4$ допускает C^1- Ω-взрыв при любом $n \geq 1$. При этом точка $x = 1/4$ является точкой полунепрерывности снизу (но не сверху) каждой вспомогательной функции Ω_n^F, а подходящие функции $\overline{\Omega}_n^F$ непрерывны на единственном локально максимальном квазиминимальном множестве $K(f)$. Следовательно, $F \in \widetilde{T}^1_{*,\,2}(I)$.

Точка $(1/4,\ 1/12)$ не является ω-предельной для F, но является предельной для периодических (и, следовательно, ω-предельных) точек F. Отсюда следует незамкнутость притягивающего множества $\bigcup\limits_{(x;\,y)\in I} \omega_F((x;\ y))$.

Незначительная модификация отображений в слоях над точками, например, какой-либо взятой произвольно f-гомоклинической орбиты к f-неподвижной точке $x = 1/4$ и в слое над самой точкой $x = 1/4$ позволяет построить примеры косых произведений из пространств $T^1_{*,\,3}(I)$ и $T^1_{*,\,4}(I)$ с незамкнутым притягивающим множеством. Теорема 4.2.1 доказана.

Доказательство следующей теоремы 4.2.2 основано на применении теорем 3.2.2 и 3.3.1, при этом используются идеи, аналогичные примененным при доказательстве теоремы 4.1.1.

Доказательство теоремы 4.2.2. 1. Для определенности, проведем доказательство в предположении, что $F \in T^1_{*,\,3}(I)$, и Ω-функция сужения $F_{|\Omega_p^*(F)}$ непрерывна. Рассмотрим отображение $F_{|K}$, где $K = pr_1^{-1}(K(f))$, а $K(f)$ – произвольное локально максимальное квазиминимальное множество факторотображения f.

2. Теорема 4.2.2 справедлива, если $\Omega(F_{|K}) = C(F_{|K})$. Поэтому рассмотрим случай, когда $\Omega(F_{|K}) \neq C(F_{|K})$. Будем использовать также замыкание $\overline{\omega_K(F)}$ множества

$$\omega_K(F) = \bigcup_{(x;\,y)\in K} \omega_{F_{|K}}((x;\ y)).$$

Имеем:

$$C(F_{|K}) \subseteq \overline{\omega_K(F)} \subseteq \Omega(F_{|K}).$$

2.1. Предположим, что найдется точка $(x^0;\ y^0) \in \Omega(F_{|K}) \setminus \overline{\omega_K(F)}$. В силу предложения 0.0.1 непрерывность Ω-функции сужения $F_{|\Omega_p^*(F)}$ влечет за собой и непрерывность $\Omega^{F_{|K}}$. Поэтому в силу следствия 3.3.1 произвольная окрестность $U((x^0,\ y^0))$ точки $(x^0,\ y^0)$ пересекается с сужением $\Omega^{F_{|K}}{}_{|S_c^*}$ (здесь сохранены обозначения теоремы 3.3.1) Ω-функции отображения $F_{|K}$ на множество S_c^* (см. формулу (3.3.1)). Множество S_c^*

состоит из траекторий (относительно отображения f^{l^*}) точек, устойчивых по Пуассону, порождающих всюду плотные в $K(f)$ траектории. Это множество универсально в том смысле, что состоит из точек непрерывности всех функций $\overline{\Omega}^F_{l_i^*,1}$ при $i \geq i^*$. Поэтому найдется последовательность точек $\{(x_i;\, y_i)\}_{i\geq 1} \subset \bigcup\limits_{x\in S_c^*} \{x\} \times \Omega(g_{x,\, l_i^*(x)})$, которая обладает следующими свойствами:

(i) последовательность $\{f^{l_i^*}(x_i)\}_{i\geq i^*}$ сходится к x^0, а последовательность $\{y_i\}_{i\geq i^*}$ сходится к y^0, причем $(x^0,\, y^0) \notin \overline{\bigcup\limits_{x\in S_c^*} \{x\} \times \omega(g_{x,\, l_i^*(x)})}$, где $\omega(g_{x,\, l_i^*(x)})$ - притягивающее множество отображения $g_{x,\, l_i^*(x)}$;

(ii) $y_i \notin \omega(g_{x_i,\, l_i(x_i)})$, и точка y_i изолирована в $\Omega(g_{x_i,\, l_i(x_i)})$.

Отсюда следует, что точка y_i - блуждающая относительно $\Omega(g_{x_i,\, l_i(x_i)})$.

В силу предыдущего последовательность $\{(x_i;\, y_i)\}_{i\geq 1} \subset \bigcup\limits_{x\in S_c^*} \{x\} \times \Omega(g_{x,\, l_i^*(x)})$ выбрана так, что траектории точек последовательности $\{x_i\}_{i\geq 1}$ всюду плотны в $K(f)$. Поэтому существует замкнутое множество $\Omega_{(x^0;\, y^0)}(F_{|K}) \subset \Omega(F_{|K})$ со следуюшими свойствами:

(i_1) $(x^0;\, y^0) \in \Omega_{(x^0;\, y^0)}(F_{|K})$;

(ii_1) $pr_1(\Omega_{(x^0;\, y^0)}(F_{|K})) = K(f)$;

(iii_1) существуют окрестности $V'(\Omega_{(x^0;\, y^0)}(F_{|K}))$ множества $\Omega_{(x^0;\, y^0)}(F_{|K})$ и $V''(\overline{\omega_K(F)})$ множества $\overline{\omega_K(F)}$ такие, что

$$V'(\Omega_{(x^0;\, y^0)}(F_{|K})) \bigcap V''(\overline{\omega_K(F)}) = \emptyset.$$

Тогда из свойств (ii) и (iii_1) следует, что все точки множества $\Omega_{(x^0;\, y^0)}(F_{|K})$ являются блуждающими относительно $\Omega(F_{|K})$.

2.2. Рассмотрим случай, когда $(x^0;\, y^0) \in \overline{\omega_K(F)} \setminus C(F_{|K})$. При этом выполнено: $(x^0,\, y^0) \notin \overline{\bigcup\limits_{x\in S_c^*} \{x\} \times C(g_{x,\, l_i^*(x)})}$.

Так как множество S_c^* состоит из целых траекторий относительно f^{l^*} (см. формулу (3.3.1)), то найдется последовательность точек $\{(x_i;\, y_i)\}_{i\geq 1}$, содержащаяся во множестве $\bigcup\limits_{x\in S_c^*} \{x\} \times \omega(g_{x,\, l_i^*(x)})$, и такая, что:

(i_2) $\{f^{l_i^*}(x_i)\}_{i\geq i^*}$ сходится к x^0, а $\{y_i\}_{i\geq i^*}$ сходится к y^0;

(ii_2) $y_i \notin C(g_{x_i,\, l_i(x_i)})$, и точка y_i изолирована в $\Omega(g_{x_i,\, l_i(x_i)})$ (см. подраздел 4.1.1).

Отсюда немедленно получаем, что точка y_i блуждает относительно множества $\Omega(g_{x_i,\, l_i(x_i)})$. Используя непрерывность функции $\Omega^{F_{|K}}$ и проводя рассуждения, аналогичные примененным при доказательстве теоремы 4.1.1, убеждаемся в том, что точка $(x^0,\, y^0)$ является блуждающей относительно $\Omega(F_{|K})$.

Таким образом, $(x^0,\, y^0) \in C(F)$ в том и только том случае, если $(x^0;\, y^0) \in \overline{\omega_K(F)}$, и для некоторой последовательности $\{(x_i;\, y_i)\}_{i\geq 1} \subset \bigcup\limits_{x\in S_c^*} \{x\} \times \omega(g_{x,\, l_i^*(x)})$ удовлетворяется условие (i_2) вместе с условием неизолированности каждой точки y_i в $\Omega(g_{x_i,\, l_i(x_i)})$ (последнее выполнено в том и только том случае, если $y_i \in C(g_{x_i,\, l_i(x_i)})$). Отсюда следует, что

$$C(F_{|K}) = \Omega(F_{|\Omega(F)}) = \overline{\bigcup_{x\in S_c^*} \{x\} \times C(g_{x,\, l_i^*})} = \overline{\bigcup_{x\in S_c^*} \{x\} \times \Omega(g_{x_i,\, l_i^*}{}_{|\Omega(g_{x,\, l_i^*})})}.$$

Последнее означает, что $\gamma(F) \leq 2$. Теорема 4.2.2 доказана.

Результаты § 4.2 приведены в [81], [168].

Глава 5

О функциональном описании пространства C^1-гладких косых произведений со сложной динамикой фактorотображения

В главе 5 в подпространствах $T^1_{*,1}(I)$ – $T^1_{*,4}(I)$ выделены некоторые непустые подмножества отображений, изучены аппроксимационные свойства отображений из выделенных подмножеств. Явное описание этих подмножеств косых произведений основано на использовании, во-первых, понятия устойчивости в целом в C^1-норме семейства отображений в слоях и, во-вторых, понятия плотной устойчивости в целом в C^1-норме семейства отображений в слоях.

Так, в § 5.1 изучены свойства отображений, обладающих устойчивым в целом в C^1-норме семейством отображений в слоях; установлено, что такие отображения содержатся только лишь в подпространстве $T^1_{*,1}(I)$, и Ω-функция каждого косого произведения с устойчивым в целом в C^1-норме семейством отображений в слоях непрерывна.

В § 5.2 сформулирован и доказан критерий Ω-устойчивости C^1-гладких косых произведений отображений интервала (относительно гомеоморфизмов - косых произведений); установлено, что такого рода косые произведения отображений интервала содержатся в подпространстве $T^1_{*,\,1}(I)$ и не плотны в $T^1_{*,\,1}(I)$.

В § 5.3 доказано, что C^1-гладкие косые произведений отображений интервала с плотно устойчивым в целом семейством отображений в слоях существуют в каждом из подпространств $T^1_{*,\,1}(I)$ – $T^1_{*,\,4}(I)$. Здесь же доказаны аппроксимационные теоремы для C^1-гладких косых произведений отображений интервала из некоторых подмножеств пространства $\widetilde{T}^1_*(I)$.

5.1 Об устойчивости в целом семейства отображений в слоях C^1-гладких косых произведений отображений интервала

Определение 0.0.13 устойчивости в целом (в C^1-норме) семейства отображений в слоях C^1-гладкого косого произведения отображений интервала приведено во введении. Обратим внимание на то, что из определения 0.0.13, задания натуральных чисел l_i^* (см. формулу (0.0.22)) и формулы (0.0.3) следует, что произвольная итерация косого произведения $F \in \widetilde{T}^1_*(I)$ с факторотображением типа $\succ 2^\infty$ и устойчивым в целом в C^1-норме семейством отображений в слоях также имеет устойчивое в целом в C^1-норме семейство отображений в слоях.

Пусть $\Phi(x,\,y) = (\varphi(x),\,\psi_x(y))$, $H^{<l_i^*>}(x,\,y) = (h_1(x),\,h_{2,\,x}^{<l_i^*>}(y))$. Так как каждое из косых произведений $F_{l_i^*}$ и $\Phi_{l_i^*}$ имеет тождественное факторотображение, то Ω-сопряженность с помощью $H^{<l_i^*>}$ отображений $F_{l_i^*\,|\Omega(f)\times I_2}$ и $\Phi_{l_i^*\,|\Omega(\varphi)\times I_2}$ означает (вместе с естественным равенством $h_1(\Omega(f)) = \Omega(\varphi)$) выполнение равенства

$$h_{2,\,x}^{<l_i^*>}{}_{|\overline{\Omega}^F_{l_i^*}(x)} \circ g_{x,\,l_i^*\,|\overline{\Omega}^F_{l_i^*}(x)}(y) = \psi_{h_1(x),\,l_i^*\,|\overline{\Omega}^\Phi_{l_i^*}(h_1(x))} \circ h_{2,\,x}^{<l_i^*>}{}_{|\overline{\Omega}^F_{l_i^*}(x)}(y), \tag{5.1.1}$$

где $(x;\,y)$ – произвольная точка графика функции $\overline{\Omega}^F_{l_i^*}$ в I.

Так как $H^{<l_i^*>}$ – гомеоморфизм, и при любом $x \in \Omega_p(f)$ верно $\Omega^F_{l_i^*}(x) = \Omega(g_{x,\,l_i^*})$ ($\Omega^\Phi_{l_i^*}(x) = \Omega(\psi_{x,\,l_i^*})$), то выполнено также

$$H^{<l_i^*>}(\{x\} \times \Omega^F_{l_i^*}(x)) = \{h_1(x)\} \times \Omega^\Phi_{l_i^*}(h_1(x)). \tag{5.1.2}$$

Поэтому вместе с равенством $H^{<l_i^*>}(\overline{\Omega}^F_{l_i^*}) = \overline{\Omega}^\Phi_{l_i^*}$ выполнено равенство

$$H^{<l_i^*>}(\Omega^F_{l_i^*}) = \Omega^\Phi_{l_i^*}. \tag{5.1.3}$$

Из определения 0.0.13 и соотношения (5.1.2) следует неравенство

$$dist_{I_2}(\Omega^F_{l_i^*}(x),\ \Omega^\Phi_{l_i^*}(h_1(x))) < \delta. \tag{5.1.4}$$

Покажем, что косые произведения отображений интервала из пространства $\widetilde{T}^1_*(I)$ с факторотображением типа $\succ 2^\infty$ и устойчивым в целом семейством отображений в слоях содержатся в подпространстве $\widetilde{T}^1_{*,\,1}(I)$.

Теорема 5.1.1 [81], [115]. *Пусть косое произведение $F \in \widetilde{T}^1_*(I)$ имеет факторотображение типа $\succ 2^\infty$ и устойчивое в целом в C^1-норме семейство отображений в слоях. Тогда $F \in \widetilde{T}^1_{*,\,1}(I)$, и имеет непрерывную Ω-функцию.*

Доказательство. 1. Покажем сначала, что в условиях теоремы 5.1.1 отображение $F \in \widetilde{T}^1_*(I)$ удовлетворяет сильному условию **H** и, следовательно, $F \in T^1_{*,\,1}(I)$ (см. § 3.1). Действительно, возьмем произвольно $\delta > 0$ и укажем $\varepsilon > 0$ из условия устойчивости в целом в C^1-норме семейства отображений в слоях косого произведения F. В силу утверждения (6) предложения 3.1.1 найдется натуральное число n такое, что при всех $x \in \Omega_p(f)$ и всех $k \geq 0$ верно неравенство $|f^{n+k}(x)| > 1$. Выберем натуральное число $i^* \geq i_*$ так, чтобы при всех $i \geq i^*$ и $x \in \Omega_p(f)$ было выполнено неравенство $|f^{l_i^*}(x)| > 1$. Возьмем произвольно $i \geq i^*$.

Убедимся в том, что вспомогательная функция $\Omega^F_{l_i^*}$ непрерывна на множестве $\Omega_p(f)$. В самом деле, воспользуемся тем, что $ev_{\rho_{l_i^*},x} \in C^1(I,\ I_2)$ (см. также формулы (0.0.8) - (0.0.9)), и по числу $\varepsilon > 0$ укажем $\delta_{l_i^*} > 0$ так, чтобы выполнялось $\delta_{l_i^*} < \varepsilon$, и, в частности, при всех $x',\ x'' \in \Omega_p(f)$, удовлетворяющих неравенствам $|x' - x''| < \delta_{l_i^*}$ было справедливо

$$||ev_{\rho_{l_i^*},x'} - ev_{\rho_{l_i^*},x''}||_{1,\,(1,\,2)} = ||g_{x',\,l_i^*} - g_{x'',\,l_i^*}||_{1,\,(1,\,2)} < \varepsilon. \tag{5.1.5}$$

Зафиксируем различные точки $x',\ x'' \in \Omega_p(f)$ так, чтобы $|x' - x''| < \delta_{l_i^*}$. Будем использовать отрезки траекторий $\{f^s(x')\}_{s=0}^{l_i^*}$ и $\{f^s(x'')\}_{s=0}^{l_i^*}$ точек x' и x'' соответственно. Положим $\overline{X}(l_i^*) = \{f^s(x')\}_{s=0}^{l_i^*} \bigcup \{f^s(x'')\}_{s=0}^{l_i^*}$. Возьмем произвольно и зафиксируем положительное число

$$d < \min\{\delta_{l_i^*},\ \frac{1}{3}\min_{\overline{x}',\,\overline{x}''\in\overline{X}(l_i^*)}\{|\overline{x}'-\overline{x}''|\}\} \tag{5.1.6}$$

столь малое, чтобы для любой точки $\overline{x}\in\overline{X}(l_i^*)$ выполнялось включение

$$\overline{U}_{1,\,d}(f^{l_i^*}(\overline{x}))\subset f^{l_i^*}(\overline{U}_{1,\,d}(\overline{x})), \tag{5.1.7}$$

где $\overline{U}_{1,\,d}(\cdot)$ – замыкание d-окрестности точки, при этом сужение $f^{l_i^*}{}_{|\overline{U}_{1,\,d}(\overline{x})}$ – гомеоморфизм. В силу выбора положительного числа d замыкания d-окрестностей $\overline{U}_{1,\,d}(\overline{x}')$ и $\overline{U}_{1,\,d}(\overline{x}'')$ (в I_1) любых двух различных точек $\overline{x}'$, $\overline{x}''\in\overline{X}$ не пересекаются, и, в частности, $\{f^s(x'')\}_{s=0}^{l_i^*}\bigcap(\bigcup\limits_{s=0}^{l_i^*}U_{1,\,d}(f^s(x')))=\emptyset$. Последнее вместе с включением (5.1.7) влечет за собой выполнение равенства

$$\{f^s(x'')\}_{s=0}^{l_i^*}\bigcap(\bigcup_{s=0}^{l_i^*}(U_{1,\,d}(f^s(x'))\bigcap f^{s-l_i^*}(U_{1,\,d}(f^{l_i^*}(x')))))=\emptyset$$

для непустых открытых множеств $U_{1,\,d}(f^s(x'))\bigcap f^{s-l_i^*}(U_{1,\,d}(f^{l_i^*}(x')))$, каждое из которых содержит точку $f^s(x')$, $0\le s\le l_i^*$.

