

На правах рукописи

Окунев Алексей Владимирович

Аттракторы косых произведений

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2017

Работа выполнена на факультете математики Национального
исследовательского университета «Высшая Школа Экономики».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор ИЛЬЯШЕНКО Юлий Сергеевич, профессор факультета математики НИУ «Высшая Школа Экономики»
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор ГОНЧЕНКО Сергей Владимирович, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений НИИ прикладной математики и кибернетики при НГУ им. Н.И. Лобачевского, доктор физико-математических наук, профессор ЗЕЛИК Сергей Витальевич, профессор факультета математики Университета Суррея
Ведущая организация:	Саратовский государственный университет

Защита состоится 31 октября 2017 г. в 16 часов на заседании диссертационного
совета Д 002.077.03 на базе ИППИ РАН, расположенном по адресу: Большой
Каретный пер., д. 19, стр. 1, Москва, 127051.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИППИ РАН, а также на
странице <http://iitp.ru/ru/dissertation/1349.htm>

Автореферат разослан « » сентября 2017 года.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д. ф.-м. н., профессор РАН

Соболевский А.Н.

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Понятие аттрактора играет важную роль в теории динамических систем. У него есть много различных определений, среди которых одно из самых распространенных — определение топологического аттрактора:

Определение 1. *Топологический аттрактор* диффеоморфизма $F : M \rightarrow M$ — это инвариантное транзитивное подмножество $\Lambda \subset M$, у которого есть *притягивающая область* — непустое открытое множество $U \subset M$, такое что

- Образ замыкания $\bar{U}$ лежит в U ;
- $\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} F^n(U)$.

Однако, не у любого отображения есть топологический аттрактор. Например, несложно проверить, что топологического аттрактора нет у отображения окружности с единственной параболической неподвижной точкой

$$x \mapsto x + 0.1(1 - \cos x). \quad (1)$$

Более того, К. Бонатти, М. Ли и Д. Янг [1] построили пример C^1 - открытого множества диффеоморфизмов, в котором диффеоморфизмы без топологических аттракторов топологически типичны (в C^1 -топологии) :

Определение 2. Подмножество называется *остаточным*, если оно содержит счетное пересечение открытых всюду плотных подмножеств. Свойство называется *топологически типичным* в некотором классе динамических систем, если оно выполнено на некотором остаточном подмножестве этого класса. Свойство называется *локально топологически типичным*, если оно выполнено на каком-то остаточном подмножестве некоторого открытого подмножества этого класса.

Еще одним недостатком определения топологического аттрактора является то, что оно может плохо описывать поведение типичной точки. Так, в работах

[2], [3, §11.1.2], [4] построен транзитивный сохраняющий границу диффеоморфизм произведения двумерного тора на отрезок, такой что типичная по мере Лебега точка стремится к одному из двух граничных торов. Но, поскольку отображение транзитивно, единственный топологический аттрактор — все многообразие. Отметим, что множество точек, притягивающиеся к каждому из этих торов, плотно, поэтому говорят о так называемых *перемежающихся бассейнах притяжения*.

Поведение типичной по мере Лебега точки обычно описывают с помощью SRB-мер.

Определение 3. Пусть диффеоморфизм F сохраняет вероятностную меру ν . *Бассейном* меры ν называется множество точек x , для которых последовательность мер

$$\delta_x^n := \frac{1}{n}(\delta_x + \dots + \delta_{F^{n-1}(x)})$$

*-слабо сходится к ν . Мера называется *SRB мерой*, если мера Лебега ее бассейна положительна.

Однако, не у любого диффеоморфизма есть SRB мера (см [3, §1.6]). Следующее определение аттрактора, введенное Дж. Милнором в [5], тоже описывает поведение типичной по мере Лебега точки.

Определение 4 ([5]). Пусть M — риманово многообразие. *Аттрактором Милнора* (сам Милнор использовал термин «likely limit set») диффеоморфизма $F : M \rightarrow M$ называется минимальное по вложению замкнутое подмножество $A_M \subset M$, содержащее ω -предельные множества почти всех по мере Лебега точек.

Определения топологического аттрактора и SRB меры требуют, чтобы бассейн притяжения содержал существенную часть фазового пространства, но не обязательно все фазовое пространство. Поэтому это *локальные* определения аттрактора, и у отображения может быть несколько таких аттракторов или не быть

ни одного. Определение аттрактора Милнора, напротив, *глобальное*. У каждого отображения существует и единственен аттрактор Милнора (это доказано в [5]), и к нему притягиваются почти все точки.

