На правах рукописи

Солодовников Никита Алексеевич

Некоторые вопросы теории бифуркаций и теории аттракторов

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва – 2017

Работа выполнена на факультете математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

Научный руководитель: профессор Ильяшенко Юлий Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор факультета математики НИУ ВШЭ.

Официальные оппоненты:

профессор Морозов Альберт Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Института информационных технологий математики и механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского;

Тихомиров Сергей Борисович, доктор физико-математических наук, доцент математико-механического факультета СПбГУ.

Ведущая организация: Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Защита состоится 31 октября 2017 г. в 17 часов на заседании диссертационного совета Д 002.077.03 на базе ФГБУН ИППИ им. А. А. Харкевича РАН по адресу: 127051, Москва, Большой Каретный пер., д. 19, стр. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИППИ РАН.

Автореферат разослан «   » сентября 2017.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук   Соболевский А. Н.

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования Диссертация посвящена изучению трех областей маломерной динамики, а именно:

1. перемежаемости бассейнов,

2. быстро-медленным системам,

3. нелокальным бифуркациям.

Перемежаемость бассейнов. Понятие аттрактора играет важную роль в теории динамических систем. Попытки формализовать идею *притягивающего множества* приводят к различным определениям, наиболее часто используется определение максимального аттрактора.

Определение. Пусть динамическая система $f\colon M \to M$ переводит непустое открытое множество $U \subset M$ строго в себя, то есть $f(Cl(U)) \subset U$. Тогда максимальным аттрактором в области U называют пересечение всех образов U под действием итераций f,

$$A_{max}(U) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(U).$$

Многие отображения не имеют поглощающей области U, отличной от всего многообразия.

Пример. Рассмотрим сохраняющий ориентацию диффеоморфизм окружности с единственной неподвижной параболической точкой. Все точки при итерациях стремятся к неподвижной, однако единственной поглощающей областью является вся окружность, поэтому $A_{max} = \mathbb{S}^1$.

Определение. *Аттрактором Милнора* гомеоморфизма метрического пространства с мерой называют наименьшее по вложению замкнутое множество, которое содержит ω-предельные множества почти всех точек.

Определение. *Бассейном притяжения* компоненты аттрактора называется множество всех точек, которые при итерациях стремятся к данной компоненте.

В работе [1] построен пример отображения с перемежающимися бассейнами притяжения компонент аттрактора (любой из бассейнов пересекает любой открытый шар по множеству положительной меры). В работе [2] построен пример (открытой области) отображений, аттрактор Милнора которых имеет положительную меру. В обоих случаях отображение с редким свойством было изначально найдено в классе *косых произведений* со слоем отрезок, которые *сохраняют край* многообразия.

Определение. Косым произведением над отображением $H\colon B \to B$ со слоем S называется отображение

$$F\colon B \times S \to B \times S,\ (b, s) \mapsto (H(b), f_b(s)).$$

Множество B называют базой, а S — слоем косого произведения. Отображения $f_b\colon S \to S$ называют послойными отображениями.

Интересны свойства отображений, которые сохраняются при возмущениях, или, иначе говоря, соблюдаются в открытом множестве отображений. Для построения открытого множества отображений с интересующим свойством можно применять стратегию Городецкого–Ильяшенко. Как правило, она включает в себя по меньшей мере два шага: доказать, что свойство выполняется для некоторого косого произведения, а затем доказать, что свойство выполняется и для близких к нему диффеоморфизмов.

Упоминавшееся условие *сохранения края* многообразия существенно при использовании стратегии Городецкого–Ильяшенко. Так, неизвестно, существуют ли перемежающиеся бассейны или толстые аттракторы для отображений многообразий без края или для отображений, которые не сохраняют край. В работах [3] и [4] показано, что в пределах класса косых произведений с ограниченным одномерным слоем таких отображений нет.