Положим $U_{1,\,d}^*(f^s(x'))=U_{1,\,d}(f^s(x'))\bigcap f^{s-l_i^*}(U_{1,\,d}(f^{l_i^*}(x')))$ и определим C^1-гладкую "шапочку"Урысона такую, что

$$\lambda(x)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad x\in\{f^s(x')\}_{s=0}^{l_i^*};\\ 0, & \text{если}\quad x\in I_1\setminus\bigcup\limits_{s=0}^{l_i^*}U_{1,\,d}^*(f^s(x'));\end{cases}$$

а при любом $x\in\bigcup\limits_{s=0}^{l_i^*}U_{1,\,d}^*(f^s(x')$ удовлетворяется неравенство $0<\lambda(x)<1$.

В силу определения множеств $U_{1,\,d}(x)$ (здесь $x\in\overline{X}(l_i^*)$), $U_{1,\,d}^*(f^s(x'))$ $(0\le s\le l_i^*)$, и включения (5.1.7) верно равенство

$$U_{1,\,d}^*(f^s(x'))=f^s(U_{1,\,d}^*(x')). \tag{5.1.8}$$

Рассмотрим косое произведение $\Phi(x,\,y)=(\varphi(x),\,\psi_x(y))$ такое, что $\varphi(x)=f(x)$, а отображения в слоях $\psi_x(y)$ при любых $x\in I_1$, $y\in I_2$ определены в силу равенства

$$\psi_x(y)=g_x(y)+\lambda(x)(g_{f^s(x'')}(y)-g_x(y)). \tag{5.1.9}$$

Из (5.1.9) следует, что при $x \notin \bigcup\limits_{s=0}^{l_i^*} U_{1,\,d}^*(f^s(x'))$ выполнено $\psi_x(y) = g_x(y)$.
Пусть теперь s – произвольное целое число, $0 \le s \le l_i^*$, а x – произвольная точка открытого множества $U_{1,\,d}^*(f^s(x'))$. В силу равенства (5.1.8) существует единственная точка $x_{-s} \in U_{1,\,d}^*(x')$ такая, что $x = f^s(x_{-s})$. В этом случае равенство (5.1.9) можно записать в следующей эквивалентной форме

$$\psi_{f^s(x_{-s})}(y) = g_{f^s(x_{-s})}(y) + \lambda(f^s(x_{-s}))(g_{f^s(x'')}(y) - g_{f^s(x_{-s})}(y)).$$

Последнее, в частности, влечет за собой (при $x = f^s(x')$ или, что то же самое, при $x_{-s} = x'$) справедливость равенства

$$\psi_{f^s(x')}(y) = g_{f^s(x'')}(y). \tag{5.1.10}$$

Используя соотношения (5.1.6), (5.1.9) и равенство $\varphi(x) = f(x)$, убеждаемся в том, что $\Phi \in B_\varepsilon^1(F)$. Так как F имеет устойчивое в целом в C^1-норме семейство отображений в слоях, и выполнено равенство $\varphi(x) = f(x)$, то $h_1(x)$ – тождественное отображение отрезка I_1. Поэтому равенства (5.1.2), (5.1.3) и (5.1.10) влекут за собой

$$h_{2,\,x'}^{<l_i^*>}(\Omega_{l_i^*}^F(x')) = \Omega_{l_i^*}^\Phi(x') = \Omega_{l_i^*}^F(x'').$$

Последнее можно записать в следующей эквивалентной форме

$$h_{2,\,x'}^{<l_i^*>}(\Omega(g_{x',l_i^*})) = \Omega(g_{x'',l_i^*}). \tag{5.1.11}$$

В силу определения косого произведения $\Phi \in B_\varepsilon^1(F)$ и неравенства (5.1.4) гомеоморфизм $h_{2,\,x'}^{<l_i^*>}$ δ-близок к тождественному отображению по переменной y. Поэтому из равенства (5.1.11) следует непрерывность вспомогательной функции $\Omega_{l_i^*}^F$ на множестве $\Omega_p(f)$ (относительно метрики Хаусдорфа $dist_{I_2}$). Таким образом, косое произведение $F \in \widetilde{T}_*^1(I)$ удовлетворяет сильному условию **H**, и $F \in \widetilde{T}_{*,\,1}^1(I)$.
2. Из предыдущего п.1 следует, что, если $F \in \widetilde{T}_*^1(I)$ имеет факторотображение типа $\succ 2^\infty$ и устойчивое в целом в C^1-норме семейство отображений в слоях, то существует окрестность $U_{1,\,\delta'}(\Omega_p(f))$ множества $\Omega_p(f)$ в I_1 такая, что при каждом $x \in U_{1,\,\delta'}(\Omega_p(f))$ и любом l_i^* при $i \ge i^*$ отображение g_{x,l_i^*} является Ω-устойчивым в C^1-норме в семействе отображений в слоях $\{g_{x,l_i^*}\}_{x \in U_{1,\,\delta'}(\Omega_p(f))}$. Отсюда получаем, что расширения

$(\Omega^F_{l_i^*})^{ex}$ функций $\Omega^F_{l_i^*}$ на окрестность $U_{1,\,\delta'}(\Omega_p(f))$ множества $\Omega_p(f)$ непрерывны на $U_{1,\,\delta'}(\Omega_p(f))$ при каждом $i \geq i^*$. Поэтому отображения в слоях над точками множества $U_{1,\,\delta'}(\Omega_p(f)) \setminus \Omega_p(f)$ не оказывают влияния на структуру той части неблуждающего множества косого произведения $F \in \widetilde{T}^1_*(I)$, которая проектируется на $\Omega_p(f)$.

Используя утверждения (7) и (8) предложения 3.1.1, получаем из предыдущего, что для любых точек x', $x'' \in Per_p(f)$ с периодами $n(x')$ и $n(x'')$ соответственно, отображения $\widetilde{g}_{x'}^{n/n(x')}$ и $\widetilde{g}_{x''}^{n/n(x'')}$ Ω-сопряжены, где n – наименьшее общее кратное чисел $n(x')$ и $n(x'')$.

3. Покажем, что Ω-функция косого произведения $F \in \widetilde{T}^1_*(I)$, удовлетворяющего условиям теоремы 5.1.1, непрерывна. В силу предыдущего п.2 достаточно установить непрерывность Ω^F на множестве $\Omega_p(f)$.

Предположим противное. Пусть Ω-функция Ω^F разрывна в некоторой точке $x \in \Omega_p(f)$. Из теоремы 3.2.1, предыдущего п.2 и предложения 0.0.1 следует, что

$$\Omega^{F^{m^*n^*}} \bigcap \Omega^*_p(F) = \Omega^F \bigcap \Omega^*_p(F) = \overline{\bigcup_{x \in Per_p(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)} = \overline{Per(F_{|\Omega^*_p(F)})}. \qquad (5.1.12)$$

Так как Ω-функция Ω^F полунепрерывна сверху, но не снизу в точке x, то существует точка y среза $(\Omega^F_p \bigcap \Omega^*_p(F))(x)$, в некоторой окрестности $U_2(y)$ которой (в I_2) нет точек множеств $(\Omega^F_p \bigcap \Omega^*_p(F))(x')$ при всех $x' \neq x$ из некоторой окрестности $U_1(x)$ точки x в I_1. Отсюда и соотношений (5.1.12) получаем, что $x \in Per_p(f)$, а $y \in \Omega(\widetilde{g}_x)$. В то же время установленное в п. 2 свойство Ω-устойчивости отображения $\widetilde{g}_x$ и равенство

$$\Omega^F \bigcap \Omega^*_p(F) = \underset{i \to +\infty}{Lim} \, ((\Omega^F_{l_i,\,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,\,l_i)} \ \text{(см. теорему 3.2.1)}$$

означают, что любая точка множества $\Omega(\widetilde{g}_x)$ не изолирована во множестве точек множеств $\Omega(\widetilde{g}_{x'})$ при всех $x' \in Per_p(f) \bigcap U_1(x)$, $x' \neq x$.

Таким образом, сделанное предположение неверно, и Ω-функция косого произведения $F \in \widetilde{T}^1_{*,\,1}(I)$ непрерывна. Теорема 5.1.1 доказана.

Отметим, что свойство непрерывности Ω-функции выделяет косые произведения отображений интервала с "близкой"в смысле определения 1.1.3 структурой срезов неблуждающего множества вертикальными слоями.

Утверждение теоремы 5.1.1 показывает также, что подпространство $\widetilde{T}^1_{*,\,1}(I)$ (наряду с отображениями, имеющими разрывную Ω-функцию (см. § 3.1)) содержит косые произведения отображений интервала с непрерывной Ω-функцией. Важный класс такого рода косых произведений образуют отображения с Ω-устойчивым фактором типа $\succ 2^{\infty}$ и устойчивым в целом в C^1-норме семейством отображений в слоях. В следующем § 5.2 будет показано, что этот класс совпадает с множеством Ω-устойчивых в C^1-норме косых произведений отображений интервала.

Следствие 5.1.1. *Если косое произведение $F \in \widetilde{T}^1_*(I)$ имеет факторотображение типа $\succ 2^{\infty}$ и устойчивое в целом в C^1-норме семейство отображений в слоях, то существует окрестность $U_{1,\delta'}(\Omega_p(f))$ в I_1 множества $\Omega_p(f)$ такая, что функции $(\Omega^F_{l^*_i})^{ex}$ (то есть расширения функций $\Omega^F_{l^*_i}$ на окрестность $U_{1,\delta'}(\Omega_p(f))$ множества $\Omega_p(f)$) непрерывны на $U_{1,\delta'}(\Omega_p(f))$ при каждом $i \geq i^*$.*

Следствие 5.1.2. *Пусть косое произведение $F \in \widetilde{T}^1_*(I)$ имеет факторотображение типа $\succ 2^{\infty}$, а его семейство отображений в слоях устойчиво в целом в C^1-норме. Тогда, каковы бы ни были различные точки x', $x'' \in Per_p(f)$ с периодами $n(x')$ и $n(x'')$ соответственно, отображения $\widetilde{g}_{x'}^{n/n(x')}$ и $\widetilde{g}_{x''}^{n/n(x'')}$ Ω-сопряжены, где n – наименьшее общее кратное чисел $n(x')$ и $n(x'')$.*

Результаты § 5.1 содержатся в работах [72], [73], [81], [115], [122], [123],

5.2 Об Ω-устойчивых C^1-гладких косых произведениях отображений интервала

В этой части работы доказан критерий Ω-устойчивости в C^1-норме косых произведений отображений интервала (относительно гомеоморфизмов-косых произведений).

Теорема 5.2.1 [73], [81], [115]. *Отображение $F \in \widetilde{T}^1_*(I)$ Ω-устойчиво в C^1-норме в том и только том случае, если его семейство отображений в слоях устойчиво в целом в C^1-норме.*

Здесь же установлено, что C^1-гладкие косые произведения отображений интервала не плотны в содержащем их подпространстве $\widetilde{T}^1_{*,1}(I)$.

Теорема 5.2.2 [81], [115], [123]. *Существует отображение $F \in \widetilde{T}^1_{*,1}(I)$ такое, что некоторая его окрестность $B^1_{\varepsilon}(F)$ в пространстве $\widetilde{T}^1_{*,1}(I)$ не содержит Ω-устойчивых отображений.*

5.2.1 Критерий Ω-устойчивости C^1-гладких косых произведений отображений интервала

Доказательство теоремы 5.2.1 проведем в два этапа, установив справедливость лемм 5.2.1. и 5.2.2.

Лемма 5.2.1. *Если косое произведение* $F \in \widetilde{T}^1_*(I)$ *Ω-устойчиво в C^1-норме, то его семейство отображений в слоях устойчиво в целом в C^1-норме.*

Доказательство. 1. Воспользуемся определением 0.0.14 и для поизвольного числа $\delta/3 > 0$ укажем окрестность $B^1_{\varepsilon'}(F)$ отображения F в пространстве $\widetilde{T}^1_*(I)$ такую, что для любого отображения $\Phi \in B^1_{\varepsilon'}(F)$ существует $\delta/3$-близкий в C^0-норме к тождественному гомеоморфизм $H : \Omega(F) \to \Omega(\Phi)$, для которого справедливо равенство

$$H \circ F = \Phi \circ H.$$

Тогда для $f_{|\Omega(f)}$ верно равенство (0.0.19), а для $g_{x|(\Omega(F))(x)}$ – равенство (0.0.29). Из (0.0.29), в частности, следует, что для произвольной точки $x \in Per(f)$ с наименьшим периодом $m = m(x)$ при любом $i \geq i^*$ таком, что m делит l^*_i, выполнено

$$h_{2,\,x}|_{(\Omega(F))(x)} \circ \widetilde{g}_x^{\,l^*_i/m}|_{(\Omega(F))(x)} = \widetilde{\psi}^{\,l^*_i/m}_{h_1(x)}|_{(\Omega(\Phi))(h_1(x))} \circ h_{2,\,x}|_{(\Omega(F))(x)}. \tag{5.2.1}$$

Из равенства (5.2.1), в частности, следует, что каждое из отображений $\widetilde{g}_x^{\,l^*_i/m}$ и $\widetilde{\psi}^{\,l^*_i/m}_{h_1(x)}$ Ω-устойчиво в $C^1_{\partial_2}(I_2)$. Так как при этом верны равенства

$$\Omega(\widetilde{g}_x^{\,l^*_i/m}) = \Omega(\widetilde{g}_x) \ \text{ и } \ \Omega(\widetilde{\psi}^{\,l^*_i/m}_{h_1(x)}) = \Omega(\widetilde{\psi}_{h_1(x)}),$$

то отображения $\widetilde{g}_x$ и $\widetilde{\psi}_{h_1(x)}$ – также Ω-устойчивы в $C^1_{\partial_2}(I_2)$.

2. Пусть $K(f)$ – произвольное локально максимальное квазиминимальное множество, а x – произвольная периодическая точка периода $m = m(x)$, $m \geq 1$, из множества $K(f)$ такая, что ее периодическая орбита $Orb_f(x)$ аппроксимирует множество $K(f)$ с точностью до $\delta/3$. Тогда для любого $x' \in K(f)$ найдется точка $\overline{x} \in Orb_f(x)$ такая, что $|x' - \overline{x}| < \delta/3$, и $g_{x'} \in B^1_{(1,\,2),\,\varepsilon'}(g_{\overline{x}})$.

Поставим в соответствие ε'-окрестности $B^1_{\varepsilon'}(F)$ отображения F окрестность $B^1_{\varepsilon''}(F^m)$ отображения F^m в пространстве $\widetilde{T}^1_*(I)$ такую, что для любого $\Phi \in B^1_{\varepsilon'}(F)$ выполнено

$\Phi^m \in B^1_{\varepsilon''}(F^m)$. Поэтому $\widetilde{\psi}_{h_1(x)},\ g_{x',m} \in B^1_{(1,2),\,\varepsilon''}(\widetilde{g}_{\overline{x}})$. В силу формулы (0.0.7), тем более, выполнено $\widetilde{\psi}_{h_1(x)},\ g_{x',m} \in B^1_{2,\,\varepsilon''}(\widetilde{g}_{\overline{x}})$. Следовательно,

$$\{g_{x',\,m}\}_{x'\in K(f)} \subset \bigcup_{\overline{x}\in Orb_f(x)} B^1_{2,\,\varepsilon''}(\widetilde{g}_{\overline{x}}). \tag{5.2.2}$$

Из равенства (5.2.1) и включения (5.2.2) получаем, что любое отображение в слое $g_{x',\,m}$ ($x' \in K(f)$) – Ω-устойчиво в пространстве $C^1_{\partial_2}(I_2)$.

3. Из утверждений (1) – (3) и (7) предложения 3.1.1 следует, что для любого натурального числа $m' \in \tau(f_{|K(f)})$ ($m' > m$) найдется периодическая орбита периода m', аппроксимирующая множество $K(f)$ с точностью $\delta/3$. Поэтому в силу предыдущего при любом $x' \in K(f)$ отображение в слое $g_{x',\,m'}$ – также Ω-устойчиво в $C^1_{\partial_2}(I_2)$.

С другой стороны, числовая последовательность $\{l_i^*\}_{i\geq i^*}$ выбрана так, что для любого l_i^* найдется натуральное число $m(l_i^*) \in \tau(f_{|K(f)})$, которое делит l_i^* и, наоборот, для каждого $m \in \tau(f_{|K(f)})$ можно указать натуральное число $l_i^* = l_i^*(m)$, которое делится на m. Поэтому при всех достаточно больших i ($i \geq \overline{i}^*$ при некотором $\overline{i}^* \geq i^*$) Ω-устойчивость отображений в слоях $g_{x,\,l_i^*}$ при всех $x \in \Omega(f)$ влечет за собой непрерывность вспомогательных многозначных функций $\Omega^F_{l_i^*}$ на $\Omega(f)$.