В главах 1 и 2 рассматриваются аттракторы Милнора косых произведений со слоем окружность: в главе 1 — ступенчатых косых произведений над сдвигом Бернулли, а в главе 2 — косых произведений над диффеоморфизмом Аносова.

Определение 5. Рассмотрим множества B и S и отображение $H : B \rightarrow B$. *Косым произведением* над H со слоем S называется динамическая система

$$F : B \times S \rightarrow B \times S, \quad (b, s) \mapsto (H(b), f_b(s)).$$

Множество B называют *базой*, а S — слоем. Отображения $f_b : S \rightarrow S$ называют *послойными отображениями*.

Пусть $\Sigma^s = \{1, \dots, s\}^{\mathbb{Z}}$ — множество бесконечных в обе стороны последовательностей $\omega = \dots \omega_{-1} \omega_0 \omega_1 \dots$, составленных их символов $1, 2, \dots, s$. Для положительных

$$p_1, \dots, p_s, \quad p_1 + \dots + p_s = 1$$

можно задать вероятностную меру *Бернулли* на Σ^s следующим условием: для любого n вероятность того, что $\omega_n = i$ равна p_i , и случайные величины ω_n независимы в совокупности. Далее мы для простоты будем считать, что $p_i = 1/s$, хотя доказанные результаты верны и для произвольного выбора p_i . Сдвигом Бернулли называется отображение

$$\sigma : \Sigma^s \rightarrow \Sigma^s, \quad (\sigma\omega)_n = \omega_{n+1},$$

сдвигающее последовательность на один шаг влево. *Ступенчатое* косое произведение — это такое косое произведение над сдвигом Бернулли или топологи-

ческой цепью Маркова¹, что послойное отображение зависит не от всей точки базы (являющейся бесконечной в обе стороны последовательностью), а только от символа на нулевой позиции.

Аттрактор Милнора ступенчатых косых произведений определяется также, как и для диффеоморфизмов, но вместо меры Лебега берется произведение (некоторой) меры Бернулли в базе и меры Лебега в слое. Поскольку гиперболические множества допускают символическое кодирование, ступенчатые косые произведения тесно связаны с гладкими косыми произведениями над гиперболическими динамическими системами (например, над подковой Смейла, соленоидом или диффеоморфизмом Аносова). Поэтому грубые свойства, найденные в классе ступенчатых косых произведений, можно затем реализовать в пространстве диффеоморфизмов гладких многообразий (см. работы [6], [7], [8], [9]).

Два по-настоящему неожиданных явления встречаются в классе косых произведений со слоем отрезок с послойными отображениями, сохраняющими границу отрезка. Первое из них — уже упомянутые выше перемежающиеся бассейны притяжения. Отметим, что отображения с перемежающимися бассейнами локально типичны в классе косых произведений над диффеоморфизмом Аносова двумерного тора со слоем отрезок. Кроме того, в этом примере аттрактор Милнора является объединением двух граничных торов, и он неустойчив по Ляпунову. Второе — локальная типичность отображений с *толстым* аттрактором ([10], [8]), то есть аттрактором, имеющим положительную, но не полную, меру Лебега.

Помимо этих примеров, стоит отметить несколько общих результатов о косых произведениях с одномерным слоем. Аттракторы типичных косых произведений со слоем отрезок описаны В. Клепцыным и Д. Волком ([11]). Среди прочего, в этой работе доказано что существует конечное число SRB-мер, объ-

¹ В этой диссертации рассматриваются только ступенчатые косые произведения над сдвигом Бернулли, поэтому мы не приводим определение топологической цепи Маркова.

единение бассейнов притяжения которых имеет полную меру Лебега. М. Виана и Дж. Янг ([12]) доказали последнее свойство для широкого класса частично гиперболических диффеоморфизмов с одномерным центральным слоением, который включает в себя косые произведения над диффеоморфизмами Аносова со слоем окружность.

Свойства ступенчатых косых произведений со слоем окружность в некотором смысле похожи на свойства косых произведений со слоем отрезок. А именно, типичное ступенчатое косое произведение со слоем окружность либо минимально (т.е. орбита любой точки под действием полугруппы, порожденной послойными отображениями, плотна), либо все послойные отображения имеют общую поглощающую область, являющуюся объединением конечного числа отрезков ([13], готовится к публикации).