Бассейны в примере Иттаи Кана метрически типичны, но топологически нетипичны. В **главе 1** построен пример открытой области отображений, бассейны каждого из которых перемежаются, при том что один из них типичен топологически (а именно: открыт и всюду плотен), а другой метрически.

Быстро-медленные системы естественным образом возникают в физических и биологических моделях. Впервые быстро-медленное поведение системы было обнаружено Ван-дер-Полем в радиотехнике ([5]) и получило название релаксационных колебаний. При увеличении параметра в некотором контуре колебания от близких к гармоническим переходили к поведению, в котором отчетливо различались «быстрый» скачок и «медленный» дрейф.

А. А. Андронов и А.А. Витт ([6]) обнаружили, что традиционно отбрасываемые при рассмотрениях моделей мультивибраторов малые параметры могут существенно влиять на поведение системы и приводить к релаксационным колебаниям. Н.А. Железцов и Л.В.Родыгин ([7]) учли малые параметры, повысив порядок дифференциального уравнения. Так изучение релаксационных колебаний свелось к изучению систем вида

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon),\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon).$$

Интересно поведение системы при $\varepsilon \to 0$. «Быстрое» движение происходит вблизи плоскостей $y = const$, а медленный «дрейф» — в окрестности медленной поверхности $M = \{(x, y) \mid f(x, y, 0) = 0\}$. Важную роль играет момент *срыва* — перехода от медленной динамики к быстрой, когда траектория подходит к границе притягивающего участка медленной поверхности. После срыва медленное движение сменяется быстрым. В свою очередь, быстрое движение может окончиться падением траектории в окрестность притягивающей части медленной поверхности. Л.С. Понтрягин и Е.Ф. Мищенко разработали методы, позволяющие анализировать динамику в окрестности точек срыва.

Понтрягин и ученики Дж. Риба независимо открыли эффект *затягивания потери устойчивости.* Эффект состоит в том, что траектория, пройдя границу устойчивости в окрестности медленной поверхности, может долгое время находиться вблизи неустойчивой части. В частности, в системе Ван-дер-Поля с одним дополнительным параметром возникали устойчивые предельные циклы, которые долгое время находились вблизи неустойчивой части медленной поверхности. Такие циклы называются уточными.

Уточные циклы в системах на плоскости удавалось обнаружить только в присутствии дополнительного параметра. Ю. С. Ильяшенко и Дж. Гукенхеймер обнаружили ([8]), что в системах на торе уточные циклы возникают при сколь угодно малом значении *единственного* параметра. В статье [8] рассмотрена нетипичная система с выпуклой медленной кривой. Позже И. Щуров доказал ([9]), что в типичных быстро-медленных системах на торе количество уточных циклов, которые совершают один обход вдоль медленного направления, не превосходит количества точек складок медленной кривой при проектировании вдоль быстрого направления.

В **главе 2** рассмотрен случай двуобходных уточных циклов, то есть циклов, которые замыкаются после двух обходов вдоль медленного направления. Оказывается, что геометрия медленной кривой не накладывает ограничений на их количество и существуют системы с выпуклой медленной кривой с наперед заданным количеством циклов.

Нелокальные бифуркации. Согласно критерию Андронова—Понтрягина векторное поле на $\mathbb{S}^2$ структурно устойчиво, если выполнены три условия

1. все особые точки гиперболичны,
2. все предельные циклы гиперболичны,
3. нет седловых связок.

Назовем векторное поле *квазиобщим*, если оно имеет ровно одно вырождение коразмерности 1. Имеет место следующая теорема.

Теорема (Сотомайор, [10])**.** В классе векторных полей на $\mathbb{S}^2$ в типичных однопараметрических семействах встречаются векторные поля с ровно одним вырождением из следующего списка

- **AH** — бифуркация Андронова—Хопфа,
- **SN** — седлоузел,
- **HC** — гомоклиническая траектория седлоузла,
- **SC** — седловая связка,
- **SL** — петля сепаратрисы седла,
- **PC** — параболический цикл.

