

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи

Окунев Алексей Владимирович

Аттракторы косых произведений

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., проф.

Ильяшенко Юлий Сергеевич

Москва – 2017

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Ступенчатые косые произведения	13
1.1. Предварительные сведения	13
1.2. О связи между аттрактором и его проекцией на слой	17
1.3. Устойчивость аттрактора для СКП со слоем окружность	25
Глава 2. Частично гиперболические косые произведения со слоем окружность	33
2.1. Формулировка результатов главы 2	33
2.2. Набросок доказательства	35
2.3. Обозначения	37
2.4. Предварительные сведения	38
2.5. Притяжение к a_i	40
2.6. $\overline{W^u}(a_i)$ устойчивы по Ляпунову	43
2.7. Доказательство теоремы А	47
2.8. Доказательство следствия В	51
2.9. Что если у A нет неподвижных точек?	51
Глава 3. Омега-предельные множества типичных точек частично гиперболических диффеоморфизмов	53
3.1. Введение	53
3.2. Доказательство теоремы С	57
3.3. Доказательство леммы 3.2.2	59
3.4. Открытые вопросы	64
Глава 4. Аттракторы Милнора диффеоморфизмов Аносова	65
4.1. Введение к главе 4	65

4.2.	План главы 4	68
4.3.	Диффеоморфизм F_{init} с полутолстой подковой	69
4.4.	Рассуждение с типичностью по Бэру	74
4.5.	A_ε открыто	77
4.6.	A_ε плотно	80
4.7.	Существование F_{init}	96
4.8.	Доказательства двух технических лемм	101
Заключение		106
Список литературы		107

Введение

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Понятие аттрактора играет важную роль в теории динамических систем. У него есть много различных определений, среди которых одно из самых распространенных — определение топологического аттрактора:

Определение 1. *Топологический аттрактор* диффеоморфизма $F : M \rightarrow M$ — это инвариантное транзитивное подмножество $\Lambda \subset M$, у которого есть *притягивающая область* — непустое открытое множество $U \subset M$, такое что

- Образ замыкания $\bar{U}$ лежит в U ;
- $\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} F^n(U)$.

Однако, не у любого отображения есть топологический аттрактор. Например, несложно проверить, что топологического аттрактора нет у отображения окружности с единственной параболической неподвижной точкой

$$x \mapsto x + 0.1(1 - \cos x). \quad (1)$$

Более того, К. Бонатти, М. Ли и Д. Янг [1] построили пример C^1 -открытого множества диффеоморфизмов, в котором диффеоморфизмы без топологических аттракторов топологически типичны (в C^1 -топологии) :

Определение 2. Подмножество называется *остаточным*, если оно содержит счетное пересечение открытых всюду плотных подмножеств. Свойство называется *топологически типичным* в некотором классе динамических систем, если оно выполнено на некотором остаточном подмножестве этого класса. Свойство называется *локально топологически типичным*, если оно выполнено на каком-то остаточном подмножестве некоторого открытого подмножества этого класса.

Еще одним недостатком определения топологического аттрактора является то, что оно может плохо описывать поведение типичной точки. Так, в работах

[2], [3, §11.1.2], [4] построен транзитивный сохраняющий границу диффеоморфизм произведения двумерного тора на отрезок, такой что типичная по мере Лебега точка стремится к одному из двух граничных торов. Но, поскольку отображение транзитивно, единственный топологический аттрактор — все многообразие. Отметим, что множество точек, притягивающиеся к каждому из этих торов, плотно, поэтому говорят о так называемых *перемежающихся бассейнах притяжения*.

Поведение типичной по мере Лебега точки обычно описывают с помощью SRB-мер.

Определение 3. Пусть диффеоморфизм F сохраняет вероятностную меру ν . *Бассейном* меры ν называется множество точек x , для которых последовательность мер

$$\delta_x^n := \frac{1}{n}(\delta_x + \dots + \delta_{F^{n-1}(x)})$$

*-слабо сходится к ν . Мера называется *SRB мерой*, если мера Лебега ее бассейна положительна.

Однако, не у любого диффеоморфизма есть SRB мера (см [3, §1.6]). Следующее определение аттрактора, введенное Дж. Милнором в [5], тоже описывает поведение типичной по мере Лебега точки.

Определение 4 ([5]). Пусть M — риманово многообразие. *Аттрактором Милнора* (сам Милнор использовал термин «likely limit set») диффеоморфизма $F : M \rightarrow M$ называется минимальное по вложению замкнутое подмножество $A_M \subset M$, содержащее ω -предельные множества почти всех по мере Лебега точек.

Определения топологического аттрактора и SRB меры требуют, чтобы бассейн притяжения содержал существенную часть фазового пространства, но не обязательно все фазовое пространство. Поэтому это *локальные* определения аттрактора, и у отображения может быть несколько таких аттракторов или не быть

ни одного. Определение аттрактора Милнора, напротив, *глобальное*. У каждого отображения существует и единственен аттрактор Милнора (это доказано в [5]), и к нему притягиваются почти все точки.

В главах 1 и 2 рассматриваются аттракторы Милнора косых произведений со слоем окружность: в главе 1 — ступенчатых косых произведений над сдвигом Бернулли, а в главе 2 — косых произведений над диффеоморфизмом Аносова.

Определение 5. Рассмотрим множества B и S и отображение $H : B \rightarrow B$. *Косым произведением* над H со слоем S называется динамическая система

$$F : B \times S \rightarrow B \times S, \quad (b, s) \mapsto (H(b), f_b(s)).$$

Множество B называют *базой*, а S — *слоем*. Отображения $f_b : S \rightarrow S$ называют *послойными отображениями*.

Пусть $\Sigma^s = \{1, \dots, s\}^{\mathbb{Z}}$ — множество бесконечных в обе стороны последовательностей $\omega = \dots \omega_{-1} \omega_0 \omega_1 \dots$, составленных их символов $1, 2, \dots, s$. Для положительных

$$p_1, \dots, p_s, \quad p_1 + \dots + p_s = 1$$

можно задать вероятностную меру *Бернулли* на Σ^s следующим условием: для любого n вероятность того, что $\omega_n = i$ равна p_i , и случайные величины ω_n независимы в совокупности. Далее мы для простоты будем считать, что $p_i = 1/s$, хотя доказанные результаты верны и для произвольного выбора p_i . Сдвигом Бернулли называется отображение

$$\sigma : \Sigma^s \rightarrow \Sigma^s, \quad (\sigma\omega)_n = \omega_{n+1},$$

сдвигающее последовательность на один шаг влево. *Ступенчатое* косое произведение — это такое косое произведение над сдвигом Бернулли или топологи-

ческой цепью Маркова¹, что послойное отображение зависит не от всей точки базы (являющейся бесконечной в обе стороны последовательностью), а только от символа на нулевой позиции.

Аттрактор Милнора ступенчатых косых произведений определяется также, как и для диффеоморфизмов, но вместо меры Лебега берется произведение (некоторой) меры Бернулли в базе и меры Лебега в слое. Поскольку гиперболические множества допускают символическое кодирование, ступенчатые косые произведения тесно связаны с гладкими косыми произведениями над гиперболическими динамическими системами (например, над подковой Смейла, соленоидом или диффеоморфизмом Аносова). Поэтому грубые свойства, найденные в классе ступенчатых косых произведений, можно затем реализовать в пространстве диффеоморфизмов гладких многообразий (см. работы [6], [7], [8], [9]).

Два по-настоящему неожиданных явления встречаются в классе косых произведений со слоем отрезок с послойными отображениями, сохраняющими границу отрезка. Первое из них — уже упомянутые выше перемежающиеся бассейны притяжения. Отметим, что отображения с перемежающимися бассейнами локально типичны в классе косых произведений над диффеоморфизмом Аносова двумерного тора со слоем отрезок. Кроме того, в этом примере аттрактор Милнора является объединением двух граничных торов, и он неустойчив по Ляпунову. Второе — локальная типичность отображений с *толстым* аттрактором ([10], [8]), то есть аттрактором, имеющим положительную, но не полную, меру Лебега.

Помимо этих примеров, стоит отметить несколько общих результатов о косых произведениях с одномерным слоем. Аттракторы типичных косых произведений со слоем отрезок описаны В. Клепцыным и Д. Волком ([11]). Среди прочего, в этой работе доказано что существует конечное число SRB-мер, объ-

¹ В этой диссертации рассматриваются только ступенчатые косые произведения над сдвигом Бернулли, поэтому мы не приводим определение топологической цепи Маркова.

единение бассейнов притяжения которых имеет полную меру Лебега. М. Виана и Дж. Янг ([12]) доказали последнее свойство для широкого класса частично гиперболических диффеоморфизмов с одномерным центральным слоением, который включает в себя косые произведения над диффеоморфизмами Аносова со слоем окружность.

Свойства ступенчатых косых произведений со слоем окружность в некотором смысле похожи на свойства косых произведений со слоем отрезок. А именно, типичное ступенчатое косое произведение со слоем окружность либо минимально (т.е. орбита любой точки под действием полугруппы, порожденной послойными отображениями, плотна), либо все послойные отображения имеют общую поглощающую область, являющуюся объединением конечного числа отрезков ([13], готовится к публикации).

Как мы писали выше, в классе сохраняющих границу косых произведений со слоем отрезок локально типичны косые произведения с неустойчивыми ([2]) и толстыми ([8]) аттракторами. Однако, условие сохранения границы выглядит не очень естественно. Поэтому хочется спросить, найдутся ли такие области, если не требовать, чтобы край переходил в себя. Оказывается, что их нет:

- В главе 1 доказывается, что для топологически типичного ступенчатого косого произведения над сдвигом Бернулли со слоем окружность или отрезок аттрактор Милнора устойчив по Ляпунову.
- В главе 2 доказывается, что для топологически типичного косого произведения со слоем окружность или отрезок над любым транзитивным диффеоморфизмом Аносова аттрактор Милнора устойчив по Ляпунову и не толст (то есть либо имеет нулевую меру, либо совпадает со всем фазовым пространством);

Доказательства этих двух утверждений похожи друг на друга, случай ступенчатых косых произведений можно воспринимать как модельный пример для случая косых произведений над диффеоморфизмом Аносова. Отметим также,

что у типичного ступенчатого косо́го произведения с одномерным слоем аттрактор Милнора не толст — для слоя отрезок это доказано в [11], а случай слоя окружность сводится к случаю слоя отрезок в силу [13] (готовится к публикации). Также отметим, что вопрос об асимптотической устойчивости аттрактора остается открытым даже для ступенчатых косых произведений со слоем отрезок.

В случае произвольных диффеоморфизмов компактных многообразий неустойчивость аттракторов по Ляпунову локально топологически типична (И. Шилин, [14]), но пока открыт вопрос о существовании открытого множества диффеоморфизмов с неустойчивыми аттракторами. Также открыт вопрос о том, является ли множество диффеоморфизмов с толстыми аттракторами локально типичным.

Глава 3 посвящена аттракторам Милнора $E^u \oplus E^{cs}$ -частично гиперболических диффеоморфизмов. Результат этой главы получен совместно с С. Минковым.

Определение 6. Диффеоморфизм $F : M \rightarrow M$ многообразия называется $E^u \oplus E^{cs}$ -частично гиперболическим, если существуют $\lambda > 1, \mu < \lambda, c > 0$ и два поля линейных подпространств $E_x^{cs} \subset T_x M$ и $E_x^u \subset T_x M$, которые инвариантны (т.е. $dF_x(E_x^{cs,u}) = E_{F(x)}^{cs,u}$) и

$$T_x M = E_x^{cs} \oplus E_x^u,$$

$$\|dF_x^n|_{E_x^{cs}}\| \leq c\mu^n, \quad \|dF_x^{-n}|_{E_x^u}\| \leq c\lambda^{-n}.$$

Отметим, что через каждую точку $x \in M$ можно провести единственное подмногообразие $W^u(x) \subset M$ размерности $\dim E^u$, касательное к полю E^u . Это подмногообразие называют *неустойчивым слоем* точки x .

Из теоремы 11.16 из [3] следует, что для любого C^2 -гладкого $E^u \oplus E^{cs}$ -частично гиперболического диффеоморфизма носитель любой SRB-меры состоит из неустойчивых слоев. Отметим, что это утверждение играет важную роль в доказательстве результатов главы 2. В главе 3 доказывается, что из неустойчивых слоев

состоит и аттрактор Милнора. Это утверждение было сформулировано Ю.С. Ильяшенко в [8] как гипотеза. В [8] построено локально типичное множество сохраняющих край диффеоморфизмов произведения отрезка на двумерный тор с «толстым» (т.е. имеющим положительную меру, но не совпадающим со всем фазовым пространством) топологически транзитивным максимальным аттрактором. То, что аттрактор Милнора также толст, было сведено к этой гипотезе. Тем самым доказано существование локально типичного множества сохраняющих край диффеоморфизмов с «толстым» аттрактором Милнора.

В главе 4 строится диффеоморфизм Аносова с нетривиальным аттрактором Милнора. Результат этой главы получен совместно с К. Бонатти, С. Минковым и И. Шилиным. Широко известно (см. [3, §1.3]), что у любого C^2 -гладкого транзитивного диффеоморфизма Аносова есть ровно одна SRB-мера, ее бассейн притяжения имеет полную меру Лебега, а ее носитель — все многообразие. Из этого следует, что аттрактор Милнора — тоже все многообразие. Однако, доказательство этих фактов основывается на технике контроля искажения, в которой существенно используется C^2 -гладкость. В главе 4 строится пример C^1 -гладкого транзитивного диффеоморфизма Аносова на двумерном торе, аттрактор Милнора которого не равен всему тору. Пример основан на конструкции Боуэна ([15]) подковы положительной меры. Поскольку у транзитивного диффеоморфизма Аносова любой неустойчивый слой плотен (см. [16, §2.1]), аттрактор Милнора нашего примера не состоит из неустойчивых слоев. Так как диффеоморфизм Аносова частично гиперболичен, это означает, что в результате главы 3 нельзя заменить C^2 на C^1 . Также отметим, что для C^1 -топологически типичного транзитивного диффеоморфизма Аносова аттрактор Милнора все-таки совпадает со всем многообразием, доказательство этого факта приводится в главе 4.

Цель работы. Целью работы являлось изучение свойств аттракторов Милнора косых произведений со слоем окружность и других частично гиперболических диффеоморфизмов.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Основные результаты заключаются в следующем

1. Доказано, что для C^r -топологически типичных (при любом $r \geq 2$) сохраняющих ориентацию косых произведений со слоем окружность над транзитивным диффеоморфизмом Аносова аттрактор Милнора устойчив по Ляпунову. Аналогичный результат доказан и для ступенчатых косых произведений над сдвигом Бернулли.
2. Доказано, что для любого $E^u \oplus E^{cs}$ -частично гиперболического C^2 -диффеоморфизма аттрактор Милнора состоит из неустойчивых слоев.
3. Построен пример C^1 -диффеоморфизма Аносова на двумерном торе, аттрактор Милнора которого не совпадает со всем тором.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Разработанные в главе 1 методы работы с аттрактором Милнора ступенчатых косых произведений могут быть полезны при исследовании новых примеров отображений этого класса. Есть надежда, что результат главы 3 вместе с полученной в [17] нормальной формой для косых произведений позволят существенно упростить построение примера толстого аттрактора в [8].

Апробация результатов. Основные результаты диссертации рассказывались на

- внутреннем семинаре (Sem'in) лаборатории математики (UMPA) в ЕНС Лион, 2014
- конференции «Глобальная динамика за рамками равномерной гиперболичности», Ольмуэ, Чили, 2015
- конференции «Динамика, бифуркации и странные аттракторы», Нижний Новгород, 2015
- конференции «Системы Аносова и современная динамика», Москва, 2016

- семинаре «Динамические системы» (Ю.С.Ильяшенко), МГУ, несколько докладов в разные годы (2013–2016).

Личный вклад автора. Результаты глав 1 и 2 получены лично диссертантом, главы 3 — в соавторстве с С. Минковым, а главы 4 — с К. Бонатти, С. Минковым и И. Шилиным.

Список публикация автора по теме диссертации.

1. С. Минков и А. Окунев, «Омега-предельные множества типичных точек частично гиперболических диффеоморфизмов», Функциональный анализ и его приложения, 50:1 (2016), с. 59-66.
2. A. Okunev, «Milnor Attractors of Skew Products with the Fiber a Circle», Journal of Dynamical and Control Systems, 23:2 (2017), с. 421–433.
3. К. Бонатти, С. Минков, А. Окунев и И. Шилин, « C^1 -диффеоморфизм Аносова с подковой, притягивающей почти любую точку», Функциональный анализ и его приложения, 51:2 (2017), с. 83-86.
4. А. Окунев и И. Шилин, «Об аттракторах ступенчатых косых произведений над сдвигом Бернулли», Порядок и хаос в динамических системах, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова, Тр. МИАН, 297 (2017), с. 260–280.

Глава 1

Ступенчатые косые произведения

В главе 1 доказано, что:

- Для топологически типичного ступенчатого косого произведения над сдвигом Бернулли со слоем окружность или отрезок статистический аттрактор устойчив по Ляпунову и совпадает с аттрактором Милнора.
- Статистический аттрактор или аттрактор Милнора любого ступенчатого косого произведения над сдвигом Бернулли легко восстанавливается по своей проекции на слой: точка лежит в аттракторе, если и только если проекция всей ее прошлой орбиты лежит в проекции аттрактора.

1.1. Предварительные сведения

1.1.1. Милноровский и статистический аттракторы, устойчивость по Ляпунову

Рассмотрим динамическую систему (X, F) , где X — сепарабельное метрическое пространство, а $F : X \rightarrow X$ — непрерывное отображение. Пусть на X фиксирована конечная борелевская мера μ . Для диффеоморфизмов мерой μ будет мера Лебега, а для ступенчатых косых произведений в качестве μ мы будем брать произведение μ_X меры Лебега на слое и меры Бернулли на базе.

Определение 7 ([5]). *Аттрактором Милнора* отображения F называется минимальное по вложению замкнутое подмножество пространства X , содержащее ω -предельные множества почти всех по мере μ точек.

Мы будем обозначать аттрактор Милнора отображения F через $A_M(F)$ или просто A_M , если из контекста ясно, о каком отображении идет речь.

Определение 8. *Частотой $Freq(x, U)$ попадания орбиты точки x в множество U будем называть верхний предел*

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \#\{n : F^n(x) \in U, 0 \leq n < N\}.$$

Определение 9. *Статистическим ω -предельным множеством точки $x \in X$ (обозначение: $\omega_{stat}(x)$) называется множество точек $z \in X$, таких что для любой окрестности U точки z выполнено $Freq(x, U) > 0$.*

Статистический аттрактор определяется так же, как милноровский, но вместо обычных ω -предельных множеств используются статистические:

Определение 10 ([18], §8.2; см. также [19]). *Статистическим аттрактором называется минимальное по вложению замкнутое подмножество X , содержащее $\omega_{stat}(x)$ для почти всех по мере μ точек x фазового пространства. Обозначение: $A_{stat}(F)$ или A_{stat} .*

Определение статистического аттрактора в [18] немного отличается от приведенного нами, но эквивалентно ему.

Существование аттрактора Милнора доказано в [5, лемма 1] для случая, когда F — непрерывное отображение компактного многообразия в себя, а μ — мера Лебега на этом многообразии. Существование милноровского и статистического аттрактора для косо́го произведения с мерой μ_X доказываются точно так же. Милноровский и статистический аттрактор инвариантны вперед (и назад, если F — гомеоморфизм), поскольку для любой точки x множества $\omega(x)$ и $\omega_{stat}(x)$ инвариантны. Поскольку для любой точки x всегда выполнено $\omega_{stat}(x) \subset \omega(x)$, имеет место включение

$$A_{stat}(F) \subset A_M(F).$$

Замечание. Точка x принадлежит A_M , если и только если для любой окрестности $U \ni x$ мера множества точек y , таких что $\omega(y)$ пересекает U , положительна. То же верно для A_{stat} с заменой обычного ω -предельного множества на статистическое.

Определение 11. Инвариантное подмножество M фазового пространства X динамической системы (X, F) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любой его окрестности U найдется такая его окрестность V , такая что все начинающиеся в V траектории не покидают U .

Аттракторы Милнора и статистические аттракторы могут быть неустойчивы по Ляпунову: в качестве примера можно рассмотреть отображение окружности с единственной полуустойчивой неподвижной точкой:

$$x \mapsto x + 0.1(1 - \cos x), \quad x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Для произвольного x имеем $\omega(x) = \omega_{stat}(x) = \{0\}$, так что $A_M = A_{stat} = \{0\}$. Однако с одной стороны от нуля точки убегают от него, поэтому аттракторы неустойчивы по Ляпунову.

1.1.2. Ступенчатые косые произведения

Рассмотрим множество $\Sigma^s = \{1, \dots, s\}^{\mathbb{Z}}$ бесконечных в обе стороны последовательностей $\omega = \dots \omega_{-1} \omega_0 \omega_1 \dots$ из символов $1, \dots, s$. Для двух различных последовательностей $\omega, \tilde{\omega} \in \Sigma^s$ определим расстояние между ними как

$$d(\omega, \tilde{\omega}) = 2^{-\min\{|n|: \omega_n \neq \tilde{\omega}_n\}}. \quad (1.1)$$

По набору из m различных целых чисел $n_1, \dots, n_m$ и m символов $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ можно задать *цилиндрическое подмножество* пространства Σ^s (или просто *цилиндр*):

$$CS_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^{n_1, \dots, n_m} = \{\omega \in \Sigma^s \mid \omega_{n_j} = \alpha_j, \quad j = 1, \dots, m\}.$$

Такие цилиндры порождают топологию на Σ^s , а значит, они также порождают борелевскую σ -алгебру.

Определим на Σ^s $(1/s, \dots, 1/s)$ -меру Бернулли μ_{Σ^s} следующим образом. Сначала зададим ее на цилиндрах формулой

$$\mu_{\Sigma^s}(CS_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^{n_1, \dots, n_m}) = 1/s^m,$$

потом продолжим на всю борелевскую σ -алгебру и, наконец, продолжим μ_{Σ^s} на соответствующую лебеговскую σ -алгебру. Эта мера является вероятностной.

Замечание. Доказательства ниже работают для любой меры Бернулли, такой что вероятность каждого символа больше нуля, но мы для простоты ограничимся случаем, когда все символы равновероятны.

Отображение $\sigma: \Sigma^s \rightarrow \Sigma^s$, $(\sigma\omega)_n = \omega_{n+1}$, называется *сдвигом Бернулли*. Легко видеть, что это гомеоморфизм, сохраняющий меру μ_{Σ^s} .

Определение 12. *Ступенчатым косым произведением* (далее СКП) над сдвигом Бернулли (Σ^s, σ) со слоем M и послойными отображениями $f_1, \dots, f_s: M \rightarrow M$ называется следующее отображение F пространства $X = \Sigma^s \times M$ в себя:

$$F: X \rightarrow X, (\omega, p) \mapsto (\sigma\omega, f_{\omega_0}(p)).$$

Здесь ω_0 — символ на нулевом месте в последовательности ω .

Сделаем несколько важных замечаний, касающихся этого определения.

1. Пространство Σ называется *базой* СКП, а M называется *слоем*. Далее M будет компактным многообразием с римановой метрикой на нем.
2. Расстояние на X вводится как сумма расстояний вдоль слоя и вдоль базы.
3. На пространстве X определена мера μ_X , равная произведению меры μ_{Σ^s} на базе и меры Лебега μ_M на слое.

4. СКП задается своими послойными отображениями. Поэтому все СКП с базой Σ^s , слоем M , и C^r -гладкими послойными отображениями образуют метрическое пространство $(C^r(M))^s$. Мы также будем работать с различными подмножествами этого пространства (например, $(\text{Diff}^r(M))^s$), топология на них будет индуцирована с $(C^r(M))^s$.

1.2. О связи между аттрактором и его проекцией на слой

В этом разделе мы будем рассматривать СКП над сдвигом Бернулли, определение которых приведено в параграфе 1.1.2, и пользоваться введенными там обозначениями. В качестве слоя у нас будет компактное многообразие, а послойные отображения будут его диффеоморфизмами. Обозначим проекцию на слой как $\pi_M : X \rightarrow M$.

При доказательстве устойчивости по Ляпунову статистического аттрактора для типичных СКП со слоем окружность (раздел 1.3) нам будет удобно работать не с самим аттрактором, а с его проекцией на слой. В этой части мы изучим связь между аттрактором и его проекцией. Сначала мы дадим критерий принадлежности точки проекции аттрактора, аналогичный замечанию 1.1.1. Потом мы покажем, что аттрактор можно восстановить по его проекции на слой. После этого мы определим устойчивость по Ляпунову проекции аттрактора и докажем, что она эквивалентна устойчивости самого аттрактора.

Замечание. Все результаты этой части останутся верными, если везде заменить статистические ω -предельные множества на обычные, а статистический аттрактор — на аттрактор Милнора. Соответствующие доказательства получаются из приведенных ниже при помощи той же замены.

1.2.1. Аттрактор восстанавливается по своей проекции на слой.

Для последовательности $\omega = \dots \omega_{-1} \omega_0 \omega_1 \dots \in \Sigma^s$ будем называть последовательность $\omega_0 \omega_1 \omega_2 \dots$ её *будущей частью*, а последовательность $\dots \omega_{-2} \omega_{-1}$ —

её прошлой частью.

Предложение 1.2.1. Точка $x \in M$ принадлежит проекции A_{stat} на слой тогда и только тогда, когда для любого открытого множества $U \ni x$ мера множества точек $y \in X$, таких что $\pi_M(\omega_{stat}(y))$ пересекает U , положительна.

Доказательство. Пусть точка $x \in M$ не принадлежит проекции аттрактора на слой. Множество $\pi(A_{stat})$ компактно как образ компакта A_{stat} при непрерывном отображении, а следовательно, у точки x есть окрестность $V \subset M$, не пересекающаяся с $\pi(A_{stat})$. Тогда множество $\Sigma^s \times V$ не пересекает A_{stat} , а отсюда следует, что для почти любой точки $y \in X$ множество $\pi_M(\omega_{stat}(y))$ не пересекает V .

Пусть теперь точка x лежит в проекции аттрактора, причем в точку x проецируется точка $z \in A_{stat}$. Нужно условие для x получим, применив замечание 1.1.1 к точке z и перейдя к проекциям на слой. $\square$

Лемма 1.2.2. Для почти любой по мере μ_X точки $y \in X$ множество $A = \omega_{stat}(y)$ следующим образом восстанавливается по своей проекции на слой: точка x лежит в A , если и только если проекции на слой всех прообразов этой точки лежат в проекции A .

Доказательство. Зафиксируем конечное слово $w \in \{1, \dots, s\}^{|w|}$ и открытое множество $U_M \subset M$.