Как мы писали выше, в классе сохраняющих границу косых произведений со слоем отрезок локально типичны косые произведения с неустойчивыми ([2]) и толстыми ([8]) аттракторами. Однако, условие сохранения границы выглядит не очень естественно. Поэтому хочется спросить, найдутся ли такие области, если не требовать, чтобы край переходил в себя. Оказывается, что их нет:

- В главе 1 доказываемся, что для топологически типичного ступенчатого косого произведения над сдвигом Бернулли со слоем окружность или отрезок аттрактор Милнора устойчив по Ляпунову.
- В главе 2 доказываемся, что для топологически типичного косого произведения со слоем окружность или отрезок над любым транзитивным диффеоморфизмом Аносова аттрактор Милнора устойчив по Ляпунову и не толст (то есть либо имеет нулевую меру, либо совпадает со всем фазовым пространством);

Доказательства этих двух утверждений похожи друг на друга, случай ступенчатых косых произведений можно воспринимать как модельный пример для случая косых произведений над диффеоморфизмом Аносова. Отметим также,

что у типичного ступенчатого косо́го произведения с одномерным слоем аттрактор Милнора не толст — для слоя отрезок это доказано в [11], а случай слоя окружность сводится к случаю слоя отрезок в силу [13] (готовится к публикации). Также отметим, что вопрос об асимптотической устойчивости аттрактора остается открытым даже для ступенчатых косых произведений со слоем отрезок.

В случае произвольных диффеоморфизмов компактных многообразий неустойчивость аттракторов по Ляпунову локально топологически типична (И. Шилин, [14]), но пока открыт вопрос о существовании открытого множества диффеоморфизмов с неустойчивыми аттракторами. Также открыт вопрос о том, является ли множество диффеоморфизмов с толстыми аттракторами локально типичным.

Глава 3 посвящена аттракторам Милнора $E^u \oplus E^{cs}$ -частично гиперболических диффеоморфизмов. Результат этой главы получен совместно с С. Минковым.

Определение 6. Диффеоморфизм $F : M \rightarrow M$ многообразия называется $E^u \oplus E^{cs}$ -частично гиперболическим, если существуют $\lambda > 1, \mu < \lambda, c > 0$ и два поля линейных подпространств $E_x^{cs} \subset T_x M$ и $E_x^u \subset T_x M$, которые инвариантны (т.е. $dF_x(E_x^{cs,u}) = E_{F(x)}^{cs,u}$) и

$$T_x M = E_x^{cs} \oplus E_x^u,$$

$$\|dF_x^n|_{E_x^{cs}}\| \leq c\mu^n, \quad \|dF_x^{-n}|_{E_x^u}\| \leq c\lambda^{-n}.$$

Отметим, что через каждую точку $x \in M$ можно провести единственное подмногообразие $W^u(x) \subset M$ размерности $\dim E^u$, касательное к полю E^u . Это подмногообразие называют *неустойчивым слоем* точки x .

Из теоремы 11.16 из [3] следует, что для любого C^2 -гладкого $E^u \oplus E^{cs}$ -частично гиперболического диффеоморфизма носитель любой SRB-меры состоит из неустойчивых слоев. Отметим, что это утверждение играет важную роль в доказательстве результатов главы 2. В главе 3 доказывается, что из неустойчивых слоев

состоит и аттрактор Милнора. Это утверждение было сформулировано Ю.С. Ильяшенко в [8] как гипотеза. В [8] построено локально типичное множество сохраняющих край диффеоморфизмов произведения отрезка на двумерный тор с «толстым» (т.е. имеющим положительную меру, но не совпадающим со всем фазовым пространством) топологически транзитивным максимальным аттрактором. То, что аттрактор Милнора также толст, было сведено к этой гипотезе. Тем самым доказано существование локально типичного множества сохраняющих край диффеоморфизмов с «толстым» аттрактором Милнора.

