

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи

Солодовников Никита Алексеевич

Некоторые вопросы теории бифуркаций и теории аттракторов

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное
управление

Научный руководитель

д. ф.-м. н., проф.

Ильяшенко Юлий Сергеевич

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Перемежающиеся бассейны	8
1.1. Введение	8
1.2. Пример косого произведения	10
1.3. Возмущение косого произведения	14
Глава 2. Двухобходные уточные циклы	
в быстро-медленных системах на торе	17
2.1. Введение	17
2.2. Основная теорема	19
2.3. Доказательство основного результата	21
2.4. Доказательство вспомогательных лемм	29
Глава 3. Мелькающие сепаратрисные связки: параболический цикл	38
3.1. Основные результаты	38
3.2. Бифуркации в $\mathcal{PC}$ -семействах	44
3.3. ЛМФ-графы и их связные расширения	52
3.4. Классификация $\mathcal{PC}$ -семейств	55
3.5. Структурная устойчивость	68
3.6. Носитель бифуркации и большой носитель бифуркации	71
Список литературы	74

Введение

Актуальность и степень разработанности темы исследования Диссертация посвящена изучению трех областей маломерной динамики, а именно:

1. перемежаемости бассейнов,
2. быстро-медленным системам,
3. нелокальным бифуркациям.

ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ БАСЕЙНОВ. Понятие аттрактора играет важную роль в теории динамических систем. Попытки формализовать идею *притягивающего множества* приводят к различным определениям, наиболее часто используется определение максимального аттрактора.

Определение. Пусть динамическая система $f: M \rightarrow M$ переводит непустое открытое множество $U \subset M$ строго в себя, то есть $f(Cl(U)) \subset U$. Тогда максимальным аттрактором в области U называют пересечение всех образов U под действием итераций f ,

$$A_{max}(U) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(U).$$

Многие отображения не имеют поглощающей области U , отличной от всего многообразия.

Пример. Рассмотрим сохраняющий ориентацию диффеоморфизм окружности с единственной неподвижной параболической точкой. Все точки при итерациях стремятся к неподвижной, однако единственной поглощающей областью является вся окружность, поэтому $A_{max} = \mathbb{S}^1$.

Определение. Аттрактором Милнора гомеоморфизма метрического пространства с мерой называют наименьшее по вложению замкнутое множество, которое содержит ω -предельные множества почти всех точек.

Определение. Бассейном притяжения компоненты аттрактора называется множество всех точек, которые при итерациях стремятся к данной компоненте.

В работе [11] построен пример отображения с перемежающимися бассейнами притяжения компонент аттрактора (любой из бассейнов пересекает любой открытый шар по множеству положительной меры). В работе [3] построен пример (открытой области) отображений,

аттрактор Милнора которых имеет положительную меру. В обоих случаях отображение с редким свойством было изначально найдено в классе *косых произведений* со слоем отрезок, которые *сохраняют край* многообразия.

Определение. *Косым произведением над отображением $H: B \rightarrow B$ со слоем S называется отображение*

$$F: B \times S \rightarrow B \times S, (b, s) \mapsto (H(b), f_b(s)).$$

Множество B называют базой, а S — слоем косого произведения. Отображения $f_b: S \rightarrow S$ называют послойными отображениями.

Интересны свойства отображений, которые сохраняются при возмущениях, или, иначе говоря, соблюдаются в открытом множестве отображений. Для построения открытого множества отображений с интересующим свойством можно применять стратегию Городецкого–Ильяшенко. Как правило, она включает в себя по меньшей мере два шага: доказать, что свойство выполняется для некоторого косого произведения, а затем доказать, что свойство выполняется и для близких к нему диффеоморфизмов.

Упомянувшееся условие *сохранения края* многообразия существенно при использовании стратегии Городецкого–Ильяшенко. Так, неизвестно, существуют ли перемежающиеся бассейны или толстые аттракторы для отображений многообразий без края или для отображений, которые не сохраняют край. В работах [4] и [5] показано, что в пределах класса косых произведений с ограниченным одномерным слоем таких отображений нет.

Бассейны в примере Иттай Кана метрически типичны, но топологически нетипичны. В **главе 1** построен пример открытой области отображений, бассейны каждого из которых перемежаются, при том что один из них типичен топологически (а именно: открыт и всюду плотен), а другой метрически.

БЫСТРО-МЕДЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ естественным образом возникают в физических и биологических моделях. Впервые быстро-медленное поведение системы было обнаружено Ван-дер-Полем в радиотехнике ([6]) и получило название релаксационных колебаний. При увеличении параметра в некотором контуре колебания от близких к гармоническим переходили к поведению, в котором отчетливо различались «быстрый» скачок и «медленный» дрейф.