Таким образом, доказано, что Ω-устойчивость в C^1-норме отображения $F \in \widetilde{T}^1_*(I)$ влечет за собой выполнение сильного условия **H**.

4. При любом $i \geq \overline{i}^*$ для произвольного отображения $\Phi \in B^1_{\varepsilon'}(F)$ построим δ-близкий к тождественному гомеоморфизм $H^{<l_i^*>} : \Omega^F_{l_i^*} \to \Omega^\Phi_{l_i^*}$, удовлетворяющий определению 0.0.13. В качестве первой координатной функции для $H^{<l_i^*>}$ при любом $i \geq \overline{i}^*$ будем использовать функцию $\overline{x} = h_1(x)$, сопрягающую сужения $f_{|\Omega(f)}$ и $\varphi_{|\Omega(\varphi)}$.

Сохраним обозначения п. 2 и при каждом $i \geq \overline{i}^*$ и $x' \in \Omega_p(f)$ обозначим:

через $\widetilde{h}_{2,\,x'}$ – $\delta/3$-близкий в C^0-норме к тождественному гомеоморфизм, устанавливающий Ω-сопряженность отображений в слоях $g_{x',\,l_i^*}$ и $\widetilde{g}_x^{\,l_i^*/m}$ для $F^{l_i^*}$;

через $\widetilde{h}_{2,\,x}$ – $\delta/3$-близкий в C^0-норме к тождественному гомеоморфизм, устанавливающий Ω-сопряженность отображений в слоях $\widetilde{g}_x^{\,l_i^*/m}$ и $\widetilde{\psi}_{h_1(x)}^{\,l_i^*/m}$ для $F^{l_i^*}$ и $\Phi^{l_i^*}$ соответственно;

через $\widetilde{h}_{2,\,h_1(x)}$ – $\delta/3$-близкий в C^0-норме к тождественному гомеоморфизм, устанавливающий Ω-сопряженность отображений в слоях $\widetilde{\psi}_{h_1(x)}^{\,l_i^*/m}$ и $\psi_{h_1(x'),\,l_i^*}$ для $\Phi^{l_i^*}$.

Здесь

$$\widetilde{h}_{2,\,x'} = h_{2,\,x'}{}_{|\Omega(g_{x',\,l_i^*})}, \quad \widetilde{h}_{2,\,x} = h_{2,\,x}{}_{|\Omega(\widetilde{g}_x^{\,l_i^*})}, \quad \widetilde{h}_{2,\,h_1(x)} = h_{2,\,h_1(x)}{}_{|\Omega(\widetilde{\psi}_{h_1(x)}^{\,l_i^*/m})}.$$

Положим

$$h_{2,\,x'}^{<l_i^*>} = \widetilde{h}_{2,\,h_1(x)} \circ \widetilde{h}_{2,\,x} \circ \widetilde{h}_{2,\,x'}.$$

Тогда $H^{<l_i^*>}(x',\,y) = (h_1(x'),\,h_{2,\,x'}^{<l_i^*>}(y))$ – δ-близкий к тождественному гомеоморфизм, удовлетворяющий определению 0.0.13 и определенный на графике вспомогательной функции[1] $\Omega_{l_i^*}^F$. Следовательно, семейство отображений в слоях Ω-устойчивого косого произведения $F \in \widetilde{T}_*^1(I)$ устойчиво в целом в C^1-норме. Необходимая часть критерия Ω-устойчивости отображения $F \in \widetilde{T}_*^1(I)$ доказана.

Справедливость леммы 5.2.1 установлена.

Используя лемму 5.2.1 и теорему 5.1.1, получаем

Следствие 5.2.1. *Если косое произведение $F \in \widetilde{T}_*^1(I)$ Ω-устойчиво (в C^1-норме), то $F \in \widetilde{T}_{*,\,1}^1(I)$, и Ω-функция F непрерывна.*

Лемма 5.2.2. *Пусть семейство отображений в слоях косого произведения отображений интервала $F \in \widetilde{T}_*^1(I)$ устойчиво в целом (в C^1-норме). Тогда $F \in \widetilde{T}_*^1(I)$ Ω-устойчиво.*

Доказательство. 1. Так как семейство отображений в слоях косого произведения отображений интервала $F \in \widetilde{T}_*^1(I)$ устойчиво в целом в C^1-норме, то в силу определения 0.0.13 для произвольного $\delta > 0$ найдется окрестность $B_\varepsilon^1(F) \subset \widetilde{T}_*^1(I)$ такая, что для любого отображения $\Phi \in B_\varepsilon^1(F)$, где $\Phi(x,\,y) = (\varphi(x),\,\psi_x(y))$, и любого l_i^* $(i \geq i^*$ при некотором $i^* \geq i_*)$ существует δ-близкий к тождественному в C^0-норме гомеоморфизм $H^{<l_i^*>} : \overline{\Omega}_{l_i^*}^F \to \overline{\Omega}_{l_i^*}^\Phi$ $(H^{<l_i^*>}(x,\,y) = (h_1(x),\,h_{2,\,x}^{<l_i^*>}(y)))$, для которого справедливы равенства (5.1.1).

2. Пусть Φ – произвольное отображение из окрестности $B_\varepsilon^1(F)$. Построим гомеоморфизм – косое произведение $H : \Omega(F) \to \Omega(\Phi)$ такой, что выполнено равенство

$$H \circ F_{|\Omega(F)} = \Phi_{|\Omega(\Phi)} \circ H,$$

где первая координатная функция h_1 отображения H определяется для φ из условия Ω-устойчивости f в C^1-норме (см. определение 0.0.14).

---

[1] Напомним, что при выполнении сильного условия **H** верно равенство $\overline{\Omega}_{l_i^*}^F = \Omega_{l_i^*}^F$.

Перейдем к определению отображений в слоях для H над точками множества $Per(f)$. Пусть x – произвольная точка множества $Per(f)$ с периодом $m(x)$. Возьмем произвольно и зафиксируем натуральное число $i(m(x))$, где $i(m(x)) \geq i^*$, так, чтобы $m(x)$ делило $l^*_{i(m(x))}$. Положим

$$h_{2,\,x|\Omega(\widetilde{g}_x)} = h_{2,\,x}^{<l^*_{i(m(x))}>}{}_{|\Omega^F_{l^*_{i(m(x))}}(x)}, \tag{5.2.3}$$

где

$$\Omega^F_{l^*_{i(m(x))}}(x) = \Omega(\widetilde{g}_x^{\,l^*_{i(m(x))}/m(x)}).$$

В силу следствия 5.1.2 справедливо равенство

$$\Omega(\widetilde{g}_x^{\,l^*_{i(m(x))}/m(x)}) = \Omega(\widetilde{g}_x).$$

Таким образом, из равенства (5.2.3), определения 0.0.13 и теоремы 3.2.1 следует, что отображение $h_{2,\,x}(y)$ определено на вполне инвариантном всюду плотном в $\Omega(F)$ множестве $\bigcup\limits_{x \in Per(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)$; причем отображение $(h_{1|Per(f)}(x),\, h_{2,\,x}(y))$ - гомеоморфизм на множестве $\bigcup\limits_{x \in Per(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)$.

3. Доопределим $h_{2,\,x}(y)$ на все множество $\Omega(F)$, полагая

$$h_{2,\,x}(y) = \lim_{n \to +\infty} h_{2,\,x_n}(y_n) \tag{5.2.4}$$

для произвольной точки $(x,\, y) \in \Omega(F)$ и произвольной, сходящейся к $(x,\, y)$ последовательности $\{(x_n,\, y_n)\}_{n \geq 1} \subset \bigcup\limits_{x \in Per(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)$.

Равенство (5.2.4) корректно определяет функцию $h_{2,\,x}(y)$ на всем множестве $\Omega(F)$. В самом деле, возьмем произвольно и зафиксируем точку $(x,\, y) \in \Omega(F)$. Пусть $\{(x_n,\, y_n)\}_{n \geq 1}$ и $\{(x'_n,\, y'_n)\}_{n \geq 1}$ – две какие - либо различные последовательности точек из множества $\bigcup\limits_{x \in Per(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)$, сходящиеся к $(x,\, y)$. Образуем из этих двух последовательностей новую, сходящуюся к $(x,\, y)$ последовательность $\{(\overline{x}_n,\, \overline{y}_n)\}_{n \geq 1}$, полагая, например,

$$(\overline{x}_{2n-1},\, \overline{y}_{2n-1}) = (x_n,\, y_n); \quad (\overline{x}_{2n},\, \overline{y}_{2n}) = (x'_n,\, y'_n). \tag{5.2.5}$$

Тогда в силу непрерывности $h_{2,\,x}(y)$ на множестве $\bigcup\limits_{x \in Per(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)$ последовательность $\{h_{2,\,\overline{x}_n}(\overline{y}_n)\}_{n \geq 1}$ фундаментальна и, следовательно, сходится. Из определения последовательности $\{(\overline{x}_n,\, \overline{y}_n)\}_{n\geq 1}$ и равенств (5.2.4) – (5.2.5) получаем

$$\lim_{n\to+\infty} h_{2,\,\overline{x}_n}(\overline{y}_n) = \lim_{n\to+\infty} h_{2,\,x'_n}(y'_n) = \lim_{n\to+\infty} h_{2,\,x_n}(y_n) = h_{2,\,x}(y).$$

Таким образом, значение функции $h_{2,\,x}(y)$ в произвольной точке $(x,\, y) \in \Omega(F)$ не зависит от выбора последовательности $\{(x_n,\, y_n)\}_{n\geq 1} \subset \bigcup\limits_{x\in Per(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)$, сходящейся к точке $(x,\, y)$.

4. Убедимся в том, что отображение $H : \Omega(F) \to \Omega(\Phi)$ – гомеоморфизм. Действительно, из определения H следует, что H – сюръекция множества $\Omega(F)$ на множество $\Omega(\Phi)$. В силу компактности I отображение H является замкнутым. Поэтому H взаимно непрерывно (см. [47, гл. 1, §13, XV]).

Покажем, что H взаимно однозначно. Предположим противное. Тогда в силу того, что $h_1 : \Omega(f) \to \Omega(\varphi)$ – гомеоморфизм, найдутся различные точки $(x,\, y_1)$ и $(x,\, y_2)$ при $x \notin Per(f)$ такие, что

$$h_{2,\,x}(y_1) = h_{2,\,x}(y_2). \tag{5.2.6}$$

Пусть $\{(x_n,\, y^1_n)\}_{n\geq 1}$ и $\{(x_n,\, y^2_n)\}_{n\geq 1}$ – произвольные сходящиеся к $(x,\, y_1)$ и $(x,\, y_2)$ соответственно последовательности точек множества $\bigcup\limits_{x\in Per(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)$. Тогда в силу равенства (5.2.6) соответствующая последовательность $\{H(x_n,\, y^1_n),\, H(x_n,\, y^2_n)\}_{n\geq 1}$ фундаментальна, причем

$$\{H(x_n,\, y^1_n),\, H(x_n,\, y^2_n)\}_{n\geq 1} \subset \bigcup_{\overline{x}\in Per(\varphi)} \{\overline{x}\} \times \Omega(\widetilde{\psi}_{\overline{x}}).$$

Так как сужение H на множество $\bigcup\limits_{x\in Per(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)$ – гомеоморфизм, и

$$H(\bigcup_{x\in Per(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)) = \bigcup_{\overline{x}\in Per(\varphi)} \{\overline{x}\} \times \Omega(\widetilde{\psi}_{\overline{x}}),$$

то последовательность $\{(x_n,\, y^1_n),\, (x_n,\, y^2_n)\}_{n\geq 1}$ – также фундаментальна. Следовательно, $y_1 = y_2$, и отображение H взаимно однозначно. Последнее вместе с взаимной непрерывностью H означает, что H – гомеоморфизм (см. [47, гл. 1, §13, XV]).

Достаточность условий критерия C^1- Ω-устойчивости установлена.

Лемма 5.2.2 доказана.

Леммы 5.2.1 и 5.2.2 доказывают справедливость теоремы 5.2.1.

Завершая эту часть работы, сформулируем необходимые нам в дальнейшем утверждения.

Следствие 5.2.2. *Если косое произведение* $F \in \widetilde{T}^1_*(I)$ Ω*-устойчиво (в* C^1*-норме), то для любых двух различных периодических точек* x', x'' *с периодами* $m(x')$ *и* $m(x'')$ *соответственно произвольного локально максимального квазиминимального множества* $K(f)$ *фактоотображения* f *отображения* $\widetilde{g}_{x'}^{m^*/m(x')}$ *и* $\widetilde{g}_{x''}^{m^*/m(x'')}$ – Ω*-сопряжены, где* m^* *– наименьшее общее кратное чисел* $m(x')$ *и* $m(x")$.

Следствие 5.2.3. *Если косое произведение* $F \in \widetilde{T}^1_*(I)$ Ω*-устойчиво (в* C^1*-норме), то для каждого локально максимального квазиминимального множества* $K(f)$ *фактоотображения* f *и каждого* $i \geq i^*$ *существует связная компонента* $C_{K(f),\,i}$ *пространства* C^1*-гладких* Ω*-устойчивых отображений отрезка* I_2 *в себя, для которой верно включение*

$$\{g_{x,\,l_i^*}\}_{x \in K(f)} \subset C_{K(f),\,i}.$$

Результаты подпараграфа 5.2.1 опубликованы в статьях [73], [81], [115], [122], [123].

5.2.2 Ω-устойчивые C^1-гладкие косые произведения отображений интервала не плотны в $T^1_{*,\,1}(I)$

В этой части работы мы докажем, что Ω-устойчивые косые произведения отображений интервала не только не плотны в пространстве отображений $\widetilde{T}^1_*(I)$, но и не образуют всюду плотного подмножества (являющегося открытым) в содержащем их подпространстве $\widetilde{T}^1_{*,\,1}(I)$.

Доказательство теоремы 5.2.2. 1. В стандартном единичном квадрате $[0,\,1]^2$ зададим отображение $F(x,\,y) = (f(x),\,\lambda(x)y(1-y))$, где фактоотображение $f(x)$ определено в силу равенства (3.1.1), а C^1-гладкая функция $\lambda(x)$ задана формулой

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{9\pi}{7}(\lambda^* - 2)(x - \frac{1}{4}) + 2, & \text{если} \quad x \in [0,\,\frac{1}{4}); \\ (\lambda^* - 2)\sin\frac{9\pi}{7}(x - \frac{1}{4}) + 2, & \text{если} \quad x \in [\frac{1}{4},\,\frac{23}{36}); \\ \lambda^*, & \text{если} \quad x \in [\frac{23}{36},\,1], \end{cases} \tag{5.2.7}$$

где λ^* – значение параметра, при котором логистическое отображение $\overline{y} = \lambda^* y(1-y)$ имеет тип 2^∞ (то есть содержит периодические точки периодов 1, 2, 2^2, $\dots$, 2^n, $\dots$ и не содержит периодических точек других периодов), $\lambda^* \approx 3,569$.

Как отмечалось в подпараграфе 3.1.2, $f \in C^1_\omega(I_1)$, и верно $\Omega(f) = \{0\} \bigcup K(f)$, где $K(f)$ – единственное локально максимальное квазиминимальное множество фактоотображения f, $K(f) = \Omega_p(f) \subset [\frac{1}{4},\, \frac{3}{4}]$, $\tau(f_{|K(f)}) = \mathbf{N}$; причем f имеет на $K(f)$ (и на всем отрезке $[1/4;\, 3/4]$) 2 неподвижные точки: $x_1 = 1/4$, $x_2 = 23/36$.

В силу формулы (5.2.7) C^1-гладкая функция $\lambda(x)$ строго возрастает от $\lambda(0)$ ($0 < \lambda(0) < 0,5$) до λ^* на промежутке $[0,\, 23/36)$ и принимает значение $\lambda(x) = \lambda^*$ при всех $x \in [23/36,\, 1]$ (рис. 5.1).

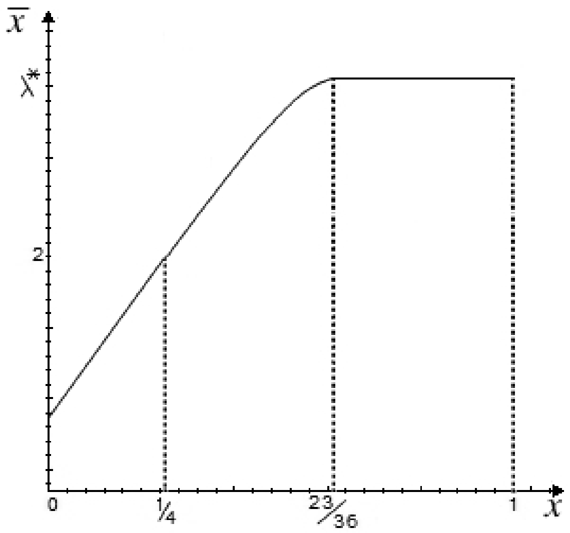


Рис. 5.1: *График функции* $\overline{x} = \lambda(x)$.