В главе 4 строится диффеоморфизм Аносова с нетривиальным аттрактором Милнора. Результат этой главы получен совместно с К. Бонатти, С. Минковым и И. Шилиным. Широко известно (см. [3, §1.3]), что у любого C^2 -гладкого транзитивного диффеоморфизма Аносова есть ровно одна SRB-мера, ее бассейн притяжения имеет полную меру Лебега, а ее носитель — все многообразие. Из этого следует, что аттрактор Милнора — тоже все многообразие. Однако, доказательство этих фактов основывается на технике контроля искажения, в которой существенно используется C^2 -гладкость. В главе 4 строится пример C^1 -гладкого транзитивного диффеоморфизма Аносова на двумерном торе, аттрактор Милнора которого не равен всему тору. Пример основан на конструкции Боуэна ([15]) подковы положительной меры. Поскольку у транзитивного диффеоморфизма Аносова любой неустойчивый слой плотен (см. [16, §2.1]), аттрактор Милнора нашего примера не состоит из неустойчивых слоев. Так как диффеоморфизм Аносова частично гиперболичен, это означает, что в результате главы 3 нельзя заменить C^2 на C^1 . Также отметим, что для C^1 -топологически типичного транзитивного диффеоморфизма Аносова аттрактор Милнора все-таки совпадает со всем многообразием, доказательство этого факта приводится в главе 4.

Цель работы. Целью работы являлось изучение свойств аттракторов Милнора косых произведений со слоем окружность и других частично гиперболических диффеоморфизмов.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Основные результаты заключаются в следующем

1. Доказано, что для C^r -топологически типичных (при любом $r \geq 2$) сохраняющих ориентацию косых произведений со слоем окружность над транзитивным диффеоморфизмом Аносова аттрактор Милнора устойчив по Ляпунову. Аналогичный результат доказан и для ступенчатых косых произведений над сдвигом Бернулли.
2. Доказано, что для любого $E^u \oplus E^{cs}$ -частично гиперболического C^2 -диффеоморфизма аттрактор Милнора состоит из неустойчивых слоев.
3. Построен пример C^1 -диффеоморфизма Аносова на двумерном торе, аттрактор Милнора которого не совпадает со всем тором.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Разработанные в главе 1 методы работы с аттрактором Милнора ступенчатых косых произведений могут быть полезны при исследовании новых примеров отображений этого класса. Есть надежда, что результат главы 3 вместе с полученной в [17] нормальной формой для косых произведений позволят существенно упростить построение примера толстого аттрактора в [8].

Методы исследования. В диссертации применялись методы теории частично гиперболических динамических систем. В главах 1 и 2 для доказательства устойчивости по Ляпунову используется лемма о полунепрерывности. В главах 3 и 4 важную роль играет техника контроля искажения.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации рассказывались на

- внутреннем семинаре (Sem'in) лаборатории математики (UMPA) в ЕНС Лион, 2014
- конференции «Глобальная динамика за рамками равномерной гиперболичности», Ольмуэ, Чили, 2015

- конференции «Динамика, бифуркации и странные аттракторы», Нижний Новгород, 2015
- конференции «Системы Аносова и современная динамика», Москва, 2016
- семинаре «Динамические системы» (Ю.С.Ильяшенко), МГУ, несколько докладов в разные годы (2013–2016).

Личный вклад автора. Результаты глав 1 и 2 получены лично диссертантом, главы 3 — в соавторстве с С. Минковым, а главы 4 — с К. Бонатти, С. Минковым и И. Шилиным.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Список литературы содержит 35 наименований. Общий объем диссертации 109 страниц.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана теоретическая и практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения, а также даны основные определения.

Первая глава посвящена изучению свойств милноровского и статистического аттракторов ступенчатых косых произведений над сдвигом Бернулли со слоем отрезок или окружность.

Определение 7. *Частотой* $Freq(x, U)$ попадания орбиты точки x в множество U будем называть верхний предел

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \#\{n : F^n(x) \in U, 0 \leq n < N\}.$$

Определение 8. *Статистическим ω -предельным множеством* точки $x \in X$ (обозначение: $\omega_{stat}(x)$) называется множество точек $z \in X$, таких что для любой окрестности U точки z выполнено $Freq(x, U) > 0$.

Статистический аттрактор определяется так же, как милноровский, но вместо обычных ω -предельных множеств используются статистические:

Определение 9. *Статистическим аттрактором* называется минимальное по вложению замкнутое подмножество X , содержащее $\omega_{stat}(x)$ для почти всех по мере Лебега точек x фазового пространства.

Как и для милноровского аттрактора, при работе со ступенчатыми косыми произведениями вместо меры Лебега здесь берут произведение меры Лебега на слое и меры Бернулли на базе.

Определение 10. Инвариантное подмножество M фазового пространства X динамической системы (X, F) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любой его окрестности U найдется такая его окрестность V , такая что все начинающиеся в V траектории не покидают U .

