

ОТЗЫВ

официального оппонента на кандидатскую диссертацию Дениса Олеговича Шацкова «О свойствах функции меры иррациональности вещественного числа».

В диссертации Д. О. Шацкова получены результаты углубляющие и обобщающие классические теоремы теории диофантовых приближений касающиеся по координатного приближения точек евклидова пространства точками с целыми рациональными координатами. Интерес к таким задачам возник с самого появления теории диофантовых приближений (Л. Дирихле, Ж. Лиувилль). Многомерные задачи были рассмотрены в первой половине 20 века (А. Я. Хинчин, В. Ярник, Дж. В. С. Касселс). В конце прошлого и начале этого века к решению возникших задач были привлечены методы функционального анализа, эргодической теории, метрической теории чисел. Появились окончательные и близкие к окончательным результаты по задачам имеющим уже более чем полувековую историю. Все вышесказанное несомненно свидетельствует об актуальности диссертационного исследования и ее соответствия специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Диссертация посвящена изучению поведения при $t \rightarrow \infty$ интеграла $I_\alpha(t)$ и разности $I_\alpha(t) - I_\beta(t)$, где

$$I_\alpha(t) = \int_1^t \psi_\alpha(x) dx$$

с $\psi_\alpha(x)$ — функцией меры иррациональности α .

Второй задачей диссертации является изучение поведения разности $\psi_\theta(t) - \psi_{\theta'}(t)$ при $t \rightarrow \infty$ в пространствах различных размерностей.

Приведем несколько результатов автора по сформулированным задачам.

В первой главе доказана теорема 1.

Теорема 1. Пусть $m=1$ и $n=2$ или $m \geq 2, n=1$. Тогда для почти всех (в смысле меры Лебега в пространстве \square^m) матриц θ и θ' размера $m \times n$, разность

$$\psi_{\theta}(t) - \psi_{\theta'}(t)$$

осциллирует бесконечное число раз при $t \rightarrow \infty$.

Во второй главе диссертации при $q_N \leq t < q_{N+1}$ для количества знаменателей подходящих дробей $N(\alpha, t)$ числа α на отрезке $[1, t]$ установлены два равенства.

Теорема 2. Для почти всех чисел α выполняются равенства

$$\begin{aligned} 1. \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_{\alpha}(t)}{N(\alpha, t)} &= \frac{1}{2}, \\ 2. \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_{\alpha}(t)}{\ln t} &= \frac{6 \ln 2}{\pi^2}. \end{aligned}$$

Также получены результаты об экстремальных значениях величин

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_{\alpha}(t)}{N(\alpha, t)}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_{\alpha}(t)}{\ln t} \end{aligned}$$

в теореме 3. Показано, что результаты теоремы 3 точны.

Теорема 4. Для любого $d \in \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}, 1 \right]$ существует α такое, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_{\alpha}(t)}{N(\alpha, t)} = d.$$

Теорема 5. Пусть $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ и $r_0, r_1, \dots, r_n, \dots$ — знаменатели подходящих дробей для чисел $\alpha, \beta \in \square$ соответственно. Тогда для почти всех пар (α, β) верно неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |I_\alpha(q_n) - I_\beta(r_n)| < \infty.$$

Для доказательства приведенных теорем используются фундаментальные теоремы из теории цепных дробей, эргодической теории, а также множество лемм, доказанных самим автором.

Из вышеизложенного видно, что в важной и актуальной области диофантовых приближений Д. Шацков получил наилучшие к настоящему времени результаты, улучшив и обобщив теоремы таких известных математиков, как А. Я. Хинчин, В. Ярник, Дж. В. Касселс. Его результаты подробно опубликованы в ведущих российских журналах, докладывались на крупных международных конференциях. Для доказательства своих теорем он показал умение оперировать глубокими фактами из различных разделов математики.

Изложение как диссертации так и автореферата ясное и строгое. Кроме небольшого количества описок недостатков не обнаружено. В качестве пожелания хотелось бы, чтобы Д. Шацков доказал аналоги некоторых из своих теорем в случае когда величины α и β зависимы, например $\beta = \alpha^2$.

Мое мнение о диссертации такое. Диссертационное исследование «О свойствах функции меры иррациональности вещественного числа», в котором получены следующие результаты:

- найдены точные границы предела $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)}$ (теорема 2) для почти всех α и значение предела $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t}$;
- доказательство бесконечности перемены знаков разности $\psi_\theta(t) - \psi_{\theta'}(t)$ при $t \rightarrow \infty$ для почти всех пар матриц размера $m=1, n=2$ и $m \geq 2, n=1$;
- получение соотношения $I_\alpha(t) - I_\beta(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ для некоторых алгебраически независимых α и β .
- нахождение алгоритма вычисления предела $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t}$ для некоторых α ;

является хорошей кандидатской диссертацией, удовлетворяющей всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям. Автореферат полностью и правильно отражает содержание диссертации.

Соискатель ученой степени Д. О. Шацков заслуживает присвоения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент

Доктор физ.-мат. наук, профессор

В. И. Берник — В. И. Берник

06.04.2017

Подпись В. И. Берника

Заверяю

Ведущий специалист
по кадрам
Института математики
НАН Беларуси



В. И. Берник *В. И. Берник*

220 072, Сурганова 11,

Институт математики, Тел. 284 17 01

e-mail bernik.vasili@mail.ru