На правах рукописи

Шацков Денис Олегович

О свойствах функции меры иррациональности вещественного числа

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2017

Работа выполнена на кафедре математики и методики её преподавания факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Астраханский государственный университет».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории чисел механико-математического факультета ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» МОЩЕВИТИН Николай Германович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики и защиты информации Белорусского Государственного Университета проф. БЕРНИК Василий Иванович.
	кандидат физико-математических наук, доцент кафедры 311 Московского авиационного института (национальный исследовательский университет) КАН Игорь Давидович.
Ведущая организация:	Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

Защита диссертации состоится "_______"________________________ 2017 года в _______________ часов на заседании диссертационного совета Д 002.077.03 при институте проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, расположенном по адресу: Большой Каретный пер., д. 19, стр. 1, Москва, 127051.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИППИ РАН, а также на сайте ИППИ РАН: http://iitp.ru/ru/dissertation/1260.htm

Автореферат разослан "_______"__________________________ 2017 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук, Соболевский А.Н.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Настоящая диссертация посвящена исследованиям осцилляции многомерной функции меры иррациональности и асимптотического поведения интеграла от этой функции в одномерном случае. Изучением свойств таких функций занимались А.Я. Хинчин, В. Ярник, Дж.В.С. Касселс и другие математики.

Классические результаты, касающиеся приближения вещественных чисел рациональными дробями, принадлежат А. Лежандру, Ж. Лагранжу, К. Гауссу, Л. Дирихле, А. Гурвицу, Э. Борелю и др. В основном, все результаты, связанные с одномерными приближениями, получены с помощью аппарата цепных дробей.

Одно из направлений теории диофантовых приближений связанно с приближением произвольного вещественного вектора $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ целочисленным вектором $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. В такого рода задачах плодотворным является изучение поведения наилучших приближений в различных нормах. Основы этой теории восходят к трудам Ш. Эрмита, Г. Минковского, Г. Вороного и др.

Функция меры иррациональности естественным образом появилась в теории диофантовых приближений в вопросах, связанных с приближениями иррациональных чисел рациональными. Это связано с тем, что точки разрыва данной функции соответствуют наилучшим приближениям.

Рассматриваемая в настоящей диссертации функция, по-видимому, впервые встречается в работах В. Ярника[1].

Приведем определение многомерной функции меры иррациональности в наиболее общем случае. Обозначим через $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ – целочисленный вектор. Рассмотрим матрицу

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1^1 & \dots & \theta_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_m^1 & \dots & \theta_m^n \end{pmatrix},$$

где θ_j^i – вещественные числа из интервала $[0;1)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $1 \leqslant i \leqslant n$, и соответствующую ей систему линейных форм

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_\Theta(\mathbf{x}) = \{L_j(\mathbf{x}), 1 \leqslant j \leqslant m\}, \quad L_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \theta_j^i x_i.$$

Тогда *функцию меры иррациональности* можно определить следующим образом

$$\psi_\Theta(t) = \min_{\substack{x_i \in \mathbb{Z} \\ 1 \leqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \leqslant t}} \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \|L_j(\mathbf{x})\| =$$

$$= \min_{\substack{x_i \in \mathbb{Z} \\ 1 \leqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \leqslant t}} \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \|\theta_j^1 x_1 + \dots + \theta_j^n x_n\|,$$

где $\|\cdot\|$ обозначает расстояние до ближайшего целого.

---

[1] V. Jarník. Zum Khintchineschen "Übertragungssatz". Acad. Sci. URSS, 3, Trav. Inst. math., Tbilissi. 1938. p. 193-216.

Похожая функция

$$\eta(t) = \min_{\substack{x_i\in\mathbb{Z}\\ 1\leqslant |x_1|^2+\cdots+|x_n|^2\leqslant t^2}} \max_{1\leqslant j\leqslant m} \|L_j(\mathbf{x})\|$$

используется в ряде доказательств у Дж.В.С. Касселса[2]. Видно, что определения отличаются лишь только нормой в аргументе минимума.

Из теоремы Минковского о выпуклом теле следует неравенство $\psi_\Theta(t) < t^{-n/m}$. Функция $\psi_\Theta(t)$ – кусочно постоянная, невозрастающая и убывает к нулю, когда t стремится к бесконечности. Точки разрыва данной функции определяют наилучшие приближения для матрицы Θ в sup-норме.

Также некоторую информацию о поведении этой функции можно получить из работ А.Я. Хинчина[3] [4], связанных с изучением сингулярных матриц, хотя в работах А.Я. Хинчина в явном виде эта функция и не присутствует.