Обозначим

$$U := \Sigma^s \times U_M,$$

$$U_w := \{\tilde{\omega} \in \Sigma^s : \tilde{\omega}_0 \dots \tilde{\omega}_{|w|-1} = w\} \times U_M,$$

$Y(w, U_M)$ — множество всех точек $y \in X$, таких что либо положительная полуорбита точки y попадает в U лишь конечное число раз, либо нижний предел доли попаданий этой полуорбиты в $U_w \subset U$ среди её попаданий в

U положителен, т.е.

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{n < N : F^n(y) \in U_w\}}{\#\{n < N : F^n(y) \in U\}} > 0.$$

Предложение 1.2.3. Для любого слова w и любого открытого множества $U_M \subset M$ множество $Y(w, U_M)$ имеет полную меру.

Доказательство. Достаточно показать, что для любой точки $p \in M$ выполнено

$$\mu_{\Sigma^s}(\{\omega : (\omega, p) \in Y(w, U_M)\}) = 1,$$

и применить теорему Фубини.

Зафиксируем точку $p \in M$. Пусть k -е по счету попадание орбиты точки (ω, p) в множество U происходит в момент $t_k = t_k(\omega)$ (т.е. $F^{t_k}(\omega, p) \in U$). Этих попаданий может быть конечное число, так что некоторые t_k могут быть не определены. Пусть $l(\omega)$ — номер первого неопределенного t_k .

Мы будем смотреть на базу Σ^s с мерой μ_{Σ^s} как на вероятностное пространство, тогда мы можем называть подмножества Σ^s событиями. Определим на Σ^s последовательность событий

$$A_k = \{\omega : F^{t_k}(\omega, p) \in U_w\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Опять же, некоторые A_k могут быть не определены.

Предположим сначала, что $l(\omega) = \infty$ для всех ω . Нам нужно доказать, что нижний предел доли произошедших A_k положителен почти наверное. Из определения U_w следует, что $\omega \in A_k$, если и только если будущая часть координаты по базе точки $F^{t_k}(\omega, p)$ начинается со слова w . Перепишем это следующим образом:

$$\omega_{t_k(\omega)} \dots \omega_{t_k(\omega)+|w|-1} = w.$$

Рассмотрим сначала частный случай $|w| = 1$. Фиксируем $m > 0$ и рассмот-

рим σ -алгебру $\mathcal{A}_m$, порожденную событиями $A_1, \dots, A_m$ и случайной величиной t_{m+1} . Тогда условная вероятность события A_{m+1} при условии $\mathcal{A}_m$ постоянна и равна $1/s$ (напомним, что $\mu_{\Sigma^s} - (1/s, \dots, 1/s)$ -мера Бернулли). Это следует из того, что при фиксированном значении t_{m+1} событие A_{m+1} зависит от символа $\omega_{t_{m+1}}$, а события $A_1, \dots, A_m$ — от символов последовательности ω с номерами, не большими $t_{m+1} - 1$. Поэтому события A_k независимы в совокупности, и каждое из них происходит с вероятностью $1/s$. По усиленному закону больших чисел почти наверное предел доли произошедших событий A_k существует и равен $1/s$.

Пусть теперь длина слова w любая. Предыдущее рассуждение не работает, потому что подслова последовательности ω , от которых зависят события A_m и A_{m+1} , могут перекрываться. Но его можно спасти, применив это рассуждение к подпоследовательности $A_{|w|}, A_{2|w|}, \dots$. Тогда номера начал слов, ответственных за $A_{m|w|}$ и $A_{(m+1)|w|}$, отличаются хотя бы на $|w|$, и эти подслова последовательности ω не перекрываются. Поэтому подпоследовательность $A_{|w|}, A_{2|w|}, \dots$ образована независимыми событиями, каждое из которых происходит с вероятностью $\frac{1}{s^{|w|}}$. Применяя усиленный закон больших чисел к этой подпоследовательности, получим, что нижний предел доли произошедших событий A_k почти наверное не меньше $\frac{1}{|w|s^{|w|}}$.

Теперь избавимся от предположения $l(\omega) = \infty$. Для этого определим аналоги $\tilde{A}_k$ событий A_k на вероятностном пространстве $(\Sigma^s \times \Sigma^s, \mu_{\Sigma^s} \times \mu_{\Sigma^s})$. Определим $\tilde{A}_k$ как множество пар последовательностей $(\omega, \omega') \in \Sigma^s \times \Sigma^s$, таких что

- либо $t_k(\omega) < \infty$ и $\omega_{t_k(\omega)} \dots \omega_{t_k(\omega)+|w|-1} = w$,
- либо $t_k(\omega) = \infty$ и $\omega'_{k-l(\omega)} \dots \omega'_{k-l(\omega)+|w|-1} = w$.

Рассуждая как выше, видим, что подпоследовательность $\tilde{A}_{|w|}, \tilde{A}_{2|w|}, \dots$ образована независимыми событиями. Поэтому нижний предел доли произошедших событий $\tilde{A}_k$ почти наверное не меньше $\frac{1}{|w|s^{|w|}}$. Из этого следует, что множество $\tilde{B} \subset \Sigma^s \times \Sigma^s$ пар (ω, ω') , таких что доля произошедших событий $\tilde{A}_k$ стремится к нулю, имеет нулевую $\mu_{\Sigma^s} \times \mu_{\Sigma^s}$ меру. Обозначим через $B \subset \Sigma^s$

множество таких ω , что все события A_k (без тильды) определены и предел доли произошедших событий A_k равен нулю. Поскольку для $\omega \in B$ выполнено $\omega \times \Sigma^s \subset \tilde{B}$, по теореме Фубини $\mu_{\Sigma^s}(B) = 0$. Поэтому для почти любой $\omega \in \Sigma^s$

- либо определено лишь конечное число A_k ,
- либо нижний предел доли произошедших A_k положителен.

Значит $(\omega, p) \in Y(w, U_M)$ для почти любой ω . □

Продолжим доказательство леммы 1.2.2. Нам нужно построить множество полной меры Y , такое что при любом выборе точки $y \in Y$ для множества $\omega_{stat}(y)$ выполнено следующее: точка x лежит в $\omega_{stat}(y)$, если и только если проекции на слой всех прообразов точки x лежат в проекции $\omega_{stat}(y)$.

Сначала построим множество Y . Для этого фиксируем счетную базу топологии $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ на M и положим

$$Y = \bigcap_{w, i} Y(w, U_i),$$

где w пробегает все конечные слова, а i — все натуральные числа. По предложению 1.2.3 все множества $Y(w, U_i)$ имеют полную меру. Значит, Y имеет полную меру как их счетное пересечение.

Теперь докажем, что для $y \in Y$ множество $\omega_{stat}(y)$ удовлетворяет нужному свойству. Часть «только если» следует из инвариантности множества $\omega_{stat}(y)$.

Докажем часть «если». Рассмотрим точку

$$x = (\omega, p), \quad \omega \in \Sigma^s, \quad p \in M.$$

Чтобы проверить, что $x \in \omega_{stat}(y)$, в силу замкнутости множества $\omega_{stat}(y)$ достаточно доказать, что оно пересекает произвольную цилиндрическую окрестность V точки x .

Пусть эта цилиндрическая окрестность задана как $V = V_{\Sigma^s} \times V_M$, где $V_{\Sigma^s} \subset \Sigma^s$ — множество последовательностей $\tilde{\omega}$, таких что $\tilde{\omega}_{-n} \dots \tilde{\omega}_{n-1} = \omega_{-n} \dots \omega_{n-1}$, а $V_M \subset M$ — окрестность точки p в слое.

Поскольку множество $\omega_{stat}(y)$ инвариантно, достаточно проверить, что оно пересекает $F^{-n}(V)$. Легко видеть, что $F^{-n}(V) = U_w \times U_M$, где U_w есть множество всех последовательностей $\tilde{\omega} \in \Sigma^s$, таких что $\tilde{\omega}_0 \dots \tilde{\omega}_{2n-1} = \omega_{-n} \dots \omega_{n-1}$, а

$$U_M = (f_{\omega_{-n}}^{-1} \circ \dots \circ f_{\omega_{-1}}^{-1})(V_M).$$

Рассмотрим произвольное множество U_i из выбранной при определении множества Y счетной базы, такое что

$$\pi_M F^{-n}(x) \in U_i \subset U_M. \quad (1.2)$$

Так как мы предполагаем, что проекции на слой всех прообразов точки x лежат в проекции $\omega_{stat}(y)$, точка $\pi_M F^{-n}(x)$ лежит в $\pi_M \omega_{stat}(y)$. Вместе с (1.2) это означает, что U_i пересекает $\pi_M \omega_{stat}(y)$. Следовательно, множество $\omega_{stat}(y)$ пересекает $\Sigma^s \times U_i$. Из определения множества $Y(w, U_i)$ легко получить следующее свойство:

Пусть $z \in Y(w, U_i)$ и $\omega_{stat}(z)$ пересекает $\Sigma^s \times U_i$. Тогда $\omega_{stat}(z)$ пересекает $U_w \times U_i$.

Применяя это свойство к $z = y$, получим, что $\omega_{stat}(y)$ пересекает $U_w \times U_i \subset U_w \times U_M = F^{-n}(V)$. $\square$

Следствие 1.2.4. Для почти любой точки $y \in X$ принадлежность точки x множеству $A = \omega_{stat}(y)$ не зависит от будущей части координаты x по базе. А именно, если $(\omega, p) \in A$, то $(\tilde{\omega}, p) \in A$ для любой последовательности $\tilde{\omega}$ с той же прошлой частью, что и у ω . Это утверждение также верно, если в качестве множества A взять статистический аттрактор A_{stat} .

Доказательство. Это следует из леммы 1.2.2, поскольку сформулированный там критерий не зависит от будущей части координаты по базе. Второе утверждение следует из первого по замечанию 1.1.1. □

Замечание. Для любого частично гиперболического диффеоморфизма статистическое ω - предельное множество почти любой по мере Лебега точки состоит из неустойчивых слоев (это следует из [3, theorem 11.16]). То же самое верно и для обычных ω -предельных множеств ([20], этому посвящена глава 3 этой диссертации). Следствие 1.2.4 является аналогом этих утверждений для ступенчатых косых произведений.

Следствие 1.2.5. Для почти любой точки $y \in X$ проекция на слой множества $A = \omega_{stat}(y)$ инвариантна вперед под действием всех послойных отображений f_i .

Доказательство. Пусть $p \in \pi_M(A)$. Рассмотрим любую точку $x = (\omega, p) \in A$, проецирующуюся в p . Заменяя ω_0 на символ i , получим точку $\tilde{x}$, она лежит в A по следствию 1.2.4. Значит, и $F(\tilde{x})$ лежит в A . Поскольку $\pi_M(F(\tilde{x})) = f_i(p)$, получим $f_i(p) \in \pi_M(A)$. □

1.2.2. Устойчивость проекции

Этот параграф посвящен принадлежащей И. Шилину теореме 1.2.7, которая нужна нам для доказательства теоремы 1.3.1. Мы приводим эту теорему вместе с доказательством, поскольку оно пока не опубликовано.

Предложение 1.2.6. Для любой окрестности U статистического аттрактора найдутся окрестность U_M его проекции на слой и число $n \in \mathbb{N}$, такие что $F^n(\Sigma^s \times U_M) \subset U$.

Доказательство. Напомним, что расстояние на X между двумя точками (ω_1, p_1) и (ω_2, p_2) определяется как сумма расстояний между ними вдоль базы и вдоль

слоя $\text{dist}_{\Sigma^s}(\omega_1, \omega_2) + \text{dist}_M(p_1, p_2)$. Рассмотрим число $\varepsilon > 0$, такое что окрестность U содержит $U_\varepsilon(A_{stat})$.

Пусть U_M — δ -окрестность проекции аттрактора, где малое δ мы выберем позже. Рассмотрим любую точку $x = (\omega, p) \in \Sigma^s \times U_M$. Рассмотрим точку аттрактора $x_A = (\omega_A, p_A)$, такую что $\text{dist}_M(p, p_A) < \delta$. По следствию 1.2.4 принадлежность точки аттрактору не зависит от будущей части ее координаты по базе. Поэтому можно считать, что будущие части последовательностей ω и ω_A совпадают. Из совпадения будущих частей следует, что можно выбрать число n , не зависящее от x , такое что $\text{dist}_{\Sigma^s}(\sigma^n(x), \sigma^n(\omega_A)) < \varepsilon/2$. Пусть $g = f_{\omega_{n-1}} \circ \dots \circ f_{\omega_0}$. Тогда проекции на слой точек $F^n(x)$ и $F^n(x_A)$ равны $g(p)$ и $g(p_A)$ соответственно. Выберем число $L > 0$ так, чтобы все послойные отображения были L -липшицевы. Тогда отображение g будет L^n -липшицево. Теперь мы можем выбрать $\delta = \varepsilon/(2L^n)$. Тогда из $\text{dist}_M(p, p_A) < \delta$ следует, что расстояние вдоль слоя между $F^n(x)$ и $F^n(x_A)$ меньше $\varepsilon/2$. Вспоминая, что эти точки также $\varepsilon/2$ -близки по базе, получаем, что они ε -близки в метрике X . Поскольку $F^n(x_A) \in A_{stat}$, получим $F^n(x) \in U_\varepsilon(A_{stat}) \subset U$. $\square$

Определение 13. Замкнутое множество $B \subset M$ мы будем называть *устойчивым по Ляпунову*, если для любой его окрестности U_M найдется меньшая его окрестность V_M , такая что все начинающиеся в $\Sigma^s \times V_M$ траектории не покидают $\Sigma^s \times U_M$.

Теорема 1.2.7. Статистический аттрактор устойчив по Ляпунову, если и только если его проекция на слой устойчива по Ляпунову.

Доказательство. Из устойчивости A_{stat} очевидным образом следует устойчивость его проекции. Пусть проекция устойчива. Чтобы доказать устойчивость аттрактора, мы должны по окрестности $U \supset A_{stat}$ построить окрестность $V \supset A_{stat}$, такую что все начинающиеся в V траектории не выходят из U .

Для этого, пользуясь предложением 1.2.6, по U найдем окрестность $U_M \supset$

$\pi_M(A_{stat})$ и число n , такие что

$$F^n(\Sigma^s \times U_M) \subset U. \quad (1.3)$$

В силу определения 13 найдется окрестность $V_M \supset \pi_M(A_{stat})$, такая что

$$\forall k \geq 0 \quad F^k(\Sigma^s \times V_M) \subset \Sigma^s \times U_M.$$

Поэтому

$$F^{n+k}(\Sigma^s \times V_M) \subset F^n(\Sigma^s \times U_M). \quad (1.4)$$

Рассмотрим $V = \Sigma^s \times V_M$. В силу (1.3) и (1.4), для любого $m \geq n$ видим, что $F^m(V) \subset U$. Уменьшая при необходимости V , можно добиться выполнения этого условия и при $m < n$. $\square$

1.3. Устойчивость аттрактора для СКП со слоем окружность

Фиксируем числа $r, s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$. Пусть $T = (\text{Diff}_+^r(S^1))^s$ — множество всех СКП над сдвигом Бернулли со слоем S^1 , таких что послойные отображения $f_1, \dots, f_s$ являются сохраняющими ориентацию C^r -дiffeоморфизмами окружности.

Напомним, что подмножество R топологического пространства T называется *остаточным*, если оно содержит счетное пересечение открытых всюду плотных множеств; при этом обычно предполагается, что T является *пространством Бэра*, т.е. что любое остаточное множество всюду плотно в T . Докажем, что T — пространство Бэра. Пространство $(C^r(S^1))^s$ полно, а по теореме Бэра любое полное метрическое пространство является пространством Бэра. С другой стороны, T — открытое подмножество этого пространства, а любое открытое подмножество пространства Бэра само является пространством Бэра.

Теорема 1.3.1. Найдется остаточное множество $R \subset T$, такое что для любого СКП из R статистический аттрактор устойчив по Ляпунову и совпадает с аттрактором Милнора.

Доказательство. Мы будем рассматривать только такие СКП, что послойное отображение f_1 — диффеоморфизм Морса-Смейла (т.е. у f_1 конечное число периодических точек, и все они гиперболичны). Обозначим $S \subset T$ множество всех таких СКП. Так как диффеоморфизмы Морса-Смейла образуют открытое и всюду плотное подмножество $\text{Diff}_+^r(S^1)$, множество $S \subset T$ открыто и всюду плотно.

Пусть $\mathcal{A}$ обозначает множество всех стоков отображения f_1 . Для $a \in \mathcal{A}$ обозначим через $\overline{\text{orb}}(a)$ замыкание орбиты точки a под действием полугруппы, порожденной послойными отображениями $f_1, \dots, f_s$.

Определим $R \subset S$ как множество всех СКП, для которых выполнены следующие условия типичности:

1. для любой периодической точки y отображения f_1 точка $f_2(y)$ — не периодическая для f_1 ;
2. для любого $a \in \mathcal{A}$ множество $\overline{\text{orb}}(a)$ устойчиво по Ляпунову в смысле определения 13.

Ясно, что первое условие задает открытое всюду плотное подмножество S . Второе условие задает остаточное подмножество S , доказательству этого факта посвящена часть 1.3.1 ниже. Т.к. $S \subset T$ открыто и всюду плотно, R является остаточным подмножеством в T .

Теперь рассмотрим любое СКП $F \in R$ и докажем устойчивость аттрактора. Пусть $\pi_{S^1} : X \rightarrow S^1$ обозначает проекцию на слой.

Предложение 1.3.2. Для μ_X -почти любой точки $x \in X$ множество $\pi_{S^1}(\omega_{\text{stat}}(x))$ совпадает с $\overline{\text{orb}}(a)$ для некоторого $a \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Для двух точек $x, y \in S^1$ мы будем писать $x \rightarrow y$, если для любой окрестности U точки y найдется композиция g послойных отображений f_i , такая что $g(x) \in U$.

Из первого условия типичности следует, что для любой точки $y \in S^1$ найдется сток $a \in \mathcal{A}$, такой что $y \rightarrow a$. Действительно, если y — не репеллер отображения f_1 , то многократное применение f_1 притянет ее к одному из аттракторов отображения f_1 . Если y — репеллер, то это рассуждение можно применить к точке $f_2(y)$.

По следствию 1.2.5 для μ_X -почти любой точки $x \in X$ множество $\pi_{S^1}(\omega_{stat}(x))$ инвариантно вперед под действием всех послойных отображений. Фиксируем такую точку x и обозначим $\Omega = \pi_{S^1}(\omega_{stat}(x))$. Возьмем любую точку $y \in \Omega$ и найдем сток $a \in \mathcal{A}$, такой что $y \rightarrow a$. Докажем, что $\Omega = \overline{\text{orb}}(a)$.

Поскольку множество Ω инвариантно, из $y \rightarrow a$ следует, что сколь угодно близко к a есть точки Ω . В силу замкнутости Ω это влечет $a \in \Omega$. Применяя замкнутость и инвариантность Ω еще раз, получим $\overline{\text{orb}}(a) \subset \Omega$.

Чтобы доказать обратное включение $\Omega \subset \overline{\text{orb}}(a)$, используем устойчивость по Ляпунову в смысле определения 13 множества $\overline{\text{orb}}(a)$, обеспеченную вторым условием типичности. Будем рассуждать от противного. Пусть $z \in \Omega \setminus \overline{\text{orb}}(a)$. Рассмотрим окрестность $U \supset \overline{\text{orb}}(a)$, не содержащую z . Найдем по ней окрестность $V \supset \overline{\text{orb}}(a)$, такую что все начинающиеся в $\Sigma^s \times V$ траектории не выходят за пределы $\Sigma^s \times U$. Это противоречит тому, что множество $\omega_{stat}(x)$ пересекает $\Sigma^s \times V$ и содержит z . $\square$

Таким образом, для почти любой точки x имеем $\pi_{S^1}(\omega_{stat}(x)) = \overline{\text{orb}}(a)$ для некоторого $a \in \mathcal{A}$. Из предложения 1.2.1 следует, что проекция статистического аттрактора есть объединение некоторых множеств вида $\overline{\text{orb}}(a)$, $a \in \mathcal{A}$, а именно тех из них, которые совпадают с $\pi_{S^1}(\omega_{stat}(x))$ для множества точек x положительной меры. Следовательно, проекция статистического аттрактора на слой устойчива, что по теореме 1.2.7 означает устойчивость A_{stat} . Устойчивый по

Ляпунову статистический аттрактор всегда совпадает с аттрактором Милнора, доказательство этого простого факта можно найти в [21, Lemma 5.3]. $\square$

Выведем из теоремы 1.3.1 аналогичное утверждение для СКП со слоем отрезок. Обозначим через $\text{Diff}_+^r(I)$ множество сохраняющих ориентацию C^r -гладких отображений отрезка I внутрь себя, являющихся диффеоморфизмами на свой образ. Пусть $T_I = (\text{Diff}_+^r(I))^s$ — множество всех СКП со слоем отрезок с s послойными отображениями, где $s \geq 2$ можно взять любым.

Следствие 1.3.3. Найдется остаточное множество $R_I \subset T_I$, такое что для любого СКП из R_I статистический аттрактор устойчив по Ляпунову и совпадает с аттрактором Милнора.

Доказательство. Будем думать об отрезке I как о дуге окружности: $I \subset S^1$. Пусть $\tilde{T} \subset T$ — множество СКП со слоем окружность, все послойные отображения которых отправляют дугу I строго внутрь себя, а $\tilde{R} \subset \tilde{T}$ — пересечение $\tilde{T}$ с остаточным множеством R из теоремы 1.3.1.

Рассмотрим отображение $\Pi: \tilde{T} \rightarrow T_I$, которое сопоставляет косому произведению со слоем окружность его ограничение на $\Sigma^s \times I$. Согласно [22, Lemma 4.25] любая непрерывная открытая сюръекция из полного метрического пространства на хаусдорфово пространство переводит остаточное множество в остаточное множество. Поэтому множество $R_I := \Pi(\tilde{R}) \subset T_I$ остаточно.

Рассмотрим любое СКП со слоем отрезок $F \in R_I$. Его можно продолжить до СКП со слоем окружность $\tilde{F} \in \tilde{R}$. По теореме 1.3.1 статистический аттрактор $\tilde{F}$ устойчив по Ляпунову и совпадает с милноровским. Поскольку статистический и милноровский аттракторы СКП F равны пересечениям соответствующих аттракторов отображения $\tilde{F}$ с поглощающим множеством $\Sigma^s \times I$, статистический аттрактор F тоже устойчив по Ляпунову и совпадает с милноровским. $\square$

1.3.1. Устойчивость замыканий орбит стоков

Лемма 1.3.4. Косые произведения $F \in S$, такие что для любого $a \in \mathcal{A}$ множество $\overline{\text{orb}}(a)$ устойчиво по Ляпунову, образуют остаточное подмножество множества S .

Доказательство во многом аналогично доказательству теоремы 6.1 из [23]. Оно основано на широко известной лемме о полунепрерывности, которую мы сейчас сформулируем.

Определение 14. Отображение O из метрического пространства T в множество всех замкнутых подмножеств компакта X называется *полунепрерывным снизу* в точке $F \in T$, если для любого ε найдется δ , такое что если $d(F, F') < \delta$, то для любой точки $x \in O(F) \subset X$ найдется точка множества $O(F')$, которая ε -близка к x .

Лемма 1.3.5. (о полунепрерывности) Множество точек непрерывности (относительно хаусдорфовой метрики) полунепрерывного снизу отображения точно.

Эта лемма широко известна, ее доказательство можно найти, например, в [24].

Перейдем к доказательству леммы 1.3.4.

- Рассмотрим произвольное СКП $F \in S$ и его окрестность $W \subset S$, в которой выживают все периодические точки послойного отображения f_1 и не появляются новые. Такая окрестность существует, потому что отображение f_1 является диффеоморфизмом Морса-Смейла, а следовательно, структурно устойчиво.
- Обозначим через M множество всех замкнутых подмножеств S^1 с хаусдорфовой метрикой. Для каждого аттрактора $a_i \in \mathcal{A}$ отображения f_1

рассмотрим отображение $O_i : W \rightarrow M$, которое сопоставляет косому произведению $\tilde{F}$ множество $\overline{\text{orb}}_{\tilde{F}}(\tilde{a}_i)$, где $\tilde{a}_i$ обозначает продолжение для $\tilde{F}$ периодической точки a_i отображения F .

Предложение 1.3.6. Отображение $O_i : W \rightarrow M$ полунепрерывно снизу.

Доказательство. По произвольному ε найдем конечную ε -сеть для множества $O_i(F) = \overline{\text{orb}}(a_i)$, состоящую из точек орбиты a_i . Пусть эта сеть — точки $w_1(a_i), \dots, w_r$, где w_j — конечные композиции послойных отображений. Для любого достаточно близкого СКП $\tilde{F}$ точки $\tilde{w}_1(\tilde{a}_i), \dots, \tilde{w}_r(\tilde{a}_i)$ сдвинулись меньше чем на ε и образуют 2ε -сеть для $O_i(F)$. Но все эти точки принадлежат $O_i(\tilde{F})$, значит рядом с любой точкой $O_i(F)$ есть точки $O_i(\tilde{F})$. $\square$

Предложение 1.3.7. Такие СКП $\tilde{F}$, что все множества $\overline{\text{orb}}_{\tilde{F}}(\tilde{a}_i)$ устойчивы по Ляпунову, образуют остаточное подмножество $R_W \subset W$.

Доказательство. Отображение O_i полунепрерывно снизу по предложению 1.3.6. Значит, по лемме 1.3.5 оно непрерывно на некотором остаточном подмножестве $R_i \subset W$. Предложение 1.3.9 ниже утверждает, что, если множество $\overline{\text{orb}}(\tilde{a}_i)$ неустойчиво по Ляпунову, то оно не непрерывно зависит от отображения. Следовательно, для любого СКП из R_i множество $\overline{\text{orb}}(\tilde{a}_i)$ устойчиво. Осталось положить R_W равным пересечению всех R_i . $\square$

Лемму 1.3.4 можно получить из предложения 1.3.7 с помощью следующего тривиального соображения:

Предложение 1.3.8. Пусть для любой точки сепарабельного метрического пространства S есть окрестность, которую множество $B \subset S$ пересекает по остаточному подмножеству этой окрестности. Тогда B остаточно.

Доказательство. Рассмотрим счетное всюду плотное подмножество, для каждой его точки возьмем окрестность U_n этой точки, в которой B остаточно. Тогда множество $U = \bigcup U_n$ открыто и всюду плотно. Обозначим $B_n = U \setminus (U_n \setminus B)$.

Видно, что B_n остаточно, $\bigcap B_n \subset B$, т.е. B содержит счетное пересечение остаточных, которое само остаточно. $\square$

Предложение 1.3.9. Пусть $F \in S$. Тогда если множество $\overline{\text{orb}}(a_i)$ неустойчиво по Ляпунову, то отображение O_i разрывно в точке F .