Укажем также, что

(i_F) отображение в слое над точкой $x_1 = 1/4$ задается равенством $\widetilde{g}_{x_1} = 2y(1-y)$, и, следовательно, $\widetilde{g}_{x_1}$ – Ω-устойчивый эндоморфизм Морса - Смейла с двумя гиперболическими неподвижными точками (других периодических точек у $\widetilde{g}_{x_1}$ нет), обладающий в $C^1_\omega(I_2)$ ε_1-окрестностью $B^1_{2,\,\varepsilon_1}(\widetilde{g}_{x_1})$, состоящей из Ω-сопряженных отображений, каждое из которых имеет две неподвижные точки и не содержит периодических точек с периодами > 1;

(ii_F) отображение в слое над точкой $x_2 = 23/36$ задается равенством $\widetilde{g}_{x_2} = \lambda^* y(1-y)$, при этом найдется монотонно убывающая последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_r\}_{r\geq 2}$, $\lim\limits_{r\to+\infty} \varepsilon_r = 0$, такая, что произвольное отображение в слое $g_x \in B^1_{2,\,\varepsilon_r}(\widetilde{g}_{x_2})$, где x принадлежит некоторой определяемой по ε_r левосторонней окрестности точки x_2, содержит периодические точки с (наименьшими) периодами $\{1,\ 2,\ \ldots,2^{\mu_r}\}_{0<\mu_r<\infty}$, причем последовательность $\{\mu_r\}_{r\geq 2}$ монотонно^2 и неограничено возрастает при $r \to +\infty$ (см. [91], [142]).

2. Покажем, что построенное отображение F удовлетворяет сильному условию **H**. Действительно, так как $\tau(f_{|K(f)}) = \mathbf{N}$, то $l^*_i = i$ $(i \geq 1)$. Возьмем произвольно и зафиксируем $i \geq 1$. Рассмотрим отображения в слоях $g_{x,\,i}$ при $x \in [1/4,\ 3/4]$. В силу свойства (i_F) существует окрестность $B^1_{2,\,\varepsilon^i_1}(\widetilde{g}^i_{x_1})$ $(\varepsilon^i_1 \geq \varepsilon_1)$, состоящая из отображений, каждое из которых имеет лишь неподвижные точки и не содержит периодических точек периодов > 1.

На отрезке $[1/4,\ 3/4]$ рассмотрим C^1-представление $\rho_i\ :\ [1/4,\ 3/4] \to C^1(I_2)$, где $\rho_i(x) = g_{x,\,i}$. Воспользуемся непрерывностью ρ_i в точке x_1 и по числу ε^i_1 укажем $\delta(\varepsilon^i_1) > 0$ такое, что при любом x, удовлетворяющем неравенству $x_1 < x < x_1 + \delta(\varepsilon^i_1)$, выполнено $g_{x,\,i} \in B^1_{2,\,\varepsilon^i_1}(\widetilde{g}^i_{x_1})$. Следовательно, каждое отображение $g_{x,\,i}$ при любом $0 < x - x_1 < \delta(\varepsilon^i_1)$ не содержит периодических точек периода 2.

Воспользуемся предложением 2.1.3 и для каждого $g_{x,\,i}$ при $x \in (x_1,\ x_1 + \delta(\varepsilon^i_1))$ укажем максимальную^3 $\varepsilon^i_2(x)$-окрестность $B^1_{2,\,\varepsilon^i_2(x)}(g_{x,\,i})$, состоящую из отображений, не содержащих периодические точки (наименьшего) периода 4. Заметим, что в силу приведенного выше п. (ii_F) максимальные окрестности $B^1_{2,\,\varepsilon^i_2(x)}(g_{x,\,i})$ при любом $x \in (x_1,\ x_1 + \delta(\varepsilon^i_1))$, состоящие из отображений без периодических точек (наименьшего) периода 4, существуют при любом $i \geq 1$. Так как C^1-представление ρ_i непрерывно

---

[2] Свойствами, аналогичными свойствам (i_F) – (ii_F), обладают также отображения $\widetilde{g}^n_{x_1}$ и $\widetilde{g}^n_{x_2}$ при всех $n \geq 1$ с той лишь разницей, что для отображения $\widetilde{g}^n_{x_2}$ типа 2^∞ при $n > 1$ последовательность $\{\mu_r(n)\}_{r(n)\geq 1}$ может не быть монотонной. Последнее объясняется тем, что при определении отображений в слоях $g_{x,\,n}$ для $n > 1$ рассматриваются композиции логистических отображений с различными значениями функции $\lambda(x)$ на точках множества $\{x,\ f(x),\ \ldots f^{n-1}(x)\}$ (см. равенство (0.0.3)).

[3] Макисмальность окрестности $B^1_{2,\,\varepsilon^i_2(x)}(g_{x,\,i})$ понимается в том смысле, что в произвольной окрестности $B^1_{2,\,\varepsilon(x)}(g_{x,\,i})$ при $\varepsilon > \varepsilon^i_2(x)$ найдутся отображения, содержащие периодические точки периода 4.

в произвольной точке $x \in (x_1,\, x_1 + \delta(\varepsilon_1^i))$, то по числу $\varepsilon_2^i(x)$ укажем $\delta(\varepsilon_2^i(x)) > 0$ такое, что при любом $x' \in U_{1,\,\delta(\varepsilon_2^i(x))}(x)$, где $U_{1,\,\delta(\varepsilon_2^i(x))}(x)$ – $\delta(\varepsilon_2^i(x))$-окрестность точки x, выполнено $g_{x',\,i} \in B^1_{2,\,\varepsilon_2^i(x)}(g_{x,\,i})$. Определим интервал U_1^1, полагая

$$U_1^1 = \bigcup_{x \in (x_1,\, x_1+\delta(\varepsilon_1^i))} U_{1,\,\delta(\varepsilon_2^i(x))}(x).$$

При любом $x \in U_1^1$ отображение $g_{x,\,i}$ не содержит периодических точек периода 4; кроме того, $(x_1,\, x_1 + \delta(\varepsilon_1^i)) \subset U_1^1$, причем $(x_1,\, x_1 + \delta(\varepsilon_1^i)) \neq U_1^1$. Действительно, если бы имело место равенство $(x_1,\, x_1 + \delta(\varepsilon_1^i)) = U_1^1$, то в силу свойства монотонности (для гладких отображениях отрезка) бифуркаций удвоения периода по периоду периодической орбиты нашлась бы точка $x^* \in (x_1,\, x_1 + \delta(\varepsilon_1^i))$ такая, что отображение $g_{x^*,\,i}$ имело бы периодические точки (наименьшего) периода 2. Последнее невозможно. Тогда, каково бы ни было $x \in U_1^1$, найдется максимальная окрестность $B^1_{2,\,\varepsilon_3^i(x)}(g_{x,\,i})$ отображения $g_{x,\,i}$, состоящая из отображений, не содержащих периодических точек периода 8 и т.д..

Предположим, что проделано n шагов, в результате которых указана конечная строго возрастающая (по включению) совокупность интервалов

$$U_1^1 \subset U_1^2 \subset \ldots \subset U_1^n$$

таких, что при любых $1 \leq m \leq n$ и $x \in U_1^m$ отображение $g_{x,\,i}$ не содержит периодических точек (наименьшего) периода 2^{m+1}.

Опишем $(n+1)$-й шаг. Воспользуемся предложением 2.1.3 и для каждого $g_{x,\,i}$ при $x \in U_1^n$ укажем максимальную окрестность $B^1_{2,\,\varepsilon^i_{n+2}(x)}(g_{x,\,i})$ такую, что любое отображение $g_{x',\,i} \in B^1_{2,\,\varepsilon^i_{n+2}(x)}(g_{x,\,i})$ не содержит периодических точек (наименьшего) периода 2^{n+2}. Так как $\widetilde{g}^i_{x_2}$ – отображение типа 2^∞, то такие окрестности корректно определены. Используя непрерывность C^1-представления ρ_i в произвольной точке $x \in U_1^n$, по числу $\varepsilon^i_{n+2}(x)$ укажем $\delta(\varepsilon^i_{n+2}(x)) > 0$ такое, что при любом $x' \in U_{1,\,\delta(\varepsilon^i_{n+2}(x))}(x)$, где $U_{1,\,\delta(\varepsilon^i_{n+2}(x))}(x)$ – $\delta(\varepsilon^i_{n+2}(x))$-окрестность точки x, выполнено $g_{x',\,i} \in B^1_{2,\,\varepsilon^i_{n+2}(x)}(g_{x,\,i})$.

Положим

$$U_1^{n+1} = \bigcup_{x \in U_1^n} U_{1,\,\delta(\varepsilon^i_{n+2}(x))}(x).$$

Тогда U_1^{n+1} – интервал такой, что при любом $x \in U_1^{n+1}$ отображение $g_{x,\,i}$ не содержит периодических точек с (наименьшим) периодом 2^{n+2}. Заметим, что $U_1^{n+1} \neq U_1^n$.

Действительно, в противном случае в силу свойства максимальности окрестностей $B^1_{2,\,\varepsilon^i_{n+2}(x)}(g_{x,\,i})$ отображений в слоях $g_{x,\,i}$ при всех $x \in U^n_1$ отображение $g_{b,\,i}$ в слое над правой граничной точкой b интервала U^n_1 содержало бы периодическую орбиту периода 2^{n+2}. Осюда с использованием свойства монотонности бифуркаций удвоения периода немедленно получили бы, что при некотором $\overline{x}^* \in U^n_1$ отображение $g_{\overline{x}^*,\,i}$ имеет периодическую орбиту периода 2^{n+1}. Последнее противоречит свойствам интервала U^n_1.

Таким образом, построена строго возрастающая по включению последовательность интервалов

$$U^1_1 \subset U^2_1 \subset \ldots \subset U^n_1 \ldots$$

таких, что при любых $n \geq 1$ и $x \in U^n_1$ отображение $g_{x,\,i}$ не содержит периодических точек (наименьшего) периода 2^{n+1}. В силу результатов работ [91], [142] справедливо равенство

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U^n_1 = (\frac{1}{4},\, \frac{23}{36}),$$

причем интервал $(1/4,\, 23/36)$ при любом $i \geq 1$ содержит последовательность $\{x^*_{i,\,n}\}_{n \geq 1}$, сходящуюся к точке $23/36$, такую, что в отображении $g_{x^*_{i,\,n},\,i}$ из некоторой периодической орбиты O_n периода 2^n рождается периодическая орбита O_{n+1} периода 2^{n+1}. Рождение периодической орбиты периода 2^{n+1} происходит по следующему сценарию: притягивающая периодическая орбита O_n отображения $g_{x^*_{i,\,n},\,i}$ имеет мультипликатор, равный -1; при $x > x^*_{i,\,n}$ мультипликатор периодической орбиты периода 2^n принимает значения < -1, и периодическая орбита периода 2^n становится гиперболической отталкивающей (то есть состоящей из источников); появляющаяся при $x > x^*_{i,\,n}$ периодическая орбита периода 2^{n+1} является гиперболической притягивающей (то есть состоящей из стоков). Используя свойство локальной устойчивости гиперболических периодических точек, получаем отсюда, что $(\Omega^F_i)^{ex}$ – непрерывная функция на отрезке $[1/4,\, 23/36]$ при любом $i \geq 1$. Так как $K(f) \subset [1/4,\, 23/36]$, то и, тем более, функции Ω^F_i непрерывны на $\Omega(f)$. Следовательно, рассматриваемое отображение F удовлетворяет сильному условию **H**.

На рис. 5.2 указано подмножество графика расширения вспомогательной функции $(\Omega^F_1)^{ex}$, представляющего собой дендрит Гехмана (см., например, [160]). При $i > 1$

график функции $(\Omega_i^F)^{ex}$ может содержать замкнутые дуги, соответствующие появлению и исчезновению периодических орбит периодов 2^n $(n \geq 1)$.

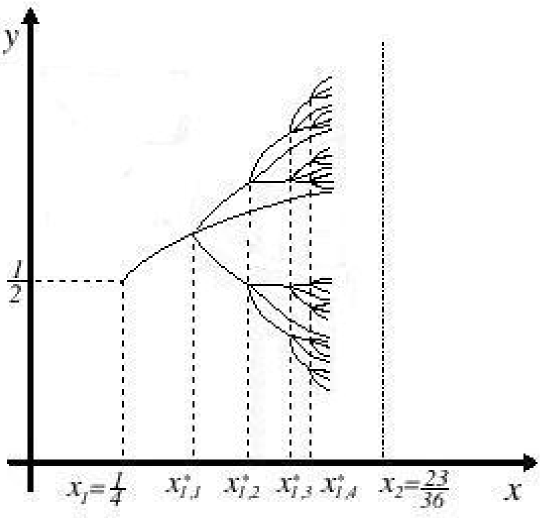


Рис. 5.2: *Подмножество графика расширения вспомогательной функции* $(\Omega_1^F)^{ex}$.

3. Укажем окрестность $B^1_\varepsilon(F)$ в пространстве $\widetilde{T}^1_{*,1}(I)$, не содержащую Ω-устойчивых косых произведений. Действительно, возьмем произвольно и зафиксируем натуральное число $r \geq 2$ так, чтобы каждое отображение из окрестности $B^1_{2,\varepsilon_r}(\widetilde{g}_{x_2})$ содержало периодические точки с (наименьшими) периодами $\{1, 2, \ldots, 2^{\mu_r}\}$ при $3 \leq \mu_r < \infty$. Пусть ε_1-окрестность $B^1_{2,\varepsilon_1}(\widetilde{g}_{x_1})$ отображения $\widetilde{g}_{x_1}$ в $C^1_\omega(I_2)$ выбрана в соответствии с п. 1 доказательства так, что выполнено свойство (i_F).

Положим $\overline{\varepsilon} = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_r\}$. Используя равномерную непрерывность C^1-представления ρ_1 на компакте $K(f)$, по числу $\overline{\varepsilon} > 0$ укажем $0 < \delta_1 < 1/16$ так, чтобы для любых x', $x'' \in K(f)$, удовлетворяющих неравенству $|x' - x''| < \delta_1$, выполнялось $g_{x''} \in B^1_{2,\overline{\varepsilon}}(g_{x'})$.

Так как $f \in C^1_\omega(I)$, то для $\delta_1 > 0$ найдется $\overline{\varepsilon}'$-окрестность $B^1_{1,\overline{\varepsilon}'}(f)$ факторотображения f в пространстве $C^1_\omega(I)$, состоящая из отображений, каждое из которых Ω-сопряжено с f с помощью сопрягающего гомеоморфизма, δ_1-близкого к тождественному. Укажем, что δ_1-окрестности f-неподвижных точек $U_{1,\delta_1}(0)$, $U_{1,\delta_1}(1/4)$ и $U_{1,\delta_1}(23/36)$ при $0 < \delta_1 < 1/16$ попарно не пересекаются, и каждая из них содержит единственную неподвижную точку произвольного отображения из $B^1_{1,\,\overline{\varepsilon}'}(f)$.

Положим $\varepsilon = 1/2 \min\{\overline{\varepsilon},\, \overline{\varepsilon}'\}$. Покажем, что окрестность $B^1_{\varepsilon}(F)$ отображения $F \in \widetilde{T}^1_{*,\,1}(I)$ не содержит Ω-устойчивых отображений.

Предположим противное. Тогда существует Ω-устойчивое отображение $\Phi \in \widetilde{T}^1_{*,\,1}(I)$ (см. следствие 5.2.1) такое, что $\Phi \in B^1_{\varepsilon}(F)$, где $\Phi(x,\, y) = (\varphi(x),\, \psi_x(y))$. Отображение Φ обладает следующими свойствами:

(i_{Φ}) $\varphi \in B^1_{1,\,\varepsilon_1}(f)$;

(ii_{Φ}) φ имеет единственное локально максимальное квазиминимальное множество $K(\varphi)$, содержащее две неподаижные точки $x_1(\varphi) \in U_{1,\,\delta_1}(1/4)$ и $x_2(\varphi) \in U_{1,\,\delta_1}(23/36)$;

(iii_{Φ}) $\widetilde{\psi}_{x_1(\varphi)} \in B^1_{(1,\,2),\,\varepsilon}(\widetilde{g}_{x_1})$ и, следовательно, $\widetilde{\psi}_{x_1(\varphi)} \in B^1_{2,\,\varepsilon_1}(\widetilde{g}_{x_1})$;

(iv_{Φ}) $\widetilde{\psi}_{x_2(\varphi)} \in B^1_{(1,\,2),\,\varepsilon}(\widetilde{g}_{x_2})$ и, тем более, $\widetilde{\psi}_{x_2(\varphi)} \in B^1_{2,\,\varepsilon_r}(\widetilde{g}_{x_2})$.

В силу свойств (i_F) и (iii_{Φ}) отображение $\widetilde{\psi}_{x_1(\varphi)}$ – эндоморфизм Морса - Смейла с двумя неподвижными точками. В то же время в силу свойств (ii_F) и (iv_{Φ}) отображение $\widetilde{\psi}_{x_2(\varphi)}$ содержит периодические точки (наименьших) периодов $\{1,\, 2,\, \ldots,\, 2^{\mu_r}\}$ при $3 \leq \mu_r < \infty$. Поэтому никакие итерации отображений $\widetilde{\psi}_{x_1(\varphi)}$ и $\widetilde{\psi}_{x_2(\varphi)}$ не являются Ω-сопряженными. Таким образом, получили противоречие со следствием 5.2.2. Теорема 5.2.2 доказана.

Результаты подпараграфа 5.2.2 опубликованы в статьях [81], [115], [123].