Фиксируем числа $r, s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$. Пусть $T = (\text{Diff}_+^r(S^1))^s$ — множество всех ступенчатых косых произведений над сдвигом Бернулли со слоем окружность, таких что послойные отображения $f_1, \dots, f_s$ являются сохраняющими ориентацию C^r -дiffeоморфизмами.

Теорема. *Найдется остаточное множество $R \subset T$, такое что для любого ступенчатого косого произведения из R статистический аттрактор устойчив по Ляпунову и совпадает с аттрактором Милнора.*

Вторая глава обобщает результаты первой главы на случай частично-гиперболических косых произведений над diffeоморфизмами Аносова.

Определение 11. Диффеоморфизм $F : M \rightarrow M$ называется *частично гиперболическим в узком смысле*, если существуют такие числа $C > 0$,

$$0 < \lambda_1 \leq \mu_1 < \lambda_2 \leq \mu_2 < \lambda_3 \leq \mu_3, \quad \mu_1 < 1 < \lambda_3,$$

и такое разложение

$$T_x M = E^s(x) \oplus E^c(x) \oplus E^u(x),$$

что это разложение инвариантно, то есть

$$d_x F(E^\tau(x)) = E^\tau(F(x)), \quad \tau = s, c, u,$$

и при $n > 0$ выполняются неравенства

$$C^{-1} \lambda_1^n \|v\| \leq \|d_x F^n v\| \leq C \mu_1 \|v\|, \quad v \in E^s(x), \quad (2)$$

$$C^{-1} \lambda_2^n \|v\| \leq \|d_x F^n v\| \leq C \mu_2 \|v\|, \quad v \in E^c(x), \quad (3)$$

$$C^{-1} \lambda_3^n \|v\| \leq \|d_x F^n v\| \leq C \mu_3 \|v\|, \quad v \in E^u(x). \quad (4)$$

Рассмотрим компактное риманово многообразие без края B . Фиксируем транзитивный диффеоморфизм Аносова $A : B \rightarrow B$. Для $r \geq 2$ обозначим через P^r множество всех косых произведений F над A со слоем окружность, таких что

- F — C^r -диффеоморфизм,
- F частично гиперболично в узком смысле,
- слои косого произведения являются центральными слоями, т. е. касаются E^c ,
- все послойные отображения $f_x(y)$ сохраняют ориентацию S^1 .

Теорема А. Существует остаточное (в C^r -топологии) множество $R \subset P^r$, такое что для любого $F \in R$ статистический аттрактор F

- совпадает с милноровским аттрактором,
- устойчив по Ляпунову,
- либо имеет нулевую меру Лебега, либо совпадает со всем фазовым пространством X .

Определение 12. Точка называется *блуждающей*, если все образы некоторой ее окрестности U не пересекают эту окрестность. Объединение всех точек, не являющихся блуждающими, называется *неблуждающим множеством*.

Несложно проверить, что аттрактор Милнора всегда лежит в неблуждающем множестве. Для случая аттрактора нулевой меры удастся также доказать, что неблуждающее множество также имеет нулевую меру.

Следствие В. Для любого $F \in R$ либо неблуждающее множество F имеет нулевую меру Лебега, либо F транзитивно, и орбита почти любой по мере Лебега точки плотна.

В третьей главе доказана следующая теорема:

Теорема С. Пусть $F : M \rightarrow M$ — $E^u \oplus E^{cs}$ -частично гиперболический C^2 -дiffeоморфизм. Тогда ω -предельное множество почти любой по мере Лебега точки состоит из неустойчивых слоев (т.е. оно либо содержит неустойчивый слой целиком, либо не пересекает его).

Из этой теоремы следует, что аттрактор Милнора также состоит из неустойчивых слоев. Результаты третьей главы получены в соавторстве с С. Минковым.

В четвертой главе доказана следующая теорема:

Теорема D. Существует C^1 -гладкий диффеоморфизм Аносова $F_{\mathbb{T}^2}$ двумерного тора $\mathbb{T}^2$ с SRB мерой ν , такой что

- ее бассейн имеет полную меру Лебега,

- ее носитель — подкова² $\mathcal{H}$ нулевой меры Лебега,
- $\omega(x) = \mathcal{H}$ для почти любой по мере Лебега точки x .