Напомним определение наилучшего приближения для матрицы Θ. Для целочисленного вектора $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ рассмотрим величины

$$M(\mathbf{x}) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|,\ \ \zeta(\mathbf{x}) = \max_{1\leqslant j\leqslant m} \|L_j(\mathbf{x})\|.$$

Определение 1. Будем называть целочисленный вектор $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *наилучшим приближением* для матрицы Θ, если

$$\zeta(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}'} \zeta(\mathbf{x}'),$$

где минимум берется по всем ненулевым целым векторам $\mathbf{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n)$, подчиненным условию

$$1 \leqslant M(\mathbf{x}') \leqslant M(\mathbf{x}).$$

В одномерном случае, когда $n = m = 1$, вместо матрицы Θ будем писать число α и функцию меры иррациональности можно определить таким образом

$$\psi_\alpha(t) = \min_{1\leqslant q\leqslant t} ||q\alpha||$$

(здесь минимум берется по целым q).

В терминах функции меры иррациональности можно дать определение *спектра Лагранжа*

$$\mathbb{L} = \{\lambda \in \mathbb{R}:\ \ \exists\, \alpha\ \ \liminf_{t\to+\infty} t\psi_\alpha(t) = \lambda\}$$

и *спектра Дирихле*

$$\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{R}:\ \ \exists\, \alpha\ \ \limsup_{t\to+\infty} t\psi_\alpha(t) = \lambda\}.$$

---

[2] Дж.В.С. Касселс. Введение в теорию диофантовых приближений. ИЛб М.:1961. 213 с.

[3] A. Khintchine. Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen. Rendiconti Circ. Math. Palermo. 1926. №50;2. p.170-195.

[4] А. Я. Хинчин. Регулярные системы линейных уравнений и общая задача Чебышева. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1948. №12:3. С.249–258.

О спектрах Лагранжа и Дирихле можно прочитать в книге Т. Кузика[5], в статье А.В. Малышева[6] и В.А. Иванова[7].

Результаты о спектрах Лагранжа и Дирихле в одномерном случае получены при помощи теории цепных дробей.

Информацию о спектрах Лагранжа и Дирихле в бóльших размерностях можно найти в статьях Р.К. Ахунжанова[8] и Р.К. Ахунжанова, Д.О. Шацкова[9].

В одномерном случае Н.Г. Мощевитин и И.Д. Кан в совместной работе[10] доказали следующий результат.

Теорема 3. *Для двух вещественных чисел α и β, таких что $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$ разность*

$$\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t)$$

бесконечно много раз меняет знак при $t \to +\infty$.

Отсутствие феномена осцилляции в многомерных случаях в общем виде для всех матриц, следует из работ А.Я. Хинчина[11] и В. Ярника[12] о сингулярных системах.

Определение 2. Матрица Θ называется невырожденной, если функция $\psi_\Theta(t)$ никогда не обращается в нуль при $t \geqslant 1$.

Определение 3. Пусть непрерывная функция $\psi(t)$ монотонно убывает к нулю при $t \to +\infty$ и $\psi(t) = o(t^{-n/m})$. Невырожденная матрица Θ является ψ–сингулярной, если при всех достаточно больших значениях t для функции меры иррациональности выполнено неравенство

$$\psi_\Theta(t) \leqslant \psi(t).$$

Впервые существование сингулярных систем было доказано А.Я. Хинчиным в 1926 г. при $n = 2$, $m = 1$ и при $n = 1$, $m = 2$. Он доказал следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\psi(t)$ – положительная, непрерывная и убывающая к нулю при $t \to +\infty$ функция вещественного переменного t. Тогда существуют два, линейно независимых вместе с единицей над $\mathbb{Z}$, вещественных числа α и β такие, что для всех достаточно больших t система диофантовых неравенств*

$$\|x_1\alpha + x_2\beta\| \leqslant \psi(t), \ \ 1 \leqslant \max_{j=1,2} |x_j| \leqslant t$$

---

[5] T.W. Cusick, M.E. Flahive. The Markoff and Lagrange spectra. Mathematica surveys and monographs. 1943. p.93.

[6] А.В. Малышев. Спектры Маркова и Лагранжа (обзор литературы). Записки науч. сем. ЛОМИ. Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л. 1977. №67. С. 5–38.

[7] В.А. Иванов. О начале луча в спектре Дирихле одной задачи теории диофантовых приближений. Записки науч. сем. ЛОМИ. 1980. №93. С.164–185.

[8] Р.К. Ахунжанов. О векторах заданного диофантова типа II. Математический сборник. 2013. №204:4. С.3–24

[9] R.K. Akhunzhanov, D.O. Shatskov. On Dirichlet spectrum for two-dimensional simultaneous Diophantine approximation. Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. 2013. vol.3, iss. 3-4. pp. 5-23, [pp. 241-259].

[10] I.D. Kan, N.G.Moshchevitin. Approximations to two real numbers. Uniform Distribution Theory 5. 2010. no.2. p.79-86.