В каждом из шести случаев на вырождение наложены дополнительные условия типичности. Упомянем только условия для параболического цикла — он должен иметь кратность 2. Исследование бифуркаций однопараметрических семейств на сфере включает в себя следующие вопросы:

1. Верно ли, что типичное однопараметрическое семейтво локально устойчиво?
2. Определяется ли бифуркация невозмущенным векторным полем?
3. Какова классификация типичных однопараметрических семейств (например, в смысле слабой эквивалентности семейств).

В **главе 3** даны ответы на эти вопросы для случая параболического цикла, наиболее сложного в однопараметрических семействах. Ответ в случае петли сепаратрисы дается той же техникой, что и для параболического цикла.

Цель работы. Целью работы являлось изучение бассейнов притяжения компонент аттрактора в системах с дискретным временем, изучение предельных циклов в быстро-медленных системах на двумерном торе, изучение бифуркаций однопараметрических семейств векторных полей на двумерной сфере.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Основные результаты заключаются в следующем

1. Доказано, что существует открытая область в пространстве сохраняющих край диффеоморфизмов прямого произведения тора на отрезок в себя со следующим свойством перемежаемости бассейнов. Аттрактор имеет две компоненты связности, при этом бассейн одной из компонент открыт и всюду плотен, а бассейн другой имеет положительную меру.

2. Доказано, что при заданной выпуклой медленной кривой для любого (нечетного) наперед заданного числа l существует быстро-медленная система, в которой возникает ровно l двуобходных уточных предельных циклов.

3. Доказано, что существуют два топологически эквивалентных векторных поля на сфере с параболическим циклом, такие что их типичные локальные однопараметрические деформации неэквивалентны (в смысле слабой эквивалентности). Классифицированы однопараметрические деформации полей с параболическим циклом.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты работы носят теоретический характер и могут быть использованы как для дальнейшего изучения быстро-медленных систем, так и в теории нелокальных бифуркаций.

Методы исследования. В диссертации применялись методы теории частично гиперболических динамических систем, методы теории быстро-медленных систем и восходящие к нижегородской математической школе методы сведения векторных полей к графам Леонтович–Майера–Федорова.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

1. Международная конференция «Динамика, бифуркации и странные аттракторы», Нижний Новгород, 2015. Доклад 19.06.2015 «Bifurcations on the two-sphere».

2. Научный семинар «Динамические системы» (Ю.С.Ильяшенко), МГУ, несколько докладов в разные годы (2013–2016).

Личный вклад автора. Результаты главы 1 получены лично диссертантом, главы 2 — в соавторстве с И. Щуровым, главы 3 — в соавторстве с Ю. Ильяшенко.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Список литературы содержит 37 наименований. Общий объем диссертации 76 страниц.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана теоретическая и практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения, а также даны основные определения.

Первая глава посвящена изучению эффекта перемежаемости бассейнов притяжения.

Определение. *Аттрактором Милнора* гомеоморфизма метрического пространства с мерой называют наименьшее по вложению замкнутое множество, которое содержит ω-предельные множества почти всех точек.

Компонентой аттрактора Милнора называется замкнутое инвариантное подмножество аттрактора, которое неразложимо (то есть содержит плотную орбиту) и не имеет других точек аттрактора в некоторой своей окрестности.

Квазикомпонентой аттрактора Милнора называется замкнутое инвариантное неразложимое подмножество аттрактора, которое невозможно представить в виде объединения замкнутых неразложимых инвариантных подмножеств.

Определение. *Бассейном притяжения* компоненты (квазикомпоненты) аттрактора называется множество точек, ω-предельные множества которых принадлежат этой компоненте (квазикомпоненте).

Основной результат главы 1 — следующая теорема.

Теорема. В классе сохраняющих край C^2-диффеоморфизмов $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ существует открытое множество отображений со следующими свойствами:

1. Множества $\mathbb{T}^2 \times 0$ и $\mathbb{T}^2 \times 1$ — квазикомпоненты аттрактора Милнора.
2. Бассейн квазикомпоненты $\mathbb{T}^2 \times 0$ имеет положительную меру.
3. Бассейн квазикомпоненты $\mathbb{T}^2 \times 1$ открыт и плотен в $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$.