Доказательство. Обозначим $a = a_i$. Предположим, что множество $\overline{\text{orb}}(a)$ неустойчиво, и докажем, что оно разрывно зависит от отображения. Из неустойчивости следует, что найдется открытое множество U , не пересекающее $\overline{\text{orb}}(a)$, такое что для любого δ найдутся точка x и композиция послойных отображений v , такие что

$$x \in U_\delta(\overline{\text{orb}}(a)), \quad v(x) \in U. \quad (1.5)$$

Чтобы доказать разрывность отображения O_i , достаточно по любому δ построить 2δ -близкое к F в $(\text{Diff}^r)^s$ -метрике СКП G , такое что множество $\overline{\text{orb}}_G(a_G)$ пересекает U . Здесь и далее для близкого к F СКП G нижний индекс G при символе объекта, связанного с F , обозначает, что рассматривается тот же объект, но для G .

Для этого найдем по δ точку x и слово v так, что выполнено (1.5). Поскольку $\text{orb}(a)$ плотно в $\overline{\text{orb}}(a)$, найдется композиция послойных отображений w , такая что $\text{dist}(w(a), x) < 2\delta$. Ниже мы найдем 2δ -близкое к F СКП G , такое что

$$v_G(w_G(a_G)) = v(x). \quad (1.6)$$

Тогда, поскольку $v(x) \in U$, точка $v_G(w_G(a_G))$ будет искомой точкой множества $\overline{\text{orb}}_G(a_G)$, лежащей в U . Предложение будет доказано, если удастся найти G .

Построение G . Выберем произвольные поднятия $\tilde{f}_i$ послойных отображений СКП F с окружности $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ на прямую $\mathbb{R}$. Этот выбор задаст поднятия $\tilde{v}$ и $\tilde{w}$ отображений v и w . Выберем поднятия $\tilde{a}$ и $\tilde{x}$ точек a и x так, что $|\tilde{x} - \tilde{w}(\tilde{a})| < 2\delta$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\tilde{w}(\tilde{a}) < \tilde{x} < \tilde{w}(\tilde{a}) + 2\delta. \quad (1.7)$$

Напомним, что мы считаем послойные отображения сохраняющими ориентацию, т.е. монотонно возрастающими. Рассмотрим возмущенное СКП

$$F_c = \{f_1 + c, \dots, f_k + c\}, \quad c \in [0, 2\delta].$$

При $c = 0$ выполнено $\tilde{v}_{F_0}(\tilde{w}_{F_0}(\tilde{a}_{F_0})) < \tilde{v}(\tilde{x})$.

Пусть теперь $c = 2\delta$. Тогда $\tilde{a}_{F_{2\delta}} \geq \tilde{a}$, т.к. при поднятии графика возрастающей функции сток тоже поднимается. Т.к. $\tilde{w}_{F_{2\delta}} \geq \tilde{w} + 2\delta$, имеем $\tilde{w}_{F_{2\delta}}(\tilde{a}_{F_{2\delta}}) \geq \tilde{x}$. Т.к. $\tilde{v}_{F_{2\delta}} \geq \tilde{v} + 2\delta \geq \tilde{v}$, это влечет $\tilde{v}_{F_{2\delta}}(\tilde{w}_{F_{2\delta}}(\tilde{a}_{F_{2\delta}})) \geq \tilde{v}(\tilde{x})$.

По теореме о промежуточном значении при некотором значении $\hat{c} \in [0, 2\delta]$ получим $\tilde{v}_{F_{\hat{c}}}(\tilde{w}_{F_{\hat{c}}}(\tilde{a}_{F_{\hat{c}}})) = \tilde{v}(\tilde{x})$. Поэтому СКП $G = F_{\hat{c}}$ удовлетворяет (1.6). $\square$

Глава 2

Частично гиперболические косые произведения со слоем окружность

2.1. Формулировка результатов главы 2

Рассмотрим компактное риманово многообразие без края B . Фиксируем транзитивный диффеоморфизм Аносова $A : B \rightarrow B$. Рассмотрим произведение $X = B \times S^1$ (мы будем называть B базой и S^1 слоем) и косое произведение

$$F : X \rightarrow X \quad (x, y) \mapsto (A(x), f_x(y)).$$

Отображение f_x называется *послойным отображением* над точкой x .

Определение 15. Диффеоморфизм $F : M \rightarrow M$ называется *частично гиперболическим в узком смысле*, если существуют такие числа $C > 0$,

$$0 < \lambda_1 \leq \mu_1 < \lambda_2 \leq \mu_2 < \lambda_3 \leq \mu_3, \quad \mu_1 < 1 < \lambda_3,$$

и такое разложение

$$T_x M = E^s(x) \oplus E^c(x) \oplus E^u(x),$$

что это разложение инвариантно, то есть

$$d_x F(E^\tau(x)) = E^\tau(F(x)), \quad \tau = s, c, u,$$

и при $n > 0$ выполняются неравенства

$$C^{-1}\lambda_1^n\|v\| \leq \|d_x F^n v\| \leq C\mu_1\|v\|, \quad v \in E^s(x), \quad (2.1)$$

$$C^{-1}\lambda_2^n\|v\| \leq \|d_x F^n v\| \leq C\mu_2\|v\|, \quad v \in E^c(x), \quad (2.2)$$

$$C^{-1}\lambda_3^n\|v\| \leq \|d_x F^n v\| \leq C\mu_3\|v\|, \quad v \in E^u(x). \quad (2.3)$$

Для $r \geq 2$ обозначим через P^r множество всех косых произведений F , таких что

- F — C^r -диффеоморфизм,
- F частично гиперболично в узком смысле,
- слои косого произведения являются центральными слоями, т. е. касаются E^c ,
- все послойные отображения $f_x(y)$ сохраняют ориентацию S^1 .

Оснастим P^r метрикой

$$\text{dist}(F, G) = \text{dist}_{C^r(X)}(F, G) + \text{dist}_{C^r(X)}(F^{-1}, G^{-1}).$$

Сформулированная ниже теорема использует определения, введенные в разделе 1.1.1.

Теорема А. *Существует остаточное множество $R \subset P^r$, такое что для любого $F \in R$ статистический аттрактор F*

- совпадает с милноровским аттрактором,
- устойчив по Ляпунову,
- либо имеет нулевую меру Лебега, либо совпадает со всем фазовым пространством X .

Следствие В. Для любого $F \in R$ либо неблуждающее множество F имеет нулевую меру Лебега, либо F транзитивно, и орбита почти любой по мере Лебега точки плотна.

2.2. набросок доказательства

Доказательство основано на двух известных идеях. Первая из них — это следующее следствие теоремы 11.16 из [3]:

Лемма 2.2.1. Для любого C^2 -гладкого частично гиперболического диффеоморфизма с инвариантным разбиением типа $E^u \oplus E^{cs}$ статистическое ω -предельное множество почти любой по мере Лебега точки состоит из неустойчивых слоев, то есть если $x \in \omega_{stat}(y)$, то $W^u(x) \subset \omega_{stat}(y)$.

Отметим, что этот результат можно применить и к системам с инвариантным разбиением типа $E^u \oplus E^c \oplus E^s$, если рассмотреть $E^{cs} = E^c \oplus E^s$. Аналог леммы 2.2.1, как показано в [20], также верен и для обычных ω -предельных множеств.

Вторая идея заключается в том, что устойчивость по Ляпунову можно получить с помощью леммы о полунепрерывности. Мы докажем C^r -аналог следующей теоремы для косых произведений со слоем окружность.

Теорема 2.2.2 ([23], теорема 6.1). Для C^1 -типичного диффеоморфизма любая его периодическая точка гиперболична, и замыкание ее неустойчивого многообразия устойчиво по Ляпунову.

Замечание. Эта теорема доказана в [23] для особых точек векторных полей. Приведенная формулировка взята из [25, §3.1].

Приведем теперь план доказательства. Для простоты предположим, что диффеоморфизм Аносова A в базе имеет неподвижную точку p . Если это не

так, мы можем вместо этого рассмотреть периодическую точку p . Соответствующим изменениям в доказательстве посвящен раздел 2.9. Рассмотрим послойное отображение $f_p : \{p\} \times S^1 \rightarrow \{p\} \times S^1$ над точкой p . Для типичного косога произведения f_p — диффеоморфизм Морса-Смейла, и потому у него лишь конечное число притягивающих периодических точек $a_i \in \{p\} \times S^1$.

Мы докажем, что для почти любой по мере Лебега точки x найдется номер i , такой что множество $\omega_{stat}(x)$ совпадает с множеством $\overline{W^u}(a_i)$, замыканием неустойчивого слоя точки a_i . Для этого мы сначала покажем, что при некоторых условиях типичности множество $\omega_{stat}(x)$ содержит одну из точек a_i . По лемме 2.2.1 множество $\omega_{stat}(x)$ также содержит $\overline{W^u}(a_i)$. Поскольку a_i является притягивающей периодической точкой отображения f_p , неустойчивый слой $W^u(a_i)$ совпадает с неустойчивым многообразием периодической точки a_i . Поэтому в силу доказываемого ниже аналога теоремы 2.2.2 (см. параграф 2.6) множество $\overline{W^u}(a_i)$ устойчиво по Ляпунову. Из этого легко вывести, что $\omega_{stat}(x) = \overline{W^u}(a_i)$.

Из только что доказанного следует, что статистический аттрактор есть объединение нескольких (не обязательно всех) множеств $\overline{W^u}(a_i)$. Поэтому он устойчив по Ляпунову. Устойчивый по Ляпунову статистический аттрактор всегда совпадает с аттрактором Милнора.

Предположим, что статистический аттрактор имеет положительную меру. Тогда (в силу своей инвариантности) он должен пересекать статистический репеллер (то есть аттрактор обратного отображения). По доказанному выше аттрактор устойчив по Ляпунову, а репеллер устойчив по Ляпунову в обратном времени. Используя пересечение аттрактора и репеллера, мы докажем, что для некоторого i множество $\overline{W^u}(a_i) \subset A_{stat}$ совпадает с множеством $\overline{W^s}(r_j)$, где r_j — некоторая отталкивающая периодическая точка послойного отображения f_p . Это множество устойчиво по Ляпунову в прямом и обратном времени. Поэтому, как легко показать, оно совпадает со всем фазовым пространством.

2.3. Обозначения

В дополнение к обозначениям, введенным перед формулировкой теоремы А введем несколько новых.

$r = 2, 3, \dots, \infty$ — число, обозначающее гладкость рассматриваемого класса C^r .

Leb — вероятностная ($Leb(X) = 1$) мера Лебега на X .

$W^s(W^u, W^c, W^{cs}, W^{cu})$ обозначает устойчивый (неустойчивый, центральный, центрально-устойчивый, центрально-неустойчивый слой) слой.

$x \rightsquigarrow y$, означает, что точки $x, y \in X$ таковы, что для сколь угодно малых окрестностей этих точек есть орбита, идущая из окрестности точки x в окрестность точки y .

$Sat(F) \subset X$ — множество точек $x \in X$, таких что $\omega_{stat}(x)$ состоит из неустойчивых слоев. По лемме 2.2.1 имеем $Leb(Sat) = 1$.

p : мы выберем и зафиксируем любую неподвижную точку $p \in B$ диффеоморфизма Аносова A . Если у A нет неподвижных точек, мы берем в качестве p периодическую точку. При этом в доказательство приходится вносить некоторые изменения, которым посвящен раздел 2.9.

S_p^1 — слой $\{p\} \times S^1$ над точкой p .

$f_p : S_p^1 \rightarrow S_p^1$ — послойное отображение косоугольного произведения F над точкой p .

$P_{MS}^r \subset P^r$ — множество всех C^r -гладких косых произведений, таких что для точки p , выбранной выше, отображение f_p — диффеоморфизм Морса-Смейла. Поскольку диффеоморфизмы Морса-Смейла образуют открытое всюду плотное подмножество $\text{Diff}_+^r(S^1)$, множество P_{MS}^r открыто и всюду плотно в P^r .

$a_i \in X$ — притягивающие периодические точки диффеоморфизма Морса-Смейла f_p .

$r_i \in X$ — отталкивающие периодические точки диффеоморфизма Морса-Смейла f_p .

$\pi_B : X \rightarrow B$ — проекция на базу вдоль слоев.

2.4. Предварительные сведения

Поскольку диффеоморфизм Аносова A транзитивен, его неустойчивые слои плотны в B (см. [16, §2.1]). Отметим, что (не)устойчивые слои F отображаются в (не)устойчивые слои A при проекции π_B .

Следующая лемма легко следует из определения устойчивости по Ляпунову.

Лемма 2.4.1. Если $x \rightsquigarrow y$ и x лежит в некотором замкнутом устойчивом по Ляпунову множестве, то y также лежит в этом множестве.

Лемма 2.4.2. Пусть множество $A \subset X$ замкнуто и устойчиво по Ляпунову для отображения F . Тогда для любой точки $x \in X$

- если $\omega(x)$ пересекает A , то $\omega(x) \subset A$,
- если $\omega_{stat}(x)$ пересекает A , то $\omega_{stat}(x) \subset A$.

Доказательство. Это прямое следствие леммы 2.4.1, поскольку для любых $x, y \in \omega(x)$ (или $\omega_{stat}(x)$) выполнено $x \rightsquigarrow y$. □

Лемма 2.4.3. Если A_{stat} устойчив по Ляпунову, то он совпадает с A_M .

Доказательство. Заметим, что A_{stat} всегда лежит в A_M (это впервые доказано в [18, §8.2]). В самом деле, для любой точки x легко доказать, что $\omega_{stat}(x) \subset \omega(x)$, а это влечет $A_{stat} \subset A_M$. Докажем, что $A_M \subset A_{stat}$, если A_{stat} устойчив по

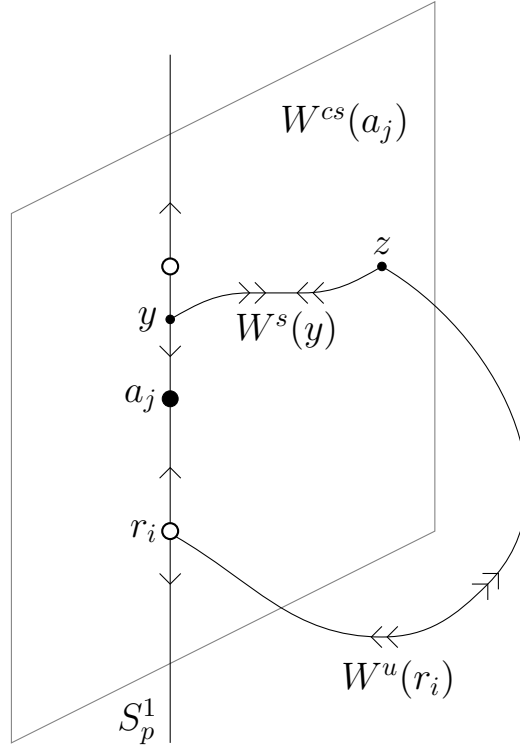


Рис. 2.1. Условие 2.5.1

Ляпунову. По определению A_{stat} для почти любой точки x верно $\omega_{stat}(x) \subset A_{stat}$. Поэтому $\omega(x)$ пересекает A_{stat} . По лемме 2.4.2 из этого следует, что $\omega(x) \subset A_{stat}$. $\square$

Утверждения выше означают, что для доказательства теоремы А достаточно доказать, что A_{stat} устойчив по Ляпунову и либо имеет нулевую меру, либо совпадает со всем фазовым пространством. Поэтому мы концентрируемся на A_{stat} , и слово «аттрактор» будет подразумевать именно A_{stat} .

Мы часто будем пользоваться тем, что C^r -малое возмущение косоугольного произведения будет малым и в топологии P^r . Это вытекает из следующего известного следствия из теоремы о неявной функции (см [26, лемма 3.2]):

Лемма 2.4.4. Отображение $F \mapsto F^{-1}$ — гомеоморфизм $\text{Diff}^r(M)$.

2.5. Притяжение к a_i

В этой части мы докажем, что при некотором условии общности положения для любой точки $x \in Sat$ найдется число j , такое что $a_j \in \omega_{stat}(x)$. Сначала мы сформулируем это условие (см. рисунок 2.1).

Предположение 2.5.1. *Отображение f_p — диффеоморфизм Морса-Смейла, и для любого его репеллера r_i найдутся*

- *точка z на неустойчивом слое r_i*
- *и точка y на устойчивом слое z ,*
- *такие что $y \in S_p^1$ и y — не репеллер f_p .*

Затем мы докажем, что это условие выполнено для типичных косых произведений.

Лемма 2.5.2. Системы, для которых условие 2.5.1 выполнено, образуют открытое всюду плотное подмножество P^r .

Доказательство. Сначала изложим основную идею доказательства, игнорируя некоторые технические детали. Рассмотрим устойчивый слой $W^s(p, A)$ точки p для отображения A . Пусть $W_1^s(p, A)$ — открытый шар в этом листе с центром в p единичного радиуса. Положим

$$T = W_1^s(p, A) \times S^1, T \subset W^{cs}(a_j).$$

Отметим, что T трансверсально неустойчивым слоям F и расслоено на локальные устойчивые слои точек S_p^1 . Зафиксируем любую точку пересечения

$$z_B \in W_1^s(p, A) \cap (W^u(p, A) \setminus \{p\}).$$

Такая точка существует, потому что неустойчивые слои диффеоморфизма A плотны. Для заданных F и r_i определим отображение $\pi_B^{-1} : W^u(p, A) \mapsto W^u(r_i)$,

которое отображает точку на $W^u(p, A)$ в единственную точку $W^u(r_i)$ над ней. Пусть $z = \pi_B^{-1}(z_B)$, тогда $z \in W^u(r_i) \cap T$.

Теперь мы можем рассмотреть следующее условие:

z не лежит локальном устойчивом слое ни одного репеллера отображения f_p .
(*)

Отметим, что из (*) следует предположение 2.5.1 с $y = W_{loc}^s(z) \cap S_p^1$. Условие (*), очевидно, открыто. Естественно ожидать, что оно плотно, поскольку объединение локальных устойчивых слоев репеллеров отображения f_p имеет ко-размерность хотя бы один как подмножество T ; мы докажем это, аккуратно проведя необходимое возмущение.

Перейдем к формальному доказательству. Мы будем пользоваться введенными выше обозначениями. Достаточно доказать, что для любого косо-го произведения $F_0 \in P_{MS}^r$ условие 2.5.1 выполнено на открытом всюду плотном подмножестве некоторой малой окрестности $U \subset P^r$ отображения F_0 . Пусть окрестность U настолько мала, что $a_i(F_0)$ продолжаются во всю окрестность U , и там не появляется новых аттракторов послойного отображения f_p . Фиксируем i и проверим, что условие 2.5.1 выполнено для этого i на открытом всюду плотном подмножестве U .

Мы можем считать, что $A^{-1}(z_B) \notin W_1^s(p, A)$. Если это не так, заменим z_B на $A^{-l}(z_B)$. Для любого $F \in U$ мы можем рассмотреть точку z как выше и сформулировать условие *. Это условие, очевидно, открыто. Чтобы проверить, что оно плотно, возмутим послойное отображение f_c (где $c = A^{-1}(z_B)$), сохраняя послойное отображение f_d

- для любой точки $d \in \pi_B(T)$,
- для точек d , близких к p ,
- для $d = A^{-k}(z_B)$, $k \geq 2$.

Поскольку $c \notin W_1^s(p, A)$, это возмущение сохраняет $W^s(r_j) \cap T$ для всех j (по первому условию). Второе условие означает, что маленький кусочек $W^u(r_i)$ вокруг r_i не меняется при нашем возмущении. Поскольку все $W^u(r_i)$ получается из этого кусочка итерированием вперед, из третьего условия следует, что точка $F^{-1}(z) \in W^u(r_i)$ также не меняется при возмущении. Послойная координата точки z равняется $f_c(t)$, где t есть послойная координата $F^{-1}(z)$. Поэтому мы можем отобвинуть точку z от локальных устойчивых слоев репеллеров, возмущая послойное отображение f_c . $\square$

Теперь мы наконец можем доказать заявленное утверждение.

Лемма 2.5.3. При условии 2.5.1 для любой точки $x \in Sat$ найдется число j , такое что $a_j \in \omega_{stat}(x)$.

Доказательство. Проекция на базу неустойчивых слоев отображения F это неустойчивые слои отображения A , поэтому они плотны в B . Поскольку $x \in Sat$, множество $\omega_{stat}(x)$ пересекает S_p^1 . Есть две возможности:

Первый случай. Пересечение $\omega_{stat}(x) \cap S_p^1$ содержит точку q , не являющаяся репеллером послойного отображения f_p . Тогда для некоторого j аттрактор a_j — предельная точка последовательности $s_n = F^n(q)$, $s_n \in S_p^1$. Поскольку множество $\omega_{stat}(x)$ замкнуто и инвариантно, $a_j \in \omega_{stat}(x)$.

Второй случай. Пересечение $\omega_{stat}(x) \cap S_p^1$ содержит только репеллеры послойного отображения f_p . Пусть $r_i \in \omega_{stat}(x)$. Условие 2.5.1 дает нам точки z и y . Поскольку $x \in Sat$ и $z \in W^u(r_i)$, имеем $z \in \omega_{stat}(x)$. Для некоторого j точка a_j будет предельной точкой последовательности $s_n = F^n(y)$. Поскольку $\text{dist}(F^n(y), F^n(z)) \rightarrow 0$ точка a_j также предельная точка последовательности $s'_n = F^n(z)$. Как и выше, из этого следует, что $a_j \in \omega_{stat}(x)$. $\square$

Замечание. Условие 2.5.1 вместе с основной идеей доказательства леммы 2.5.3 присутствуют в [12, Theorem 5.3].

2.6. $\overline{W^u}(a_i)$ устойчивы по Ляпунову

В этой части мы докажем, что для типичным образом $\overline{W^u}(a_i)$ устойчивы по Ляпунову. Приведем строгую формулировку этого условия.

Предположение 2.6.1. *Отображение f_p — диффеоморфизм Морса-Смейла, и множество $\overline{W^u}(a_i)$ устойчиво по Ляпунову для любого его аттрактора a_i .*

Лемма 2.6.2. *Косые произведения, удовлетворяющие условию 2.6.1, образуют остаточное подмножество множества P^r .*

Доказательство. Отметим, что $W^u(a_i)$ совпадает с неустойчивым многообразием периодической точки a_i , так что лемма 2.6.2 очень похожа на теорему 2.2.2. Отличие заключается в том, что C^1 заменяется на C^r , утверждение немного слабее, и оно утверждается только для косых произведений со слоем окружность. Лемма доказывается в четыре шага. Первые три из них в точности повторяют доказательство теоремы 2.2.2, поэтому мы лишь кратко опишем их.

Шаг 1. Лемма 2.6.2 сводится к локальной версии: для любого $F \in P_{MS}^r$ найдется малая окрестность $U \ni F$, такая что диффеоморфизмы, удовлетворяющие условию 2.6.1 образуют остаточное подмножество множества U . Поскольку f_p является диффеоморфизмом Морса-Смейла, точки a_i выживают в окрестности U (если она достаточно мала), и новые точки a_i не появляются. Поэтому для любого i мы можем рассмотреть отображение $\overline{W^u}(a_i) : U \rightarrow \mathcal{K}(X)$, где $\mathcal{K}(X)$ обозначает множество всех компактных подмножеств X , оснащенное хаусдорфовой метрикой, а a_i — продолжение периодических седел $a_i(F)$.

Шаг 2. Заметим, что эти отображения полунепрерывны снизу (определение полунепрерывности можно найти в [27, §2.5]). Это следует из того, что любой компактный кусок $W^u(a_i)$ вокруг a_i непрерывно зависит от отображения. Здесь уместно напомнить, что $W^u(a_i)$ совпадает с неустойчивым многообразием периодической точки a_i).

Шаг 3. Стандартный факт из общей топологии (лемма о полунепрерывности, см. [27, §2.5]) утверждает, что точки, в которых полунепрерывное снизу отображение (со значениями в множестве компактных подмножеств какого-то многообразия) непрерывна, образуют остаточное множество. Поэтому $\overline{W^u}(a_i)$ непрерывно зависит от отображения на остаточном подмножестве U . Эти рассуждения работают в C^r для любого $r \geq 1$.

Шаг 4. Мы покажем, что если множество $\overline{W^u}(a_i)$ неустойчиво по Ляпунову, то оно разрывно зависит от отображения. В доказательстве теоремы 2.2.2 это делается только для $r = 1$ с помощью леммы Хаяши о соединении. Однако, нам интересен случай $r > 1$, потому что это условие требуется в лемме 2.2.1. Лемма 2.6.3, которую мы сейчас сформулируем, проводит этот последний шаг для косых произведений с одномерным слоем для произвольного r , используя соображения монотонности вместо леммы Хаяши. Итак, мы свели лемму 2.6.2 к лемме 2.6.3. $\square$

Лемма 2.6.3. Пусть $F \in P_{MS}^r$. Предположим, что для какого-то аттрактора a отображения f_p множество $\overline{W^u}(a)$ неустойчиво по Ляпунову. Тогда это множество разрывно зависит от косоугольного произведения в точке F .

Доказательство. Поскольку $\overline{W^u}(a)$ неустойчиво по Ляпунову, для некоторого числа $c > 0$ сколь угодно близко к $\overline{W^u}(a)$ найдется точка $x \in X$, которая убегает на расстояние хотя бы c от этого множества:

- точки x и v сколь угодно близки, $v \in W^u(a)$,
- $\text{dist}(F^n(x), \overline{W^u}(a)) > c$ для какого-то $n \in \mathbb{N}$.

Давайте возьмем как «убегающую точку» точку $y = W_{loc}^{cu}(v) \cap W_{loc}^s(x)$ (см. рис. 2.2). Эта точка на том же слое косоугольного произведения, что и точка $z = W_{loc}^u(v) \cap W_{loc}^c(y)$, $z \in W^u(a)$.

Мы можем предполагать, что точки x и v очень близки. Тогда рассматриваемые локальные слои очень малы и почти прямые, а число n велико. Поэтому

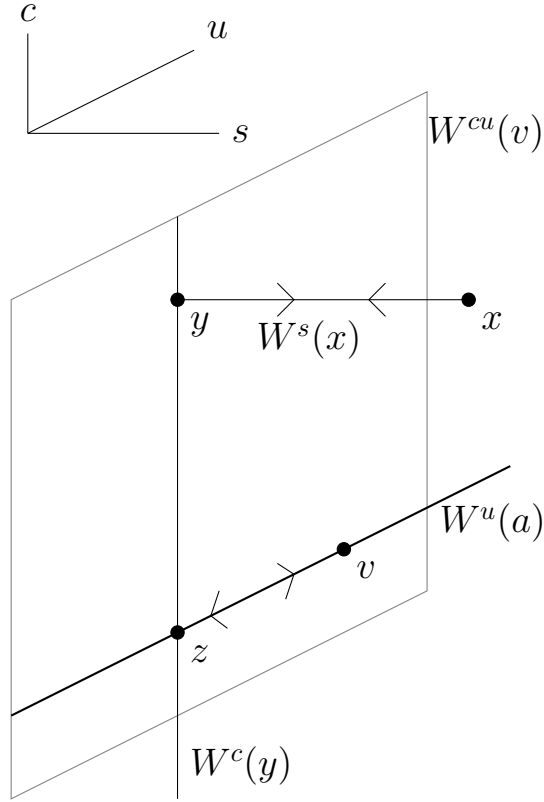


Рис. 2.2. Смена «убегающей точки»

y близка к z . Поскольку x и y соединены маленькой дугой устойчивого слоя и число n велико, $\text{dist}(F^n(y), F^n(x)) < c/2$.

