

**Отзыв официального оппонента
на диссертационную работу Окунева Алексея Владимировича
"Аттракторы косых произведений",
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.02 "Дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление".**

В диссертационной работе Окунева Алексея Владимировича рассматриваются актуальные вопросы теории аттракторов – одного из самых сложных, интересных и дискуссионных разделов теории многомерных динамических систем. Задача о нахождении устойчивых предельных режимов в динамических системах восходит еще к Ляпунову, тогда как собственно термин «аттрактор» появился впервые, по-видимому, в работе Аусландера и др. (1964). Хорошо известный термин «странный аттрактор», которым обозначалось замкнутое, инвариантное и устойчивое множество сложной природы, был введен в известной работе Рюэля и Такенса (1971), после которой математическая теория таких аттракторов стала стремительно развиваться. Однако в теории аттракторов до сих пор еще остается большое число открытых проблем и «белых пятен». Как ни странно, одна из таких проблем связана непосредственно с аксиоматической базой теории аттракторов – это то, а как, собственно, дать правильное определение «аттрактора» и, в частности, «странного аттрактора»? К настоящему времени существует много различных определений (странного) аттрактора. Например, «топологический аттрактор», «максимальный аттрактор», «статистический аттрактор», «аттрактор по Рюэлю», «аттрактор по Милнору» и т.п. Во многих случаях такие по-разному определяемые «аттракторы» описывают одно и то же притягивающее замкнутое инвариантное множество. Но также хорошо известны примеры систем, для которых это не так. В частности, в диссертации приведены как известные, так и новые примеры систем, в которых максимальный аттрактор или аттрактор по Рюэлю не совпадает с аттрактором Милнора. Более того, многие авторы определяют один и тот же тип «аттрактора» по-разному. Например, для «странного аттрактора» иногда требуется, а иногда не требуется, чтобы его замыкание не являлось гладким подмногообразием (так, аттракторы Аносова, заданные на двумерном торе, в случае трехмерных диффеоморфизмов некоторые авторы относят к странным, а другие – нет). В диссертации рассматриваются в основном аттракторы Милнора, определяемые как *«минимальные (по вложению) замкнутые множества, содержащие ω -предельные точки почти всех точек фазового пространства»* (Определение 4), а также статистические аттракторы (Определение 9), для которых получены весьма содержательные и интересные результаты.

Об основных результатах диссертации.

Диссертация Окунева Алексея Владимировича из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

Во введении дается краткое содержание работы, которое позволяет достаточно полно и адекватно понять основные положения диссертации.

На мой взгляд, результаты, которые получены в диссертации, можно разделить на два типа. Это те, которые относятся к «хорошим» свойствам аттракторов Милнора или статистических аттракторов, таким как устойчивость по Ляпунову (или асимптотическую устойчивость), существование инвариантной SRB-меры и т.п., и те, которые относятся к их «плохим свойствам», например, то, что аттрактор Милнора вовсе не является аттрактором. Результаты первого типа

собраны в главах 1, 2 и 3, а совсем нетривиальный и совершенно неожиданный результат второго типа содержится в главе 4.

В главах 1 и 2 рассматриваются динамические системы, имеющих структуру косо го произведения (Определение 5).

Первая глава посвящена изучению свойств аттракторов Милнора и статистических аттракторов ступенчатых косых произведений над сдвигом Бернулли со слоем отрезок или окружность. Для таких аттракторов находятся (типичные) условия, при выполнении которых они устойчивы по Ляпунову и совпадают (Теоремы 1.2.7 и 1.3.1). Как известно, аттрактор Милнора и статистический аттрактор не всегда определяют одно и то же инвариантное множество.

Во второй главе рассматриваются частично гиперболические динамические системы, имеющие структуру косо го произведения со слоем окружность или отрезок над диффеоморфизмом Аносова. Основной результат этой главы (Теорема А) говорит о том, что в типичном случае статистический аттрактор такой системы совпадает с аттрактором Милнора, устойчив по Ляпунову и либо имеет нулевую меру Лебега, либо совпадает со всем фазовым пространством.