Доказательство строится по следующему плану: вначале построен пример косого произведения, которое обладает искомыми свойствами, а затем показано, что свойствам удовлетворяют и близкие к построенному косому произведению диффеоморфизмы. При малом возмущении исчезает структура косого произведения, однако сохраняется центрально-устойчивое слоение с «кривыми» слоями, доказательство для которого строится аналогично доказательству для слоения со слоем отрезок.

Во **второй главе** исследуются двуобходные уточные циклы на двумерном торе. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y,\varepsilon) \\ \dot{y} = \varepsilon \end{cases} \quad (x,y) \in \mathbb{T}^2 \cong \mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z}^2),\ \varepsilon \in (\mathbb{R}_+, 0),$$

определим *медленную кривую* $M := \{(x, y) \mid f(x, y, 0) = 0\}$. Будем рассматривать системы только с *невырожденными* и *простыми* медленными кривыми.

Определение. Медленная кривая M называется *простой*, если она гладкая, связная и если ее поднятие на плоскость содержится внутри фундаментального квадрата $\{|x| < \pi, |y| < \pi\}$ и ограничивает в нем выпуклую область (в дальнейшем для краткости будем писать просто «выпуклая кривая»).

Определение. Обозначим точки срыва, то есть точки складки простой M при проекции вдоль быстрой координаты, через $G^{\pm}$. Точки срыва разбивают медленную кривую на устойчивую и неустойчивую части M^- и M^+. Простая медленная кривая M *невырожденна*, если и только если

1. В каждой точке $(x, y) \in M \setminus \{G^-, G^+\}$ выполнено условие невырожденности:
$$\frac{\partial f(x, y, 0)}{\partial x} \neq 0. \tag{1}$$

2. В точках срыва G^- и G^+ выполнено условие невырожденности:
$$\left.\frac{\partial^2 f(x, y, 0)}{\partial x^2}\right|_{G^{\pm}} \neq 0, \quad \left.\frac{\partial f(x, y, 0)}{\partial y}\right|_{G^{\pm}} \neq 0. \tag{2}$$

3. Пусть M^+ и M^- — неустойчивая и устойчивая части медленной кривой соответственно, тогда
$$\int_{M^+} f'_x(x, y, 0)dy + \int_{M^-} f'_x(x, y, 0)dy \neq 0. \tag{3}$$

Теперь можно формализовать определение уточной траектории и сформулировать основную теорему. Пусть, без ограничения общности, точки срыва $G^{\pm}$ имеют координаты $(0, \mp 1)$.

Определение. Зафиксируем малое $\delta > 0$. Положим
$$I_\delta = [-1 + \delta, 1 - \delta]$$

$$\Sigma^- = \{(0, y) \mid y \in I_\delta\},\ \Sigma^+ = \{(\pi, y) \mid y \in I_\delta\}.$$

Траекторию *уточная*, если пересекает и Σ^+, и Σ^-.

Основной результат:

Теорема. Для любого наперед заданного $l \in 2\mathbb{N} + 1$ существует открытое множество в пространстве быстро-медленных систем на двумерном торе со следующими свойствами:

1. Медленная кривая семейства — простая и невырожденная.

2. Для каждого поля из этого множества существует последовательность накапливающихся к нулю интервалов $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ на положительной полуоси параметра, таких что для любого $\varepsilon \in R_n$ система имеет в точности l уточных предельных циклов.

В **третьей главе** исследуются типичные локальные однопараметрические семейства, проходящие через поле с параболическим циклом.

Определение. Векторное поле принадлежит классу PC, если имеет параболический цикл γ и не имеет других вырождений. А именно, выполняются следующие условия:

- все особые точки и предельные циклы, за исключением γ, гиперболичны
- векторное поле не имеет седловых связок.
- параболический цикл γ имеет кратность 2.