Итак, мы получили две сколь угодно близкие точки y и z на одном слое, такие что

$$z \in W^u(a), \text{dist}(F^n(y), \overline{W^u(a)}) > c/2.$$

Теперь, используя эту пару точек, построим косое произведение $\tilde{F}$, такое что

- C^r -расстояние между $\tilde{F}$ и F меньше $\text{dist}(y, z)$
- $F^n(y) \in W_{\tilde{F}}^u(\tilde{a})$, где $\tilde{a}$ обозначает продолжение a .

Поскольку точка $F^n(y)$ находится на расстоянии хотя бы $c/2$ от множества $\overline{W^u(a)}$, множество $\overline{W_{\tilde{F}}^u(\tilde{a})}$ тоже на расстоянии хотя бы $c/2$ от $\overline{W^u(a)}$. Поэтому существование такого $\tilde{F}$ означает разрывную зависимость $\overline{W^u(a)}$ от косого произведения.

Для отображения $f : S^1 \mapsto S^1$ определим $f + b = R_b \circ f$, где R_b обозначает поворот окружности на угол $2\pi b$. Рассмотрим семейство косых произведений F_b , которое получается после прибавления b ко всем послойным отображениям:

$$F_b : X \rightarrow X \quad (x, y) \mapsto (A(x), (f_x + b)(y)) \quad b \geq 0.$$

Используя теорему о промежуточном значении, докажем, что для какого-то $b \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ выполнено $F^n(y) \in W_{F_b}^u(a_b)$, где a_b обозначает продолжение седла a . Это даст искомое косое произведение $\tilde{F}$.

Рассмотрим такое поднятие

$$\hat{F}_b : W_A^u(p) \times \mathbb{R} \rightarrow W_A^u(p) \times \mathbb{R}$$

ограничения F_b на $W_A^u(p) \times S^1$, что $\hat{F}_b$ непрерывно зависит от b . Положим $\hat{F} = \hat{F}_0$. Также рассмотрим такие поднятия $\hat{a}_b, \hat{z}, \hat{y}$ точек a_b, z, y , что $\hat{z} \in W_{\hat{F}}^u(\hat{a}_0)$, $\text{dist}(\hat{z}, \hat{y}) = \text{dist}(z, y)$.

Обозначим $\hat{z}_b$ единственную точку множества $W_{\hat{F}_b}^u(\hat{a}_b)$ в слое точки $\hat{z}$. Мы хотим доказать, что для некоторого значения b точки $\hat{z}_b$ и $\hat{y}_b = \hat{F}_b^{-n}(\hat{F}_b^n(y))$ совпадают. Они лежат на одном и том же слое $\mathbb{R}$ при всех b , для $b = 0$ они ε -близки. Предположим без ограничения общности, что $\hat{z}_0 < \hat{y}_0 < \hat{z}_0 + \varepsilon$.

Теперь перейдем вместо $b = 0$ рассмотрим $b = \varepsilon$. Множество $W_{\hat{F}_b}^u(\hat{a}_b)$ является графиком функции из $W_A^u(p) \subset B$ в слой $\mathbb{R}$. При переходе от $b = 0$ к $b = \varepsilon$ точка $\hat{a}_b$ останется на своем слое и сдвинется в положительном направлении. Поэтому значение этой функции увеличится во всех точках проекции на базу достаточно малого куска $W_{\hat{F}_b}^u(\hat{a}_b)$ вокруг a_b . Поскольку все множество $W_{\hat{F}_b}^u(\hat{a}_b)$ получается итерированием вперед этого малого куска, и послойные отображения увеличились на ε , значение этой функции вырастет хотя бы на ε в каждой точке. Значит, $\hat{z}_\varepsilon > \hat{z}_0 + \varepsilon$. Точка $\hat{y}_b$ сдвинется в отрицательном направлении ($\hat{y}_\varepsilon < \hat{y}_0$), поскольку, когда мы увеличиваем послойные отображения, обратные

и ким уменьшаются. Поэтому для $b = \varepsilon$ имеем $\hat{y}_\varepsilon < \hat{z}_\varepsilon$. По теореме о промежуточном значении для какого-то $b \in [0, \varepsilon]$ имеем $\hat{y}_b = \hat{z}_b$. $\square$

2.7. Доказательство теоремы A

Сначала определим остаточное подмножество $R \subset P^r$, для отображений которого верны заявленные в теореме A свойства, как множество всех косых произведений $F \in P^r$, таких что

- $F \in P_{MS}^r$, и для любого аттрактора a_i отображения f_p множество $\overline{W^u}(a_i)$ устойчиво по Ляпунову,
- для любой точки $x \in Sat$ найдется число i , такое что $a_i \in \omega_{stat}(x)$,
- эти два свойства верны и для косого произведения F^{-1} , обратного к данному.

Первые два свойства задают остаточное множество в силу параграфов 2.5 и 2.6. Поскольку по лемме 2.4.4 $F \mapsto F^{-1}$ является гомеоморфизмом между $P^r(A)$ и $P^r(A^{-1})$, третье условие также задает остаточное множество.

Теперь докажем устойчивость по Ляпунову аттрактора.

Лемма 2.7.1. Для любого $F \in R$

1. для любой $x \in Sat$ найдется число i , такое что $\omega_{stat}(x) = \overline{W^u}(a_i)$,
2. обозначим через I множество таких чисел i , что $Leb(\{x : \omega_{stat}(x) = \overline{W^u}(a_i)\}) > 0$. Тогда

$$A_{stat} = \cup_{i \in I} \overline{W^u}(a_i),$$

3. для любого $i \in I$ множество $\overline{W^u}(a_i)$ слабо транзитивно, то есть для любых $y, z \in \overline{W^u}(a_i)$ имеем $y \rightsquigarrow z$,
4. A_{stat} устойчиво по Ляпунову.

Доказательство.

1. Рассмотрим любую точку $x \in Sat$. Поскольку $F \in R$, множество $\omega_{stat}(x)$ содержит точку a_i для какого-то i . Поскольку $\omega_{stat}(x)$ состоит из неустойчивых слоев, $\overline{W^u}(a_i) \subset \omega_{stat}(x)$. Множество $\overline{W^u}(a_i)$ устойчиво по Ляпунову, так что $\omega_{stat}(x) = \overline{W^u}(a_i)$ по лемме 2.4.2.
2. По лемме 2.2.1 $Leb(Sat) = 1$, так что это утверждение следует из предыдущего.
3. Рассмотрим точку x , такую что $\omega_{stat}(x) = \overline{W^u}(a_i)$. Так как орбита x подходит сколь угодно близко и к y , и к z , имеем $y \rightsquigarrow z$.
4. Это утверждение следует из пункта 2, поскольку множества $\overline{W^u}(a_i)$ устойчивы по Ляпунову. □

Замечание. Множества $\overline{W^u}(a_i)$ могут совпадать, быть вложенными, или нетривиально пересекаться. Но те из них, которые входят в аттрактор, либо не пересекаются, либо совпадают. Мы не будем пользоваться этим утверждением, поэтому оставим его без доказательства.

Теперь докажем, что аттрактор не может быть толстым.

Лемма 2.7.2. Для любого $F \in R$ либо $Leb(A_{stat}(F)) = 0$, либо $\omega_{stat}(x) = X$ для Leb -почти любой точки $x \in X$.

Доказательство. Пусть $Leb(A_{stat}(F)) > 0$. Поскольку аттрактор замкнут и инвариантен, он содержит статистические α -предельные множества (то есть статистические ω -предельные множества для F^{-1}) всех своих точек. Так как эти точки образуют множество положительной меры, $A_{stat}(F)$ пересекает $A_{stat}(F^{-1})$. Применяя пункт 2 леммы 2.7.1 к F и F^{-1} , мы видим, что для некоторых аттрактора a и репеллера r отображения f_p множества $\overline{W^u}(a)$ и $\overline{W^s}(r)$ пересекаются.

Выберем любую точку c из их пересечения. Напомним, что по пункту 2 леммы 2.7.1 множество $\overline{W^u}(a)$ устойчиво по Ляпунову, а множество $\overline{W^s}(r)$ устойчиво по Ляпунову для F^{-1} .

Докажем, что $\overline{W^s}(r) \subset \overline{W^u}(a)$. Рассмотрим любую точку $x \in \overline{W^s}(r)$. Применяя пункт 3 леммы 2.7.1 к F^{-1} , мы видим, что $c \rightsquigarrow x$. Поскольку $c \in \overline{W^u}(a)$, из леммы 2.4.1 следует, что $x \in \overline{W^u}(a)$. Заменяя F на F^{-1} в этом рассуждении, получим, что $\overline{W^u}(a) \subset \overline{W^s}(r)$, так что эти два множества совпадают. Обозначим $Y = \overline{W^u}(a) = \overline{W^s}(r)$.

Множество Y устойчиво по Ляпунову в прямом и обратном времени, непусто, замкнуто, и инвариантно. Теми же свойствами обладает и множество $Y_p := Y \cap S_p^1$ (под действием диффеоморфизма Морса-Смейла f_p). Лемма 2.7.3, доказываемая ниже, утверждает, что любое такое множество равно всей окружности: $Y_p = S_p^1$. Еще одно доказываемое ниже утверждение, лемма 2.7.4, говорит, что любое устойчивое по Ляпунову инвариантное множество состоит из неустойчивых слоев. Поэтому Y состоит и из устойчивых, и из неустойчивых слоев. Мы утверждаем, что любую точку $x \in X$ можно соединить с точкой из S_p^1 путем, состоящим из устойчивых и неустойчивых слоев. Это влечет $Y = X$. Чтобы доказать это утверждение, соединим точки $\pi_B x$ и p путем из устойчивых и неустойчивых слоев диффеоморфизма A в базе. Поскольку (не)устойчивые слои F проецируются в (не)устойчивые слои A под действием π_B , этот путь можно поднять до пути из устойчивых и неустойчивых слоев F , соединяющего x с какой-то точкой из S_p^1 .

Поскольку $X = Y = \overline{W^u}(a)$, из пункта 3 леммы 2.7.1 следует, что для любых точек $y, z \in X$ выполнено $y \rightsquigarrow z$. Тогда в силу леммы 2.4.1 для любого i имеем $\overline{W^u}(a_i) = X$. По пункту 1 леммы 2.7.1 для любого $p \in \text{Sat}$ имеем $\omega_{\text{stat}}(p) = X$. Так как $\text{Leb}(\text{Sat}) = 1$, типичная по мере Лебега точка имеет плотную орбиту. $\square$

Лемма 2.7.3. Пусть g — диффеоморфизм Морса-Смейла окружности S^1 , а

множество $Y \subset S^1$ устойчиво по Ляпунову в прямом и обратном времени, непусто, замкнуто, и инвариантно. Тогда $Y = S^1$.

Доказательство. Поскольку единственное открытое и замкнутое непустое подмножество окружности это сама окружность, достаточно доказать открытость множества Y . Для этого рассмотрим любую точку $y \in Y$. Если точка y не репеллер g , она лежит в бассейне притяжения какого-то аттрактора a . Так как $y \rightsquigarrow a$, по лемме 2.4.1 имеем $a \in Y$. Возьмем любую точку b в бассейне притяжения a . Поскольку $b \rightsquigarrow a$, по лемме 2.4.1 имеем $b \in Y$. Следовательно, Y содержит весь бассейн притяжения a , так что y — внутренняя точка Y . Если y — репеллер, то аналогично можно показать, что весь бассейн отталкивания y лежит в Y , и точка y опять внутренняя. $\square$

Лемма 2.7.4. Пусть $A \subset X$ — устойчивое по Ляпунову замкнутое инвариантное множество. Тогда A состоит из неустойчивых слоев, то есть если $x \in A$, то $W^u(x) \in A$.

Доказательство. Пусть $x \in A$, $y \in W^u(x)$. Рассмотрим любую предельную точку z последовательности $F^{-n}(x)$. Поскольку $y \in W^u(x)$, $\text{dist}(F^{-n}(x), F^{-n}(y)) \rightarrow 0$, имеем $z \rightsquigarrow y$. Так как A замкнуто и инвариантно, $z \in A$. По лемме 2.4.1 получаем $y \in A$. $\square$

Доказательство теоремы А. Рассмотрим множество $R \subset P^r$, определенное в начале этого параграфа. Для любого $F \in R$ статистический аттрактор $A_{stat}(F)$ устойчив по Ляпунову по лемме 2.7.1 и совпадает с $A_M(F)$ по лемме 2.4.3. Из леммы 2.7.2 следует, что либо $\text{Leb}(A_{stat}(F)) = 0$, либо $A_{stat}(F) = X$. $\square$

2.8. Доказательство следствия В

Лемма 2.8.1.¹ Рассмотрим любой диффеоморфизм F , такой что $A_M(F)$ устойчив по Ляпунову, и $Leb(A_M) = 0$. Тогда $Leb(\Omega(F)) = 0$, где Ω обозначает неблуждающее множество.

Доказательство. Пусть B — бассейн притяжения A_M , то есть $B = \{x \in X : \omega(x) \subset A_M\}$. Докажем, что если A_M устойчив по Ляпунову, то любая точка $x \in B \setminus A_M$ — блуждающая. Предположим противное. Рассмотрим любую точку $y \in \omega(x) \subset A_M$. Используя то, что точка x — блуждающая, легко показать, что $y \rightsquigarrow x$. По лемме 2.4.1 имеем $x \in A_M$, что дает искомое противоречие.

Теперь заметим, что $Leb(B) = 1$ (по определению A_M), так что если $Leb(A_M) = 0$, то $Leb(B \setminus A_M) = 1$. Поскольку Ω не пересекает $B \setminus A_M$, имеем $Leb(\Omega) = 0$. $\square$

Доказательство следствия В. По лемме 2.7.2 для любого $F \in R$ либо типичная по мере Лебега точка имеет плотную орбиту, либо $Leb(A_{stat}) = 0$. В последнем случае, поскольку A_{stat} равен A_M и устойчив по Ляпунову (по теореме А), из леммы 2.8.1 следует, что $Leb(\Omega(F)) = 0$. $\square$

2.9. Что если у A нет неподвижных точек?

Мы начали доказательство с того, что выбрали неподвижную точку p диффеоморфизма Аносова A . Если такой неподвижной точки нет, вместо нее нужно взять периодическую точку. Приведенные доказательства работают в этой ситуации с небольшими изменениями, которые мы приводим ниже. Однако, автор не знает примеров диффеоморфизмов Аносова связного многообразия без неподвижных точек.

- Точка p теперь периодическая, а не неподвижная.

¹ Эта лемма является немного усиленной версией следующего утверждения, принадлежащего С. Минкову: если милноровский аттрактор имеет положительную меру, то аттрактор обратного диффеоморфизма либо тоже имеет положительную меру, либо неустойчив по Ляпунову.

- Вместо послыльного отображения f_p рассматривается g_p , послыльное отображение $F^{\text{per}(p)}$ над точкой p :

$$g_p = f_{A^{\text{per}(p)-1}(p)} \circ \cdots \circ f_p.$$

- Напомним, что множество P_{MS}^r образовано такими косыми произведениями, что g_p — диффеоморфизм Морса-Смейла. Мы должны доказать, что множество P_{MS}^r — открытое и плотное подмножество P^r . Это следует из того, что диффеоморфизмы Морса-Смейла образуют открытое и плотное подмножество $\text{Diff}_+^r(S^1)$. Открытость P_{MS}^r очевидна. Чтобы доказать плотность, заметим, что мы можем возмущать g_p произвольным образом, возмущая послыльное отображение f_p .
- В доказательстве леммы 2.5.3 мы должны рассмотреть отображение $F^{\text{per}(p)}$ вместо F .
- В доказательстве леммы 2.6.3 мы должны рассмотреть динамику над неустойчивым многообразием всей орбиты точки p , а не только над $W_A^u(p)$.

Глава 3

Омега-предельные множества типичных точек частично гиперболических диффеоморфизмов

Мы докажем, что ω -предельное множество метрически типичной точки состоит из неустойчивых слоев для любого $E^u \oplus E^{cs}$ -частично гиперболического C^2 -диффеоморфизма. Из этого следует гипотеза из [8], которая утверждает, что из неустойчивых слоев состоит аттрактор Милнора. В [8] к этой гипотезе была сведена локальная типичность существования «толстого» аттрактора Милнора в классе диффеоморфизмов произведения отрезка на двумерный тор, сохраняющих край.

3.1. Введение

3.1.1. Формулировка результатов

Пусть M – компактное риманово многообразие (возможно, с краем), мера Лебега на M индуцирована римановой метрикой.

Определение 16. Диффеоморфизм $F : M \rightarrow M$ многообразия называется $E^u \oplus E^{cs}$ -частично гиперболическим, если существуют $\lambda > 1, \mu < \lambda, c > 0$ и два поля линейных подпространств $E_x^{cs} \subset T_x M$ и $E_x^u \subset T_x M$, которые инвариантны (т.е. $dF_x(E_x^{cs,u}) = E_{F(x)}^{cs,u}$) и

$$T_x M = E_x^{cs} \oplus E_x^u,$$

$$\|dF_x^n|_{E_x^{cs}}\| \leq c\mu^n, \quad \|dF_x^{-n}|_{E_x^u}\| \leq c\lambda^{-n}.$$

Введение в теорию частичной гиперболичности можно найти, например, в [16], нужные нам свойства напоминаются в параграфе 3.1.3.

Теорема С. Пусть $F : M \rightarrow M - E^u \oplus E^{cs}$ -частично гиперболический C^2 -диффеоморфизм. Тогда ω -предельное множество почти любой по мере Лебега точки состоит из неустойчивых слоев (т.е. оно либо содержит неустойчивый слой целиком, либо не пересекает его).

Следствие 3.1.1. В предположениях теоремы аттрактор Милнора отображения F состоит из неустойчивых слоев.

В [8] построено локально типичное множество сохраняющих край диффеоморфизмов произведения отрезка на двумерный тор с «толстым» (т.е. имеющим положительную меру, но не совпадающим со всем фазовым пространством) топологически транзитивным максимальным аттрактором. То, что аттрактор Милнора также толст, было сведено к следствию 3.1.1, которое было сформулировано как гипотеза для случая одномерного неустойчивого слоения ([8, Conjecture 1]).

Наш результат родственен теореме 11.16 из [3], которая в тех же предположениях утверждает, что для почти любой точки x все предельные точки последовательности мер

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{F^j(x)}$$

относительно слабой сходимости таковы, что соответствующие условные меры на неустойчивых слоях имеют равномерно отделенные от нуля и бесконечности плотности. Из этого сразу следует, что статистический аттрактор, определенный в [18, §8.2], состоит из неустойчивых слоев. Там же приведен пример несовпадения милноровского и статистического аттракторов.

3.1.2. Доказательство следствия 3.1.1

Выведем следствие из теоремы.

Мы будем пользоваться тем, что точка x лежит в аттракторе Милнора, если и только если для любой ее окрестности мера множества точек x , таких

что $\omega(x)$ пересекает эту окрестность, положительна.

Пусть на некотором неустойчивом слое есть точка $x \in A_M$ и точка $y \notin A_M$. Поскольку $y \notin A_M$, найдется окрестность $U(y)$ точки y , такая что мера множества точек, чьи ω -предельные множества пересекают $U(y)$, равна нулю. Возьмем настолько малую окрестность $U(x)$ точки x , что любой пересекающий ее неустойчивый слой пересекает также $U(y)$. Поскольку $x \in A_M$, мера точек, чьи ω -предельные множества пересекают $U(x)$, положительна. Но по теореме С ω -предельные множества почти всех из этих точек состоят из неустойчивых слоев, и поэтому пересекают $U(y)$. Противоречие. $\square$

3.1.3. Неустойчивое слоение и его абсолютная непрерывность

Далее $F : M \rightarrow M$ будет $E^u \oplus E^{cs}$ -частично гиперболическим C^2 -диффеоморфизмом. Тогда касательное пространство в каждой точке M разбито в прямую сумму $E_x^u \oplus E_x^{cs}$, на неустойчивом подпространстве E^u происходит растяжение, а на центрально устойчивом E^{cs} максимальное растяжение слабее минимального растяжения на E^u . Напомним (см. [16, стр. 47]), что *неустойчивое слоение* — это F -инвариантное разбиение M на непересекающиеся неустойчивые слои; любые две точки одного неустойчивого слоя экспоненциально быстро сближаются при обратных итерациях. Более того, существует $\lambda < 1$, такое что точки x и y лежат на одном неустойчивом слое, если и только если для некоторого $c > 0$ и всех $n > 0$ выполнено

$$\text{dist}(F^{-n}(x), F^{-n}(y)) \leq c\lambda^n.$$

Неустойчивые слои касаются неустойчивых гиперплоскостей E^u .

Для гладкого слоения (т.е. слоения, которое можно выпрямить гладкой заменой координат) верно следующее утверждение: множество положительной меры не может пересекать почти все слои по множествам послойной меры ноль (для доказательства нужно выпрямить слоение и применить теорему Фубини).

Слоение на неустойчивые слои гладким не является, хотя сами слои гладкие. Для негладких слоений предыдущее утверждение может нарушаться (это явление носит яркое название «кошмар Фубини», см. [28], [29]), но для слоения на неустойчивые слои оно выполнено, чему и посвящен этот параграф.

Определение 17. Отображение *абсолютно непрерывно вместе с обратным*, если для любого множества мера его образа равна нулю тогда и только тогда, когда мера самого этого множества равна нулю.

Определение 18. Пусть в области U слоение тривиализуемо (т.е. гомеоморфно прямому произведению диска на слое на трансверсальный диск). Назовем компоненты связности пересечений слоев с областью U локальными слоями. Тогда *отображением голономии вдоль слоя с трансверсали A на трансверсаль B в области U* называется отображение, сопоставляющее точке трансверсали A точку трансверсали B , лежащую на том же локальном слое.

Отметим, что голономия вдоль неустойчивых слоев гельдерова, но не обязательно гладкая.

Теорема (см. [16, теорема 7.1], [30, §8.6]). *Отображение голономии вдоль неустойчивых слоев абсолютно непрерывно вместе с обратным относительно мер Лебега на трансверсальных (слоение с таким свойством называется абсолютно непрерывным).*

Следствие 3.1.2. Пусть $P \subset M$ — множество положительной меры. Тогда P пересекает некоторый неустойчивый слой по множеству положительной послойной меры (мера на слое индуцирована римановой метрикой).

Доказательство. Это стандартное следствие абсолютной непрерывности (см. [31]), но для полноты изложения мы приведем набросок доказательства. Рассмотрим открытое множество $B \subset M$, настолько малое, что слоение в нем выпрямляется, неустойчивые гиперплоскости внутри B почти параллельны, и B помещается в одну карту на многообразии, к которой мы переходим.

Введем на $B \subset \mathbb{R}^n$ аффинные координаты: координатная гиперплоскость Ox (x — вектор) почти параллельна неустойчивым направлениям, гиперплоскость Oy (y — тоже вектор) перпендикулярна Ox . Также введем координату $\tilde{y}$, равную y -координате пересечения слоя точки (x, y) с плоскостью Oy .

Пусть выпрямляющее отображение $h : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ (это то $\mathbb{R}^n$, в котором лежит B , с теми же координатами (x, y)) отправляет точку с координатами (x, y) в точку с координатами $(x, \tilde{y})$. Оно сохраняет гиперплоскости $x = \text{const}$ и действует на координату y на каждой из этих гиперплоскостей голономией на плоскость Oy , эта голономия абсолютно непрерывна. Применив теорему Фубини к разбиению $\mathbb{R}^n$ на гиперплоскости $x = \text{const}$, получим, что отображение h абсолютно непрерывно.

Отображение h переводит неустойчивые слои в гиперплоскости $\tilde{y} = \text{const}$. Поскольку неустойчивые слои гладки, ограничение отображения h на любой из них (которое есть просто проекция параллельно Oy на гиперплоскость, в которую этот слой переходит) гладко вместе с обратным и, следовательно, абсолютно непрерывно.

В силу абсолютной непрерывности отображения h множество $h(P)$ имеет положительную меру. По теореме Фубини это множество пересекает некоторую гиперплоскость $\tilde{y} = \text{const}$ по множеству положительной меры. Прообраз этой гиперплоскости под действием h и есть неустойчивый слой, который пересекает P по множеству положительной меры. $\square$

3.2. Доказательство теоремы С

Пусть ω -предельное множество некоторой точки пересекает некоторый неустойчивый слой, но не содержит его. В этой ситуации возникает конструкция, которую мы называем триптихом¹.

¹ название мотивировано случаем одномерного неустойчивого слоения — тогда триптих есть разделенный на три части цилиндр из неустойчивых слоев.

Определение 19. Рассмотрим замкнутый шар B в каком-то неустойчивом слое с центром в x и замкнутый шар $B' \subset B$ в том же слое, с тем же центром, но с меньшим радиусом. Рассмотрим локально тривиализирующий неустойчивое слоение гомеоморфизм $H : B \times S \rightarrow M$, где S — произвольный трансверсальный слоению диск, проходящий через x .

Множество $H(B \times S)$ мы будем называть *триптихом*, а $H(B' \times S)$ — *центром* триптиха, дополнение центра до всего триптиха — его *периферией*.

Расстояние между триптихами определяется как сумма расстояния (по Хаусдорфу) между их центрами и расстояния между их перифериями. Множество триптихов сепарабельно как подмножество сепарабельного метрического пространства пар замкнутых множеств. Фиксируем счетное всюду плотное множество триптихов и назовем их *рациональными*.

Определение 20. Точка *запрещена* для триптиха T , если ее положительная орбита не заходит в центр T , но ее ω -предельное множество пересекает внутренность периферии триптиха T . Множество всех запрещенных точек T называется запрещенным множеством триптиха T и обозначается $P(T)$.

Лемма 3.2.1. Пусть ω -предельное множество некоторой точки x не состоит из неустойчивых слоев. Тогда найдется рациональный триптих, для которого точка x запрещена.

Доказательство. Если множество $\omega(x)$ не состоит из неустойчивых слоев, то какой-то из этих слоев пересекает множество $\omega(x)$, но не лежит в нем. Рассмотрим в этом слое замкнутый шар, не пересекающий $\omega(x)$. Орбита (здесь и далее имеется в виду положительная орбита) точки x может пересекать этот шар только в конечном числе точек, поэтому в нем найдется точка y не из замыкания орбиты точки x . Маленький шар U во всем многообразии с центром в y не пересекает орбиту точки x .