[11] A. Khintchine. Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen. Rendiconti Circ. Math. Palermo. 1926. №50;2. p.170-195.

[12] V. Jarník. Eine Bemerkung Über diophantische Approximationen. Math. Z. 1959. 72:1. p.187-191.

имеет целочисленное решение $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$.

Теорема 2. *Пусть* $\psi(t)$ *– положительная, непрерывная и убывающая к нулю при* $t \to +\infty$ *функция вещественного переменного* t *и при этом функция* $t\psi(t)$ *монотонно возрастает к бесконечности при* $t \to +\infty$. *Тогда существуют два, линейно независимых вместе с единицей над* $\mathbb{Z}$, *вещественных числа* α *и* β *такие, что для всех достаточно больших* t *система диофантовых неравенств*

$$\max(\|x\alpha\|, \|x\beta\|) \leqslant \psi(t), \ \ 1 \leqslant x \leqslant t$$

разрешима в целых числах x.

В. Ярник[13] доказал наличие сингулярных матриц при любых m и $n \geqslant 2$.

Теорема 4. *Пусть* m *– произвольное натуральное число,* n *– натуральное число, не меньшее, чем два. Предположим также, что* $\psi(t)$ *– положительная, непрерывная и убывающая к нулю при* $t \to +\infty$ *функция вещественного переменного* t. *Рассмотрим множество* $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{mn}$, *состоящее из матриц* Θ *размера* mn, *таких, что*

- *числа* θ_j^i *с* $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$ *линейно независимы вместе с единицей над* $\mathbb{Z}$;
- *матрица* Θ *является* ψ*-сингулярной.*

Тогда для любого открытого множества $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{mn}$ *пересечение* $\mathcal{M} \cap \mathcal{G}$ *имеет мощность континуума.*

При $n = 1$ дело обстоит несколько по-другому. Итак, пусть $n = 1$ и $\Theta = \{\theta_j, 1 \leqslant j \leqslant m\}$, есть некоторый набор вещественных чисел. Сформулируем обобщение **теоремы 2**, доказанное Леска[14].

Теорема 5. *Пусть* $n = 1$ *и* $m \geqslant 2$. *Пусть* $\psi(t)$ *– положительная, непрерывная и убывающая к нулю при* $t \to +\infty$ *функция вещественного переменного* t, *для которой*

$$\limsup_{t \to +\infty} \psi(t)t = +\infty.$$

Тогда множество ψ*-сингулярных наборов* $\Theta = \{\theta_j, 1 \leqslant j \leqslant m\}$, *состоящее из алгебраически независимых вещественных чисел, в пересечении с произвольным открытым множеством* $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^m$ *имеет мощность континуума.*

Так же наличие сингулярности позволяет сформулировать несколько общих утверждений при любых n и m, кроме случая $(n, m) = (1, 1)$.

Утверждение 1. *Для любой невырожденной матрицы* Θ *существует такая невырожденная матрица* Θ', *что разность*

$$\psi_\Theta(t) - \psi_{\Theta'}(t)$$

начиная с некоторого момента не осциллирует.

Утверждение 2. *Существует матрица* Θ, *такая что для почти всех (в смысле меры Лебега) матриц* Θ', *разность*

$$\psi_\Theta(t) - \psi_{\Theta'}(t)$$

[13] V. Jarník. Eine Bemerkung Über diophantische Approximationen. Math. Z. 1959. 72:1. p.187-191.

[14] J. Leska. Sur un résultat de Jarník. Acta Arith. 1966. 11. p. 359-364.

начиная с некоторого момента не осциллирует.

Справедливость **утверждения 2** следует из теоремы Хинчина-Грошева.

Покажем, как из наличия сингулярных систем следует отсутствие осцилляции в общем случае на примере **теоремы 1**.

Возьмем функцию $\psi(t) = o(t^{-2})$, $t \to \infty$. Пусть α, β – те числа, существование которых утверждает **теорема 1**. Возьмем другие числа α_1, β_1 – плохо приближаемые (в смысле линейной формы):

$$\inf_{(x_1,x_2)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \left(\|x_1\alpha_1 + x_2\beta_1\|(\max\{|x_1|,|x_2|\})^2\right) = \varepsilon > 0.$$

При достаточно больших t выполняется неравенство

$$\psi_{(\alpha,\beta)}(t) < \frac{\varepsilon}{2}t^{-2} < \psi_{(\alpha_1,\beta_1)}(t),$$

что обеспечивает отсутствие осцилляции.