Результат составляют две теоремы.

Теорема. Типичная однопараметрическая деформация типичного векторного поля класса PC слабо структурно устойчива.

Условия типичности векторного поля класса PC сформулированы явно.

Теорема. Существуют топологически эквивалентные поля класса PC такие, что их типичные однопараметрические деформации не эквивалентны (в смысле слабой эквивалентности).

При этом все локальные деформации типичного поля класса PC эквивалентны между собой. В **главе 3** также проведена классификация типичных однопараметрических деформаций полей класса PC.

Заключение

Благодарю научного руководителя Юлия Ильяшенко за постановку задач и поддержку, Илью Щурова за соавторство и терпение, Алексея Окунева и Станислава Минкова за критические замечания о двух последних главах диссертации.

Список публикаций автора по теме диссертации

1. Solodovnikov N. Boundary-preserving mappigs of a manifold with intermingling basins of components of the attractor, one of which is open / N. Solodovnikov // Transactions of the Moscow mathematical society. 2014. Vol 75. P. 69–76 – 0,5 п.л. (Scopus)

2. Schurov I., Solodovnikov N. Duck Factory on the Two-Torus: Multiple Canard Cycles Without Geometric Constraints / N. Solodovnikov // Journal of Dynamical and Control Systems. 2017. Vol 23, Iss.3. P. 481-498. – 1 п.л. (личный вклад автора – 0,6 п.л.). (Scopus)

3. Goncharuk N., Ilyashenko Yu., Solodovnikov N. Global bifurcations in generic one-parameter families with a parabolic cycle on the two-sphere // [Электронный ресурс]. — Working papers of Cornell University, 2017. — arXiv:1707.09779

— Режим доступа: https://arxiv.org/abs/1707.09779. — 1,5 п.л. (личный вклад автора — 0,5 п.л.)

Список литературы

1. Kan I. Open sets of diffeomorphisms having two attractors, each with an everywhere dense basin // Bull. AMS. (N. S.) 1994. Vol. 31. P. 68–74.
2. Ilyashenko Yu. Thick attractors of boundary preserving diffeomorphisms // Indag. Math. (N. S.) 2011. Vol. 22, No 3–4. P. 257–314.
3. Kleptsyn V., Volk D. Physical Measures for Nonlinear Random Walks on Interval // Moscow Mathematical Journal. 2014. Vol. 14, no. 2. P. 339–365.
4. Okunev A. Milnor Attractors of Skew Products with the Fiber a Circle Journal of Dynamical and Control Systems. Подана в печать.
5. Van der Pol, B., On relaxation-oscillations, The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. and J. of Sci., 2:7 (1927), P. 978–992
6. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. — 2-е издание. — 1959. — С. 727–855. — 914 с.
7. Железцов Н. А., К теории разрывных колебаний в системах второго порядка. Изв. высших учебных заведений. Радиофизика 1:1 (1958), С. 67–78.
8. J. Guckenheimer, Yu. S. Ilyashenko, *The Duck and the Devil: Canards on the Staircase*, Moscow Math. J., Volume 1, Number 1, 2001, pp. 27–47.
9. I. Schurov. *Ducks on the torus: existence and uniqueness.* J. of Dynamical and Control Systems. **16**:2 (2010), 267–300. See also: arXiv:0910.1888v1.
10. Sotomayor J. *Generic one-parameter families of vector fields on two-demensional manifolds* //Publications Mathématiques de l'IHÉS, 43 (1974), p. 5–46

Научное издание

Солодовников Никита Алексеевич

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук на тему:

Некоторые вопросы теории бифуркаций и теории аттракторов

Подписано в печать 25.01.2011. Формат 60×90 1/16. Тираж 100 экз. Заказ 256.

Санкт-Петербургская издательская фирма «Наука» РАН. 199034, Санкт-Петербург, Менделеевская линия, 1, http://www.naukaspb.spb.ru