Построим триптих, пересекающий $\omega(x)$, центр которого лежит внутри U . В качестве B' выберем любой шар в неустойчивом слое с центром в y , лежащий

строого внутри U . В качестве B возьмем шар в неустойчивом слое с центром в y и настолько большим радиусом, что хотя бы одна точка $\omega(x)$ попадет во внутренность B . Наконец, выберем в качестве S настолько малый шар в проходящей через y трансверсали, что центр триптиха $H(B \times S)$ лежит внутри U .

Ясно, что точка x запрещена для этого триптиха и его малых возмущений. Малым возмущением получим рациональный триптих. $\square$

Лемма 3.2.2. Запрещенное множество любого триптиха имеет меру ноль.

Лемма 3.2.2 будет доказана в параграфе 3.3.

Доказательство теоремы С. По лемме 3.2.1 множество точек, чьи ω -предельные множества не состоят из неустойчивых слоев, содержится в (счетном) объединении запрещенных множеств всех рациональных триптихов. Эти запрещенные множества имеют меру ноль по лемме 3.2.2. $\square$

3.3. Доказательство леммы 3.2.2

3.3.1. Претриптихи

Триптих T расслоен на диски неустойчивых слоев $H(B \times \{y\})$, мы будем называть их *слоями* триптиха. В каждом слое триптиха выделен центр — пересечение этого слоя с центром триптиха.

Рассмотрим произвольный шар D в неустойчивом слое. Назовем *претриптихом* любой n -й прообраз ($n \geq 0$) некоторого слоя триптиха T , такой что этот прообраз пересекается с шаром D . Число n мы назовем *уровнем* этого претриптиха, а n -й прообраз центра этого диска — центром претриптиха, или *прецентром*. Претриптихи уровня n — в точности n -е прообразы всех дисков триптиха T , пересекающих $F^n(D)$. Диаметр триптихов уровня n экспоненциально быстро стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ в силу сжатия неустойчивых слоев при итерациях назад. Это стремление равномерно, поскольку диаметры слоев

триптиха равномерно ограничены. Претриптихи одного уровня не пересекаются, но претриптихи разных уровней могут пересекаться. Назовем претриптих *граничным*, если он пересекает границу шара D , иначе назовем его *внутренним*.

Предложение 3.3.1. Рассмотрим произвольный шар D' в неустойчивом слое. Фиксируем шар $D \subset D'$, для которого определяются претриптихи. Тогда найдется константа $c(T, F, D') > 0$, такая что послойный объем центра любого внутреннего претриптиха больше объема этого претриптиха, умноженного на c .

Доказательство. Для краткости в этом доказательстве фраза «якобиан отображения» будет означать якобиан ограничения этого отображения на неустойчивый слой. Послойный объем претриптиха уровня N есть интеграл от якобиана отображения F^{-N} по соответствующему слою триптиха. По теореме о среднем в определенном интеграле этот интеграл равен объему этого диска, умноженному на якобиан F^{-N} в какой-то точке этого диска. Аналогично, объем прецентра равен объему центра этого же неустойчивого диска, умноженному на якобиан отображения F^{-N} в какой-то точке. Отношение объема центра неустойчивого диска триптиха к объему самого этого неустойчивого диска отделено от нуля некоторой зависящей от триптиха константой C_1 (т.к. отображение, выпрямляющее слоение, действует на слои гладко с равномерно ограниченным якобианом). С другой стороны, отношение якобианов отображения F^{-N} в двух точках неустойчивого диска равно отношению в обратном порядке якобианов отображения F^N в прообразах этих точек, которые лежат в шаре D . Обозначим эти прообразы x и y . Докажем, что это отношение ограничено некоторой константой C_0 (тогда предложение будет доказано для $c = C_1/C_0$). Это прямо следует из следующей известной леммы, основанной на технике контроля искажения.

Лемма 3.3.2 ([3, lemma 11.9]). Пусть F — произвольный $E^u \oplus E^{cs}$ -частично гиперболический C^2 -диффеоморфизм. Тогда для любой области D' внутри неустойчивого слоя и числа $L > 0$ найдется константа $C_0 > 0$, такая что для любых точек $x, y \in D'$ и целого $N > 1$, таких что $\text{dist}(F^N(x), F^N(y)) \leq L$ (здесь dist — расстояние вдоль неустойчивого слоя), выполнено

$$\frac{\det(DF_x^N|E_x^u)}{\det(DF_y^N|E_y^u)} \leq C_0.$$

Применим эту лемму к определенным выше точкам x и y и шару D' . Возьмем в качестве L максимальный послойный диаметр слоев триптиха. Условие $\text{dist}(F^N(x), F^N(y)) \leq L$ выполнено, поскольку точки $F^N(x)$ и $F^N(y)$ лежат в одном слое триптиха T . $\square$

3.3.2. Основное рассуждение

Приведенное ниже рассуждение использует известную технику, выраженную в предложении 11.1 из [3] одним предложением: «by considering a density point and using the fact that forward iterates of F do not distort Lebesgue measure much ...»; эта техника используется в лемме 15 из [32] в ситуации, похожей на рассматриваемую нами.

Перейдем к более детальному доказательству. Предположим противное. Пусть мера запрещенного множества $P(T)$ триптиха T положительна. Тогда в силу следствия 3.1.2 пересечение Q множества $P(T)$ с некоторым неустойчивым слоем s имеет положительную послойную меру. Пусть $a \in Q$ — точка плотности множества Q . Пусть $D' \subset s$ — шар с центром в точке a единичного радиуса. Выберем шар $D \subset D'$ с центром в точке a , в котором доля запрещенных точек больше $1 - \varepsilon$, где малое ε будет выбрано позже. Рассмотрим претриптихи относительно шара D .

Сначала докажем лемму 3.2.2 в следующем предположении. Общий случай будет сведен к этому в разделе 3.3.3.

Предположение 3.3.3. *Существует конечный или счетный набор внутренних претриптихов T_i , таких что их центры C_i не пересекаются и любой внутренний претриптих лежит в одном из T_i .*

Любая запрещенная точка в шаре D по своему определению покрыта бесконечным числом претриптихов (или, что то же самое, претриптихами сколь угодно большого уровня), но не лежит ни в одном прецентре. Поскольку диаметр триптихов уровня n стремится к нулю, любая внутренняя точка D покрыта лишь конечным числом граничных претриптихов, и, следовательно, бесконечным числом внутренних.

Рассмотрим меру на шаре D — послойный объем, нормированный так, что мера D равна 1. В силу условия $*$ любая запрещенная точка накрыта одним из T_i , поэтому сумма мер T_i больше $1 - \varepsilon$. Из предложения 3.3.1 следует, что сумма мер C_i больше чем $c(1 - \varepsilon)$, где $c = c(D', F, T)$. Но C_i не пересекаются и состоят из не запрещенных точек, а мера всех не запрещенных точек меньше ε . Получаем $\varepsilon > c(1 - \varepsilon)$, что приводит к противоречию при малом ε . Это доказывает лемму 3.2.2 при условии $*$.

3.3.3. Переход к степени

Пусть F — диффеоморфизм, для которого мы хотим доказать лемму 3.2.2. По предложению 3.3.5, которое будет сформулировано и доказано в конце этого параграфа, достаточно доказать лемму 3.2.2 для произвольной степени диффеоморфизма F . Для этого достаточно найти степень F^m , для которой выполнено условие $*$. Воспользуемся следующим предложением, которое будет доказано чуть позже.

Предложение 3.3.4. Пусть m достаточно велико. Тогда если центры двух F^m -претриптихов пересекаются, то один из этих претриптихов лежит в другом.

Тогда, чтобы выполнить условие $*$ для F^m , достаточно взять в качестве набора T_i множество всех внутренних F^m -претриптихов, не вложенных ни в

какой внутренний претриптих меньшего уровня.

Доказательство предложения 3.3.4. В этом доказательстве претриптихи, образы и прообразы рассматриваются для отображения $G = F^m$, где m — любое достаточно большое число.

Заметим, что претриптихи одного уровня не пересекаются. Пусть P_k и P_l — два претриптиха уровней k и l , где $k < l$, центры которых пересекаются. После итерирования вперед k раз P_k перейдет в $G^k(P_k)$ — один из слоев триптиха, а P_l перейдет в $G^k(P_l)$ — прообраз одного из слоев триптиха под действием отображения G^{l-k} . Диаметр $G^k(P_l)$ в метрике слоя очень мал, т.к. G^{l-k} сильно растягивает неустойчивые слои. Поскольку множество $G^k(P_l)$ пересекает центр слоя $G^k(P_k)$ триптиха и имеет малый диаметр, оно целиком лежит в $G^k(P_k)$. Значит, $P_l \subset P_k$. $\square$

Предложение 3.3.5. Пусть для некоторого $m > 0$ запрещенное множество $P(F^m, T)$ триптиха T под действием диффеоморфизма F^m имеет меру ноль. Тогда запрещенное множество $P(F, T)$ триптиха T под действием F также имеет меру ноль.

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$P(F, T) \subset P(F^m, T) \cup F^{-1}(P(F^m, T)) \cup \dots \cup F^{-(m-1)}(P(F^m, T)).$$

Эта формула переписывается так: если точка x запрещена для F , то хотя бы одна из точек $x, F(x), \dots, F^{m-1}(x)$ запрещена для F^m . То, что F^m -орбиты всех этих точек не пересекают центр T , сразу следует из того, что F -орбита точки x не пересекает центр T . Поскольку F -орбита точки x пересекает T бесконечно много раз, для некоторого $0 \leq i < m$ номера точек орбиты x , попадающих в триптих T , дают остаток i по модулю m бесконечно много раз, т.е. F^m -орбита точки $F^i(x)$ пересекает T бесконечно много раз. Поэтому точка $F^i(x)$ запрещена для отображения F^m , что и требовалось доказать. $\square$

Замечание. Идея перехода к сильно растягивающей неустойчивые слои степени диффеоморфизма F и то, что это позволяет справиться с пересечениями прецентров, взята из [3, доказательство теоремы 11.16].

3.4. Открытые вопросы

Следующий вопрос является далеко идущим обобщением теоремы C:

Вопрос. Верно ли, что для типичного диффеоморфизма для почти любой по мере Лебега точки

- замыкание орбиты непрерывно (в метрике Хаусдорфа) зависит от точки?
- замыкание орбиты непрерывно зависит от точки и диффеоморфизма?
- ω -предельное множество устойчиво по Ляпунову?

Если фразу «для почти любой по мере Лебега точки» заменить на «для остаточного множества точек», то все три утверждения верны для C^1 -типичного диффеоморфизма, см. [33].

Глава 4

Аттракторы Милнора диффеоморфизмов Аносова

В этой главе мы приводим пример C^1 -диффеоморфизма Аносова двумерного тора, у которого есть SRB -мера, носитель которой — подкова нулевой меры, а бассейн притяжения имеет полную меру Лебега. Этот результат получен совместно с К. Бонатти, С. Минковым и И. Шилиным.

4.1. Введение к главе 4

Пусть диффеоморфизм F сохраняет вероятностную меру ν . *Бассейном* меры ν называется множество точек x , для которых последовательность мер

$$\delta_x^n := \frac{1}{n}(\delta_x + \dots + \delta_{F^{n-1}(x)})$$

*-слабо сходится к ν . Мера называется *SRB мерой*, если мера Лебега ее бассейна положительна. Широко известно (см. [3, §1.3]), что у любого C^2 -гладкого транзитивного диффеоморфизма Аносова (а все известные диффеоморфизмы Аносова транзитивны) есть единственная SRB мера, и

- ее бассейн имеет полную меру Лебега,
- ее носитель равен всему фазовому пространству.

Однако в C^1 -гладком случае допустимы многие явления, невозможные в C^2 . Так, Боуэном [15] построен пример C^1 -гладкого отображения плоскости с «толстой» (т.е. имеющей положительную меру Лебега) подковой. Используя некоторый аналог этой конструкции, мы докажем следующую теорему:

Теорема D. *Существует C^1 -гладкий диффеоморфизм Аносова $F_{\mathcal{H}}$ двумерного тора $\mathbb{T}^2$ с SRB мерой ν , такой что*

- *ее бассейн имеет полную меру Лебега,*
- *ее носитель — подкова $\mathcal{H}$ нулевой меры Лебега,*
- *$\omega(x) = \mathcal{H}$ для почти любой по мере Лебега точки x .*

Подкова $\mathcal{H}$ будет *полутолстой*, то есть произведением канторова множества положительной меры по неустойчивому направлению на канторово множество нулевой меры по устойчивому направлению. Динамика на $\mathcal{H}$ в неустойчивом направлении будет как у толстой подковы Боуэна, а в устойчивом направлении — как у линейной подковы Смейла. Также отметим, что последнее утверждение теоремы не следует из первых двух, потому что из $\delta_x^n \rightarrow \nu$ не следует, что $\omega(x) \subset \text{supp } \nu$ — орбита точки x может проводить почти все время вблизи $\text{supp } \nu$, но отходить далеко от этого множества бесконечно много раз.

Поскольку определение аттрактора Милнора использует меру Лебега, аттрактор Милнора может измениться при сопряжении гомеоморфизмом. Будем говорить, что аттрактор Милнора C^1 -диффеоморфизма F *топологически инвариантен*, если для любого C^1 -диффеоморфизма G , сопряженного с F гомеоморфизмом ($G = H \circ F \circ H^{-1}$) выполнено $A_M(G) = H(A_M(F))$. Первый пример не топологически инвариантного аттрактора Милнора построен С. Минковым в его диссертации и основан на примере из [34, §3]. Наша конструкция дает открытое множество таких примеров:

Следствие 4.1.1. *Для любого C^1 -диффеоморфизма, достаточно близкого к $F_{\mathcal{H}}$, аттрактор Милнора не является топологически инвариантным.*

Доказательство. В силу структурной устойчивости $F_{\mathcal{H}}$ найдется его C^1 -окрестность U , в которой все отображения сопряжены между собой. Поскольку C^2 -диффеоморфизмы плотны в C^1 -диффеоморфизмах, в U есть C^2 -гладкий диффеоморфизм Аносова G . Любое отображение $F \in U$ сопряжено и $F_{\mathcal{H}}$, и G .

Поскольку $A_M(F_{\mathcal{H}}) = \mathcal{H}$, а $A_M(G) = \mathbb{T}^2$, аттрактор F не является топологически инвариантным. $\square$

Отметим, однако, что для C^1 -топологически типичного транзитивного диффеоморфизма Аносова аттрактор Милнора совпадает со всем фазовым пространством в виду следующего утверждения.

Мы будем говорить, что какое-то свойство выполнено для *топологически типичного* диффеоморфизма в некотором классе, если диффеоморфизмы с данным свойством образуют остаточное подмножество этого класса.

Замечание 4.1.2. Для топологически типичного транзитивного C^1 -гладкого диффеоморфизма Аносова множество точек с плотной положительной полуорбитой имеет полную меру Лебега.

Доказательство. Для диффеоморфизма $F : M \rightarrow M$ и открытого множества $U \subset M$ обозначим через $A(U) = U \cup F^{-1}(U) \cup \dots$ множество всех точек, положительная полуорбита которых попадает в U . Покажем, что для любых U и $\varepsilon > 0$ множество $\mathcal{A}(U, \varepsilon)$ таких диффеоморфизмов, что мера $A(U)$ больше $1 - \varepsilon$, является открытым и плотным подмножеством (открытого) множества транзитивных диффеоморфизмов Аносова.

Плотность следует из того, что для C^2 -гладких диффеоморфизмов Аносова положительная полуорбита почти любой точки плотна, а C^2 -диффеоморфизмы плотны в C^1 .

Докажем открытость. Пусть $F \in \mathcal{A}(U, \varepsilon)$. Тогда для некоторого N мера множества $U \cup F^{-1}(U) \cup \dots \cup F^{-N}(U)$ больше $1 - \varepsilon$. Но поскольку множество U открыто, то же самое верно для всех достаточно близких к F диффеоморфизмов. Открытость доказана.

Выберем на M счетную базу топологии U_n . Тогда множество $\bigcap_n \mathcal{A}(U_n, \varepsilon)$ остаточное, и для любого $F \in \bigcap_n \mathcal{A}(U_n, \varepsilon)$ положительная полуорбита почти любой точки плотна. $\square$

4.2. План главы 4

Весь последующий текст посвящен доказательству теоремы 4.1. Чтобы доказать теорему 4.1, мы определим некоторый класс $\mathcal{C}^1$, состоящий из C^1 -дiffeоморфизмов Аносова с полутолстой подковой, и докажем, что топологически типичный difфеоморфизм из $\mathcal{C}^1$ обладает заявленными в теореме 4.1 свойствами. Чтобы построить класс $\mathcal{C}^1$, мы сначала опишем C^1 -дiffeоморфизм Аносова $F_{init} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, имеющий инвариантную полутолстую подкову $\mathcal{H}$. Это описание приведено в параграфе 4.3, там же мы сформулируем еще несколько свойств F_{init} и определим некоторые подмножества тора $(UK, S, R, \dots)$, нужные для описания класса $\mathcal{C}^1$. Доказательство того, что difфеоморфизм F_{init} с такими свойствами существует, вынесено в параграф 4.7.

Обозначим через S локальное устойчивое слоение полутолстой подковы $\mathcal{H}$ для difфеоморфизма F_{init} . Множество S будет являться произведением толстого канторова множества и отрезка, и потому будет иметь положительную меру Лебега. Поэтому естественно ожидать, что почти любая по мере Лебега точка при итерациях вперед попадет в S и потом притянется к $\mathcal{H}$. К сожалению, это неверно: можно посадить вдали от $\mathcal{H}$ толстую подкову, и тогда все ее точки не будут притягиваться к $\mathcal{H}$. Однако логично ожидать, что почти любая точка будет попадать в S для *типичного* difфеоморфизма с полутолстой подковой. Это и мотивирует наше рассуждение с топологической типичностью. Кроме того, мы считаем, что при явном построении примера difфеоморфизма с толстой или полутолстой подковой, притягивающей почти все точки, технических трудностей будет заметно больше.

Класс $\mathcal{C}^1$ вводится в параграфе 4.4. У всех отображений класса $\mathcal{C}^1$ динамика на локальном устойчивом слоении S полутолстой подковы будет такой же, как и у F_{init} . Для $F \in \mathcal{C}^1$ обозначим через $B(F) = \bigcup_{n \geq 0} F^{-n}(S)$ бассейн притяжения полутолстой подковы $\mathcal{H}$. В параграфе 4.4 мы докажем, что любой difфеоморфизм $F \in \mathcal{C}^1$, такой что $B(F)$ имеет полную меру Лебега, удовлетворяет

заявленным в теореме 4.1 свойствам. Чтобы доказать, что такие диффеоморфизмы топологически типичны в $\mathcal{C}^1$, для каждого $\varepsilon > 0$ мы вводим множество $A_\varepsilon^1 \subset \mathcal{C}^1$ как множество всех $F \in \mathcal{C}^1$ с $Leb(B(F)) > 1 - \varepsilon$, где Leb обозначает вероятностную меру Лебега на $\mathbb{T}^2$. Мы докажем, что эти множества открыты и плотны в $\mathcal{C}^1$. Поэтому множество $A_0^1 = \bigcap_{n=1}^\infty A_{1/n}^1$ остаточное. Но для любого $F \in A_0^1$ имеем $Leb(B(F)) = 1$, так что такой F удовлетворяет заявленным в теореме 4.1 свойствам.

Также в параграфе 4.4 вводится вспомогательный класс $\mathcal{C} \supset \mathcal{C}^1$ *гомеоморфизмов* тора, нужный для доказательства плотности A_ε^1 , и аналоги A_ε множеств A_ε^1 для этого класса. Нам будет удобно начать параграф 4.4 с определения $\mathcal{C}$, потом определить $\mathcal{C}^1$ через $\mathcal{C}$, а потом доказать основную теорему, пользуясь пока не доказанной открытостью и плотностью множеств A_ε^1 .

Открытость и плотность A_ε^1 доказывается в параграфах 4.5 и 4.6, соответственно. При доказательстве плотности возникают две технические леммы, которые доказываются в параграфе 4.8.

4.3. Диффеоморфизм F_{init} с полутолстой подковой

В этом параграфе мы построим $\mathcal{C}^1$ -диффеоморфизм Аносова $F_{init} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ с толстой подковой $\mathcal{H}$, а также определим следующие подмножества $\mathbb{T}^2$, связанные с F_{init} :

UK — небольшой прямоугольник вокруг подковы $\mathcal{H}$,

S — объединение всех лежащих внутри UK локальных устойчивых слоев точек $\mathcal{H}$,

R — окрестность UK , вне которой диффеоморфизм F_{init} совпадает с некоторым линейным диффеоморфизмом Аносова F_{Lin} .

Полное описание F_{init} и этих подмножеств получается достаточно громоздким,

так как оно содержит много технических свойств, которые понадобятся в дальнейшем.

4.3.1. Построение множества UK

Рассмотрим очень большое число $N_{init} \in \mathbb{N}$. Пусть F_{Lin} — линейный диффеоморфизм Аносова на $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, заданный матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{N_{init}}$. Фиксируем на $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ метрику, индуцированную с $\mathbb{R}^2$. Будем называть *вертикальным* направление вдоль неустойчивых слоев F_{Lin} , а *горизонтальным* — вдоль устойчивых. Все рассматриваемые нами отображения тора будут сохранять неустойчивое слоение диффеоморфизма F_{Lin} , которое мы будем называть *вертикальным слоением*. Мы будем использовать без доказательства следующее элементарное свойство линейных диффеоморфизмов Аносова на $\mathbb{T}^2$:

Замечание 4.3.1. Для произвольного $\varepsilon > 0$ при достаточно большом N_{init} неподвижные точки F_{Lin} образуют ε -сеть.

Предложение 4.3.2. Найдется прямоугольник K с вертикальными и горизонтальными сторонами, такой что

- Ограничение F_{Lin} на K задает линейную подкову Смейла, которая отображает две горизонтальные полосы H_0 и H_1 , прилегающие соответственно к нижней и к верхней части горизонтальной границы прямоугольника, на две вертикальные полосы V_0 и V_1 .
- В углах K сидят две неподвижные точки подковы p_0 и p_1 .
- $F_{Lin}(K) \cap K = V_0 \cup V_1$.
- Диаметр K можно сделать сколь угодно малым, выбирая очень большое N_{init} .

Доказательство. Выберем две достаточно близкие (при необходимости можно увеличить N_{init} и воспользоваться замечанием 4.3.1) неподвижные точки

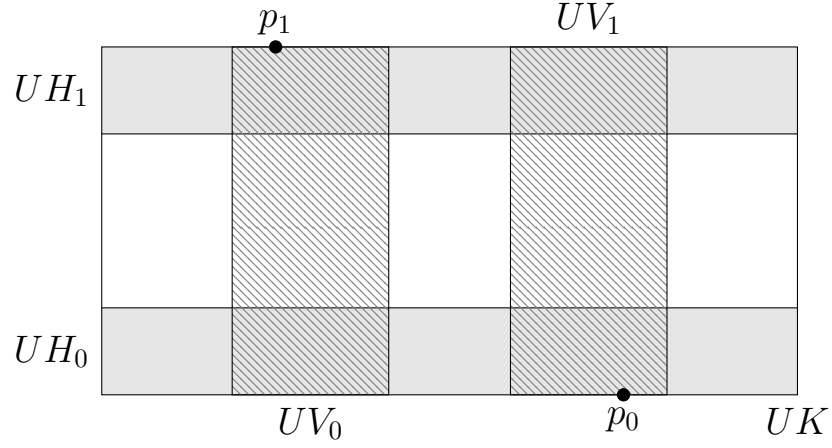


Рис. 4.1. Множество UK . Вертикальные полосы $UK \setminus K$ для удобства нарисованы шире, чем нужно

p_0 и p_1 отображения F_{Lin} так, что в прямоугольнике K с двумя противолежащими углами в p_0 и p_1 и со строго вертикальными и горизонтальными сторонами нет других неподвижных точек. Тогда $F_{Lin}(K) \cap K$ содержит две вертикальные полосы V_0 и V_1 рядом с вертикальными сторонами K . Положим $H_0 = F_{Lin}^{-1}(V_0)$, $H_1 = F_{Lin}^{-1}(V_1)$. Осталось доказать, что $F_{Lin}(K) \cap K = V_0 \cup V_1$. Пусть у $F_{Lin}(K) \cap K$ есть еще одна компонента связности V . Тогда горизонтальная полоска $F_{Lin}^{-1}(V)$ линейно отображается на V , и потому внутри V есть неподвижная точка. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Поскольку N_{init} велико, мы можем считать, что все стороны прямоугольника K короче 0.01. Выберем любую неподвижную точку q отображения F_{Lin} на расстоянии хотя бы 0.3 от UK . Расширим прямоугольник K в горизонтальном направлении не более чем в 1.01 раз (сохраняя его центр) так, чтобы оба его вертикальных граничных отрезка проходили по неустойчивому слою точки q . Обозначим новый прямоугольник UK .

4.3.2. Описание отображения F_{init}

Пусть UH_i — продолжение горизонтальных полосок H_i в $UK \setminus K$, а $UV_i = F_{Lin}(UH_i)$ (см. рисунок 4.1). Построим отображение $F_{Bow} : UH_0 \cup UH_1 \rightarrow UV_0 \cup$

UV_1 , задающее «полутолстую» подкову $\mathcal{H}$. Подробное описание отображения F_{Bow} приведено в параграфе 4.7, здесь мы ограничимся кратким описанием.

Отображение F_{Lin} отображает UH_0 на UV_0 , линейно растягивая по вертикали и линейно сжимая по вертикали. Отображение F_{Bow} тоже будет отображать UH_0 на UV_0 и тоже будет прямым произведением вертикального растяжения и горизонтального сжатия. Горизонтальное сжатие останется тем же самым, но вертикальное растяжение мы заменим на нелинейное растяжение из конструкции толстой подковы Боуэна. Аналогично определим F_{Bow} на UH_1 .

Подкова $\mathcal{H} = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} F_{Bow}^n(UH_0 \cup UH_1)$ будет равна произведению горизонтального тонкого канторова множества C_{thin} на вертикальное толстое канторово множество C_{thick} . У $\mathcal{H}$ будет две неподвижных точки p_0 и p_1 , такие же, как и у линейной подковы. Обозначим через S объединение всех лежащих внутри UK локальных устойчивых слоев точек $\mathcal{H}$. Множество S будет равно произведению горизонтального отрезка на толстое канторово множество C_{thick} .

Введем несколько обозначений, нужных для описания F_{init} . В окрестности каждой точки $z \in \mathbb{T}^2$ можно ввести прямоугольные координаты (x, y) , в которых вертикальные слои параллельны оси Oy , а горизонтальные — оси Ox . Прямые $dx = \pm dy$ будут высекать горизонтальный конус, который мы обозначим $C_H(z)$. Также обозначим через $\tilde{R}$ прямоугольник, полученный расширением UK по вертикали и по горизонтали на 0.01 (опять сохраняя центр).