Как видно из **теоремы 3**, вопрос об осцилляции разности $\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t)$ в случае $m = n = 1$ полностью решен. Для дальнейшего изучения поведения функции $\psi_\alpha(t)$ полезно изучить интеграл $I_\alpha(t)$ от этой функции, который определяется естественным образом

$$I_\alpha(t) = \int\limits_1^t \psi_\alpha(\xi)d\xi.$$

Можно отметить, что в общем случае осцилляция для разности $I_\alpha(t) - I_\beta(t)$ отсутствует. Например, для золотого сечения $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ выполняется равенство

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I_\tau(t)}{\ln t} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right) : \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right).$$

По **теореме II п.2** можно выбрать число β, алгебраически независимое с числом τ, такое, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I_\beta(t)}{\ln t} = \frac{6\ln 2}{\pi^2},$$

и следовательно разность $I_\tau(t) - I_\beta(t)$ стремится к бесконечности при $t \to +\infty$. Таким образом, аналог **теоремы 3** об осцилляции разности $\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t)$ для разности интегралов $I_\alpha(t) - I_\beta(t)$ не имеет места.

Цели работы.

- Изучение интеграла $I_\alpha(t)$, разности $I_\alpha(t) - I_\beta(t)$ при $t \to +\infty$.
- Изучение разности $\psi_\Theta(t) - \psi_{\Theta'}(t)$ при $t \to +\infty$ в случаях $m = 1$ и $n = 2$ или $m \geqslant 2$ и $n = 1$.

Методы исследования. В работе использованы элементарные методы теории чисел, методы математического анализа, методы функционального анализа, эргодическая теория.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Основными результатами данной работы можно считать следующие:

- найдены точные границы для значения предела $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha,t)}$, где $N(\alpha,t)$ – количество знаменателей подходящих дробей для числа α на отрезке $[1;t]$;

- найдено значение предела $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha,t)}$ для почти всех (в смысле меры Лебега) значений числа α;

- найдено значение предела $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{I_\alpha(t)}{\ln t}$ для почти всех (в смысле меры Лебега) значений числа α;

- доказано, что существуют алгебраически независимые числа α и β, такие что разность $I_\alpha(t)-I_\beta(t)\to\infty$ при $t\to\infty$;

- приведен алгоритм нахождения точного значения предела $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{I_\alpha(t)}{\ln t}$ для некоторого класса чисел;

- доказано, что разность $\psi_\Theta(t)-\psi_{\Theta'}(t)$ при $t\to\infty$ меняет знак бесконечное количество раз для почти всех пар матриц размера $m=1$ и $n=2$ или $m\geqslant 2$ и $n=1$.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, и разработанные в ней методы могут быть применены в задачах теории диофантовых приближений, касающихся нахождения наилучших приближений к многомерному вектору. Кроме того, полученные результаты могут использоваться в учебном процессе в рамках специальных курсов и специальных семинаров.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались автором на следующих конференциях:

- «Diophantine Analysis» – Астрахань, Россия (30 июля – 3 августа 2012);

- «Moscow Workshop on Combinatorics and Number Theory» – Москва (Долгопрудный), Россия (27 января – 2 февраля 2014);

- «Diophantine Approximation and Related Topics» – Орхус, Дания (12 июля – 17 июля 2015);

и научно-исследовательских семинарах:

- «Московский семинар по теории чисел» (рук. Ю.В. Нестеренко, Н.Г. Мощевитин), МГУ;

- Семинар кафедры математики и методики её преподавания Астраханского государственного университета (рук. А.Г. Князев, С.З. Кенжалиева), АГУ.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 3 статьи в ведущих российских и зарубежных рецензируемых изданиях [1], [2] и [3].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав и библиографии. Общий объем диссертации составляет 69 страниц. Библиография включает 34 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** дан краткий исторический обзор, обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, представлены выносимые на защиту научные положения.

Первая глава диссертации посвящена изучению поведения разности $\psi_\Theta(t) - \psi_{\Theta'}(t)$ при $t \to \infty$.

Итак, в размерности n и m отличных от единицы общих результатов об осцилляции быть не может. Тем не менее можно получить результаты метрического характера.

В первой главе доказывается следующая теорема.

Теорема I. *Пусть $m = 1$ и $n = 2$ или $m \geqslant 2$ и $n = 1$, тогда для почти всех (в смысле меры Лебега) матриц Θ и Θ' размера $m \times n$ разность*

$$\psi_\Theta(t) - \psi_{\Theta'}(t)$$

осциллирует бесконечное число раз при $t \to +\infty$.

Установим взаимноодназначно соответствие между точками из единичного куба $\Omega = [0;1]^{mn}$ и матрицами Θ.

В случае n=2 и m=1, точке $(\alpha, \beta) \in [0;1]^2$ сопоставим матрицу $\Theta = (\theta_1^1\, \theta_1^2) = (\alpha\ \ \beta)$. В случае $n = 1$ и $m \geqslant 2$ точке $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in [0;1]^m$ сопоставим матрицу $\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1^1 \\ \vdots \\ \theta_m^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \vdots \\ \alpha_m^1 \end{pmatrix}$.