В силу последнего пункта этой теоремы аттрактором Милнора диффеоморфизма $F_{\mathcal{H}}$ является подкова $\mathcal{H}$. Результаты четвертой главы получены совместно с К. Бонатти, С. Минковым и И. Шилиным.

Заключение

Я хочу поблагодарить своего научного руководителя Ю. С. Ильяшенко за постановку задач и постоянное внимание к работе, В. А. Клепцына, от которого я узнал много красивых математических сюжетов, и С. Минкова и И. Шилина за дружескую поддержку и многочисленные вдохновляющие обсуждения.

Список публикация автора по теме диссертации.

1. С. Минков и А. Окунев, «Омега-предельные множества типичных точек частично гиперболических диффеоморфизмов», *Функциональный анализ и его приложения*, 50:1 (2016), с. 59-66.
2. A. Okunev, «Milnor Attractors of Skew Products with the Fiber a Circle», *Journal of Dynamical and Control Systems*, 23:2 (2017), с. 421–433.
3. К. Бонатти, С. Минков, А. Окунев и И. Шилин, « C^1 -диффеоморфизм Аносова с подковой, притягивающей почти любую точку», *Функциональный анализ и его приложения*, 51:2 (2017), с. 83-86.
4. А. Окунев и И. Шилин, «Об аттракторах ступенчатых косых произведений над сдвигом Бернулли», *Порядок и хаос в динамических системах, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова*, Тр. МИАН, 297 (2017), с. 260–280.

² то есть инвариантное множество, динамика на котором сопряжена гомеоморфизмом сдвигу Бернулли на $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$

Цитированная литература

1. Bonatti C., Li M., Yang D. On the existence of attractors // Transactions of the American Mathematical Society. 2013. Vol. 365, no. 3. P. 1369–1391.
2. Kan I. Open sets of diffeomorphisms having two attractors, each with an everywhere dense basin // Bulletin of the American Mathematical Society. 1994. Vol. 31, no. 1. P. 68–74.
3. Bonatti C., Diaz L., Viana M. Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity. Springer, 2004.
4. Ilyashenko Y. S., Kleptsyn V. A., Saltykov P. Openness of the set of boundary preserving maps of an annulus with intermingled attracting basins // Journal of Fixed Point Theory and Applications. 2008. Vol. 3, no. 2. P. 449–463.
5. Milnor J. On the concept of attractor // The Theory of Chaotic Attractors. Springer, 1985. P. 243–264.
6. Городецкий А. С., Ильяшенко Ю. С. Некоторые новые грубые свойства инвариантных множеств и аттракторов динамических систем // Функциональный анализ и его приложения. 1999. Т. 33, № 2. С. 16–30.
7. Клепцын В. А., Нальский М. Б. Устойчивость существования негиперболических мер для C^1 -диффеоморфизмов // Функциональный анализ и его приложения. 2007. Т. 41, № 4. С. 30–45.
8. Ilyashenko Y. Thick attractors of boundary preserving diffeomorphisms // Indagationes Mathematicae. 2011. Vol. 22, no. 3. P. 257–314.
9. Кудряшов Ю. Г. Костлявые аттракторы и магические бильярды: Кандидатская диссертация.
10. Ilyashenko Y. Thick attractors of step skew products // Regular and Chaotic Dynamics. 2010. Vol. 15, no. 2-3. P. 328–334.
11. Kleptsyn V., Volk D. Physical Measures for Nonlinear Random Walks on Interval // Moscow Mathematical Journal. 2014. Vol. 14, no. 2. P. 339–365.
12. Viana M., Yang J. Physical measures and absolute continuity for one-dimen-

- sional center direction // Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis / Elsevier. Vol. 30. 2013. P. 845–877.
13. Kleptsyn V., Kudryashov Y., Okunev A. Classification of semigroups of circle diffeomorphisms. in preparation.
 14. Shilin I. Locally topologically generic diffeomorphisms with Lyapunov unstable Milnor attractors // arXiv preprint arXiv:1604.02437. 2016.
 15. Bowen R. A horseshoe with positive measure // Inventiones mathematicae. 1975. Vol. 29, no. 3. P. 203–204.
 16. Pesin Y. B. Lectures on partial hyperbolicity and stable ergodicity. European Mathematical Society, 2004.
 17. Ilyashenko Y., Romaskevich O. Sternberg linearization theorem for skew products // Journal of Dynamical and Control Systems. 2015. P. 1–20.

Научное издание

Окунев Алексей Владимирович

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук на тему:

Аттракторы косых произведений