Предложение 4.3.3. Для достаточно большого N_{init} существует C^1 -гладкий диффеоморфизм Аносова $F_{init} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ такой, что:

1. $F_{init} = F_{Bow}$ на $UH_0 \cup UH_1$. Таким образом, у F_{init} есть полутолстая подкова $\mathcal{H}$.
2. $F_{init} = F_{Lin}$ вне $\tilde{R}$.
3. $F_{init}(UH_i) = UV_i$.
4. $F_{init}(UK) \cap UK = UV_0 \cup UV_1$.

5. неустойчивые слои F_{init} строго вертикальны.
6. F_{init} растягивает вертикальные слои хотя бы в 1.2 раза.
7. Для любой точки $x \in \mathbb{T}^2$ образ внутренности конуса $C_H(x)$ под действием dF_{init} накрывает замыкание конуса $C_H(F_{init}(x))$.

Доказательство этого предложения вынесено в параграф 4.7.

4.3.3. Построение «рамки» R

Мы часто будем рассматривать криволинейные прямоугольники, две граничные кривые которых являются вертикальными отрезками, а две оставшиеся граничные кривые трансверсальны вертикальному слоению. Для такого прямоугольника P мы будем называть объединение двух его вертикальных граничных кривых его *вертикальной границей* (обозначение: $\partial_v P$), а объединение двух оставшихся граничных кривых — его *горизонтальной границей* (обозначение: $\partial_h P$). Накроем $\tilde{R}$ криволинейным прямоугольником R , таким что

- $\partial_h R$ проходит по устойчивому слою точки p_0 ,
- $q \notin R$.

Построим такой R . Вертикальная граница R будет состоять из двух вертикальных слоев, полученных продолжением вертикальной границы $\tilde{R}$ вверх и вниз. Горизонтальными границами R будут правильно выбранные куски устойчивых слоев точки p_0 между этими вертикальными слоями. Чтобы выбрать их, нам потребуется два факта: плотность устойчивого слоя точки p_0 (это следует из того, что любой диффеоморфизм Аносова на $\mathbb{T}^2$ сопряжен линейному, см. [35]) и то, что устойчивые направления F_{init} лежат внутри C_H (это верно, потому что прообраз поля конусов C_H лежит внутри C_H).

Выберем верхнюю границу s рамки R , нижняя будет выбрана аналогично. Напомним, что по конструкции выше обе стороны прямоугольника $\tilde{R}$ меньше

0.05. От середины верхней стороны $\tilde{R}$ поднимемся вверх на 0.03 и обозначим полученную точку w .

Возьмем на $W^s(q_0)$ точку v на расстоянии менее 0.001 от w . Возьмем в качестве s содержащий v кусок $W^s(p_0)$ между вертикальными граничными отрезками R . Все касательные к s лежат внутри конусов C_H . Следовательно, кривая s лежит внутри конуса с центром в v , горизонтальной осью, и раствором $\pi/2$. Поэтому над каждой точкой верхней границы $\tilde{R}$ лежит точка кривой s (причем s не пересекает верхнюю границу $\tilde{R}$). Следовательно, $R \supset \tilde{R}$. С другой стороны, точка s над точкой верхней границы $\tilde{R}$ будет на расстоянии не более 0.06 по вертикали. Поэтому $q \notin R$.

4.4. Рассуждение с типичностью по Бэру

Вместо того, чтобы явно строить пример диффеоморфизма с нужными свойствами, мы рассмотрим специальный класс диффеоморфизмов тора и докажем, что нам подходит топологически типичный диффеоморфизм из этого класса. Будем считать F_{init} , F_{Lin} , UK , UH_i , UV_i , S , p_0 , p_1 , q , R фиксированными как в параграфе 4.3. Рассмотрим любое достаточно большое число $L \in \mathbb{N}$ (ниже мы уточним, насколько велико оно должно быть). **Вспомогательный класс гомеоморфизмов $\mathcal{C}$** состоит из таких гомеоморфизмов $H : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, что

1. $H|_S = F_{init}|_S$;
2. H сохраняет вертикальное слоение;
3. H является L -билипшицевым;
4. $H = F_{Lin}$ вне R ;
5. Ограничение H на любой вертикальный слой растягивает хотя бы в 1.1 раз и не более чем в L раз;

$$6. H(\text{int } UK) \cap \text{int } UK = \text{int } UV_0 \cup \text{int } UV_1;$$

$$7. H^{-L} = F_{init}^{-L} \text{ на } \partial_h UK.$$

Напомним, что $\partial_v UK$ лежит в неустойчивом слое точки q , а $\partial_h R$ лежит в устойчивом слое точки p_0 . Кроме того, $\partial_h UK$ содержит точку p_0 вместе с некоторым отрезком ее устойчивого слоя. Выберем число L настолько большим, что

- i Множество $\partial_v UK$ лежит в шаре в вертикальном слое точки q с радиусом L и центром q ;
- ii Шар радиуса $L \times 1.1^{-L}$ вокруг точки q лежит вне R ;
- iii $\partial_h R \subset \partial_h F_{init}^{-L}(UK)$;
- iv F_{init} является $L/2$ -билипшицевым.

Выведем несколько дополнительных свойств отображений класса $\mathcal{C}$, следующих из уже заявленных.

$$8. \text{ для } N \geq L \text{ имеем } H^{-N}(\partial_v UK) \subset \mathbb{T}^2 \setminus R.$$

Доказательство. Так как $H = F_{Lin}$ вне R , точка q является неподвижной для H . Из свойств i и 5 следует, что $H^{-N} \partial_v UK$ лежит в шаре в вертикальном слое точки q с радиусом $L \times 1.1^{-N}$ и центром q . По свойству ii этот шар лежит в $\mathbb{T}^2 \setminus R$. □

$$9. \partial_h R \subset \partial_h H^{-L}(UK).$$

Доказательство. Это сразу следует из свойств 7 и iv. □

Теперь построим **специальный класс диффеоморфизмов** $\mathcal{C}^1$. Для этого выберем малое $\delta_{init} \in (0, 0.1)$ таким, что

- 1. из $\text{dist}_{C^1}(G, F_{init}) \leq \delta_{init}$ следует, что G сопряжено F_{init} ;

2. для любой точки x для любого линейного оператора $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, δ_{init} - близкого к $d_x F_{init}$, выполнено:

$$\|A\| < L, \|A^{-1}\| < L, A(C_H) \supset C_H. \quad (4.1)$$

Ясно, что $F_{init} \in \mathcal{C}$. Поэтому мы можем определить специальный класс диффеоморфизмов $\mathcal{C}^1$ как пересечение $\mathcal{C}$ с замкнутым C^1 -шаром с центром в F_{init} радиуса δ_{init} .

Для доказательства теоремы 4.1 нам нужны три вспомогательных утверждения.

Предложение 4.4.1. Пространство $\mathcal{C}^1$ — непустое полное метрическое пространство.

Доказательство. Оно полно как замкнутое подпространство полного метрического пространства $\text{Diff}^1(\mathbb{T}^2)$ и непусто, так как содержит F_{init} . $\square$

Для $F \in \mathcal{C}$ обозначим через $B(F) = \cup_{n \geq 0} F^{-n}(S)$ бассейн притяжения полутолстой подковы $\mathcal{H}$. Для $\varepsilon > 0$ определим множество $A_\varepsilon \subset \mathcal{C}$ как множество всех таких $F \in \mathcal{C}$, что $\text{Leb}(B(F)) > 1 - \varepsilon$, где Leb обозначает вероятностную меру Лебега на $\mathbb{T}^2$. Также введем обозначение $A_\varepsilon^1 = A_\varepsilon \cap \mathcal{C}^1$.

Лемма 4.4.2. Для любого $\varepsilon > 0$ множество A_ε открыто в Нотее-топологии на $\mathcal{C}$.

Лемма 4.4.3. Для любого $\varepsilon > 0$ множество A_ε^1 всюду плотно в $\mathcal{C}^1$ (в C^1 -топологии).

Эти две леммы будут доказаны ниже, в параграфах 4.5 и 4.6 соответственно. Выведем из них теорему 4.1.

Доказательство теоремы 4.1. Рассмотрим множество $A_0^1 := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{1/n}^1$. По леммам 4.4.2 и 4.4.3 множество A_0^1 — остаточное подмножество $\mathcal{C}^1$. По теореме Бэра

оно непусто. Возьмем в качестве $F_{\mathcal{H}}$ любой диффеоморфизм из A_0^1 . Из определения A_0^1 следует, что $Leb(B(F_{\mathcal{H}})) = 1$.

Докажем, что $F_{\mathcal{H}}$ удовлетворяет всем заявленным в теореме 4.1 свойствам. SRB мерой ν будет образ $(1/2, 1/2)$ -меры Бернулли при отображении $\chi : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{H}$ символического кодирования подковы. Ясно, что носитель ν равен $\mathcal{H}$. Обозначим через Bas бассейн меры ν . Докажем, что $\nu(Bas) = 1$, т.е. для ν -почти любой точки $x \in \mathcal{H}$ последовательность δ_x^n будет $*$ -слабо сходиться к ν . Это утверждение эквивалентно аналогичному утверждению для сдвига Бернулли и $(1/2, 1/2)$ -меры Бернулли, которое следует из теоремы Биркгофа.

Обозначим через $Leb_S = Leb|_S / Leb(S)$ вероятностную меру Лебега на S и через $\pi : S \rightarrow C_{thick}$ проекцию на вертикальную ось. Из построения C_{thick} (см. предложение 4.7.1 в параграфе 4.7.2) следует, что $\pi_*\nu = \pi_*Leb_S$. Если множество $Bas \cap S$ пересекает какой-то горизонтальный слой S , оно содержит этот слой, поскольку расстояние между образами любых двух точек этого слоя стремится к 0 при положительных итерациях. Поэтому

$$Leb_S(Bas \cap S) = (\pi_*Leb_S)(\pi(Bas \cap S)) = (\pi_*\nu)(\pi(Bas \cap S)) = \nu(Bas \cap S) = 1.$$

Мы получили, что бассейн ν содержит почти все точки S . Итерируя назад, получим что в бассейне ν лежит и почти любая точка из $F_{\mathcal{H}}^{-n}(S)$ для любого n , и потому почти любая точка из $B(F_{\mathcal{H}})$. Поскольку $Leb(B(F_{\mathcal{H}})) = 1$, это означает, что бассейн ν имеет полную меру Лебега.

Докажем, что $\omega(x) = \mathcal{H}$ для почти всех x . Действительно, для любой x из бассейна ν выполнено $\omega(x) \supset \mathcal{H}$, а для любой x из $B(F_{\mathcal{H}})$ имеем $\omega(x) \subset \mathcal{H}$. $\square$

4.5. A_ε открыто

В этом параграфе мы докажем лемму 4.4.2.

Предложение 4.5.1. Пусть отображение $F : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ липшицево. Тогда для

любого борелевского подмножества $A \subset \mathbb{T}^2$ имеем $\mu(F(A)) \leq \text{Lip}^2(F) \cdot \mu(A)$.

Доказательство. Для любого борелевского подмножества $B \subset \mathbb{T}^2$ диаметр множества $F(B)$ не больше $\text{Lip}(F) \cdot \text{diam}(B)$. Применяя это неравенство к элементам покрытий множества $A \subset \mathbb{T}^2$ из определения меры Хаусдорфа, получим следующее неравенство для двумерной меры Хаусдорфа H_2 :

$$H_2(F(A)) \leq \text{Lip}^2(F) \cdot H_2(A).$$

Теперь достаточно заметить, что мера Лебега μ отличается от меры Хаусдорфа H_2 домножением на константу. $\square$

Замечание 4.5.2. Для любого $\hat{\delta} > 0$ множество S можно так покрыть объединением $\hat{S} = \hat{S}(\hat{\delta})$ конечного числа прямоугольников, что $\mu(\hat{S} \setminus S) < \hat{\delta}$. Действительно, S является декартовым произведением вертикального толстого канторова множества C_{thick} и горизонтального отрезка. Чтобы получить конечное покрытие C_{thick} отрезками, удалим из выпуклой оболочки C_{thick} несколько самых больших интервалов дополнения до C_{thick} . Искомое покрытие множества S получается из этого покрытия C_{thick} умножением на горизонтальный отрезок.

Рассмотрим произвольный гомеоморфизм $F \in A_\varepsilon$. По определению A_ε мы видим, что $\mu(B(F)) > 1 - \varepsilon$. Чтобы доказать лемму 4.4.2, мы докажем, что для любого гомеоморфизма $G \in \mathcal{C}$, достаточно близкого к F в Номео-метрике, $\mu(B(G)) > 1 - \varepsilon$.

Пусть $\delta = \mu(B(F)) - (1 - \varepsilon) > 0$. Напомним, что $B(F) = \cup_{j=0}^{\infty} F^{-j}(S)$. Множества $F^{-j}(S)$ образуют возрастающую по вложению последовательность, так что найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\mu(F^{-N}(S)) > \mu(B(F)) - \delta/3. \quad (4.2)$$

Достаточно показать, что для достаточно близких F и G

$$\mu(G^{-N}(S)) > \mu(F^{-N}(S)) - 2\delta/3. \quad (4.3)$$

Действительно, пользуясь (4.2) и (4.3), мы можем провести следующую оценку:

$$\mu(B(G)) \geq \mu(G^{-N}(S)) \stackrel{(4.3)}{>} \mu(F^{-N}(S)) - 2\delta/3 \stackrel{(4.2)}{>} \mu(B(F)) - \delta = 1 - \varepsilon,$$

что дает $G \in A_\varepsilon$.

Чтобы доказать неравенство (4.3), нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 4.5.3. Для фиксированного N найдется такое $\hat{\delta} > 0$, что для любого $G \in \mathcal{C}$

$$\mu(G^{-N}(S)) > \mu(G^{-N}(\hat{S}(\hat{\delta}))) - \delta/3.$$

Доказательство. Напомним, что $S \subset \hat{S}$ (см. замечание 4.5.2) и что гомеоморфизм G билипшицев с константой L . Предложение 4.5.1 дает требуемое неравенство:

$$\mu(G^{-N}(\hat{S} \setminus S)) \leq L^{2N} \cdot \mu(\hat{S} \setminus S) \leq L^{2N} \cdot \hat{\delta}.$$

Достаточно взять $\hat{\delta} < \frac{\delta}{3L^{2N}}$. □

Предложение 4.5.4. Пусть фиксированы $F \in \mathcal{C}$, $\hat{S}$ и N . Тогда для любого гомеоморфизма $G \in \mathcal{C}$, достаточно близкого к F в Норме-метрике, верно следующее неравенство:

$$\mu(G^{-N}(\hat{S})) > \mu(F^{-N}(\hat{S})) - \delta/3.$$

Доказательство. Пусть Π — любой прямоугольник покрытия $\hat{S}$. Рассмотрим множество $F^N \circ G^{-N}(\Pi)$. Оно является топологическим диском, и при G близ-

ком к F его граница близка к границе Π . Поэтому мера симметрической разности $(F^N \circ G^{-N}(\Pi)) \triangle \Pi$ меньше произвольного $\varepsilon_1 > 0$ для достаточно близких F и G . Применяя предложение 4.5.1, получим

$$\mu(G^{-N}(\Pi) \triangle F^{-N}(\Pi)) = \mu(F^{-N}(F^N \circ G^{-N}(\Pi) \triangle \Pi)) \leq L^{2N} \cdot \varepsilon_1.$$

Поэтому

$$\mu(G^{-N}(\Pi)) \geq \mu(F^{-N}(\Pi)) - L^{2N} \cdot \varepsilon_1.$$

Так что для достаточно близких F и G это неравенство верно для любого прямоугольника покрытия $\hat{S}$. Обозначим число прямоугольников в покрытии $\hat{S}$ через P . Тогда

$$\mu(G^{-N}(\hat{S})) \geq \mu(F^{-N}(\hat{S})) - P \cdot L^{2N} \cdot \varepsilon_1.$$

Для достаточно малого ε_1 это дает требуемое неравенство. $\square$

Итак, для достаточно близких F и G имеем:

$$\mu(G^{-N}(S)) \stackrel{\text{П.4.5.3}}{>} \mu(G^{-N}(\hat{S})) - \delta/3 \stackrel{\text{П.4.5.4}}{>} \mu(F^{-N}(\hat{S})) - 2\delta/3 > \mu(F^{-N}(S)) - 2\delta/3.$$

Неравенство (4.3) доказано, что завершает доказательство леммы 4.4.2.

4.6. A_ε плотно

4.6.1. Отрезки уровня n

Этот параграф посвящен доказательству леммы 4.4.3. Начнем со следующего важного для нас определения.

Определение 21. Для $F \in \mathcal{C}$ *отрезками уровня 0* мы будем называть компоненты связности пересечений $\mathbb{T}^2 \setminus UK$ с вертикальными слоями, а *отрезками уровня n* — их n -е прообразы.

Приведем схему доказательства леммы 4.4.3. Для данного отображения $F_0 \in \mathcal{C}^1$ мы хотим, немного его возмущив, построить отображение $F \in A_\varepsilon \cap \mathcal{C}^1$. Сначала мы проведем вертикальную линеаризацию (см. параграф 4.6.3 ниже) и построим отображение $F_L \in \mathcal{C}$, линейное на всех отрезках уровня больше N для некоторого большого N . В параграфе 4.6.2 с помощью известного рассуждения, использующего теорему Лебега о точке плотности в сочетании с контролем искажения, мы докажем, что для такого отображения $\text{Leb}(B(F_L)) = 1$. Поэтому $F_L \in A_\varepsilon$. Но, к сожалению, отображение F_L уже не лежит в классе $\mathcal{C}^1$. Поэтому в параграфе 4.6.4 мы сгладим это отображение с помощью второго возмущения, чтобы получить искомое F . Это сглаживание может быть сделано сколь угодно малым в Норме-топологии, что в силу открытости A_ε означает, что $F \in A_\varepsilon$. Наконец, мы проверим, что F будет $\mathcal{C}^1$ -близко к F_0 при большом N .

4.6.2. Рассуждение с точкой плотности

В этом параграфе мы докажем следующее утверждение.

Лемма 4.6.1. Пусть отображение $H \in \mathcal{C}$ линейно на всех H -отрезках уровня больше N для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Тогда $\text{Leb}(B(H)) = 1$.

Для этого нам потребуются два вспомогательных утверждения.

Предложение 4.6.2. Для любого отображения $H \in \mathcal{C}$ и любой точки $x \in \mathbb{T}^2 \setminus S$ найдется такое целое число $m \geq 0$, что $H^m(x) \in \mathbb{T}^2 \setminus UK$.

Доказательство. Если $x \in \mathbb{T}^2 \setminus UK$, доказывать нечего. Пусть $x \in UK$. Тогда x лежит в какой-то компоненте связности Π множества $UK \setminus S$. Эта компонента связности — горизонтальная полоса. Пусть Π_0 — средняя полоса $UK \setminus S$. Поскольку динамика на подкове $\mathcal{H}$ такая же, как и на обычной подкове Смейла, найдется такое $n \geq 0$, что $F_{init}^n(\Pi) \subset \Pi_0$. Полоса Π ограничена двумя горизонтальными отрезками $\partial_h \Pi$ и двумя вертикальными отрезками $\partial_v \Pi$. Так как $\partial_h \Pi \subset S$, из свойства 1 класса $\mathcal{C}$ следует, что H и F_{init} совпадают на $\partial_h \Pi$. Так

как оба этих отображения сохраняют вертикальное слоение, это означает, что $H^n(\Pi) = F_{init}^n(\Pi) \subset \Pi_0$.

По свойству 6 класса $\mathcal{C}$ имеем $H(\Pi_0) \subset \mathbb{T}^2 \setminus UK$. Поэтому $H^{n+1}(\Pi) \subset \mathbb{T}^2 \setminus UK$ и, в частности, $H^{n+1}(x) \in \mathbb{T}^2 \setminus UK$. $\square$

Следствие 4.6.3. Для любых $x \in \mathbb{T}^2$ и $H \in \mathcal{C}$ верно следующее: если положительная полуорбита x не попадает в S , то она попадает в $\mathbb{T}^2 \setminus UK$ бесконечно много раз.

Доказательство леммы 4.6.1. Предположим противное. Тогда множество $Z(H) = \mathbb{T}^2 \setminus B(H)$ имеет положительную меру и, следовательно, его пересечение с некоторым вертикальным слоем имеет точку плотности. Обозначим эту точку через x . Напомним, что $\mathbb{T}^2 \setminus UK$ является объединением вертикальных отрезков уровня 0. По следствию 4.6.3 положительная полуорбита точки x посещает $\mathbb{T}^2 \setminus UK$ бесконечно много раз. Это означает, что x принадлежит отрезкам сколь угодно больших уровней. Поскольку H сжимает вертикальные отрезки (свойство 5 класса $\mathcal{C}$), длина этих отрезков стремится к нулю. Так как x — точка плотности, плотность множества $Z(H)$ в этих отрезках сколь угодно близка к единице. Приведем это к противоречию.

Так как H по предположению линейно на отрезках больших уровней, построенный выше отрезок с большой плотностью $Z(H)$ линейно растягивается на отрезок уровня N . После этого за N итераций этот отрезок нелинейно растягивается до отрезка уровня 0. Так как искажение за эти N итераций ограничено (то есть эти итерации изменяют вертикальную меру множеств не более чем в константу раз — это следует из свойств 5 и 3 класса $\mathcal{C}$), мы можем считать, что в каком-то отрезке уровня 0 плотность $Z(H)$ все еще близка к единице. Наконец, найдется такое $M \in \mathbb{N}$, что для любого отрезка I уровня 0 его образ $H^M(I)$ пересекает $\text{int } UK$ сверху вниз.¹ Тогда внутри $H^M(I)$ доля точек множества S составляет не меньше $\frac{\mu(S)}{|H^M(I)|}$, где $\mu(S)$ — одномерная мера Лебега

¹ Такое M найдется, потому что каждый вертикальный слой образует иррациональную обмотку $\mathbb{T}^2$, и H равномерно растягивает отрезки вертикальных слоев.

проекции множества S на (любой) вертикальный слой. Поскольку искажение за эти M итераций тоже ограничено, доля точек $Z(H)$ внутри $H^M(I)$ может быть сколь угодно близка к единице. Так как $Z(H) \cap S = \emptyset$, это приводит к противоречию. $\square$

4.6.3. Линеаризация

В этой части для данных $F_0 \in \mathcal{C}^1$ и (большого) $N \in \mathbb{N}$ мы построим гомеоморфизм $F_L \in \mathcal{C}$, линейный на всех F_L -отрезках уровня больше N и совпадающий с F_0 вне объединения этих отрезков.

Пусть $H \in \mathcal{C}$, а J — H -отрезок уровня n . Определим *процедуру линеаризации* на J следующим образом: ограничение $H|_J$ заменяется на такое аффинное отображение, что образ J после замены остается тем же самым. Чтобы получить F_L , мы сначала линеаризуем F_0 на всех F_0 -отрезках уровня $N + 1$. Это дает отображение $F_{N+1} \in \mathcal{C}$, линейное на всех F_{N+1} -отрезках уровня $N + 1$. Затем мы линеаризуем F_{N+1} на всех F_{N+1} -отрезках уровня $N + 2$ и получаем отображение F_{N+2} , линейное на всех F_{N+2} -отрезках уровня $N + 2$. Мы докажем, что F_{N+2} также линейно на всех F_{N+2} -отрезках уровня $N + 1$. Продолжая этот процесс, мы получим последовательность отображений. Мы покажем, что она C^0 -сходится к искомому F_L .

Полоски уровня n

Рассмотрим гомеоморфизм $H \in \mathcal{C}$ и число $n > L$. Напомним, что отрезки уровня 0 — это компоненты связности вертикальных слоев внутри $\mathbb{T}^2 \setminus UK$, а отрезки уровня n — это их n -е прообразы. Поэтому отрезки уровня n — это компоненты связности вертикальных слоев внутри $\mathbb{T}^2 \setminus H^{-n}(UK)$. Обозначим $W_m := \partial_h H^{-m}(UK)$. Имеем: $W_m = H^{-m}(\partial_h UK)$, где $\partial_h UK$ состоит из двух «локальных устойчивых многообразий» двух неподвижных точек подковы p_0 и p_1 . Множество W_m состоит из двух кривых W_m^0 и W_m^1 , более длинных кус-

ков «устойчивых многообразий» точек p_0 и p_1 . Несложно понять, что кривые W_m^0 и W_m^1 «трансверсальны» вертикальным слоям, то есть они локально являются графиками функций (не обязательно гладких) из горизонтальной оси на вертикальную. Действительно, этот факт очевиден для W_0 и проверяется по индукции для больших m , используя то, что вертикальное слоение сохраняется. Поскольку $H(\partial_h UK) \subset \partial_h UK$, для любого $m \geq 0$ имеем

$$W_{m+1} \supset W_m.$$

Поскольку $n > L$, из свойства 9 класса $\mathcal{C}$ следует, что

$$\partial_h R \subset W_n. \quad (4.4)$$

Напомним также свойство 8:

$$\partial_v H^{-n}(UK) \cap R = \emptyset. \quad (4.5)$$

Поскольку вне R отображение H уже линейно (свойство 4), нас будут интересовать только отрезки уровня n , пересекающие $\text{int } R$. Из (4.4) следует, что такие отрезки целиком лежат в R . Из (4.4) и (4.5) следует, что множество W_n разбивает R на идущие в горизонтальном направлении полосы. Назовем *полосками уровня n* те из них, которые лежат в $F^{-n}(\mathbb{T}^2 \setminus UK)$. Из сказанного выше следует

Предложение 4.6.4. Для любых $n > L$ и $H \in \mathcal{C}$ объединение всех отрезков уровня n , пересекающих $\text{int } R$, равно объединению всех полосок уровня n .

Свойства полосок уровня n

Предложение 4.6.5. Пусть Π_l — полоска уровня $l > L$, а Π_k — полоска уровня $k > l$. Тогда либо $\Pi_k \subset \Pi_l$, либо замыкания Π_k и Π_l не пересекаются.

Доказательство. Пусть $\Pi_k \not\subset \Pi_l$. Сначала докажем, что внутренности этих полосок не пересекаются. Пусть $\text{int } \Pi_k \cap \text{int } \Pi_l \neq \emptyset$. Тогда $\partial_h \Pi_l$ пересекает $\text{int } \Pi_k$. Но $\partial_h \Pi_l \subset W_l \subset W_k$. Поэтому W_k пересекает $\text{int } \Pi_k$, что противоречит определению полосок уровня k .

Если пересекаются границы, то, так как $\Pi_k \not\subset \Pi_l$, верхняя граница Π_k пересекает нижнюю границу Π_l (или наоборот, этот случай аналогичен). Будем считать, что p_0 обозначает верхнюю из двух неподвижных точек подковы, тогда эти границы принадлежат кривым W_k^0 и W_l^1 , соответственно. Но эти кривые не пересекаются, как куски «устойчивых многообразий» точек p_0 и p_1 . Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Для $H \in \mathcal{C}$ и $n > L$ обозначим через $\mathcal{L}_n(H)$ отображение, полученное из H линеаризацией на всех отрезках уровня n .