В обоих случаях, $m = 1$ и $n = 2$ или $m \geqslant 2$ и $n = 1$, для доказательства **теоремы I** построим в кубе Ω два множества:

$$\underline{M}_k = \left\{ \Theta \in \Omega : \psi_\Theta(k) > \frac{\varepsilon}{k^{n/m}} \right\},$$

$$\overline{M}_k = \left\{ \Theta \in \Omega : \psi_\Theta(k) \leqslant \frac{\varepsilon}{k^{n/m}} \right\},$$

где ε – некоторая константа, не зависящая от m и n. Далее доказывается ряд лемм.

В случае $m = 1$ **и** $n = 2$**.**

Лемма 1.3. *Для любого квадрата S со стороной λ, верны неравенства*

$$\lambda^2 \left(\frac{\varepsilon}{3\zeta(2)} - 37 \frac{\varepsilon^2}{\zeta^2(2)} \right) \leqslant \mu(S \cap \overline{M}_k).$$

Лемма 1.4. *Для любого квадрата S со стороной λ верно неравенство*

$$\lambda^2 - 5\lambda^2 \varepsilon \leqslant \mu(S \cap \underline{M}_k).$$

В случае $m \geqslant 2$ **и** $n = 1$**.**

Лемма 1.5. *Для любого куба S со стороной λ выполняется неравенство*

$$\lambda^m - 2(4\lambda\varepsilon)^m \leqslant \mu(S \cap \underline{M_k}).$$

Лемма 1.14. *Для любого куба S со стороной λ выполняется неравенство*

$$\frac{(2\lambda\varepsilon)^m}{6} - \frac{(68\lambda\varepsilon^2)^m}{4} \leqslant \mu(S \cap \overline{M}_k).$$

Назовем последовательность измеримых множеств $\{M_k\}$ – последовательностью Бореля-Кантелли, если

$$\mu\left(\bigcap_{r=1}^{\infty}\bigcup_{k=r}^{\infty} M_k\right) = 1,$$

то есть почти все точки множества Ω попадают в бесконечное количество множеств последовательности $\{M_k\}$.

Теорема Шустера[15]**.**

Пусть $\{M_k\}$ – последовательность измеримых множеств. Если для любого измеримого множества E, такого что $\mu(E) > 0$, выполняется

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E \cap M_k) = +\infty,$$

то последовательность $\{M_k\}$ является последовательностью Бореля-Кантелли.

Лемма 1.16. *Пусть $\{M_k^1\}$ и $\{M_k^2\}$ последовательности в Ω и для любых кубов S_1 и S_2 начиная с некоторого номера k_0 для всех $k > k_0$ выполняются неравенства $\mu(M_k^1 \cap S_1) > c\mu(S_1)$ и $\mu(M_k^2 \cap S_2) > c\mu(S_2)$, где c – некоторая положительная постоянная, тогда последовательность $\{M_k^1 \times M_k^2\}$ является последовательностью Бореля-Кантелли.*

По леммам 1.3, 1.4, 1.5, 1.14 и 1.16 получаем, что в каждом случае последовательности $\Psi_k = \left\{\underline{M_k} \times \overline{M}_k\right\}$ и $\Phi_k = \left\{\overline{M}_k \times \underline{M_k}\right\}$ являются последовательностями Бореля-Кантелли.

В обоих случаях почти все пары точек из Ω, а значит и почти все пары матриц попадают в последовательности $\{\Psi_k\}$ и $\{\Phi_k\}$ бесконечное количество раз. Если $(\Theta, \Theta') \in \Psi_k$, то разность $\psi_\Theta(t) - \psi_{\Theta'}(t) > 0$ и если $(\Theta, \Theta') \in \Phi_k$, то разность $\psi_\Theta(t) - \psi_{\Theta'}(t) < 0$, а значит для почти всех пар матриц осцилляция происходит бесконечное количество раз.

Во **второй главе** доказаны асимптотические равенства при $t \to +\infty$ для интеграла $I_\alpha(t)$. Поскольку, для любого $t \geqslant 1$ верно неравенство $t\psi_\alpha(t) < 1$, то сразу видно, что $I_\alpha(t) < \ln t$.

Через $N = N(\alpha, t)$ обозначим величину, задаваемую условием

$$q_N \leqslant t < q_{N+1},$$

т.е. количество знаменателей подходящих дробей для числа α на отрезке $[1; t]$.

Ясно, что $N \to \infty$ при $t \to \infty$.