5.3 О плотной устойчивости в целом семейства отображений в слоях C^1-гладких косых произведений отображений интервала

Сравнение определений 0.0.15 и 0.0.13 показывает, что свойство плотной устойчивости в целом (но не устойчивости в целом) семейства отображений в слоях косого произведения с факторотображением типа $\succ 2^{\infty}$ из пространства $\widetilde{T}^1_*(I)$ означает нарушение свойства устойчивости в целом семейства отображений в слоях такого рода косых произведений над точками замкнутого нигде неплотного подмножества неблуждающего множества $\Omega(f)$ факторотображения.

Эту часть работы мы начнем с доказательства корректности определения 0.0.15 плотной устойчивости в целом в C^1-норме семейства отображений в слоях косого произведения отображений интервала.

Теорема 5.3.1 [81], [116]. *При любом $j = 1, 2, 3, 4$ существует отображение $F_j \in \widetilde{T}^1_{*,j}(I)$, имеющее плотно устойчивое в целом в C^1-норме семейство отображений в слоях.*

Перейдем к описанию аппроксимационных свойств косых произведений отображений интервала из некоторых подмножеств пространства $\widetilde{T}^1_*(I)$.

Так, следующая теорема 5.3.2 представляет собой критерий аппроксимируемости в C^1-норме косых произведений с плотно устойчивым в целом семейством отображений в слоях из пространств $\widetilde{T}^1_{*,j}(I)$ при $j \neq 2$ Ω-устойчивыми C^1-гладкими косыми произведениями отображений интервала.

Теорема 5.3.2 [81], [116], [117]. *Пусть $F \in \widetilde{T}^1_{*,j}(I)$ ($j = 1, 3$ или 4) – косое произведение отображений интервала с плотно устойчивым в целом (в C^1-норме) семейством отображений в слоях.*

Отображение F можно аппроксимировать с любой степенью точности C^1-гладкими Ω-устойчивыми косыми произведениями отображений интервала в том и только том случае, если для каждого локально максимального квазиминимального множества $K(f)$ фактороотображения f и каждого $i \geq i^*$ существует связная компонента $C_{K(f),i}$ пространства C^1-гладких Ω-устойчивых отображений отрезка I_2 в себя, для которой верно включение

$$\{g_{x,l_i^*}\}_{x \in K(f)} \subset \overline{C}_{K(f),i}. \tag{5.3.1}$$

Обратим внимание на то, что в условиях теоремы 5.3.2 выполнено неравенство $j \neq 2$. Это связано с тем, что в известных автору в настоящее время примерах косых произведений из пространства $\widetilde{T}^1_{*,2}(I)$ с плотно устойчивым в целом семейством отображений в слоях на отрезке I_1 существуют интервалы (пересечение объединения которых с единственным локально максимальным квазиминимальным множеством $K(f)$ фактороотображения (3.1.1) всюду плотно в $K(f)$), в слоях над точками которых отображения g_{x,l_i^*} имеют гиперболические неблуждающие множества, а в слоях над граничными точками этих интервалов отображения $\{g_{x,l_i^*}\}_{x\in K(f)}$ при $i \geq i^*$ допускают гомоклинический Ω-взрыв. Отображения из этих примеров не удовлетворяют условиям теоремы 5.3.2 (см. далее предложение 5.3.1). Вопрос существования косых произведений отображений интервала из пространства $\widetilde{T}^1_{*,\,2}(I)$ с плотно устойчивым в целом семейством отображений в слоях, для которых удовлетворяются условия теоремы 5.3.2, в настоящее время остается открытым.

Следующая теорема 5.3.3 объединяет принципиально новый аппроксимационный результат для отображений из пространства $T^1_{*,\,4}(I)$ с доказанным в главе 3 утверждением о несчетности множества классов Ω-сопряжености в $T^1_{*,\,4}(I)$ (см. теорему 3.1.2).

Теорема 5.3.3 [81], [117]. *Множество классов Ω-сопряженности отображений из пространства $\widetilde{T}^1_{*,\,4}(I)$ несчетно и имеет мощность $\geq \aleph_1$ (где $\aleph_1$ – мощность множества счетных ординалов.*

Более того, $\widetilde{T}^1_{*,\,4}(I)$ содержит плотное в себе подмножество косых произведений с произвольной допустимой глубиной центра (то есть с глубиной центра, представляющей собой произвольный конечный или счетный ординал).

Важно отметить, что теорема 5.3.3 указывает не только на невозможность полного динамического описания косых произведений из подпространства $\widetilde{T}^1_{*,\,4}(I)$, основанного на отношении Ω-сопряженности, но и демонстрирует невероятно сложную структуру границы объединения относительных областей в подпространстве $\widetilde{T}^1_{*,\,4}(I)$, состоящих из Ω-сопряженных отображений.

5.3.1 Корректность определения плотной устойчивости в целом в C^1-норме семейства отображений в слоях

Перейдем к доказательству теоремы существования отображений с плотно устойчивым в целом в C^1-норме семейством отображений в слоях в каждом из подпространств $\widetilde{T}^1_{*,\,j}(I)$ при всех $j = 1, 2, 3, 4$. Заметим, что отображение $F \in \widetilde{T}^1_{*,\,1}(I)$, построенное при доказательстве теоремы 5.2.2, имеет плотно устойчивое в целом в C^1-норме семейство отображений в слоях.

Для доказательства существования косого произведения с плотно устойчивым в целом семейством отображений в слоях в пространстве $\widetilde{T}^1_{*,\,2}(I)$ нам потребуется следующее свойство.

Лемма 5.3.1 [81]. *Пусть отображение* $F \in \widetilde{T}^1_{*,2}(I)$ *имеет плотно устойчивое в целом в* C^1*-норме семейство отображений в слоях. Тогда, если* $S_d(\Omega^F_{l_i}) \neq \emptyset$, *то любая точка разрыва вспомогательной функции* $\Omega^F_{l_i}$ $i \geq i^*$ *является точкой полунепрерывности снизу.*

Справедливость леммы 5.3.1 непосредственно следует из предложения 3.2.1 и теоремы 1.1.2.

Предложение 5.3.1. *Существует отображение* $F \in \widetilde{T}^1_{*,2}(I)$, *имеющее плотно устойчивое в целом в* C^1*-норме семейство отображений в слоях.*

Доказательство. Построим косое произведение $F \in \widetilde{T}^1_{*,2}([0,\, 1]^2)$ с факторотображением, заданным равенством (3.1.1), и семейством отображений в слоях, содержащем отображения, допускающие гомоклинический C^1- Ω-взрыв. Из определения факторотображения f следует, что $l^*_i = i$, $i \geq 1$.

На отрезке $[0,\, 1]$ зададим C^1-гладкую функцию $g(y)$, полагая

$$g(y) = \begin{cases} \chi(y), & \text{если} \quad y \in [0,\, \frac{1}{4}); \\ 10(\frac{1}{4} - y)(y - \frac{3}{4}) + \frac{1}{4}, & \text{если} \quad y \in [\frac{1}{4},\, \frac{1}{2}); \\ 160(y - \frac{7}{16})(\frac{9}{16} - y) + \frac{1}{4}, & \text{если} \quad y \in [\frac{1}{2},\, \frac{9}{16}); \\ a(\frac{5}{8} - y)^3 + b(\frac{5}{8} - y)^2 + \frac{1}{8}, & \text{если} \quad y \in [\frac{9}{16},\, \frac{5}{8}); \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sin^2 4\pi(y - \frac{5}{8}), & \text{если} \quad y \in [\frac{5}{8},\, \frac{3}{4}); \\ \frac{1}{4}, & \text{если} \quad y \in [\frac{3}{4},\, \frac{15}{16}); \\ 64(y - \frac{14}{16})(1 - y), & \text{если} \quad y \in [\frac{15}{16},\, 1], \end{cases} \tag{5.3.2}$$

где $\chi(y)$ – произвольная строго возрастающая функция такая, что выполнены равенства $\chi(0) = 0$, $\chi(1/4) = 1/4$, $\chi'(1/4) = 5$; $a = -24 \cdot 16^2$, $b = 26 \cdot 16$ (см. рис. 5.3).

Будем использовать заданную на отрезке $[0,\, 1]$ C^1-гладкую "шапочку Урысона"

$$h(y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y \in [0,\, \frac{27}{32}] \bigcup [\frac{29}{32},\, 1]; \\ 1, & \text{если} \quad y = \frac{7}{8} \end{cases}$$

Определим отображения в слоях, полагая

$$g_x(y) = g(y) + (x - \frac{1}{4})^2 h(y). \tag{5.3.3}$$

В силу формулы (5.3.3) отображения в слоях $g_x(y)$ совпадают (как функции переменной y) вне окрестности точки $y = 7/8$ радиуса $1/32$. Из формул (5.3.2) – (5.3.3)

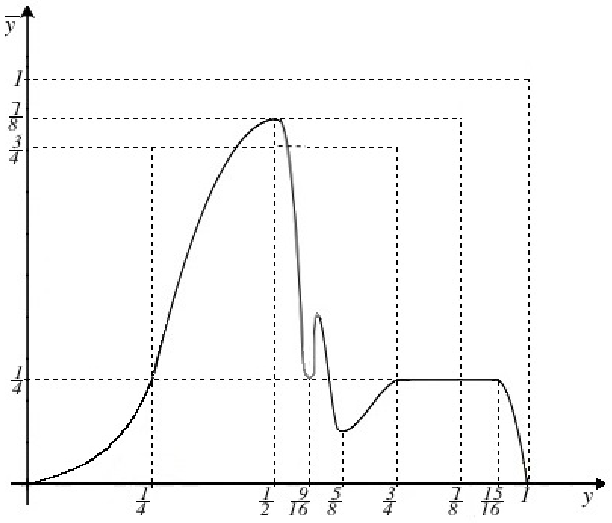


Рис. 5.3: *График функции* $\overline{y} = g(y)$.

следует, что отображение в слое над точкой $x = 1/4$ допускает гомоклинический Ω-взрыв. Это явление в семействе отображений в слоях всевозможных итераций F связано со значениями отображений $g_{x,\,i}$ в точках $(x,\, 7/8)$ при всех $x \in [0,\, 1]$, где $y = 7/8$ – критическая точка отображения в слое $g_{x,\,i}$ при любых $x \in [0,\, 1]$ и $i \geq 1$. Если $g_{x,\,i}(7/8)$ есть периодическая точка отображения $g_{x,\,i}$, то $g_{x,\,i}$ допускает гомоклинический Ω-взрыв. Поэтому при каждом $i \geq 1$ существует не более, чем счетное множество слоев, отображения в которых допускают гомоклинический Ω-взрыв. В силу C^1-гладкости $g_{x,\,i} : [0,\, 1]^2 \to [0,\, 1]$ и равенства $\frac{\partial}{\partial y} g_{x,\,i}(7/8) = 0$ множество таких слоев замкнуто и разреженно. Используя формулы (5.3.2) – (5.3.3) и лемму 5.3.1, получаем отсюда, что $F \in \widetilde{T}^1_{*,\,2}(I)$, и на отрезке $[0,\, 1]$ оси абсцисс при каждом $i \geq 1$ существует не более, чем счетное всюду плотное множество интервалов, отображения в слоях $g_{x,\,i}$ над точками которых Ω-устойчивы в C^1-норме. Обозначим через A_i объединение всех таких интервалов. Тогда G_δ-множество $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ всюду плотно на отрезке $[0,\, 1]$, и отображения $g_{x,\,i}$ в слое над произвольной точкой $x \in A$ Ω-устойчивы в C^1-норме при любых $i \geq 1$. В силу компактности $\Omega(f)$ множество $A \bigcap \Omega(f) = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} (A_i \bigcap \Omega(f))$ всюду плотно и в неблуждающем множестве $\Omega(f)$ фактороотображения f. Убедимся в том, что $A \bigcap \Omega(f)$ открыто в $\Omega(f)$.

Действительно, пусть x – произвольная точка множества $A\bigcap\Omega(f)$, а окрестность $V_i(x)$ точки x выбрана так, что $V_i(x)\subset A_i$. Существование окрестности $V_i(x)$ при любом $i\geq 1$ следует из того, что множество Ω-устойчивых в C^1-норме отображений отрезка открыто, а C^1-представление ρ_i непрерывно. Покажем, что не существует подпоследовательности $\{V_{i_j}(x)\}_{j\geq 1}$ последовательности окрестностей $\{V_i(x)\}_{i\geq 1}$ такой, что

$$\lim_{j\to+\infty} diam V_{i_j}(x)=0, \tag{5.3.4}$$

где $diam(\cdot)$ – диаметр множества.

Предположим противное. Тогда для некоторой подпоследовательности $\{V_{i_j}(x)\}_{j\geq 1}$ окрестностей точки x верно равенство (5.3.4), и $j\geq 1$ можно зафиксировать так, чтобы хотя бы одна из граничных точек интервала $V_{i_{j+1}}=(v^1_{i_{j+1}}(x),\, v^2_{i_{j+1}}(x))$ (например, $v^1_{i_{j+1}}(x)$) являлась внутренней точкой интервала V_{i_j}. Отображения в слоях над граничными точками интервала $V_{i_j}(x)=(v^1_{i_j}(x),\, v^2_{i_j}(x))$ допускают гомоклинический Ω-взрыв, где $v^1_{i_j}(x)$, $v^2_{i_j}(x)$ – периодические точки f. Но для того, чтобы в слоях над периодической точкой $v^1_{i_{j+1}}(x)$ произошел гомоклинический Ω-взрыв, значение $g_{i_j,\,x}(7/8)$ должно совпадать с гомоклинической точкой $w^1_{i_{j+1}}(x)$ к периодической точке $v^1_{i_{j+1}}(x)$ такой, что

$$f^{i_{j+1}-i_j}(w^1_{i_{j+1}}(x))=v^1_{i_{j+1}}(x).$$

Последнее противоречит каждому из равенств

$$g_{i_j,x}(7/8)=v^1_{i_j}(x) \ \text{ и } \ g_{i_j,x}(7/8)=v^2_{i_j}(x) \ \text{ (см. формулы (5.3.2) – (5.3.3)).}$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$\inf_{i\geq 1}\{diam V_i(x)\}>0,$$

и найдется окрестность $V(x)$ точки x такая, что $V(x)\subset A$. Следовательно, множество $A\bigcap\Omega(f)$ открыто в $\Omega(f)$. В силу теоремы 5.1.1 сужения $\Omega^F_{i\ |A\cap\Omega(f)}$ непрерывны. Так как $F\in T^1_{*,2}(I)$, то верно равенство $\overline{\Omega}^F_i\bigcap(A\cap\Omega(f))=\Omega^F_{i\ |A\cap\Omega(f)}$, и для построения гомеоморфизма $H^{<i>}:\Omega^F_{i\ |A(f)\cap\Omega(f)}\to\Omega^\Phi_{i\ |A(\phi)\cap\Omega(\phi)}$ можно использовать рассуждения п. 4 доказательства леммы 5.2.1. Таким образом, реализуется определение 0.0.15, и семейство отображений в слоях построенного отображения $F\in T^1_{*,2}(I)$ плотно устойчиво в целом в C^1-норме. Предложение 5.3.1 доказано.

Предложение 5.3.2. *Существует отображение* $F \in \widetilde{T}^1_{*,3}(I)$, *имеющее плотно устойчивое в целом в* C^1*-норме семейство отображений в слоях.*

Доказательство. При построении отображения $F \in \widetilde{T}^1_{*,3}(I)$ в качестве фakторотображения f, по-прежнему, будем использовать C^1-гладкое отображение отрезка $[0,\ 1]$ в себя, заданное равенством (3.1.1).

В стандартном единичном квадрате $[0,\ 1]^2$ определим косое произведение отображений интервала $F \in \widetilde{T}^1_{*,3}(I)$ с плотно устойчивым в целом в C^1-норме семейством отображений в слоях. Для этого нам потребуется последовательность гомоклинических точек к f-неподвижной точке $x_0 = 1/4$

$$x_{-1} > x_{-2} > \ldots > x_{-n} > x_{-n-1} > \ldots > \frac{1}{4}.$$

Для определения отображений в слоях при любом $n \geq 1$ будем использовать C^1-гладкие "шапочки Урысона" такие, что

$$h_{x_{-n}}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y \in [0,\ \frac{x_{-n}-x_{-n-1}}{6}] \bigcup [1 - \frac{x_{-n}-x_{-n-1}}{6},\ 1]; \\ c^*, & \text{если} \quad y = \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{5.3.5}$$

где c^* не зависит от n, $0 < c^* \leq \frac{1}{4}$, причем $0 < h_{x_{-n}}(y) < c^*$ на каждом из промежутков $(\frac{x_{-n}-x_{-n-1}}{6},\ \frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2},\ 1 - \frac{x_{-n}-x_{-n-1}}{6})$. Отметим, что $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{-n} - x_{-n-1}) = 0$.

Нам потребуется также C^1-гладкая "шапочка Урысона" $h_{x_0}(y)$ такая, что

$$h_{x_0}(0) = h_{x_0}(1) = \frac{\partial}{\partial y}h_{x_0}(0) = \frac{\partial}{\partial y}h_{x_0}(1) = 0,\ h_{x_0}(1/2) = c^*,$$

причем $0 < h_{x_0}(y) < c^*$ на каждом из промежутков $(0,\ \frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2},\ 1)$.

При всех $n \geq 0$ положим

$$g_{x_{-n}}(y) = y + h_{x_{-n}}(y). \tag{5.3.6}$$

В силу формул (5.3.5)–(5.3.6) отображения $g_{x_{-n}}$ при всех $n \geq 1$ принадлежат границе одной и той же связной компоненты области Ω-устойчивости C^1-гладких отображений отрезка $[0,\ 1]$ в себя с инвариантной границей. Обозначим эту компоненту через C. Доопределим отображения в слоях на каждый интервал $(x_{-n-1},\ x_{-n})$ $(n \geq 1)$.