Предложение 4.6.6. Пусть $k > L$, а $H \in \mathcal{C}$. Тогда для любого $l \in (L, k]$ у H и $\mathcal{L}_k(H)$ одинаковые полоски уровня l , и $W_k(\mathcal{L}_k(H)) = W_k(H)$.

Доказательство. Поскольку внутренности полосок уровня k не пересекают $W_k(H)$, имеем $H|_{W_k(H)} = \mathcal{L}_k(H)|_{W_k(H)}$. Поскольку множество $W_k(H)$ — это два куска локальных «устойчивых многообразий» двух неподвижных точек подковы, и потому определяется лишь динамикой на нем самом, $W_k(H) = W_k(\mathcal{L}_k(H))$. Так как $W_l(H) \subset W_k(H)$, аналогично получаем $W_l(H) = W_l(\mathcal{L}_k(H))$. Из этого и из сохранения вертикального слоения следует, что $H^{-l}(UK) = \mathcal{L}_k(H)^{-l}(UK)$. Поэтому у $\mathcal{L}_k(H)$ те же полоски уровня l , что и у H . $\square$

Примерно горизонтальные полосы

Мы докажем, что для отображений F_i , построенных в начале параграфа 4.6.3, все F_i -полоски будут *примерно горизонтальными* в следующем смысле:

Определение 22. Рассмотрим координаты (x, y) на R : ось y вертикальна, а ось

x горизонтальна. Рассмотрим две C^1 -гладкие функции $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, такие что для всех x

- $(x, \varphi_1(x)) \in R, (x, \varphi_2(x)) \in R$;
- $|\varphi_1'(x)| < 1, |\varphi_2'(x)| < 1$;
- $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$.

Примерно горизонтальной полосой называется множество всех точек из R , лежащих между графиками этих функций. Отрезки $x \times [\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ называются *вертикальными отрезками* этой полосы.

Рассмотрим примерно горизонтальную полосу Π . Для гладких отображений $G, H : \Pi \rightarrow \mathbb{T}^2$ определим

$$\text{dist}_{\Pi}(G, H) = \sup_{x \in \Pi} \|dG(x) - dH(x)\|.$$

Для $H \in \mathcal{C}$ обозначим через $\mathcal{L}_{\Pi}(H) : \Pi \rightarrow H(\Pi)$ отображение, получающееся после линеаризации H на всех вертикальных отрезках полосы Π . Для примерно горизонтальной полосы Π и для $H \in \mathcal{C}^1$ мы можем оценить, насколько $\mathcal{L}_{\Pi}(H)$ близко к H :

Лемма 4.6.7. Рассмотрим любой диффеоморфизм $F_0 \in \mathcal{C}^1$ и любую примерно горизонтальную полосу Π . Пусть для некоторого $\delta > 0$ для любых точек $p, q \in \Pi$, лежащих на одном вертикальном отрезке, выполнено $\|dF_0(p) - dF_0(q)\| < \delta$. Тогда $\text{dist}_{\Pi}(F_0, \mathcal{L}_{\Pi}(F_0)) < \sqrt{5}\delta$.

Эта лемма будет доказана в параграфе 4.8.

Следствие 4.6.8. Для любых $F_0 \in \mathcal{C}^1$ и $\delta > 0$, для любой достаточно узкой примерно горизонтальной полосы Π (в частности, для H -полосы достаточно большого уровня для произвольного $H \in \mathcal{C}$) выполнено $\text{dist}_{C^1}(F_0|_{\Pi}, \mathcal{L}_{\Pi}(F_0)) < \delta$.

Доказательство. Из того, что полоса узкая, следует, что производная dF_0 на ней колеблется мало в силу равномерной непрерывности, так что применима предыдущая лемма (с заменой δ на $\delta/2\sqrt{5}$), которая дает близость dF_0 и $d\mathcal{L}_\Pi(F_0)$. Кроме того, C^0 -близость следует из того, что полосу можно сделать очень узкой. В итоге это даёт искомую C^1 -близость. $\square$

Индукция

По $F_0 \in \mathcal{C}^1$ и $N > L$ в начале части 4.6.3 мы определили последовательность $(F_i)_{i=N}^\infty$ следующим образом: $F_N = F_0$, и $F_{i+1} = \mathcal{L}_{i+1}(F_i)$ для $i \geq N$. Для $k > N$ и $H \in \mathcal{C}$ назовем H -полоску уровня k *зависимой*, если она содержится внутри какой-то H -полоски уровня от $N+1$ до $k-1$. В противном случае будем называть полоску *независимой*. По предложению 4.6.5 внутренности различных независимых полосок не пересекаются.

Предложение 4.6.9. Для любого $F_0 \in \mathcal{C}^1$, такого что $\text{dist}_{C^1}(F_0, F_{init}) < \delta_{init}$, найдется число $N_0 \in \mathbb{N}$, такое что для любого $N > N_0$ для построенной выше последовательности $(F_i)_{i=N}^\infty$ при любом $i \geq N$:

1. $F_i \in \mathcal{C}$;
2. У F_i и F_{i-1} одинаковые полоски уровней от $N+1$ до i ;
3. $F_i = F_0$ вне (конечного) объединения $\bigsqcup_j \Pi_j$ всех независимых F_i -полосок уровней от $N+1$ до i ;
4. Для любого j имеем $F_i|_{\Pi_j} = \mathcal{L}_{\Pi_j}(F_0)$;
5. Для любого j ограничение F_i на Π_j гладко и δ_{init} -близко к F_{init} в смысле dist_{Π_j} ;
6. Для любого $m \geq 0$ кривые $W_m^0(F_i)$ и $W_m^1(F_i)$ гладки, и касательные вектора к ним лежат в конусах C_H (следовательно, для любого $m > N$ все F_i -полоски уровня m примерно горизонтальны).

Доказательство. Выберем $N_0 > L$ таким, что для любого $n > N_0$ для нашего F_0 и любого отображения $H \in \mathcal{C}$ для любой H -полоски Π уровня n выполнено

$$\text{dist}_{\Pi}(\mathcal{L}_{\Pi}(F_0), F_{init}) < \delta_{init}. \quad (4.6)$$

Докажем, что это можно сделать. Так как $\text{dist}_{C^1}(F_0, F_{init}) < \delta_{init}$, имеем $\text{dist}_{\Pi}(F_0, F_{init}) < \delta_{init}$. Определим высоту полоски как максимальную длину ее вертикальных отрезков. Выберем h так, чтобы для любой примерно горизонтальной полоски Π высоты не больше h было выполнено $\text{dist}_{\Pi}(\mathcal{L}_{\Pi}(F_0), F_0) < \delta_{init} - \text{dist}_{\Pi}(F_0, F_{init})$. Тогда по неравенству треугольника для любой такой полосы получаем (4.6). Осталось выбрать N_0 таким, что для любого $n > N_0$ высота любой n -полоски Π любого отображения $H \in \mathcal{C}$ была меньше h . Это можно сделать по свойству 5 класса $\mathcal{C}$.

Теперь докажем нужные свойства индукцией по i . При $i = N$ имеем $F_N = F_0$, и полос Π_j нет вообще. Поэтому нужно проверить лишь часть про конуса свойства 6. Кривые $W_0^{0,1}$ строго горизонтальны. Поскольку $dF_0^{-1}(C_H) \subset C_H$, касательные вектора к кривым $W_m^{0,1} = F_0^{-m}(W_0^{0,1})$ лежат в конусах C_H .

Пусть для какого-то $i \geq N$ нужные свойства доказаны. Докажем их для $i + 1$. Отображение F_{i+1} получается из F_i линеаризацией на всех F_i -полосках уровня $i + 1$. Поскольку на всех зависимых полосках ограничение F_i на вертикальные отрезки уже линейно, линеаризация на этих полосках не меняет отображение. Поэтому F_{i+1} получается из F_i линеаризацией на всех независимых F_i -полосках уровня $i + 1$. Поскольку на вертикальных границах этих полосок отображение уже линейно по свойству 4 класса $\mathcal{C}$ (ведь эти границы лежат в $\partial_v R$), линеаризация не создаст разрывов на вертикальных границах полосок, и отображение F_{i+1} будет гомеоморфизмом.

Из выбора N_0 (неравенство (4.6)) следует, что на любой независимой F_i -полоске уровня $i + 1$ отображение F_{i+1} будет δ_{init} -близко к F_{init} в C^1 . Поэтому из (4.1) (см. параграф 4.4) следует, что внутри каждой из этих полосок гомеоморфизм

F_{i+1} будет L -билипшицев. Вне объединения этих полосок F_{i+1} совпадает с F_i и билипшицев по предположению индукции. Билипшицевость на всем $\mathbb{T}^2$ теперь нетрудно получить при помощи неравенства треугольника. Отметим, что в этом рассуждении границу рассматриваемых полосок можно включить как в сами полоски, так и в дополнение до них.

Проверим, что F_{i+1} удовлетворяет остальным свойствам класса $\mathcal{C}$, предполагая, что им удовлетворяет F_i .

1. $F_{i+1}|_S = F_{init}|_S$.

Заметим, что F_i -полоски уровня $i + 1$ не пересекают S . Действительно, $F_i(S) \subset S$, так что $S \subset F_i^{-(i+1)}(S)$, но поскольку $S \subset UK$, имеем $S \subset F_i^{-(i+1)}(S) \subset F_i^{-(i+1)}(UK)$, а полоски по определению лежат в дополнении к последнему множеству. Поэтому $F_{i+1}|_S = F_i|_S = F_{init}|_S$.

2. F_{i+1} сохраняет вертикальное слоение.

Это следует из того, что линеаризация на вертикальных отрезках не меняет вертикальные слои.

3. H является L -билипшицевым.

Это уже доказано выше.

4. $F_{i+1} = F_{Lin}$ вне R .

Так как все полоски лежат в R , вне R получаем $F_{i+1} = F_i = F_{Lin}$.

5. Ограничение F_{i+1} на любой вертикальный слой растягивает хотя бы в 1.1 раз и не более чем в L раз.

При линеаризации F_i на вертикальном отрезке J отображение заменяется на линейное, растягивающее во столько же раз, во сколько F_i растягивает отрезок J . Поэтому максимальное растяжение не увеличивается, а минимальное не уменьшается.

$$6. F_{i+1}(\text{int } UK) \cap \text{int } UK = \text{int } UV_0 \cup \text{int } UV_1.$$

Поскольку $\partial_h UK = W_0 \subset W_{i+1}$, множество $\partial_h UK$ не пересекает внутренности F_i -полосок уровня $i + 1$. Следовательно, $F_{i+1}(\partial_h UK) = F_i(\partial_h UK)$. Так как UK состоит из отрезков вертикальных слоев между своей верхней и нижней границей и образы этих вертикальных слоев тоже являются вертикальными слоями, получаем $F_{i+1}(UK) = F_i(UK)$. Поэтому $F_{i+1}(\text{int } UK) \cap \text{int } UK = F_i(\text{int } UK) \cap \text{int } UK = \text{int } UV_0 \cup \text{int } UV_1$. Последнее равенство имеет место по предположению индукции.

$$7. F_{i+1}^{-L} = F_{init}^{-L} \text{ на } \partial_h UK.$$

$F_i^{-L}(\partial_h UK) = W_L(F_i) \subset W_{i+1}(F_i)$. Это множество не пересекает внутренности F_i -полосок уровня $i + 1$, так что $F_{i+1} = F_i$ на $W_L(F_i)$. Так как W_L инвариантно вперед, $F_{i+1}^L = F_i^L$ в ограничении на него. Значит, $F_{i+1}^L(W_L) = \partial_h UK$, и $F_{i+1}^{-L} = F_i^{-L} = F_{init}^{-L}$ на $\partial_h UK$.

Итак, мы доказали, что $F_{i+1} \in \mathcal{C}$. Докажем остальные пункты.

$$2. \text{ У } F_i \text{ и } F_{i+1} \text{ одинаковые полосы уровней от } N + 1 \text{ до } i + 1.$$

Это следует из предложения 4.6.6.

$$3. F_{i+1} = F_0 \text{ вне (конечного) объединения } \bigsqcup_j \Pi_j \text{ всех независимых } F_i\text{-полосок уровней от } N + 1 \text{ до } i;$$

По предположению индукции вне объединения независимых полосок уровней от $N + 1$ до i имеем $F_i = F_0$. Так как F_{i+1} получается линеаризацией F_i на независимых F_i -полосках уровня $i + 1$, из этого следует нужное утверждение.

$$4. \text{ Для любого } j \text{ имеем } F_{i+1}|_{\Pi_j} = \mathcal{L}_{\Pi_j}(F_0);$$

Для полосок уровней от $N + 1$ до i это следует из предположения индукции. Если Π_j — независимая полоска уровня $i + 1$, то $F_i|_{\Pi_j} = F_0|_{\Pi_j}$, так что $F_{i+1}|_{\Pi_j} = \mathcal{L}_{\Pi_j}(F_i) = \mathcal{L}_{\Pi_j}(F_0)$.

5. Для любого j ограничение F_{i+1} на Π_j гладко и δ_{init} -близко к F_{init} в смысле dist_{Π_j} ;

Это следует из предыдущего пункта (пункта 4) и неравенства (4.6).

6. Для любого $m \geq 0$ кривые $W_m^0(F_i)$ и $W_m^1(F_i)$ гладки и касательные вектора к ним лежат в конусах C_H (следовательно, для любого $m > L$ все F_i -полоски уровня m примерно горизонтальны). Поскольку W_{i+1} содержит горизонтальные границы всех полос Π_j , отображение F_{i+1} гладко на $\mathbb{T}^2 \setminus W_{i+1}$ (а также в четырех граничных точках кривых W_{i+1}^0 и W_{i+1}^1).

По предложению 4.6.6 $W_{i+1}^{0,1}(F_{i+1}) = W_{i+1}^{0,1}(F_i)$. По предположению индукции эти кривые гладки, и касательные вектора к ним лежат в конусах C_H .

Ясно, что

$$W_{i+2}^0 \setminus W_{i+1}^0 = F_{i+1}^{-1}(W_{i+1}^0 \setminus W_i^0). \quad (4.7)$$

Так как F_{i+1} гладко на $W_{i+2}^0 \setminus W_{i+1}^0$, отображение F_{i+1}^{-1} гладко на $W_{i+1}^0 \setminus W_i^0$. Поэтому из (4.7) получаем, что $W_{i+2}^0 \setminus W_{i+1}^0$ — объединение двух гладких кривых. Так как F_{i+1} гладко в двух граничных точках a и b кривой W_{i+1}^0 (которые граничат с $W_{i+2}^0 \setminus W_{i+1}^0$), мы можем точно так же доказать гладкость кривых, получающихся из $W_{i+2}^0 \setminus W_{i+1}^0$ добавлением двух маленьких кусочков W_{i+1}^0 рядом с a и b . Следовательно, $W_{i+2}^0 = (W_{i+2}^0 \setminus W_{i+1}^0) \cup W_{i+1}^0$ — гладкая кривая.

По пунктам 3 и 5 в любой точке $x \in \mathbb{T}^2 \setminus W_{i+1}^0$ дифференциал $d_x F_{i+1}$ будет δ_{init} -близок к $d_x F_{init}$. По (4.1) имеем $d_x F_{i+1}(C_H(x)) \supset C_H(F_{i+1}(x))$. Следовательно, в любой точке $y \in W_{i+1}^0 \setminus W_i^0$ имеем $d_y F_{i+1}^{-1}(C_H(y)) \subset C_H(F_{i+1}^{-1}(y))$. Пользуясь (4.7) и тем, что касательные вектора к W_{i+1}^0 лежат в конусах C_H , получаем, что касательные вектора к $W_{i+2}^0 \setminus W_{i+1}^0$ тоже лежат в конусах C_H .

Мы доказали оба заявленных свойства для кривой W_{i+2}^0 , пользуясь эти-

ми свойствами для W_{i+1}^0 . Переход от $i + 2$ к $i + 3$ и т.д. осуществляется аналогично. Точно так же эти свойства доказываются и для W_m^1 .

□

Построение F_L

Выведем из предложения 4.6.9 следующее следствие.

Следствие 4.6.10. Для любого $i > N$ отображение F_i линейно на всех отрезках уровней $N + 1, \dots, i$. Кроме того, для любого $j > i$ полосы этих уровней у F_i и F_j одинаковы, и F_j получается из F_i линеаризацией на всех независимых F_j -полосках уровней от $i + 1$ до j .

Доказательство. По пункту 4 отображение F_i линейно на всех независимых полосках уровней $N + 1, \dots, i$. Любая зависимая полоска лежит внутри какой-то независимой, поэтому на ней F_i тоже линейно. По предложению 4.6.4 любой отрезок уровня i либо лежит в полоске уровня i , либо внутри R . Поэтому F_i линейно на нем.

Второе утверждение сразу следует из пункта 2 предложения 4.6.9, третье — из первого утверждения и пунктов 3 и 4 того же предложения.

□

Предложение 4.6.11. Для любого $F_0 \in \mathcal{C}^1$, такого что $\text{dist}_{C^1}(F_0, F_{init}) < \delta_{init}$, найдется число $N_0 > L$, такое что для любого $N > N_0$ можно построить такой гомеоморфизм F_L , что

1. $F_L \in \mathcal{C}$;
2. $F_L = F_0$ вне (счетного) объединения $\bigsqcup_j \Pi_j$ всех независимых F_L -полосок уровней $N + 1, N + 2, \dots$;
3. Для любого j имеем $F_L|_{\Pi_j} = \mathcal{L}_{\Pi_j}(F_0)$;

4. Для любого j ограничение F_L на Π_j гладко и δ_{init} -близко к F_{init} в смысле dist_{Π_j} ;
5. Для любого $m > L$ все F_L -полоски уровня m примерно горизонтальны;
6. F_L линеен на всех своих отрезках уровня больше N .

Доказательство. Рассмотрим число N_0 из предложения 4.6.9. Для произвольного $N > N_0$ рассмотрим последовательность $(F_i)_{i=1}^{\infty}$, введенную в начале параграфа 4.6.3. Докажем, что эта последовательность фундаментальна в пространстве $\mathcal{C}$ с метрикой $\text{dist}_{\text{Homeo}}(F, G) = \max(d_{C_0}(F, G), d_{C_0}(F^{-1}, G^{-1}))$.

Рассмотрим два гомеоморфизма F_k и F_l для $l > k$. По следствию 4.6.9 F_k и F_L совпадают вне объединения всех независимых F_l -полос уровней от $k + 1$ до l . Поскольку на границах этих полос $F_k = F_l = F_0$, мы видим, что $\text{dist}_{C^0}(F_k, F_l)$ ограничено максимальной вертикальной шириной F_0 -образов этих полосок. Аналогично, $\text{dist}_{C^0}(F_k^{-1}, F_l^{-1})$ ограничено максимальной вертикальной шириной самих этих полосок. Если k достаточно велико, все эти полосы очень узки по вертикали по свойству 5 класса $\mathcal{C}$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно найти число n , такое что при $l > k > n$ гомеоморфизмы F_k и F_l будут ε -близки в нашей метрике.

Множество $\mathcal{C}$ замкнуто в $\text{Homeo}(\mathbb{T}^2)$, так как каждое из условий в его определении задает замкнутое множество. Поэтому $\mathcal{C}$ является полным метрическим пространством, как замкнутое подмножество полного метрического пространства $\text{Homeo}(\mathbb{T}^2)$. Следовательно, последовательность $(F_i)_{i=1}^{\infty}$ сходится. Возьмем ее предел в качестве F_L , тогда $F_L \in \mathcal{C}$. Так как

Свойства 2 – 6 отображения F_L сразу следуют из предложения 4.6.9 и следствия 4.6.10. Здесь стоит отметить, что на границах независимых F_L -полос уровней больше N все отображения F_i совпадают с F_0 , а потому и F_L тоже. $\square$

4.6.4. Сглаживание

Теперь мы наконец можем доказать лемму 4.4.3. Для данного $F_0 \in \mathcal{C}^1$ и произвольного $\delta > 0$ мы построим такой диффеоморфизм $F \in A_\varepsilon \cap \mathcal{C}^1$, что $\text{dist}_{C^1}(F, F_0) < C\delta$, где константа C не зависит от F_0 . Можно считать, что $\text{dist}_{C^1}(F_0, F_{init}) < \delta_{init}$: если $\text{dist}_{C^1}(F_0, F_{init}) = \delta_{init}$, то лемма 4.6.9 не работает, и мы заменим F_0 на другое отображение $\tilde{F}_0$, такое что $\text{dist}_{C^1}(\tilde{F}_0, F_{init}) < \delta_{init}$, $\text{dist}_{C^1}(F_0, \tilde{F}_0) < \delta/2$, и построим F для $\tilde{F}_0$, заменив δ на $\delta/2$.

Рассмотрим N_0 из предложения 4.6.11. По следствию 4.6.8 мы можем выбрать большое $N > N_0$ так, что для отображения F_L из предложения 4.6.11 верно следующее: ограничения F_0 и F_L на любую F_L -полосу уровня больше N будут δ -близки в C^1 .

Достаточно доказать, что сколь угодно близко к отображению F_L в Номео-топологии найдется такое отображение $F \in \mathcal{C}^1$, что $\text{dist}_{C^1}(F, F_0) < C\delta$. После этого доказательство леммы 4.4.3 получается так. По предложению 4.6.1, $\mu(B(F_L)) = 1$. Следовательно, $F_L \in A_\varepsilon$. Так как по лемме 4.4.2 множество A_ε открыто в C^0 , а F является C^0 -близким к F_L , имеем $F \in A_\varepsilon$. Так как F близко к F_0 в C^1 , это завершит доказательство леммы 4.4.3.

Осталось построить F , а чтобы сделать это, нам потребуется следующая лемма.

Лемма 4.6.12. Найдется такая универсальная константа $C > 0$, что выполнено следующее. Возьмем любое $F_0 \in \mathcal{C}^1$ и любую примерно горизонтальную полосу Π . Тогда для любого $\gamma > 0$ найдется такое $F \in C^1(\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2)$, что

- $F = F_0$ вне Π ;
- $\text{dist}_{C^1}(F_0|_\Pi, F|_\Pi) \leq C \cdot \text{dist}_{C^1}(F_0|_\Pi, \mathcal{L}_\Pi(F_0))$;
- $\text{dist}_{C^0}(\mathcal{L}_\Pi(F_0), F|_\Pi) < \gamma$;
- F сохраняет вертикальное слоение.

Доказательство этой леммы вынесено в параграф 4.8. Вернемся к доказательству леммы 4.4.3. Пусть $\gamma > 0$ мало настолько, что γ -окрестность отображения F_L в $\mathcal{C}$ в Номео-топологии содержится в A_ε . Поскольку ширина F_L -полос стремится к нулю при возрастании уровня, найдется такое $N_1 > N$, что вне объединения всех F_L -полос уровней $N + 1, \dots, N_1 - 1$ отображения F_L и F_0 являются γ -близкими в Номео-топологии. Если теперь мы изменим отображение F_0 так, что в объединении этих полос измененное отображение тоже будет близко к F_L , то такое отображение будет лежать в A_ε .

Давайте изменим отображение F_0 следующим образом: для каждой независимой F_L -полоски Π уровня между $N + 1$ и N_1 заменим F_0 внутри этой полоски на отображение F из леммы 4.6.12. Обозначим полученное отображение тоже через F ; тогда $F = F_0$ вне упомянутых полос по построению. Так как независимые полосы не пересекаются,

- F является C^1 -гладким;
- $\text{dist}_{C^1}(F_0, F) \leq C \text{dist}_{C^1}(F_0, F_L) < C\delta$ (в силу выбора N при построении F_0);
- $\text{dist}_{C^0}(F, F_L) < \gamma$.

Для достаточно малого δ второе свойство означает, что F — диффеоморфизм (так как F_0 — диффеоморфизм). Напомним, что $\text{dist}_{C^1}(F_0, F_{init}) < \delta_{init}$. Так что для малого δ имеем $\text{dist}_{C^1}(F, F_{init}) < \delta_{init}$. В силу выбора δ_{init} отображение F удовлетворяет свойствам 3 и 5 класса $\mathcal{C}$: свойство 3 следует из (4.1), а из свойства 6 предложения 4.3.3 и того, что $\delta_{init} < 0.1$, получаем, что F растягивает как минимум в 1.1 раз в ограничении на любой вертикальный отрезок, что вместе со свойством 3 дает свойство 5. Свойство 2 выполнено по лемме 4.6.12. Рассуждая как в доказательстве предложения 4.6.9, можно проверить, что F удовлетворяет всем остальным свойствам $\mathcal{C}$. Значит, $F \in \mathcal{C}^1$. Доказательство леммы 4.4.3 окончено.

4.7. Существование F_{init} .

В этом параграфе мы докажем предложение 4.3.3. Для удобства напомним формулировку этого утверждения.

Предложение 4.3.3. Для достаточно большого N_{init} существует C^1 -гладкий диффеоморфизм Аносова $F_{init} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ такой, что:

1. $F_{init} = F_{Bow}$ на $UH_0 \cup UH_1$. Таким образом, F_{init} , как и F_{Bow} , имеет подкову $\mathcal{H}$.
2. $F_{init} = F_{Lin}$ вне $\tilde{R}$.
3. $F_{init}(UH_i) = UV_i$.
4. $F_{init}(UK) \cap UK = UV_0 \cup UV_1$.
5. неустойчивые слои F_{init} строго вертикальны.
6. F_{init} растягивает вертикальные слои хотя бы в 1.2 раза.
7. Для любой точки $x \in \mathbb{T}^2$ образ внутренности конуса $C_H(x)$ под действием dF_{init} покрывает замыкание конуса $C_H(F_{init}(x))$.

4.7.1. Отображение Боуэна

На произвольном отрезке можно построить канторово множество по следующей процедуре. На первом шаге выбросим из отрезка интервал длины a_1 так, что его центр совпадает с центром всего отрезка. На втором шаге из каждого из оставшихся двух отрезков выбросим два одинаковых интервала общей длины a_2 так, что центр каждого интервала совпадает с центром соответствующего отрезка. Имея последовательность $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$, продолжим процесс и получим канторово множество. Оно называется *симметрично вложенным канторовым множеством*. Мы будем рассматривать только такие множества, для

которых, во-первых, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ меньше длины отрезка (поэтому мера канторова множества будет положительной), а во-вторых, последовательность a_i убывает, и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/a_{n+1} = 1$. Например, можно взять $a_n = \frac{C}{n^2}$. Назовем симметрично вложенные канторовы множества с этими двумя свойствами *боуэновскими канторовыми множествами*. Нам понадобится следующее элементарное свойство таких множеств:

Предложение 4.7.1. Пусть $\mathcal{K}$ — боуэновское множество. Тогда ограничение $\text{Leb}_{\mathcal{K}}$ меры Лебега на $\mathcal{K}$, нормированное до вероятностной меры, равно образу ν меры Бернулли на $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ при естественном кодировании $\chi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{K}$.