Теорема II. *Для почти всех (в смысле меры Лебега) чисел α выполняются равенства*

$$1) \lim_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} = \frac{1}{2};$$

[15] J. Shuster. On the Borel-Cantelli problem. Canadian Math.Bull. 1970. v.13, 2. p.273-275.

$$2)\ \lim_{t\to\infty}\frac{I_\alpha(t)}{\ln t}=\frac{6\ln 2}{\pi^2}.$$

Помимо метрического результата, доказано утверждение об экстремальных значениях величин $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha,t)}$ и $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{I_\alpha(t)}{\ln t}$.

Теорема III. *Для любого иррационального* $\alpha\in(0;1)$ *выполнены неравенства*

$$1)\ \limsup_{t\to\infty}\frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha,t)}\leqslant 1;$$

$$2)\ \liminf_{t\to\infty}\frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha,t)}\geqslant \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}.$$

Используя аппарат цепных дробей, можно полностью ответить на вопрос о поведении функции $\psi_\alpha(t)$. Выпишем основные определения и формулы с цепными дробями[16].

Обыкновенная цепная дробь для числа α – это конечное или бесконечное выражение вида

$$\alpha=[a_0;a_1,a_2,\ldots]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ldots}},$$

где $a_0\in\mathbb{Z}$, $a_\nu\in\mathbb{N}$.

Подходящими дробями к α называются рациональные дроби вида

$$\frac{p_\nu}{q_\nu}=[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_\nu]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots+\cfrac{1}{a_\nu}}}.$$

Перейдем к функции $\psi_\alpha(t)$. При $q_\nu\leqslant t<q_{\nu+1}$ будет иметь место равенство

$$\psi_\alpha(t)=||q_\nu\alpha||=|q_\nu\alpha-p_\nu|.$$

Известна формула для приближения числа α его подходящей дробью $\frac{p_n}{q_n}$, которая имеет вид

$$|q_\nu\alpha-p_\nu|=\frac{1}{q_\nu(\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu^*)},\tag{1}$$

где

$$\alpha_{\nu+1}=[a_{\nu+1};a_{\nu+2},...],\quad \alpha_\nu^*=[0;a_\nu,a_{\nu-1},...,a_1]=\frac{q_{\nu-1}}{q_\nu}.$$

Формула (**??**) позволяет записать интеграл $I_\alpha(t)$ в виде суммы

$$I_\alpha(t)=\sum_{\nu=1}^{N}S_\nu(\alpha)+A_{N+1}(\alpha,t),$$

где

$$S_\nu(\alpha)=\frac{(1-\alpha_\nu^*)\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu^*}$$

[16] А.Я. Хинчин. Цепные дроби. М.:Физматлит, 1960. 112 с.

и

$$A_{N+1}(\alpha,t)=\frac{\left(\frac{t}{q_{N+1}}-\alpha^*_{N+1}\right)\alpha_{N+2}}{\alpha_{N+2}+\alpha^*_{N+1}}.$$

Также нам понадобятся непрерывные дроби с *вещественными* неполными частными $\overline{x}=(x_1,x_2,\ldots)$, где $x_i\in[1;+\infty)$, $i\in\mathbb{N}$. В этом случае все функции определяются похожим образом.

Рассмотрим функции

$$S_\nu(\overline{x})=\frac{(1-\alpha^*_\nu(\overline{x}))\alpha_{\nu+1}(\overline{x})}{\alpha_{\nu+1}(\overline{x})+\alpha^*_\nu(\overline{x})},\ G_n(\overline{x})=\sum_{\nu=1}^{n}S_\nu(\overline{x}).$$

Можно получить равенство

$$I_\alpha(t)=G_N(\overline{x})+O(1).$$

Далее доказывается ряд лемм о поведении суммы $G_N(\overline{x})$.

Лемма 2.1. *Функция $G_n(\overline{x})$ возрастает по каждому из первых $n+1$ аргументу.*

Минимум предела $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha,t)}$ достигается на числах эквивалентных золотому сечению.

Для доказательства **теоремы II** нам понадобятся некоторые сведения из эргодической теории. Основные нужные нам понятия и утверждения имеются в книге[17].

Рассмотрим преобразование Гаусса $T:[0;1)\to[0;1)$, задаваемый формулой

$$Tx=\begin{cases}\left\{\frac{1}{x}\right\}, & \text{при } x\neq 0;\\ 0, & \text{при } x=0.\end{cases}$$

Если для числа x известно его разложение в цепную дробь $x=[0;a_1,a_2,a_3,\ldots]$, то преобразование Tx сдвигает эту цепную дробь на один шаг

$$Tx=[0,a_2,a_3,\ldots].$$

Инвариантная мера для преобразования Гаусса задается формулой

$$\mu(A)=\frac{1}{\ln 2}\int\limits_A\frac{1}{1+x}dx.$$

Естественным расширением для преобразования Гаусса будет автоморфизм $\widehat{T}:[0;1)^2\to[0;1)^2$, определяемый как

$$\widehat{T}(x,y)=\begin{cases}\left(\left\{\frac{1}{x}\right\},\frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]+y}\right), & \text{при } x\neq 0;\\ (0,y), & \text{при } x=0.\end{cases}$$

[17] И.П. Корнфельд, Я.Г. Синай, С.В. Фомин. Эргодическая теория. М.:Наука, 1980. 384 с.