Глава 3 посвящена аттракторам Милнора частично-гиперболических диффеоморфизмов в случае, когда дифференциал отображения допускает инвариантное разложение на два трансверсальных подпространства – неустойчивое и центрально-устойчивое. Основной результат главы (Теорема С и ее Следствие 3.1.1) говорит о том, что у таких C^2 -гладких диффеоморфизмов аттрактор Милнора состоит из неустойчивых слоев (т.е. он либо содержит неустойчивый слой целиком, либо не пересекает его). На мой взгляд, этот фундаментальный результат должен иметь важное значение для приложений, так как хорошо согласуется с тем общепринятым фактом, что седловая точка принадлежит аттрактору (в частности, аттрактору Милнора) вместе с ее неустойчивым многообразием.

В главе 4 рассматриваются аттракторы Милнора диффеоморфизма Аносова. Если такой диффеоморфизм является C^2 -гладким, то, как, в частности, следует из результатов главы 3, его аттрактор Милнора – это все многообразие. Автор показывает, что в C^1 -гладком случае это может быть не так. Он строит пример транзитивного C^1 -диффеоморфизма Аносова, у которого аттрактор Милнора не совпадает со всем фазовым пространством. Пример основан на конструкции Боуэна подковы положительной меры (которая в данном случае и является «аттрактором» в том смысле, что ее устойчивое инвариантное множество, состоящее из одномерных устойчивых слоев, имеет полную меру). Пример, на мой взгляд, удивительный. Он, в частности, показывает, что в теоремах главы 3 нельзя заменить C^2 на C^1 . В каком-то смысле этот результат также перекликается с классическими результатами Данжуа об отображениях окружности.

Отдельные недостатки.

- 1) В определении 1 не сказано, что представляет собой фазовое пространство M , в определении 4 – это уже риманово многообразие, но не сказано, что оно компактное (во всяком случае, компактность нужна для того, чтобы можно было говорить о существовании и единственности аттрактора Милнора). По тексту диссертации понятно, что это конечно предполагается.
- 2) В определениях 1 и 4 топологического аттрактора и аттрактора Милнора пропущены соответственно слова «замкнутое» и «инвариантное», характеризующие эти два типа аттракторов. Мне кажется, что условие замкнутости и инвариантности в определении любого аттрактора должно присутствовать обязательно.
- 3) В тексте диссертации помимо содержательных результатов и их доказательств содержатся также и открытые вопросы или проблемы, которые кажутся весьма важными для определения направлений дальнейших исследований как самого автора, так и других специалистов по динамическим системам.

Мне кажется, что было бы очень целесообразным посвятить им отдельный параграф. Обычно это делается в заключении и выводах диссертации. Параграф «заключение» есть в диссертации, но он содержит только благодарности научному руководителю и сотрудникам.

- 4) Основные результаты диссертации обозначаются по разному (просто «Теорема» или Теоремы А,В,С,Д в автореферате, или Теоремы 1.2.7 и 1.3.1 и Теоремы А,В,С,Д в диссертации).
- 5) Имеются небольшие мелкие опечатки и неудачные фразы.

Однако эти мелкие недостатки не влияют в целом на весьма высокое научное содержание диссертационной работы.

Заключение.

Диссертационная работа Окунева Алексея Владимировича выполнена на высоком научном уровне. Автором получены новые содержательные результаты, имеющие актуальное значение; они обоснованы строгими математическими доказательствами. Автореферат соответствует содержанию диссертации. Результаты соответствуют специальности 01.01.02 - "Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление".

Таким образом, работа отвечает требованиям Положения о порядке присуждения учёных степеней, а её автор заслуживает присуждения степени кандидата физико-математических наук по вышеуказанной специальности.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук,
федеральный профессор в области математики,
ведущий научный сотрудник НИИ суперкомпьютерных
технологий федерального государственного автономного
образовательного учреждения высшего
образования «Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
Адрес: 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23.
тел. (831) 462-30-03
E-mail: rector@unn.ru

Гонченко Сергей Владимирович

12.10.2017

Подпись Гонченко С. В.

Свердюжко Л.Ю., Ученый секретарь ННГУ

Л.Ю. Черноморская

Тел. 462-30-21