Доказательство. Для любого конечного слова из нулей и единиц w пусть $I_w \subset \mathcal{K}$ — множество точек множества $\mathcal{K}$, коды которых начинаются с w . Так как $\mathcal{K}$ симметрично вложено, $\text{Leb}_{\mathcal{K}}(I_w) = 2^{-|w|}$. Ясно, что $\nu(I_w)$ тоже $2^{-|w|}$. Так как набор множеств I_w порождает борелевскую σ -алгебру на $\mathcal{K}$, это означает, что $\text{Leb}_{\mathcal{K}} = \nu$. $\square$

Рассмотрим боуэновское канторовское множество на $[a, b]$. Обозначим первый выброшенный интервал (x_1, y_1) . Наше канторово множество естественно распадается на две половины — одну левее отрезка (x_1, y_1) , другую правее его. Определим *отображение Боуэна* из $[a, x_1]$ в $[a, b]$ следующими условиями: оно C^1 -гладкое, отображает левую половину канторова множества во всё канторово множество, а интервалы, выброшенные при построении симметричного канторова множества на n -том шаге ($n > 1$) — в интервалы, выброшенные на $(n-1)$ -м шаге, с сохранением порядка и ориентации (заметим, что их одинаковое число, и, кроме того, задав отображение на концах интервалов, мы можем полностью доопределить его на канторовом множестве по непрерывности, так как концы интервалов плотны в канторовом множестве). Аналогично определяется отображение Боуэна из $[y_1, b]$ в $[a, b]$.

Из конструкции примера толстой подковы в [15] легко извлечь следующий факт:

Предложение 4.7.2. Для любого боуэновского канторова множества существует отображение Боуэна, причем производная во всех точках канторова множества равна 2. Это отображение можно выбрать таким, что во всех остальных точках производная больше 2.

4.7.2. Отображение F_{Bow}

В параграфе 4.3 мы кратко описали отображение F_{Bow} на прямоугольниках UH_0 и UH_1 . В этом параграфе мы опишем его подробно. Для построения F_{init} нам будет удобно продлить F_{Bow} на весь $\mathbb{T}^2$.

Сначала определим горизонтальную полосу RH_0 , такую что $UH_0 \subset RH_0 \subset \tilde{R}$. Для этого сперва немного продлим UH_0 вверх и вниз — получится полоса $\tilde{R}H_0 \subset \tilde{R}$. Вертикальный зазор между $\tilde{R}H_0$ и UH_0 должен быть меньше κ , где число κ будет выбрано в параграфе 4.7.4 ниже. Чтобы получить RH_0 , продлим $\tilde{R}H_0$ вправо и влево до вертикальной границы $\tilde{R}$. Аналогично определим полосы $\tilde{R}H_1 \supset UH_1$ и $RH_1 \supset \tilde{R}H_1$.

Отображение F_{Bow} будет совпадать с F_{Lin} вне $RH_0 \cup RH_1$, а внутри этих двух полосок F_{Bow} получается из F_{Lin} хирургией. Определим F_{Bow} внутри RH_0 — внутри RH_1 конструкция аналогична. Отображение F_{Lin} в ограничении на RH_0 является прямым произведением аффинного сжатия по горизонтали и аффинного растяжения f_L по вертикали. Отображение F_{Bow} в ограничении на RH_0 будет прямым произведением всё того же аффинного сжатия по горизонтали и нелинейного растяжения f_{Bow} по вертикали, которое мы сейчас построим.

Обозначим через Q_0 и Q_1 проекции UH_0 и UH_1 на вертикальную ось, а через Q — выпуклую оболочку $Q_0 \cup Q_1$. Пусть $I_1 = Q \setminus (Q_0 \cup Q_1)$. Зададимся боуэновским канторовым множеством положительной меры C_{thick} на Q , у которого выброшенный интервал первого шага — в точности I_1 . Тогда, в силу предыдущего пункта, на отрезке Q_0 существует отображение Боуэна f_{Bow} , устроенное, как описано выше. Пусть $RQ_0 \supset Q_0$ — проекция RH_0 на вертикальную ось. Продолжим отображение f_{Bow} на RQ_0 так, чтобы вблизи границы

RQ_0 оно совпадало с f_L . За счет этого F_{Bow} будет гладким на $\partial_v RH_0$. Поскольку $f'_L > 2$, можно считать, что $f'_{Bow} \leq 2$ на RQ_0 .

Из конструкции сразу следует, что

- $F_{Bow}(UH_i) = F_{Lin}(UH_i)$ и $F_{Bow}(RH_i) = F_{Lin}(RH_i)$ для $i = 0, 1$,
- F_{Bow} — биекция,
- у F_{Bow} есть разрывы на $\partial_h RH_0 \cup \partial_h RH_1$, а в остальных точках F_{Bow} гладко.

4.7.3. Построение F_{init}

Отображение F_{Bow} почти подходит на роль F_{init} , но оно не гладко. Отображение F_{init} получится сглаживанием F_{Bow} внутри $(RH_0 \setminus \tilde{R}H_0) \cup (RH_1 \setminus \tilde{R}H_1)$ (то есть вблизи вертикальных границ полосок, на которых проводилась хирургия при построении F_{Bow}).

Введем на $\tilde{R}$ координаты Oxy : ось x горизонтальна, а ось y вертикальна. Выберем гладкую функцию «шапочка» $\varphi(x)$ так, что она равна нулю на горизонтальной проекции UK , единице в окрестности границы горизонтальной проекции $\tilde{R}$, и $|\varphi'| < 200$. Выполнения последнего условия можно добиться в силу того, что горизонтальная проекция $\tilde{R} \setminus UK$ состоит из двух отрезков длины 0.01.

Зададим отображение F_{init} внутри $RH_0 \cup RH_1$ формулой

$$F_{init}(x, y) = \varphi(x)F_{Lin}(x, y) + (1 - \varphi(x))F_{Bow}(x, y), \quad (4.8)$$

а вне этого множества положим $F_{init} = F_{Lin}$. Внутри $RH_0 \cup RH_1$ это отображение гладко, поскольку там гладки F_{Bow} и F_{Lin} , а φ гладко на своей области определения. На границе множества $RH_0 \cup RH_1$ имеем $F_{Bow} = F_{Lin}$, так что $F_{init} = F_{Lin}$ и потому тоже гладко. Отображения F_{Bow} и F_{Lin} оба монотонно переводят куски вертикальных слоев, высеченные $\tilde{R}$, в куски вертикальных слоев, высеченные $F_{Lin}(\tilde{R})$. Поэтому F_{init} биективно в ограничении на любой

такой слой (как выпуклая комбинация ограничений F_{Bow} и F_{Lin}), и, следовательно, в ограничении на $\tilde{R}$. Так как вне $\tilde{R}$ отображение F_{init} совпадает с F_{Lin} , оно биективно на всем $\mathbb{T}^2$.

В параграфе 4.7.4 ниже мы проверим, что F_{init} является диффеоморфизмом Аносова, а также докажем свойство 7 предложения 4.3.3. Свойство 4 выполнено потому, что по построению $F_{Lin}(UK) = F_{Bow}(UK) = F_{init}(UK)$. Остальные заявленные в 4.3.3 свойства сразу следуют из построения F_{init} .

4.7.4. F_{init} — диффеоморфизм Аносова

Нам понадобится следующее элементарное утверждение.

Предложение 4.7.3. Найдутся числа $C_{cone}, \alpha, \beta > 0$ и $\gamma \in (0, 1)$, такие что для любых двух 2×2 матриц A и B , таких что $\|B\| < C_{cone}$, $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$, $a_1 \in (0, 0.5)$, $a_2 \geq 2$ их сумма $A + B$ невырождена, и для конусов $C_{\alpha, H} = \{(x, y) \mid |y| \leq \alpha|x|\}$ и $C_{\beta, V} = \{(x, y) \mid |x| \leq \beta|y|\}$ выполнено следующее условие конусов:

- $(A + B)^{-1}C_{\alpha, H} \subset \text{Int } C_{\alpha, H} \cup \{0\}$,
- $(A + B)C_{\beta, V} \subset \text{Int } C_{\beta, V} \cup \{0\}$,
- $\|A + B|_{C_{\alpha, H}}\| < \gamma$, $\|(A + B)^{-1}|_{C_{\alpha, H}}\| < \gamma$.

Положим $\psi(x, y) = \varphi(x)$ внутри $\tilde{R}$ и $\psi(x, y) = 1$ вне $\tilde{R}$. Тогда получим по формуле Лейбница

$$dF_{init} = \psi dF_{Lin} + (1 - \psi)dF_{Bow} + (F_{Lin} - F_{Bow})d\psi.$$

Тут $d\psi$ это вектор-строка, $F_{Lin} - F_{Bow}$ это вектор-столбец, поэтому их произведение это матрица 2×2 .

Применим предложение 4.7.3 к $A = \psi dF_{Lin} + (1 - \psi)dF_{Bow}$, $B = (F_{Lin} - F_{Bow})d\psi$.

У F_{Lin} и F_{Bow} вертикальное и горизонтальное направление собственны, по горизонтали сжатие более чем в два раза, а по вертикали — растяжение хотя бы в два раза. Поэтому то же самое верно и для их выпуклой комбинации A .

Покажем, что при большом N_{init} имеем $\|B\| < C_{cone}$. По определению, $B = (F_{Lin} - F_{Bow})d\psi$. Множитель $d\psi$ ограничен по построению ψ : ψ не зависит от y и $|\psi'_x| = |\varphi'| < 200$, — так что достаточно оценить разность $F_{Lin} - F_{Bow}$. Отображения F_{Lin} и F_{Bow} сохраняют вертикальное слоение и одинаково переставляет вертикальные слои. Так как они совпадают на $\partial_h RH_i$, множитель $F_{Lin} - F_{Bow}$ ограничен вертикальным размером (т.е. диаметром проекции на вертикальную ось) $F_{Lin}(RH_i)$. Так как $F_{Lin}(UH_i) = UV_i$, вертикальный размер $F_{Lin}(UH_i)$ равен вертикальному размеру K . Если число κ , введенное в параграфе 4.7.2 (это «зазор» по вертикали между UH_i и RH_i) достаточно мало, вертикальный размер $F_{Lin}(RH_i)$ меньше удвоенного вертикального размера K . Так как при большом N_{init} прямоугольник K очень мал, получаем в итоге $\|B\| < C_{cone}$.

Поэтому можно применить предложение 4.7.3 и получить, что для любой точки $x \in \mathbb{T}^2$ дифференциал $d_x F_{init}$ обратим (а значит, F_{init} — диффеоморфизм) и, более того, выполнено условие конусов. Последнее означает, что F_{init} — диффеоморфизм Аносова.

4.8. Доказательства двух технических лемм

В этой части мы докажем две сформулированные выше леммы.

Лемма 4.6.7. Рассмотрим любой гомеоморфизм $F_0 \in \mathcal{C}^1$ и любую примерно горизонтальную полосу Π . Пусть для некоторого $\delta > 0$ для любых точек $p, q \in \Pi$, лежащих на одном вертикальном отрезке, выполнено $\|dF_0(p) - dF_0(q)\| < \delta$. Тогда $\text{dist}_{C^1(\Pi)}(F_0, \mathcal{L}_\Pi(F_0)) < \sqrt{5}\delta$.

Доказательство. Обозначим $\mathcal{L}_\Pi(F_0)$ как F_L , а горизонтальные и вертикальные

компоненты F_0 как g_0 и f_0 соответственно:

$$F_0 : (x, y) \mapsto (g_0(x, y), f_0(x, y)).$$

Тогда для любых $p, q \in \Pi$, лежащих на одном вертикальном отрезке, имеем $\|df_0(p) - df_0(q)\| < \delta$. Через f_L обозначим вертикальную компоненту F_L . Поскольку горизонтальные компоненты F_0 и F_L равны,

$$\|dF_0(p) - dF_L(p)\| = \|df_0(p) - df_L(p)\|.$$

Обозначим через v и h вертикальное и горизонтальное единичные векторные поля в окрестности Π . Рассмотрим любое вертикальное сечение I полосы Π . Производная $\nabla_v(f_L)|_I$ постоянна и равна среднему значению $\nabla_v(f_0)$ на I . Поэтому для любого $p \in I$ имеем

$$|\nabla_v(f_0)(p) - \nabla_v(f_L)(p)| \leq \max_{q \in I} \|df_0(p) - df_0(q)\| < \delta. \quad (4.9)$$

Обозначим через a верхний конец отрезка I , а через $w \in T_a\mathbb{T}^2$ единичный вектор, касающийся границы полосы Π . Поскольку ограничения f_0 и f_L на $\partial_h\Pi$ совпадают, мы видим (линейно экстраполируя f_L вне Π), что $\nabla_w(f_L)(a) = \nabla_w(f_0)(a)$. Поскольку полоска примерно горизонтальна, можно записать $w = (c_v v + c_h h)(a)$, где $|c_h| > 1/\sqrt{2} > |c_v|$. Поэтому

$$c_h \nabla_h(f_L)(a) + c_v \nabla_v(f_L)(a) = \nabla_w(f_L)(a) = \nabla_w(f_0)(a) = c_h \nabla_h(f_0)(a) + c_v \nabla_v(f_0)(a).$$

Отсюда, пользуясь неравенством (4.9), получаем следующую оценку:

$$|\nabla_h(f_L)(a) - \nabla_h(f_0)(a)| = \frac{|c_v|}{|c_h|} |\nabla_v(f_L)(a) - \nabla_v(f_0)(a)| < \frac{|c_v|}{|c_h|} \delta < \delta.$$

Аналогичное неравенство выполнено и в нижнем конце b отрезка I . Рассмотрим

такое число s , что $\nabla_h(f_0)(z) \in (s - \delta/2, s + \delta/2)$ для любой точки $z \in I$. Тогда оба числа $\nabla_h(f_L)(a)$ и $\nabla_h(f_L)(b)$ лежат в $(s - 3\delta/2, s + 3\delta/2)$. Так как отображение f_L линейно на вертикальных отрезках, мы можем записать его как

$$f_L(x, y) = \alpha(x)y + \beta(x),$$

$$\nabla_h(f_L)(x, y) = \alpha'(x)y + \beta'(x).$$

Поэтому функция $\nabla_h(f_L)(x, y)$ линейна по y на I , и, следовательно, $\nabla_h(f_L)(I) \subset (s - 3\delta/2, s + 3\delta/2)$. Таким образом,

$$\nabla_h(f_0)(I) \subset (s - \delta/2, s + \delta/2), \quad \nabla_h(f_L)(I) \subset (s - 3\delta/2, s + 3\delta/2),$$

а значит, $|\nabla_h(f_0)(p) - \nabla_h(f_L)(p)| < 2\delta$. Используя (4.9), получаем необходимую оценку:

$$\|dF_0(p) - dF_L(p)\| = \|df_0(p) - df_L(p)\| < \sqrt{5}\delta.$$

□

Лемма 4.6.12. Для некоторой универсальной константы $C > 0$ выполнено следующее. Рассмотрим любой $F_0 \in \mathcal{C}^1$ и любую примерно горизонтальную полосу Π . Тогда для любого $\gamma > 0$ найдется такой $F \in C^1(\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2)$, что

- $F = F_0$ вне Π ;
- $\text{dist}_{C^1}(F_0|_{\Pi}, F|_{\Pi}) \leq C \cdot \text{dist}_{C^1}(F_0|_{\Pi}, \mathcal{L}_{\Pi}(F_0))$;
- $\text{dist}_{C^0}(\mathcal{L}_{\Pi}(F_0), F|_{\Pi}) < \gamma$;
- F сохраняет вертикальное слоение.

Доказательство. Рассмотрим сначала отображение $\mathcal{L}_{\Pi}(F_0)$. Во-первых, $F_0|_{\partial_h \Pi} = \mathcal{L}_{\Pi}(F_0)|_{\partial_h \Pi}$, поскольку $\mathcal{L}_{\Pi}(F_0)$ получается из F_0 линеаризацией на Π . Во-вторых, $F_0|_{\partial_v \Pi} = \mathcal{L}_{\Pi}(F_0)|_{\partial_v \Pi}$, потому что на $\partial_v \Pi$ отображение F_0 уже линейно. Поскольку наша полоса примерно горизонтальна, в координатах (x, y) на R ее граница

состоит из графиков двух гладких функций $\varphi_1, \varphi_2: \varphi_1(x) < \varphi_2(x)$. Рассмотрим функцию $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$, такую что $\rho(t) = 0$ для $t < 0$, $\rho(t) = 1$ для $t > 1$, и ρ монотонно возрастает на $[0, 1]$. Зафиксируем малое $\alpha > 0$ и определим отображение F на Π следующим образом:

$$F(x, y) = \rho\left(\frac{\varphi_2(x) - y}{\alpha}\right) \rho\left(\frac{y - \varphi_1(x)}{\alpha}\right) \mathcal{L}_\Pi(F_0) + \left(1 - \rho\left(\frac{\varphi_2(x) - y}{\alpha}\right) \rho\left(\frac{y - \varphi_1(x)}{\alpha}\right)\right) F_0$$

Ясно, что F сохраняет вертикальное слоение. Отображение $F|_{\overline{\Pi}}$, очевидно, C^1 -гладко и совпадает с F_0 на $\partial\Pi$. Если расстояние по вертикали от точки $(x, y) \in \Pi$ до $\partial_h\Pi$ больше, чем α , то $F(x, y) = \mathcal{L}_\Pi(F_0)(x, y)$.

Покажем, что $\text{dist}_{C^1(\Pi)}(F_0, F) \leq C \cdot \text{dist}_{C^1(\Pi)}(F_0, \mathcal{L}_\Pi(F_0))$. Пусть $\|dF_0 - d\mathcal{L}_\Pi(F_0)\| < \delta$ на Π ; здесь δ не обязательно мало. Начнем с оценки на разность производных по y отображений F_0 и F . Для краткости введем обозначения $\rho_1(x, y) = \rho\left(\frac{y - \varphi_1(x)}{\alpha}\right)$, $\rho_2(x, y) = \rho\left(\frac{\varphi_2(x) - y}{\alpha}\right)$. Вне Π положим $F = F_0$. Вне малой окрестности множества $\partial_h\Pi$ имеем $\rho_1 = \rho_2 = 1$, и

$$\|F'_y - (F_0)'_y\| = \|(\mathcal{L}_\Pi(F_0))'_y - (F_0)'_y\| < \delta.$$

Внутри окрестности верхней границы Π имеем $\rho_1 \equiv 1$, и потому $F = \rho_2 \mathcal{L}_\Pi(F_0) + (1 - \rho_2)F_0$, что дает

$$\begin{aligned} \|F'_y - (F_0)'_y\| &= \|(\rho_2)'_y(\mathcal{L}_\Pi(F_0) - F_0) + \rho_2 \cdot ((\mathcal{L}_\Pi(F_0))'_y - (F_0)'_y)\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \cdot \max |\rho'| \cdot \|\mathcal{L}_\Pi(F_0) - F_0\| + \|(\mathcal{L}_\Pi(F_0))'_y - (F_0)'_y\|. \end{aligned}$$

Если расстояние по вертикали от точки (x, y) до верхней границы полосы меньше α , мы можем применить оценку $\|\mathcal{L}_\Pi(F_0) - F_0\| \leq \alpha\delta$. Кроме того, $\|(\mathcal{L}_\Pi(F_0))'_y - (F_0)'_y\| \leq \delta$. Поэтому в окрестности верхней полосы получаем $\|F'_y - (F_0)'_y\| \leq C_y\delta$, где $C_y = \max |\rho'| + 1$ — константа, не зависящая от F_0 и от выбора Π . Точно так же можно получить аналогичную оценку в окрестности нижней границы Π .

Более того, это рассуждение применимо и для разности производных по x в окрестности $\partial_h \Pi$ с той разницей, что в игру вступают производные φ_j :

$$\|F'_x - (F_0)'_x\| \leq (1 + \max |\rho'| \cdot \max_x (|\varphi'_1(x)|, |\varphi'_2(x)|)) \cdot \delta = C_x \cdot \delta.$$

Поскольку полоса Π примерно горизонтальна, $|\varphi'_i(x)| \leq 1$, так что можно взять $C_x = C_y$. Итак, внутри полосы Π мы имеем оценку $\|dF - dF_0\| \leq C_x \delta$, где константа C_x фиксирована и не зависит от Π и от F_0 . Так как ширина полосы не больше диаметра тора и на границе полосы $F = F_0$, расстояние между F и F_0 в C^0 тоже не больше $C_x \cdot \delta$. Поэтому мы получаем оценку $\text{dist}_{C^1}(F_0|_\Pi, F|_\Pi) \leq C \cdot \text{dist}_{C^1}(F_0|_\Pi, \mathcal{L}_\Pi(F_0))$ для $C = 2C_x$.

Заметим теперь, что, выбирая α достаточно малым, мы можем добиться того, что ограничения F и $\mathcal{L}_\Pi(F_0)$ на Π будут γ -близки в C^0 . □

Заключение

Я хочу поблагодарить своего научного руководителю Ю. С. Ильяшенко за постановку задач и постоянное внимание к работе, В. А. Клепцына, от которого я узнал много красивых математических сюжетов, и С. Минкова и И. Шилина за дружескую поддержку и многочисленные вдохновляющие обсуждения.

Список литературы

1. Bonatti C., Li M., Yang D. On the existence of attractors // Transactions of the American Mathematical Society. 2013. Vol. 365, no. 3. P. 1369–1391.
2. Kan I. Open sets of diffeomorphisms having two attractors, each with an everywhere dense basin // Bulletin of the American Mathematical Society. 1994. Vol. 31, no. 1. P. 68–74.
3. Bonatti C., Diaz L., Viana M. Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity. Springer, 2004.
4. Ilyashenko Y. S., Kleptsyn V. A., Saltykov P. Openness of the set of boundary preserving maps of an annulus with intermingled attracting basins // Journal of Fixed Point Theory and Applications. 2008. Vol. 3, no. 2. P. 449–463.
5. Milnor J. On the concept of attractor // The Theory of Chaotic Attractors. Springer, 1985. P. 243–264.
6. Городецкий А. С., Ильяшенко Ю. С. Некоторые новые грубые свойства инвариантных множеств и аттракторов динамических систем // Функциональный анализ и его приложения. 1999. Т. 33, № 2. С. 16–30.
7. Клепцын В. А., Нальский М. Б. Устойчивость существования негиперболических мер для C^1 -диффеоморфизмов // Функциональный анализ и его приложения. 2007. Т. 41, № 4. С. 30–45.
8. Ilyashenko Y. Thick attractors of boundary preserving diffeomorphisms // Indagationes Mathematicae. 2011. Vol. 22, no. 3. P. 257–314.
9. Кудряшов Ю. Г. Костлявые аттракторы и магические бильярды: Кандидатская диссертация.
10. Ilyashenko Y. Thick attractors of step skew products // Regular and Chaotic Dynamics. 2010. Vol. 15, no. 2-3. P. 328–334.
11. Kleptsyn V., Volk D. Physical Measures for Nonlinear Random Walks on Interval // Moscow Mathematical Journal. 2014. Vol. 14, no. 2. P. 339–365.
12. Viana M., Yang J. Physical measures and absolute continuity for one-

- dimensional center direction // *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis* / Elsevier. Vol. 30. 2013. P. 845–877.
13. Kleptsyn V., Kudryashov Y., Okunev A. Classification of semigroups of circle diffeomorphisms. in preparation.
 14. Shilin I. Locally topologically generic diffeomorphisms with Lyapunov unstable Milnor attractors // arXiv preprint arXiv:1604.02437. 2016.
 15. Bowen R. A horseshoe with positive measure // *Inventiones mathematicae*. 1975. Vol. 29, no. 3. P. 203–204.
 16. Pesin Y. B. Lectures on partial hyperbolicity and stable ergodicity. European Mathematical Society, 2004.
 17. Ilyashenko Y., Romaskevich O. Sternberg linearization theorem for skew products // *Journal of Dynamical and Control Systems*. 2015. P. 1–20.
 18. Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П. Теория бифуркаций // *Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления»*. 1986. Т. 5, № 0. С. 5–218.
 19. Gorodetski A., Ilyashenko Y. Minimal and strange attractors // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1996. Vol. 6, no. 06. P. 1177–1183.
 20. Минков С. С., Окунев А. В. Омега-предельные множества типичных точек частично гиперболических диффеоморфизмов // *Функциональный анализ и его приложения*. 2016. Т. 50, № 1. С. 59–66.
 21. Okunev A. Milnor Attractors of Skew Products with the Fiber a Circle // *Journal of Dynamical and Control Systems*. 2016. P. 1–13.
 22. Phelps R. R. Convex functions, monotone operators and differentiability. Springer, 2009. Vol. 1364.
 23. Morales C. A., Pacifico M. J. Mixing attractors for 3-flows // *Nonlinearity*. 2001. Vol. 14, no. 2. P. 359.
 24. Santiago B. The Semicontinuity Lemma. www.im.ufrj.br/~bruno_santiago/Semicontinuity.pdf.
 25. Abdenur F., Bonatti C., Díaz L. J. Non-wandering sets with non-empty

- interiors // Nonlinearity. 2003. Vol. 17, no. 1. P. 175.
26. Baouendi M. S., Preiss Rothschild L., Winkelmann J., Zaitsev D. Lie group structures on groups of diffeomorphisms and applications to CR manifolds // Annales de l'institut Fourier. Vol. 54. 2004. P. 1279–1303.
 27. Abdenur F., Bonatti C., Crovisier S. Nonuniform hyperbolicity for C^1 -generic diffeomorphisms // Israel Journal of Mathematics. 2011. Vol. 183, no. 1. P. 1–60.
 28. Milnor J. Fubini foiled: Katok's paradoxical example in measure theory // The Mathematical Intelligencer. 1997. Vol. 19, no. 2. P. 30–32.
 29. Shub M., Wilkinson A. Pathological foliations and removable zero exponents // Inventiones mathematicae. 2000. Vol. 139, no. 3. P. 495–508.
 30. Barreira L., Pesin Y. Nonuniform hyperbolicity: Dynamics of systems with nonzero Lyapunov exponents. Cambridge University Press, 2007. Vol. 115.
 31. Pugh C., Viana M., Wilkinson A. Absolute continuity of foliations. <http://w3.impa.br/~viana/out/pvw.pdf>.
 32. Kudryashov Y. Bony attractors in higher dimension // arXiv preprint arXiv:1305.3889. 2013.
 33. Morales C. A., Pacifico M. Lyapunov stability of omega-limit sets // Discrete and continuous dynamical systems. 2002. Vol. 8, no. 3. P. 671–674.
 34. Kleptsyn V., Ryzhov D., Minkov S. Special ergodic theorems and dynamical large deviations // Nonlinearity. 2012. Vol. 25, no. 11. P. 3189.
 35. Newhouse S. E. On codimension one Anosov diffeomorphisms // American Journal of Mathematics. 1970. Vol. 92, no. 3. P. 761–770.