У естественного расширения $\widehat{T}$ инвариантная мера есть

$$\mu_2(A) = \frac{1}{\ln 2} \iint\limits_A \frac{1}{(1+xy)^2} dxdy.$$

Преобразование $\widehat{T}$ эргодично и, согласно теореме Биркгофа-Хинчина, для любой абсолютно интегрируемой функции $f(x,y)$ выполняется асимптотическое равенство

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\widehat{T}^{\nu}(x,y)\right) = \frac{1}{\ln 2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{f(x,y)dxdy}{(1+xy)^2},$$

которое верно для почти всех $(x,y) \in [0,1)^2$.

Если на точку (x,y) подействовать преобразованием $\widehat{T}^{\nu}$, то

$$\widehat{T}^{\nu}(x,y) = \left(T^{\nu}(x), \frac{q_{\nu-1} + yp_{\nu-1}}{q_{\nu} + yp_{\nu}}\right),$$

где $\frac{p_{\nu}}{q_{\nu}}$ – подходящие дроби для x.

Рассмотрим преобразование $\widehat{\widehat{\widehat{T}}} : [0;1)^2 \to [0;1)^2$, которое определим так

$$\widehat{\widehat{\widehat{T}}} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{T}(z_1) \\ \widehat{T}(z_2) \end{pmatrix}, \ z_1, z_2 \in [0;1)^2.$$

Его инвариантная мера есть $\mu_2(z_1) \times \mu_2(z_2)$. Преобразование $\widehat{\widehat{\widehat{T}}}$ эргодично, это следует из того, что $\widehat{T}$ обладает свойством перемешивания.

Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \frac{1-y}{1+xy}.$$

Поскольку

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{1-y}{(1+xy)^3} dxdy = \frac{\ln 2}{2},$$

то применяя теорему Биркгофа-Хинчина, приходим к равенству

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\widehat{T}^{\nu}(x,y)\right) = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Следующее утверждение, близко к использовавшемуся в работе[18].

Лемма 2.7. *Для любого $(x,y) \in [0;1)^2$ и любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left| f\left(\widehat{T}^{\nu}(x,y)\right) - f\left(\widehat{T}^{\nu}(x,0)\right) \right| < 4.$$

---

[18] K. Dajani, C. Kraaikamp. A Note on the Approximation by Continued Fractions under an Extra Condition. New York Journal of Mathematics. 1998. №3A. p. 69-80.

Следствие 2.5. *Для любого* $y \in [0;1]$ *выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\widehat{T}^{\nu}(x,y)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\widehat{T}^{\nu}(x,0)\right).$$

Обозначим через R множество тех точек $(x,y) \in [0;1)^2$, для которых выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\widehat{T}^{\nu}(x,y)\right) = \frac{1}{2}.$$

Мера множества R равна 1. Рассмотрим проекцию

$$\tilde{R} = \{x \in [0;1) | \exists y : (x,y) \in R\}.$$

Мера множества $\tilde{R}$ тоже будет равна 1. Согласно **следствию 2.5** выполняется равенство

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha,t)} = \lim_{n\to\infty} \frac{G_n(\alpha)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\widehat{T}^{\nu}(x,0)\right) = \frac{1}{2}.$$

Так же нам понадобится теорема Леви[19].

Теорема Леви. *Для почти всех (в смысле меры Лебега)* $\alpha \in (0;1)$ *имеет место следующее равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln q_n}{n} = \frac{\pi^2}{12\ln 2}.$$

Из **теоремы Леви** получаем, что для почти всех α выполнено равенство

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{N(\alpha,t)} = \frac{\pi^2}{12\ln 2}.$$

Пункт 2) теоремы II получается из **пункта 1) теоремы II** и последнего равенства.

Оценки, приводимые в **теореме III точны**. Более того, имеет место следующая теорема.

Теорема IV. *Для любого* $d \in \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}; 1\right]$ *существует* α*, такое что*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha,t)} = d.$$

В работе доказан следующий результат для рассматриваемых интегралов.

