

**Отзыв официального оппонента о диссертации  
А.В. Окунева "Аттракторы косых произведе-  
ний", представленной на соискание ученой  
степени кандидата физико-математических  
наук по специальности 01.01.02 –дифференци-  
альные уравнения, динамические системы и  
оптимальное управление.**

## **Актуальность диссертационной темы.**

Диссертация посвящена изучению аттракторов (в основном используется определение аттрактора, данное Милнором и его обобщения) различных динамических систем: ступенчатых и гладких косых произведений, общих частично гиперболических диффеоморфизмов, а также диффеоморфизмов Аносова. Напомним, что описание предельного поведения траекторий является главной проблемой теории динамических систем, а понятие аттрактора играет одну из центральных ролей в этой теории. Отметим также, что, несмотря на впечатляющие результаты, полученные в последние десятилетия в рамках этой теории, структура и свойства аттракторов во многом остаются неясными даже в случае относительно простых модельных примеров, упомянутых выше, так что тема диссертации безусловно актуальна.

## **Краткое содержание работы.**

Рассматриваемая диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Диссертация имеет объем 109 страниц, в списке литературы 35 наименований.

Во введении кратко описаны основные результаты, обоснована актуальность темы исследования, сформулированы его основные цели и задачи, описана теоретическая и практическая значимость.

В первой главе исследуются аттракторы так называемых ступенчатых косых произведений (СКП) над сдвигом Бернулли. Рассматриваются типичные СКП со слоем окружность, а также типичные СКП со слоем отрезок, послойные отображения которых отображают отрезок внутрь себя. Для них доказывается, что аттрактор Милнора устойчив по Ляпунову, а также что для случая слоя окружность аттрактор имеет либо нулевую, либо полную меру. Для слоя отрезок аттрактор имеет нулевую меру, это доказано ранее Д. Волком и В. Клепцыным. Отметим любопытную идею, на которой основано доказательство. Рассматривается то, как аттрактор зависит от отображения, и доказывается, что типичное отображение является точкой непрерывности этой зависимости (в хаусдорфовой топологии). Тогда из непрерывности этой зависимости можно вывести устойчивость по Ляпунову аттрактора.



Во второй главе аналоги результатов первой главы доказываются для  $C^2$ -гладких частично-гиперболических косых произведений (тоже со слоями окружность и отрезок). Ступенчатые косые произведения интересны, например, потому, что свойство, найденное в классе ступенчатых косых произведений зачастую можно найти и для гладких косых произведений, а потом и для малых возмущений этих косых произведений. Так по примеру СКП с интересным свойством можно построить пример открытой области в пространстве диффеоморфизмов, для отображений из которой выполнено то же свойство. В работе диссертанта (наоборот) удалось доказать, что примера нет, как для ступенчатых, так и для гладких косых произведений.

Третья глава посвящена произвольным частично-гиперболическим диффеоморфизмам, имеющим сильнонеустойчивое слоение. Примерами таких диффеоморфизмов являются косые произведения, о которых шла речь во второй главе. Доказывается, что аттрактор Милнора состоит из неустойчивых слоев. Для этого используется техника так называемых триптихов.

В четвертой главе построен пример  $C^1$ -гладкого транзитивного диффеоморфизма Аносова двумерного тора, аттрактор Милнора которого не равен всему тору. Здесь очень важно, что диффеоморфизм лишь  $C^1$ -гладок, для  $C^2$ -гладких транзитивных диффеоморфизмов Аносова известно, что аттрактор Милнора равен всему фазовому пространству. В центре примера лежит конструкция Боуэна "толстой" подковы, то есть подковы, имеющей положительную меру. В диффеоморфизм Аносова вклеивается некий аналог этой толстой подковы, а затем доказывается, что для типичного диффеоморфизма Аносова с так вклеенной подковой аттрактором Милнора является подкова.

## **Научная новизна и оригинальность.**

В диссертации развиты новые и интересные подходы к исследованию аттракторов ступенчатых косых произведений. Особенно стоит отметить оригинальное доказательство того, что для типичных косых произведений со слоем окружность аттрактор всегда имеет либо нулевую, либо полную меру. Пример диффеоморфизма Аносова из четвертой главы пример носит неожиданный характер, и подход к его построению очень любопытен.

## **Обоснованность научных положений и выводов**

Все результаты снабжены подробными доказательствами, достоверность которых не вызывает сомнений. Результаты диссертации своевременно и в полном объеме опубликованы в 4 работах в журналах, входящих в перечень ВАК. Основные результаты были представлены на ряде семинаров и международных конференций. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

## **Рекомендации по дальнейшей разработке и внедрению**

Приведенные в диссертации А.В. Окунева результаты и методы могут быть использованы в фундаментальных и прикладных исследованиях по динамическим системам. Они могут быть



использованы в исследованиях, проводящихся в МИАН, Московском государственном университете, Санкт-Петербургском государственном университете, Нижегородском государственном университете, Высшей Школе Экономике, и др.

## Замечания

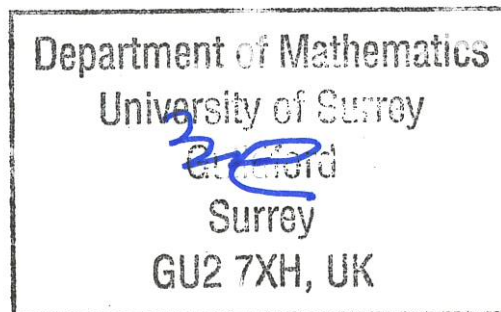
Диссертация хорошо структурирована, доказательства продуманы и написаны четко и ясно. Имеется небольшое количество мелких недочетов и опечаток, ни в коей мере не влияющих на общую оценку работы. Например, в параграфе 1.1.1 было бы естественно привести доказательства существования аттрактора Милнора и статистического аттрактора. Особенно учитывая тот факт, что это основные объекты исследования и отсутствие точной ссылки. Я согласен с автором, что доказательство проводится [точно так же], как и в работе Милнора, но для полноты изложения его бы стоило привести. Еще один пример – условие сохранения ориентации послонными отображениями окружности. Это условие неявно присутствует в основных результатах глав 1 и 2, но не всегда явно сформулировано. Было бы неплохо прояснить насколько существенно это условие. Отметим также опечатки в определении частичной гиперболичности (2.1)-(2.3).

## Резюме

В диссертации ряд новых, важных и интересных результатов о структуре и свойствах аттракторов Милнора и статистических аттракторов. Особо отметим контринтуитивный пример в четвертой главе. Все результаты диссертации строго доказаны. Приведенные выше замечания не влияют на общую оценку диссертационной работы. Тема диссертации соответствует специальности 01.01.02, по которой она представлена к защите.

Считаю, что диссертация А.В. Окунева "Аттракторы косых произведений" несомненно удовлетворяет требованиям ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор заслуживает присвоения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Проф. Сергей Зелик,  
Отделение математики,  
Университет Суррей,  
Великобритания



13.10.2017