Положим $\varepsilon_n = ||g_{x_{-n}} - g_{x_{-n-1}}||_{1,2}$. Будем рассматривать отображения из множества $\overline{C} \cap \overline{B}^1_{2,\varepsilon_n}(g_{x_{-n}})$, где $\overline{B}^1_{2,\varepsilon_n}(\cdot)$ – замкнутый шар радиуса ε_n в пространстве C^1-гладких отображений отрезка $[0,\ 1]$ в себя с инвариантной границей. Тогда

$$g_{x_{-n}},\ g_{x_{-n-1}} \in \overline{C} \cap \overline{B}^1_{2,\varepsilon_n}(g_{x_{-n}}).$$

Связное множество $\overline{C} \cap \overline{B}^1_{2,\,\varepsilon_n}(g_{x_{-n}})$ является сцепленным (см. [58, гл. 5, §3]). Поэтому можно указать C^1-гладкий путь $\gamma : [x_{-n-1},\, x_{-n}] \to \overline{C} \cap \overline{B}^1_{2,\,\varepsilon_n}(g_{x_{-n}})$ такой, что $\gamma(x_{-n-1}) = g_{x_{-n-1}}$, $\gamma(x_{-n}) = g_{x_{-n}}$, $\gamma(x) = g_x$ при любом $x \in (x_{-n-1},\, x_{-n})$, и $g_x \in C$. Более того, в силу формулы (5.3.6) каждое отображение g_x при $x \in (x_{-n-1},\, x_{-n})$ есть эндоморфизм Морса-Смейла с двумя неподвижными точками 0 и 1, причем $g_x \in C^1([x_{-n-1},\, x_{-n}] \times [0,\, 1],\, [0,\, 1])$, а неподвижные точки отображений $g_{x_{-n}}$ при каждом $n \geq 1$ заполняют два невырожденных непересекающихся отрезка, одному из которых принадлежит точка $y = 0$, а другому – точка $y = 1$. Поэтому f-гомоклинические точки x_{-n} являются точками полунепрерывности сверху (но не снизу) многозначных функций $\Omega_i^F = \overline{\Omega}_i^F$ $(i \geq 1)$ [4], в отличие от точек $x \in (x_{-n-1},\, x_{-n})$ и f-неподвижной точки x_0, являющихся точками непрерывности указанных многозначных функций[5].

Завершим определение отображений в слоях. Положим $g_x = g_{x_0}$ на промежутке $[0,\, x_0)$ и $g_x = g_{x_{-1}}$ на промежутке $(x_{-1},\, 1]$.

Из определения отображений в слоях следует, что при каждом $n \geq 1$ справедливо равенство

$$\lim_{i \to +\infty} l(g_{x_{-n},\,i}([0,\, \frac{x_{-n} - x_{-n-1}}{6}])) = \lim_{i \to +\infty} l(g_{x_{-n},\,i}([1 - \frac{x_{-n} - x_{-n-1}}{6},\, 1])) = 0,$$

где $l(\cdot)$ – длина промежутка.

Поэтому $\Omega(F) = [0,\, 1] \times \{0,\, 1\}$. Таким образом, Ω-функция Ω^F построенного отображения F непрерывна. Обратим внимание на то, что в силу приведенного построения частные производные $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ и $\frac{\partial}{\partial y} g_x(y)$ непрерывны в каждой точке квадрата $[0,\, 1]^2$. Так как $f \in C^1([0,\, 1])$, то последнее влечет за собой гладкость F. Следовательно, $F \in \widetilde{T}^1_{*,\,3}([0,\, 1]^2)$. Предложение 5.3.2 доказано.

Предложение 5.3.3. *Существует отображение $F \in \widetilde{T}^1_{*,\,4}(I)$, имеющее плотно устойчивое в целом в C^1-норме семейство отображений в слоях.*

Доказательство. Пусть косое произведение $F \in \widetilde{T}^1_{*,\,4}(I)$ определено на стандартном единичном квадрате $I = [0,\, 1]^2$ так, что его факторотображение задано равен-

---

[4] Указанным свойством обладают все функции, полунепрерывные сверху

[5] В силу формулы (5.3.6) отображение $g_{x_0} : [0,\, 1] \to [0,\, 1]$ имеет две неподвижные точки 0 и 1, но не является эндоморфизмом Морса-Смейла, так как $\frac{\partial}{\partial y} g_{x_0}(0) = \frac{\partial}{\partial y} g_{x_0}(1) = 1$.

ством (3.1.1). Возьмем произвольно ω-предельное множество мощности континуум, содержащее периодические точки, включенное в единственное локально максимальное квазиминимальное множество $K(f)$ факторотображения f. Такое ω-предельное множество является квазиминимальным. Обозначим его через $K^*(f)$. Локально максимальное квазиминимальное множество $K(f)$ факторотображения f содержит континуум таких нигде не плотных в $K(f)$ квазиминимальных множеств, не являющихся локально максимальными (см. утверждение (10) предложения 3.1.1).

Определим отображения в слоях, полагая $g_x(y) = y - h(x)y(1-y)$ (ср. с отображением, использованным при доказательстве предложения 3.1.5), где, как и ранее, $h(x)$ – C^1-гладкая "шапочка Урысона"такая, что

$$h(x) = 0 \ \text{ для } \ x \in K^*(f),$$

$$\text{и } \ 0 < h(x) < 1 \ \text{ для } \ x \in [0,\, 1] \setminus K^*(f).$$

Тогда при всех $x \in K^*(f)$ и $n \geq 1$ выполнено равенство $g_{x,n}(y) = y$, а при любых $x \in [0,\, 1] \setminus K^*(f)$ и $n \geq 1$ отображения $g_{x,n}$ – эндоморфизмы Морса-Смейла с двумя неподвижными точками: стоком $y = 0$ с мультипликатором $\lambda(0) = 1 - h(x)$ и источником $y = 1$ с мультипликатором $\lambda(1) = 1 + h(x)$. Так как такие отображения Ω-устойчивы в пространстве C^1-гладких отображений отрезка $[0,\, 1]$ с инвариантной границей, то семейство отображений в слоях $\{g_{x,n}\}_{n\geq 1}$ плотно устойчиво в целом в C^1-норме. При этом вспомогательные функции $\Omega^F_{l_i^*}$ при всех $i \geq 1$ полунепрерывны сверху. Отсюда следует, что $\Omega^F_{l_i^*} = \overline{\Omega}^F_{l_i^*}$, и $S_d(\Omega^F_{l_i^*}) = K^*(f)$. Более того, $\Omega^F = K^*(f) \times [0,\, 1] \bigcup([0,\, 1] \times \{0;\, 1\})$, и $S_d(\Omega^F) = K^*(f)$. Следовательно, $F \in T^1_{*,4}(I)$. Предложение 5.3.3 доказано.

5.3.2 Аппроксимационные свойства косых произведений из некоторых подмножеств пространства $\widetilde{T}^1_*(I)$

Эту часть работы мы начнем с доказательства аппроксимационной теоремы 5.3.2.

Доказательство теоремы 5.3.2. 1. Пусть $F \in \widetilde{T}^1_{*,j}$, где $j \neq 2$, причем F имеет устойчивое в целом в C^1-норме семейство отображений в слоях, и для каждого локально максимального квазиминимального множества $K(f)$ факторотображения

f и каждого $i \geq i^*$ существует связная компонента $C_{K(f),\,i}$ пространства C^1-гладких Ω-устойчивых отображений отрезка I_2 в себя, для которой верно включение (5.3.1). Возьмем произвольно положительные числа ε' и δ. Пусть ε_1-окрестность $B^1_{1,\,\varepsilon_1}(f)$ отображения f при $\varepsilon_1 < \varepsilon'$ состоит из C^1-гладких отображений отрезка I_1 (с инвариантной границей), которые Ω-сопряжены с f с помощью δ-близкого к тождественному отображению неблуждающего множества $\Omega(f)$ гомеоморфизма h_1.

Возьмем произвольно локально максимальное квазиминимальное множество $K(f)$ фактооротображения f. Рассмотрим множество C^1-гладких косых произведений отображений интервала $\Phi(x,\,y)$ таких, что $\varphi \in B^1_{1,\,\varepsilon_1}(f)$, и при любых $x \in h_1(K(f))$ выполнено

$$\{\psi_{x,\,l_i^*}\}_{x \in h_1(K(f))} \subset C_{h_1(K(f)),\,i} \ \ (i \geq i^*). \tag{5.3.7}$$

Используя конструкцию, аналогичную примененной при доказательстве теоремы 5.1.1, убеждаемся в том, что косые произведения, отображения в слоях которых обладают свойством (5.3.7), существуют.

Множество Φ^* такого рода отображений $\Phi(x,\,y)$ открыто в подпространстве пространства $\widetilde{T}^1_*(I)$ косых произведений, имеющих факторотображения типа $\succ 2^\infty$. Тогда граница $\partial\Phi^*$, где $\partial\Phi^* = \overline{\Phi}^* \setminus \Phi^*$ открытого множества Φ^* (см. [47, гл. 1 § 6, III]) нигде не плотна в $\overline{\Phi}^*$.

В силу плотной устойчивости в целом (но не устойчивости в целом) семейства отображений в слоях косого произведения F и включения (5.3.1) выполнено: $F \in \partial\Phi^*$. Поэтому в произвольной окрестности $B^1_\varepsilon(F)$ (при любом $\varepsilon < \varepsilon_1$) отображения F найдется отображение $\Phi \in \Phi^*$, аппроксимирующее F с точностью $\varepsilon < \varepsilon'$.

Включение (5.3.7) вместе с Ω-устойчивостью отображений отрезка из связных множеств $C_{K(f),\,i}$ $(i \geq i^*)$ влечет за собой, во-первых, свойство $\Phi \in \widetilde{T}^1_{*,\,1}(I)$ и, во-вторых, свойство устойчивости в целом семейства отображений в слоях косого произведения Φ. Используя теорему 5.2.1, получаем отсюда, что отображение Φ является Ω-устойчивым в C^1-норме.

2. Обратно, пусть $F \in \widetilde{T}^1_{*,\,j}$, где $j = 1,\,3,$ или 4; причем F имеет устойчивое в целом в C^1-норме семейство отображений в слоях, и F аппроксимируемо в C^1-норме с произвольной степенью точности Ω-устойчивыми отображениями. Воспользуемся

определением 0.0.15, и для любого $\delta > 0$ укажем окрестность $B^1_\varepsilon(F)$ отображения F в $\widetilde{T}^1_*(I)$ так, чтобы для каждого отображения $\Phi \in B^1_\varepsilon(F) \bigcap \widetilde{T}^1_{*,\,j'}(I)$ $(j' = 1, 2, 3, 4)$ и каждого времени возвращения l^*_i $(i \geq i^*$ при некотором $i^* > i_*)$ траекторий точек совершенной части f-неблуждающего множества $\Omega(f)$ можно было указать δ-близкий к тождественному отображению в C^0-норме гомеоморфизм - косое произведение $H^{<l^*_i>} : \overline{\Omega}^F_{l^*_i}|_{A^*(f)} \to \overline{\Omega}^\Phi_{l^*_i}|_{A^*(\varphi)}$, для которого вместе с равенством $h_1(A^*(f)) = A^*(\varphi)$ выполнялось бы и равенство (0.0.30).

Выберем Ω-устойчивое косое произведение $\Phi \in B^1_\varepsilon(F)$ (при этом $j' = 1$). Тогда в силу следствия 5.2.3 для любого локально максимального квазиминимального множества $K(\varphi)$ фактора φ косого произведения Φ и любого $i \geq i^*$ существует связная компонента $C_{K(\varphi),\,i}$ пространства C^1-гладких Ω-устойчивых отображений отрезка I_2 в себя, для которой верно включение $\{\psi_{x,\,l^*_i}\}_{x \in K(\varphi)} \subset C_{K(\varphi),\,i}$. Используя определение 0.0.15, немедленно получаем отсюда, что

$$\{g_{h_1^{-1}(x),\,l^*_i}\}_{x \in h_1^{-1}(K(\varphi) \bigcap A^*(\varphi))} \subset C_{K(f) \bigcap A^*(f),\,i}.$$

Так как $K(f) \bigcap A^*(f)$ всюду плотно в $K(f)$, то применяя непрерывнсть C^1-представления $\rho_{l^*_i}$, получаем, что для отображений в слоях косого произведения F выполнено включение (5.3.1). Теорема 5.3.2 доказана.

Отметим, что косое произведение отображений интервала, построенное в доказательстве теоремы 5.2.2, не удовлетворяет условиям теоремы 5.3.2.

Перейдем к доказательству теоремы 5.3.3. Первая часть утверждения теоремы 5.3.3 составляет содержание теоремы 3.1.2. Поэтому остается указать множество отображений в пространстве $\widetilde{T}^1_{*,\,4}(I)$, каждое из которых можно аппроксимировать с произвольной степенью точности в C^1-норме отображением того же множества с произвольной допустимой глубиной центра, превосходящей любой наперед заданный конечный или счетный ординал.

Доказательство теоремы 5.3.3. 1. Рассмотрим множество косых произведений, заданных аналогично отображению $F_{4,\,\gamma}$, указанному в доказательстве теоремы 3.1.1 (см. предложение 3.1.5):

$$\Upsilon = \{F_{4,\,E_\gamma}\}, \text{ где } \quad F_{4,\,E_\gamma}(x,\,y) = (f(x),\,y - h_{E_\gamma}(x)y(1-y)),$$

где $F_{4,\,E_\gamma} : [0,\,1]^2 \to [0,\,1]^2$; фактор f любого отображения $F_{4,\,E_\gamma} \in \Upsilon$ определен в силу формулы (3.1.1); h_{E_γ} – C^1-гладкая шапочка Урысона, определенная на отрезке $[0,\,1]$ и зависящая от множества E_γ так, как это было указано в доказательстве предложения 3.1.5; E_γ – счетное множество для каждого $F_{4,\,E_\gamma}$, порожденное произвольно выбранной гомоклинической траекторией к произвольной периодической орбите f на единственном локально максимальном квазиминимальном множестве $K(f)$ фактора f.

Пусть $\hat{F}_{4,\,E_{\gamma_1}}$ – произвольное отображение из множества Υ с глубиной центра, равной $\gamma \geq \gamma_1$, где γ_1 – произвольный конечный или счетный ординал. Пусть γ_2 – произвольный не более, чем счетный ординал, превосходящий γ.

Возьмем произвольно $\varepsilon > 0$ и, используя равномерную непрерывность функции $h_{E_{\gamma_1}}(x)$ и ее производной $h'_{E_{\gamma_1}}(x)$, укажем $\delta_1 > 0$ так, чтобы для любых $x',\, x'' \in [0,\,1]$ таких, что $|x' - x''| < \delta_1$, выполнялись неравенства

$$|h_{E_{\gamma_1}}(x') - h_{E_{\gamma_1}}(x'')|,\ |h'_{E_{\gamma_1}}(x') - h'_{E_{\gamma_1}}(x'')| < \varepsilon/2.$$

Применяя утверждение (7) предложения 3.1.1, в $K(f)$ возьмем произвольно периодическую орбиту, отличную от использованной при построении множества E_{γ_1} и равномерно аппроксимирующую множество $K(f)$ с точностью $\delta_1/3$. Проводя пошаговые построения подобно тому, как это было сделано в доказательстве предложения 3.1.5, с помощью выбранной периодической орбиты и гомоклинической траектории, равномерно аппроксимирующей выбранную периодическую орбиту с точностью до $\delta_1/3$ (существование такой гомоклинической траектории следует из утверждения (9) предложения 3.1.1), построим множество E_{γ_2} такое, что

$$dist_{I_1}(E_{\gamma_1},\ \ E_{\gamma_2}) < \delta_1,$$

где, как обычно, $dist_{I_1}$ – метрика Хаусдорфа в пространстве 2^{I_1} замкнутых подмножеств отрезка I_1 (см. раздел 1.1.1).

2. Положим $\delta = \min\{\delta_1/3,\, d^*/3\}$, где d^* – расстояние между множествами E_{γ_1}, E_{γ_2}. Тогда замыкания $\overline{U}_{1,\,\delta}(E_{\gamma_1})$ и $\overline{U}_{1,\,\delta}(E_{\gamma_2})$ δ-окрестностей множеств E_{γ_1} и E_{γ_2} не пересекаются. В силу выбора числа δ существует C^1-гладкая шапочка Урысона $h_{E_{\gamma_2}}$ такая, что $h_{E_{\gamma_2}}(x) = 1$ при всех $x \in E_{\gamma_2}$; $h_{E_{\gamma_2}} = h_{E_{\gamma_1}}$ при любых $x \notin \overline{U}_{1,\,\delta}(E_{\gamma_1}) \bigcup \overline{U}_{1,\,\delta}(E_{\gamma_2})$;

причем

$$||h_{E_{\gamma_1}} - h_{E_{\gamma_2}}||_{1,\,1} < \varepsilon.$$

Рассмотрим отображение $F_{4,\,E_{\gamma_2}} \in \Upsilon$. Из приведенных построений следует, что $F_{4,\,E_{\gamma_2}}$ обладает такими свойствами:
(i) $\gamma(F_{4,\,E_{\gamma_2}}) \geq \gamma_2 > \gamma_1$;
(ii) $F_{4,\,E_{\gamma_2}} \in B^1_{\varepsilon}(\hat{F}_{4,\,E_{\gamma_1}})$.
Таким образом, справедливость теоремы 5.3.3 установлена.