Теорема V. *Пусть* $q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots$ *и* $r_0, r_1, \ldots, r_n, \ldots$ *– суть знаменатели подходящих дробей для* α *и* β *соответственно. Тогда для почти всех (в смысле меры Лебега) пар* $(\alpha,\beta) \in [0,1]^2$ *верно неравенство*

$$\liminf_{n\to\infty} |I_\alpha(q_n) - I_\beta(r_n)| < +\infty.$$

[19] P. Levy. Théorie de l'addition des variables aléatoires. Paris:Gauthier-Villars. 1937. 320p.

Для доказательства воспользуемся теоремой Халаса[20].

Теорема Халаса. *Для любой интегрируемой функции $\varphi(p)$ и любого эргодического преобразования T пространства R конечной меры выражение*

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \varphi\left(T^\nu p\right) - n \int\limits_R \varphi(p) d\mu$$

для почти всех (в смысле меры Лебега) p, меняет знак бесконечное число раз в слабом смысле, т.е. эта разность не может быть постоянно положительной или отрицательной.

Применяя эту теорему к эргодическому преобразованию $\widehat{\widehat{T}}$, получим

Следствие 2.4. *Для почти всех $(z_1, z_2) = (x_1, y_1, x_2, y_2) \in [0,1)^2 \times [0,1)^2$ и для любой μ_2 – интегрируемой функции $f(z) = f(x, y)$ разностная функция*

$$\sum_{\nu=1}^{n} f\left(\widehat{T}^\nu z_1\right) - \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\widehat{T}^\nu z_2\right)$$

меняет знак бесконечное число раз в слабом смысле.

В **последнем параграфе** доказываются формулы для вычисления значения пределов $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha,t)}$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t}$ для некоторого класса чисел.

Приведем несколько формул и определений из теории о континуантах.

Определение 2.6 Континуант $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ содержит n переменных и определяется рекурентно следующим образом:
$\langle\rangle = 1$,
$\langle a_1\rangle = a_1$,
$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = a_n\langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle + \langle a_1, \ldots, a_{n-2}\rangle$.

Континуанты связаны с цепными дробями

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{\langle a_0, \ldots, a_n\rangle}{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle}.$$

Обозначим через A и A^- последовательности натуральных чисел произвольной длины $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ и $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ соответственно.

Перейдем к вычислению пределов $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N}$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t}$ для квадратичных иррациональностей.

Будем рассматривать числа вида $\alpha = [\overline{a_1, a_2, \ldots, a_k}]$. Обозначим $\overleftarrow{\alpha} = [\overline{a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1}]$. Как известно $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k\rangle = \langle a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1\rangle$. Обозначим набор из $k+2$ чисел через $X = \left(\frac{1}{\overleftarrow{\alpha}}, a_1, a_2, \ldots, a_k, \alpha\right) = \left(\frac{1}{\overleftarrow{\alpha}}, A, \alpha\right)$.

Лемма 2.10. *Для чисел $\alpha = [\overline{a_1, a_2, \ldots, a_k}]$ верны равенства*

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N} = \frac{G_k(X)}{k},$$

[20] G. Halasz. Remarks on the remainder in Birkhoff's ergodic theorem. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica. 1976. vol. 28 (3-4). p.389-395.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{I_\alpha(t)}{\ln t}=\frac{G_k(X)}{\ln(\langle A\rangle+\langle A^-\rangle\alpha)}.$$

Следствие 2.7 *Если* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}=+\infty$, *то* $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{I_\alpha(t)}{\ln t}=0$.

Вычислим значение пределов для числа e. Разложение числа e в цепную дробь выглядит так $e=[2;1,2,1,1,4,1,1,6,\ldots,1,1,2n-2,1,1,2n,\ldots]$. При достаточно большом n это разложение можно рассматривать, как периодическое $[\overline{1,1,+\infty}]$ и считать, что $X=\left(\frac{1}{\infty},1,1,\infty\right)$.

Вычисляем значения $G_1(X)=1$, $G_2(X)=0$ и $G_3(X)=0,5$ и, применив **лемму 2.10**, получаем равенство

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{I_e(t)}{N}=\frac{1}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[3n]{2^nn!}=+\infty$, то по **следствию 2.7** получаем, что для числа e выполняется равенство $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{I_e(t)}{\ln t}=0$.

Список работ автора по теме диссертации

1. Д.О. Шацков. О среднем значении меры иррациональности вещественных чисел. Математические заметки. 2015. том 98, выпуск 2. С.271–287.

2. Д.О. Шацков. Осцилляция функции меры иррациональности в многомерном случае. Математические заметки. 2016. том 99, выпуск 1. С.102–120.

3. R.K. Akhunzhanov, D.O. Shatskov. On Dirichlet spectrum for two-dimensional simultaneous Diophantine approximation. Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. 2013. vol.3, iss. 3-4. pp. 5-23, [pp. 241-259].