Как отмечалось ранее, теорема 5.3.3 (также, как и теорема 3.1.2) указывает на невозможность полного динамического описания косых произведений отображений интервала из пространства $T^1_{*,\,4}(I)$, основанного на отношении Ω-сопряженности (то есть невозможности полного динамического описания по Л.П. Шильникову). Поэтому естественно предложить более слабые, чем Ω-сопряженность, отношения эквивалентности на $T^1_{*,\,4}(I)$.
Так, например, более слабым отношением эквивалентности, чем Ω-сопряженность, является отношение энтропийной эквивалентности (см., например, [170]). Прежде, чем исследовать эффективность использования этого отношения эквивалентности в пространстве C^1-гладких косых произведений отображений интервала, целесообразно получить ответ на вопрос о том, какими свойствами обладает топологическая энтропия как функционал, определенный на пространстве $T^1_{*,\,4}(I)$; в частности, выяснить, существуют ли косые произведения из пространства $T^1_{*,\,4}(I)$ с бесконечной топологической энтропией? Для сравнения укажем, что существование непрерывных, но не гладких косых произведений отображений интервала с бесконечной топологической энтропией, следует из результатов работы [171].

Другим, более слабым отношением эквивалентности, чем Ω-сопряженность, является отношение центральной сопряженности.

Будем говорить, что отображения F, и $G \in T^1_{*,\,4}(I)$ центрально сопряжены, если топологически сопряжены их сужения на множества центральных движений: $F_{|C(F)}$ и $G_{|C(G)}$.

Завершая работу, сформулируем утверждение, непосредственно вытекающее из теоремы 5.3.3.

Следствие 5.3.1. *В пространстве* $T^1_{*,4}(I)$ *существует множество отображений мощности* $\geq \aleph_1$*, любые два из которых принадлежат различным классам* Ω*-сопряженности, но являются центрально сопряженными.*

Результаты этой части диссертации содержатся в [81], [116], [117], [168].

Литература

[1] Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.-Л.: ОГИЗ, 1947. – 393 с.

[2] Биркгоф Дж. Динамические системы. М.-Л.: ОГИЗ. – 1941. – 320 с.

[3] Шнирельман Л.Г. Пример одного преобразования плоскости// Изв. Донского политехн. ин-та в Новочеркасске, научн. отд., физ.-мат. часть. – 1930. – Т. 14. – С. 64-74.

[4] Besikovitch A.S. A problem on topological transformations of the plane// Fund. Math. – 1937. – V 28. – P. 61-65.

[5] Besicovitch A.S. A problem on topological transformations of the plane. II// Proc. Cambr. Phil. Soc. – 1951. – V. 47, № 1. – P. 38-45.

[6] Hedlund G.A. A class of transformations of the plane// Proc. Cambr. Phil. Soc. – 1955. – V. 51, № 4. – P. 554-564.

[7] Gottschalk W., Hedlund G.A. Topological dynamics. – AMS Col. V. 36, New York, 1955. – 167 p.

[8] Крылов Н.Н., Боголюбов Н.Н. Общая теория меры в нелинейной механике// Н.Н. Боголюбов. Избранные труды, т.1. – Киев: Наукова думка. – 1969. – С. 411-463.

[9] Kakutani S. Random ergodic theorems and Markov processes with a stable distribution// Proc. 2nd Symp. Math. Statist. and Prob. – 1951. – P. 247-261.

[10] Anzai H. Ergodic skew product transformations on the torus// Osaka Math. J. – 1951. – V. 3, № 1. – P. 83-99.

[11] Оселедец В.И. Марковские цепи, косые произведения и эргодические теоремы для "общих"динамических систем.// ТВП. – 1965. – Т. 10, № 3. – С.551-587.

[12] Каток А.Б., Степин А.М. Аппроксимации в эргодической теории// УМН. – 1967. – Т. 22, № 5(137). – С. 81-106.

[13] Аносов Д.В. Об аддитивном функциональном гомологическом уравнении, связанном с эргодическим поворотом окружности// Изв. АН СССР, сер. матем. – 1973. – Т. 37, № 6. – С. 1259-1274.

[14] Сидоров Е.А. Топологически транзитивные цилиндрические каскады// Матем. заметки. – 1973. – Т. 14, № 3. – С. 444-452.

[15] Крыгин А.Б. Об ω-предельных множествах цилиндрических каскадов// Изв. АН СССР, сер. матем. – 1975. – Т. 39, № 4. – С. 879-898.

[16] Крыгин А.Б. Об ω-предельных множествах гладких цилиндрических каскадов// Матем. заметки. – 1978. – Т. 23, № 6. – С. 873-884.

[17] Проблемы Гильберта. Сб. под ред. Александрова П.С. – М.: Наука, 1969. – 240 с.

[18] Aczél J. The state of the second part of Hilbert's fifth problem// Bull Amer. Math. Soc. – 1989. – V. 20. – P. 153-163.

[19] Nitica V. A note about topologically transitive cylindrical cascades// Israel Journ. of Math. – 2001. – V. 126, № 1. – P. 141-156.

[20] Kochergin A.V. A Besikovitch Cylindrical Transformation with Hölder Function// Electronic Research Announcements in Math. Sciences. – 2015. – V. 22. – P. 87-91; doi:10.3934/era.2015.22.87.

[21] Кочергин А.В. Цилиндрический каскад Безиковича с гельдеровой функцией// Матем. заметки. – 2016. – Т. 99, № 3. – С. 366-375.

[22] Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1986. – 280 с.

[23] Шарковский А.Н. Аттракторы траекторий и их бассейны. – Киев: Наукова думка, 2013. – 304 с.

[24] De Melo W., van Strien S. One-dimensional dynamics (A series of modern surveys in mathematics). – Springer-Verlag, Berlin, 1993. – 605 p.

[25] Efremova L.S., Makhrova E.N. On the center of continuous maps of dendrites// Journ. Difference Eq. Appliq. – 2003. – V. 9, № 3/4. – P. 381-392.

[26] Mai J.H., Shi E.H. $\overline{R} = \overline{P}$ for maps of dendrites X with $card(End(X)) < \mathbf{c}$// Int. Journ. Bifurcations and Chaos. – 2009. – V. 19. – P. 1391-1396.

[27] Taixiang Sun, Qiuli He, Jing Liu, Chunyan Tao, Hongjian Xi. Non-wandering sets for dendrite maps// Qual. Theory Dyn. Syst. – 2015. – V. 14, № 1. – P. 101-108.

[28] Smital J. Why it is important to understand dynamics of triangular maps?// J. Difference Equations Appl. – 2008. – V. 14. – P. 597–606.

[29] Kloeden P.E. On Sharkovsky's cycle coexistence ordering// Bul. Austr. Math. Soc. – 1979. – V. 20. – P. 171-177.

[30] Шарковский А.Н. Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя// Укр. матем. журнал. – 1964. – Т. 16, № 1. – С. 61-71.

[31] Ильяшенко Ю.С., Вейгу Ли. Нелокальные бифуркации. Новые математические дисциплины. – МЦНМО, М., 2-е изд., 2009. – 416 с.

[32] Городецкий А.С., Ильяшенко Ю.С. Некоторые новые грубые свойства инвариантных множеств и аттракторов динамических систем// Функц. анализ и его прил. – 1999. – Т. 33, № 2. – С. 16–30.

[33] Городецкий А.С., Ильяшенко Ю.С. Некоторые свойства косых произведений над подковой и соленоидом// Динамические системы, автоматы и бесконечные группы. Сборник статей, Тр. МИАН. – 2000. – Т. 231. – С. 96–118.

[34] Бронштейн И.У. Расширения минимальных групп преобразований. – Ин-т математики с вычислит. центром АН МССР. Кишинев: Штиинца, 1975. – 312 с.

[35] Лерман Л.М., Шильников Л.П. О классификации двумерных неавтономных систем второго порядка с конечным числом ячеек// ДАН СССР. – 1973. – Т. 209, № 3. – С. 544-547.

[36] Бронштейн И.У. Неавтономные динамические системы. – Кишинев: Штиинца, 1984. – 293 с.

[37] Бланк М.Л. Асимптотические свойства случайных отображений// УМН. – 1988. – Т. 43, № 4(262). – С. 201-202.

[38] Жужома Е.В., Исаенкова Н.В. О нульмерных соленоидальных базисных множествах// Мат. сборник. – 2011. – Т. 202, № 3. – С. 47-68.

[39] Фильченков А.С. Косое произведение на n-мерной клетке, имеющее транзитивный n-мерный аттрактор, не обладающий свойством полной топологической транзитивности// Известия ВУЗов. Математика. – 2016. – № 6. – С. 91-100.

[40] Efremova L.S. Example of the Smooth Skew Product in the Plane with the One-dimensional Ramified Continuum as the Global Attractor// ESAIM: Proceedings and Surveys. – 2012. – V. 36. – P. 15-25.

[41] Сурис Ю.Б. Об интегрируемых отображениях типа стандартного отображения// Функцион. анализ и его приложения. – 1989. – Т. 23, № 1. – С. 84-85.

[42] Веселов А.П. Интегрируемые отображения// УМН. – 1991. – Т. 46, № 5(281). – С. 3-43.

[43] Grigorchuk R.I., *Ž*uk A. The Lamplighter group as a group generated by a 2-state automata, and its spectrum// Geometriae Dedicata. – 2001. – V. 87. – P. 209-244.

[44] Belmesova S.S., Efremova L.S. On the Concept of Integrability for Discrete Dynamical Systems. Investigation of Wandering Points of Some Trace Map// Nonlinear Maps and their Applic.. Springer Proc. in Math. and Statist. – 2015. – V. 112. – P. 127-158.

[45] Бельмесова С.С., Ефремова Л.С. Об инвариантных множествах некоторых квадратичных отображений плоскости// Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2012. – № 2(1). – С. 152-158.

[46] Тамура И. Топология слоений. – М.: Мир, 1979. –317 с. .

[47] Куратовский К. Топология. – М.: Мир, т. 1, 1966. – 594 с.; М.: Мир, т. 2, 1969. – 624 с.

[48] Avishai Y., Berend D. Transmission through a Thue-Morse chain// Phys. Rev. B. – 1992. – V. 45. – V. 2717-2724.

[49] Ефремова Л.С., Сакбаев В.Ж. Понятие взрыва множества решений дифференциальных уравнений и усреднение случайных полугрупп// ТМФ. – 2015. – Т. 185, № 2. – С. 252-271; англ. пер.: TMPh. – 2015. – V. 185, № 2. – P. 1582–1598.

[50] Bjerklöv K. Positive Lyapunov exponent and minimality for a class of one-dimensional quasiperiodic Schrödinger equation// Ergod. Theory and Dynam. Syst. – 2005. – V. 25. – P. 1015-1045.

[51] Gukenheimer J, Oster G., Ipaktchi A. The dynamics of density dependent population models// Journ. Math. Biology. – 1977. – V. 4, № 2. – P. 8-147.

[52] Davies M.E., Campbell K.M. Linear recursive filters and nonlinear dynamics// Nonlinearity. – 1996. – V. 9, № 2. – P. 487-499.

[53] Beck C. Chaotic cascade model for turbulent velocity distribution// Phys. Rev. – 1994. – V. E 49. – P. 3641-3652.

[54] Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. М.:Мир, 1975. – 304 с.; пер. с англ.: Nitecki Z. Differentiable dynamics. An introduction to the orbit structure of diffeomorphisms. – the MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, 1971.

[55] Немыцкий В.В, Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений, 2-е изд. – М.-Ижевск: РХД, 2004. – 550 с.; англ. пер. 1-го изд.:

Nemytskii V.V., Stepanov V.V. Qualitative theory of differential equations. – Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1960.

[56] Немыцкий В.В. Топологические вопросы теории динамических систем// УМН. – 1949. – Т. 4, № 6(34). – С. 91-153.

[57] Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. – М.: Факториал, 1999. – 768 с.; пер. с англ.: Katok A., Hasselblatt B. Introduction to the modern theory of dynamical systems. Encyclopedia Math. Appl., V. 54. – Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[58] Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977. – 368 с.

[59] Пуанкаре А. Избранные труды, Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел, т. II. – М.: Наука, 1972. – 358 с.

[60] Ефремова Л.С. Расслоенные динамические системы с непустым множеством периодических точек// VII конф. по качеств. теории дифф. уравнений. Рига, 3-7 апреля 1989 г. Рига: Тезисы докладов. – 1989. – С. 92.

[61] Ефремова Л.С. О неблуждающем множестве и центре треугольных отображений с замкнутым множеством периодических точек в базе// Динамические системы и нелинейные явления. – Киев: Ин-т матем. АН Украины. –1990. – С. 15-25.

[62] Kolyada S.F. On dynamics of triangular maps of the square// Ergod. Theory and Dynam. Syst. – 1992. – V. 12, № 4. – P. 749-768.

[63] Efremova L.S. On the nonwandering sets of the smooth skew products of interval maps// International Conference on Contemporary Problems in Theory of Dynamical Systems (CPTDS'96), July, 1 - 6, 1996, Nizhni Novgorod. Nizhni Novgorod University. Abstracts. – 1996. – P. 17-18.

[64] Efremova L.S. On the concept of Ω-function for the skew product of interval maps// International Conference Dedicated to the 90th Anniversary of L.S. Pontryagin,

August, 31 – September, 6, 1998, Moscow. Abstracts. Differential Equations. – M.: МИАН, МГУ. – 1998. – P. 32-33.

[65] Ефремова Л.С. О понятии Ω-функции косого произведения отображений интервала// Труды междунар. конф., посвящ. 90-летию Л.С.Понтрягина, т. 6: Динамич. сист., М.: ВИНИТИ. Итоги науки и техники, сер. Современная матем. и ее приложения. Тематич. обзоры. – 1999. – Т. 67. – С. 129-160; англ. пер.: Journ. Math.Sci.(New York). – 2001. – V. 105. – P. 1779-1798.

[66] Ефремова Л.С. О неблуждающем множестве и центре некоторых косых произведений отображений интервала// Известия ВУЗов. Математика. – 2006. – № 10. – С. 19-28; англ. пер.: Russian Math. – 2006. – V. 50, № 10. – P. 17-25.

[67] Шарковский А.Н., Добрынский В.А. Неблуждающие точки динамических систем// Динамич. сист. и вопросы устойч. решений дифференц. уравнений, Киев: Ин-т матем. АН Украины. – 1973. – С. 165-174.

[68] Smital J., Steele T.H. Stability of dynamical structure under perturbation of the generating function// J. Difference Equations Appl. – 2009. – V. 15. – P. 77–89.

[69] Bruckner A.M., Ceder J. – Chaos via $x \to \omega(x, f)$// Pacific Journ. Math. – 1992. – V. 156. – P. 63-96.

[70] Stark J. Regularity of invariant graphs for forced systems// Ergod. Theory and Dynam. Syst. – 1999. – V. 19, № 1. – 155-199.

[71] Jäger T.H. On the structure of strange non-chaotic attractors in pinched skew products// Ergod. Theory and Dynam. Syst. – 2007. – V. 27. – P. 493-510.

[72] Efremova L.S. New set-valued functions in the theory of skew products of interval maps// Nonlinear Analysis. – 2001. – V. 47, № 8. – P. 5297-5308.

[73] Efremova L.S. Set-valued Functions and Dynamics of Skew Products of Interval Maps// Progress in Nonlinear Science. Intern. Conf. Dedicated to the 100th Anniversary of A.A.Andronov. Nizhny Novgorod. Russia. July 2-6, 2001. Proceedings: Math. Problems of Nonlinear Dynamics. – 2002. – V. 1. – P. 219-224.

[74] Ефремова Л.С. О пространстве C^1-гладких косых произведений отображений интервала// Теоретич. и матем. физика. – 2010. – Т. 164, № 3. – С. 447-454; англ. пер.: Theor. and Math. Physics. – 2010. – V. 164, № 3. – P. 1208-1214.

[75] Ефремова Л.С. Теорема о разложении пространства C^1-гладких косых произведений со сложной динамикой факторотображений// Матем. сб. – 2013. – Т. 204, № 11. – С. 55-82; англ. пер.: Sborn.: Math. – 2013. – V. 204, № 11. – P. 1598-1623.

[76] Efremova L.S. Remarks on the nonwandering set of skew products with a closed set of periodic points of the quotient map// Nonlinear Maps and their Applic. Springer Proc. in Math. and Statist. – 2014. – V. 57. – P. 39-58.

[77] Kupka J. The triangular maps with closed sets of periodic points// Journ. Math. Analysis and Appliq. – 2006. – V. 319. – P. 302-314.

[78] Arteaga C. Smooth triangular maps of the square with closed set of periodic points// Journ. Math. Analysis and Appliq. – 1995. – V. 196. – P. 987-997.

[79] Guirao J.L.G., Pelayo F.L. On skew-product maps with base having closed set of periodic points// I. J. Comput. Math. – 2008. – V. 85, № (3–4). – P. 441–445.

[80] Guirao J.L.G., Rubio R.G. Nonwandering Set of Skew Product Maps with Base Having Closed Set of Periodic Points. – Journ. Math. Analysis and Appliq. – 2010. – V. 362, № 2. – P. 350-354.

[81] Ефремова Л.С. Динамика косых произведений отображений интервала// УМН. – 2017. – Т. 72, № 1(433). – С. 107-192; англ. пер.: Russian Math. Serveys. – 2017. – V. 72, № 1(433). – P. 101-178.

[82] Аносов Д.В. Динамические системы в 60-е годы: гиперболическая революция// В кн.: Математические события XX века. – М.: Фазис, 2003. – С. 1-18; англ. пер.: Mathematical events of the twentieth century. – Springer-Verlag, Berlin, 2006. – P. 1-17.

[83] Smale S. Differentiable dynamical systems// Bull. Amer. Math. Soc. – 1967. – V. 73. – P. 747-817.

[84] Palis J. Ω–explosions// Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – V. 27, № 1. – P. 85–90.

[85] Hirsch M.W., Pugh C. Stable manifolds and hyperbolic sets// Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math. – Providence: AMS, 1970. – V. 14. – P. 133-222.

[86] Nitecki Z., M. Shub M. Filtrations, decompositions and explosions// Amer. Journ Math. – 1976. – V. 97, № 4. – P. 1029-1047.

[87] Ефремова Л.С. О C^0- Ω-взрывах в гладких косых произведениях отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек// Вестн. ННГУ им. Н. И. Лобачевского. – 2012. – № 3(1). – С. 130–136.

[88] Ефремова Л.С. Отсутствие C^1- Ω-взрыва в пространстве гладких простейших косых произведений// СМФН. – 2013. – Т. 48. – С. 36-50; англ. пер.: Journ. Math.Sci.(New York). – 2014. – V. 202, № 6. – P. 794-808.

[89] Блинова Е.В., Ефремова Л.С. Об Ω-взрывах в простейших C^1-гладких косых произведениях отображений интервала// Труды междунар. конф. по диф. уравн. и динамич. системам (Суздаль 2006). Соврем. мат. и приложения, т. 53. – Тбилиси: Ин-т кибернетики АН Грузии. – 2008. – С. 71-81; англ пер.: Math. Sci. (New York). – 2009. – V. 157, № 3. – P. 456-465.

[90] Kupka J. Triangular maps with the chain recurrent point periodic// Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.). – 2003. – V. 72, № 2. – P. 245-251.

[91] Misiurewicz M. Structure of mapping of an interval with zero entropy// Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. – 1981. – V. 53, № 1. – P. 5-16.

[92] Eckman J.-P. Roads to turbulence in dissipative dynamical systems// Rev. Mod. Phys. – 1981. – V. 53, № 4. – P. 643-654.

[93] Ефремова Л.С. Дифференциальные свойства и притягивающие множества простейшего косого произведения отображений интервала// Матем. сб. – 2010. – Т. 231, № 6. – С. 93-130; англ. пер.: Sbornik: Math. – 2010. – V. 231, № 6. – P. 873-907.

[94] Kočen Z. The problem of classification of triangular maps with zero topological entropy// Ann. Math. Sil. – 1999. – V. 13. – P. 181-192.

[95] Balibrea F.C.G., Garcia J.L., Munos J.I. Description of ω-limit sets of a triangular map on I^2// Far East Journ. Dynam. Syst. – 2001. – V. 3, № 1. – P. 87-101.

[96] Balibrea F.C.G., Garcia J.L., Munos J.I. A triangular map on I^2 whose ω-limit sets are all compact interval of $\{0\} \times I$// Discrete ans Continuous Dynam. Syst. – 2002. – V. 8, № 4. – P. 983-994.

[97] Gallego F.B., Guirao J.L.G., Casado J.I.M. On ω-limit sets of triangular maps on the unit cube// Journ. Difference Equat. and Appliq. – 2003. – V. 9, № (3-4). – P. 289-304.

[98] Ахалая Ш.И., Степин А.М. Об инвариантных мерах несжимающих отображений// Сообщ. АН ГССР. – 1980. – Т. 100, № 3. – С. 549-552.

[99] Ахалая Ш.И., Степин А.М. Об абсолютно непрерывных инвариантных мерах несжимающих преобразований окружности// Динамические системы и смежные вопросы геометрии. Труды матем. ин-та им. В.А.Стеклова. – 2004. – Т. 244. – С. 23-34.

[100] Denjoy A. Sur les courbes $d\acute{e}$finies par les $\acute{e}$quations diff$\acute{e}$rentielles $\grave{a}$ la surface du tore// J. Math. Pures Appl. – 1932. – V. 11, № 4. – P. 333–375.

[101] Denjoy A. Les trajectoires $\grave{a}$ la surface du tore// C. R. Acad. Sci. – 1946. – V. 223. – P. 5–8.

[102] Аносов Д.В. Грубые системы// Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы. Сборник обзорных статей. 2. К 50-летию института. Тр. МИАН. – 1985. – Т. 169. – С. 59-93.

[103] Якобсон М.В. Об отображениях окружности в себя// Матем. сб. – 1971. – Т. 85(127), № 2(6). – С. 163-188.

[104] Ефремова Л.С. Периодические движения дискретных полудинамических систем// Диссерт. ... канд. физ.-мат. наук. – Горький: Горьковский госуниверситет, 1981. – 117 с.

[105] Alseada L., Llibre J. A note on the set of periods for continuous maps of the circle which have degree one// Proc. Amer. Math. Soc. – 1985. – V. 93. – P. 133–138.

[106] Шарковский А.Н. О циклах и структуре непрерывного отображения// Укр. матем. журнал. – 1965. – Т. 17, № 3. – С. 104-111.

[107] Ефремова Л.С. Многозначные функции и неблуждающее множество некоторых косых произведений отображений интервала со сложной динамикой фактороотображения// Известия ВУЗов. Математика. – 2016. – № 2. – С. 93-98; англ. пер.: Russian Math. – 2016. – V. 60, № 2. – P. 77-81.

[108] Ефремова Л.С. О неблуждающем множестве C^1-гладких косых произведений отображений интервала со сложной динамикой фактора// Проблемы матем. анализа. – 2016. – Т. 85. – С. 83-94; англ пер.: J. Math. Sci. (New York). – 2016. – V. 219, № 1. – P. 86-98.

[109] Kleptsyn V., Volk D. Nonwandering sets of interval skew products// Nonlinearity. 2014. – V. 27, № 7. – 1595.

[110] Майер А.Г. О траекториях в трехмерном пространстве// ДАН СССР. – 1946. – Т. 56, № 7. – С. 477-479.

[111] Майер А.Г. Об одной задаче Биркгофа// ДАН СССР. – 1947. – Т. 55, № 6. – С. 447-480.

[112] Майер А.Г. О порядковом числе центральных траекторий// ДАН СССР. – 1948. – Т. 59, № 8. – С. 1393-1396.

[113] Майер А.Г. О центральных траекториях и проблеме Биркгофа// Матем. сб. – 1950. – Т. 26, № 2. – С. 265-290.

[114] Шильников Л.П. К работам А.Г. Майера о центральных движениях// Матем. заметки. – 1969. – Т. 5, № 3. – С. 335-339.

[115] Efremova L.S. Stability as a whole of a family of fibers maps and Ω-stability of C^1-smooth skew products of maps of an interval// J. Phis.: Conf. Ser. – 2016. – V. 692, № 012010. – 10 p.

[116] Efremova L.S. Concept of Stability as a Whole of a Family of Fibers Maps for C^1-Smooth Skew Products and Its Generalization// Book of Abstracts of Intern. Conf. "Dynamics, Bifurcations, and Strange Attractors", Nizhni Novgorod, Russia, 20.07.2015 -24.07.2015. – 2015. – P. 7.

[117] Efremova L.S. Main subspaces of the space of C^1-smooth skew products of interval maps// International Conference "Anosov Systems and Modern Dynamics", dedicated to the 80th anniversary of Dmitry Anosov, Moscow, December 19-23, 2016. Abstracts. – 2016. P. 33-36.

[118] Abraham R., Smale S. Nongenericity of Ω-stability// Global analysis: Proc. Symp. Pure Math. – 1970. – V. 14. – P. 5–8.

[119] Ma*ñé* R. A proof of the C^1-stability conjecture// Publs. Math. IHES. – 1988. – V. 66. – P. 161-210.

[120] Palis J. On the C^1- Ω-stability conjecture// Publs. Math. IHES. – 1988. – V. 66. – P. 211-215.

[121] Przytycki F. On Ω-stability and structural stability of endomorphisms satisfying Axiom A// Stud. Math. – 1977. – V. 60. – P. 61–77.

[122] Efremova L.S. Differential Dymamics of Skew Products of Interval Maps// International Conference "Kolmogorov and Contemporary Mathematics". (Moscow, June 16-21, 2003) Abstracts. – 2003. – P. 35-36.

[123] Ефремова Л.С. Ω-устойчивые косые произведения отображений интервала не плотны в $T^1(I)$// Дифференц. уравн. и динамич. сист. Труды матем. ин-та им. В.А. Стеклова. – 2002. – Т. 236. – С. 167-173; англ. пер.: Proceed. of the Steklov Inst. of Math. – 2002. – V. 236. – P. 157—163.

[124] Newhouse S.E. Nondensity of Axiom A on S^2// Global analysis: Proc. Symp. Pure Math. – 1970. – V. 14. – P. 191–202.

[125] Forti G.L., L. Paganoni L. On some properties of triangular maps// Grazer Math. Ber. – 1999. – V. 339. – P. 125-140.

[126] Шарковський О.М. Неблукаючі точки та центр неперервного відображення прямої в себе// Допов. АН УРСР. – 1964. – Т. 7. – С. 865-868.

[127] Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988. – 512 с.

[128] Coven E.M., Nitecki Z. Nonwandering sets of the powers of maps of the interval// Ergod. Theory and Dynam. Syst. – 1981. – № 1. – P. 9-31.

[129] Верейкина М.Б., Шарковский А.Н. Возвращаемость в одномерных динамических системах// Приближенные и качественные исследования дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений. Киев: Ин-т математики АН Украины. – 1983. – С. 5-46.

[130] Markarian R., Pacifico M.J., Vietez J.L. Exponential speed of mixing for skew products with singularities// Nonlinearity. – 2013. – V. 26, № 1. – P. 269–287.

[131] Nitecky Z. Maps of the interval with closed periodic set// Proc. Amer. Math. Soc. – 1982. – V. 85, № 3. – P. 451-456.

[132] Федоренко В.В., Шарковский А.Н. Непрерывные отображения интервала с замкнутым множеством периодических точек// Исследования дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений. Киев: Ин-т математики АН Украины. – 1980. – С. 137-145.

[133] Nitecky Z. Topological dynamics on the interval// Progr. Math. – 1982. – V. 21. – P. 1-73.

[134] Block L.S., Coppel W.A. Dynamics in one dimension// Lecture Note in Math. – Springer, Berlin – Hedelberg – New York, 1513. – 1992.

[135] Шарковский А.Н. Структурная теория дифференцируемых динамических систем// В кн.: Abhandlungen der Wissenschaften der DDR. Ableilung Mathematik. Naturwissenschaften. Technik VII Intern. Konf. *über* nichtlinear Schwingungen. – 1977. – Band 1, 2. – С. 193-200.

[136] Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С., Аносов Д.В. и др. Динамические системы – 1, книга 1: Обыкновенные дифференциальные уравнения. сер. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т.1. – М.: ВИНИТИ, 1985. – 244 с.

[137] Шарковский А.Н. Об одной классификации неподвижных точек// Укр. мат. журнал. – 1965. – Т. 17, № 5. – С. 80-95.

[138] Аносов Д.В. Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем// Труды V междунар. конф. по нелинейным колебаниям, т.2: Качественные методы, Киев: Ин-т математики АН Украины. – 1970. – С. 39-45.

[139] Block L., Franke J.E. The chain recurrent set, attractors, and explosions// Ergod.Theory and Dynam. Sys. – 1985. – № 5. – P. 321-327.

[140] Аносов Д.В., Арансон С.Х., Гринес В.З., Плыкин Р.В., Сатаев Е.А., Сафронов А.В., Солодов В.В., Старков А.Н., Степин А.М., Шлячков С.В. Динамические системы с гиперболическим поведением// Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики. Фундам. направл. Динамические системы – 9, т. 66 – М.:ВИНИТИ. – 1991. – С. 6-247.

[141] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. – М.: Мир, 1971. – 392 с.

[142] Барковский Ю.С., Левин Г.М. О предельном канторовом множестве// УМН. – 1980. – Т. 35, № 2(212). – С. 201-202.

[143] Шарковский А.Н. О притягивающих и притягивающихся множествах// ДАН СССР. – 1965. – Т. 160, № 5. – С. 1036-1038.

[144] Райков Д.А. Одномерный математический анализ. – М.: Высшая школа, 1982. – 416 с.

[145] Зорич В.А. Математический анализ. – М.: Наука, 1981. – 568 с.

[146] Ефремова Л.С. Об интегральном условии существования одномерных притягивающих множеств простейшего косого произведения отображений интервала// Труды МФТИ. – 2010. – Т. 2, № 3. – С. 9-15.

[147] Ding M., Grebogy C., Ott E. Evolution of attractors in quasiperiodically forced systems: from quasiperiodic to strange nonchaotic to chaotic// Physical Review A. – 1989. – V. 39, № 5. – P. 2593-2598.

[148] Pikovsky A., Feudal U. Characterizing strange nonchaotic attractors// CHAOS. – 1995. – V. 5, № 1. – P. 253-260.

[149] Бежаева З.И., Оселедец В.И. Об одном примере странного нехаотического аттрактора// Функцион. анализ и его приложения. – 1996. – V. 30, № 4. – С. 1-9.

[150] Efremova L.S. Attracting sets and smoothness of a simplest skew product of interval maps// Book of abstracts of the Intern. Conf. "Differential Equations and Related Topics", Moscow, 2007. – M.: Moscow Univ. Press. – 2007. – P. 85-86.

[151] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных, 1-е изд. – М.: Наука, 1976. – 391 с.

[152] Еругин Н.П. Неявные функции. – Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1956. – 61 с.

[153] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной, 3-е изд. – М.: Наука, 1974, – 399 с.

[154] D'Aniello E., Steele T.H. Approximating ω-limit sets with periodic orbits// Aequationes Math. – 2008. – V. 75. – P. 93-102.

[155] Шарковский А.Н. О проблеме изоморфизма динамических систем// Труды V Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям (25 авг.– 4 сент. 1969 г.), Киев: Наукова думка. – 1970. – Т. 2. – С. 541-545.

[156] Block L. Homoclinic points of mappings of the interval// Proc. Amer. Math. Soc. – 1978. – V. 72. – P. 576-580.

[157] Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. – М.: Мир, 1973. – 151 с.

[158] Baldwin S. Continuous itinerary functions and dendrite maps// Topol. Appl. – 2007. – V. 154. – P. 2889-2038.

[159] Balibrea F., Hric R., Snoha L. Minimal sets on graphs and dendrites// Intern. Journ. Bifurcations and Chaos. – 2007. – V. 13. – P. 1721-1725.

[160] Ефремова Л.С., Махрова Е.Н. Динамика монотонных отображений дендритов// Матем. сб. – 2001. – Т. 192, № 6. – С. 15-30; англ. пер.: Sborn. Math. – 2001. – V. 192, № 6. – P. 807-821.

[161] Плыкин Р.В. Источники и стоки А-диффеоморфизмов поверхностей// Матем. сб. – 1974. – Т. 23, № 2. – С. 233-253.

[162] Шарковський О.М. Про одну теорему Дж. Біркгофа// Допов. АН УРСР. – 1967. – сер.А, № 5. – С. 429-432.

[163] D'Aniello E., Steel T.H. Asymptotically stable sets and the stability of ω-limit sets// Journ. Math. Analysis and Appliq. – 2006. – V. 321, № 2. – P. 867-879.

[164] Аносов Д.В., Арансон С.Х., Бронштейн И.У., Гринес В.З. Гладкие динамические системы// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. Динамические системы - 1. – М.: ВИНИТИ. – 1985. – Т. 1. – С. 151-242.

[165] Dankner A. On Smale's axiom A dynamical systems// Ann. Math. – 1978. – V. 107, № 3. – P. 517-533.

[166] Kurata M. Hyperbolic nonwanderig sets without dense periodic points// Proc. Jap. Acad. A. – 1978. – V. 54, № 7. – P. 206-211.

[167] Malta I. Hyperbolic Birkhoff centers// Trans. Amer. Math. Soc. – 1980. – V. 262, № 1. – P. 181-193.

[168] Efremova L. Birkhoff Problem on the Depth of the Center for Skew Products of Maps of an Interval// International Conference-School Dynamics, Bifurcations and Chaos 2016 (DBC III) Nizhny Novgorod, Russia, July 18 – 22, 2016. Book of Abstracts. – 2016. – P. 51.

[169] Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П. II. Гомоклинические касания произвольного порядка в областях Ньюхауса// Труды междунар. конф., посвящ. 90-летию Л.С.Понтрягина, т. 6: Динамич. сист. – М.: ВИНИТИ. Итоги науки и техники, сер. Современная матем. и ее приложения. Тематич. обзоры. 1999. – Т. 67. – С. 69-128.

[170] Buzzi J., Fisher T., Sambarino M., V*á*squez C. Maximal entropy measures for ceitain partially hyperbolic, derived from Anosov systems// Ergodic Theory Dynam. Systems. – 2012. – V. 32, № 1. – P. 63-79.

[171] Balibrea F., Oprocha P. Weak mixing and chaos in nonautonomous discrete systems// Applied Math. Letters. – 2012. – V. 25. – P. 1135-1141.