А. А. Андронов и А.А. Витт ([7]) обнаружили, что традиционно отбрасываемые при рассмотрении моделей мультивibrаторов малые параметры могут существенно влиять на поведение системы и приводить к релаксационным колебаниям. Н.А. Железцов и Л.В.Родыгин ([8]) учли малые параметры, повысив порядок дифференциального уравнения. Так изучение

релаксационных колебаний свелось к изучению систем вида

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \quad \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon).$$

Интересно поведение системы при $\varepsilon \rightarrow 0$. «Быстрое» движение происходит вблизи плоскостей $y = \text{const}$, а медленный «дрейф» — в окрестности медленной поверхности $M = \{(x, y) \mid f(x, y, 0) = 0\}$. Важную роль играет момент *срыва* — перехода от медленной динамики к быстрой, когда траектория подходит к границе притягивающего участка медленной поверхности. После срыва медленное движение сменяется быстрым. В свою очередь, быстрое движение может окончиться падением траектории в окрестность притягивающей части медленной поверхности. Л.С. Понтрягин и Е.Ф. Мищенко разработали методы, позволяющие анализировать динамику в окрестности точек срыва.

Понтрягин и ученики Дж. Роба независимо открыли эффект *затягивания потери устойчивости*. Эффект состоит в том, что траектория, пройдя границу устойчивости в окрестности медленной поверхности, может долгое время находиться вблизи неустойчивой части. В частности, в системе Ван-дер-Поля с одним дополнительным параметром возникали устойчивые предельные циклы, которые долгое время находились вблизи неустойчивой части медленной поверхности. Такие циклы называются *уточными*.

Уточные циклы в системах на плоскости удавалось обнаружить только в присутствии дополнительного параметра. Ю.С. Ильяшенко и Дж. Гукенхаймер обнаружили ([20]), что в системах на торе уточные циклы возникают при сколь угодно малом значении *единственного* параметра. В статье [20] рассмотрена нетипичная система. Позже И. Щуров доказал ([21]), что в типичных быстро-медленных системах на торе количество уточных циклов, которые совершают один обход вдоль медленного направления, не превосходит количества точек складок медленной кривой при проектировании вдоль быстрого направления (т.е. количества «вертикальных касательных»).

В **главе 2** рассмотрен случай двубоходных уточных циклов, то есть циклов, которые замыкаются после двух обходов вдоль медленного направления. Оказывается, что геометрия медленной кривой не накладывает ограничений на их количество и существуют системы с медленной кривой с лишь двумя вертикальными касательными с наперед заданным количеством циклов.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ БИФУРКАЦИИ. Согласно критерию Андронова—Понтрягина векторное поле на $\mathbb{S}^2$ структурно устойчиво, если выполнены три условия

1. все особые точки гиперболичны,

2. все предельные циклы гиперболичны,
3. нет седловых связок.

Назовем векторное поле *квазиобщим*, если оно имеет ровно одно вырождение коразмерности 1. Имеет место следующая теорема.

Теорема (Сотомайор, [37]). *В классе векторных полей на $\mathbb{S}^2$ в типичных однопараметрических семействах встречаются векторные поля с ровно одним вырождением из следующего списка*

- AH — бифуркация Андронова—Хопфа,
- SN — седлоузел,
- HC — гомоклиническая траектория седлоузла,
- SC — седловая связка,
- SL — петля сепаратрисы седла,
- PC — параболический цикл.

В каждом из шести случаев на вырождение наложены дополнительные условия типичности. Упомянем только условия для параболического цикла — он должен иметь кратность 2. Исследование бифуркаций однопараметрических семейств на сфере включает в себя следующие вопросы:

1. Верно ли, что типичное однопараметрическое семейство локально устойчиво?
2. Определяется ли бифуркация невозмущенным векторным полем?
3. Какова классификация типичных однопараметрических семейств (например, в смысле слабой эквивалентности семейств).

В **главе 3** даны ответы на эти вопросы для случая параболического цикла, наиболее сложного в однопараметрических семействах. Ответ в случае петли сепаратрисы дается той же техникой, что и для параболического цикла.

Цель работы. Целью работы являлось изучение бассейнов притяжения компонент аттрактора в системах с дискретным временем, изучение предельных циклов в быстро-медленных системах на двумерном торе, изучение бифуркаций однопараметрических семейств векторных полей на двумерной сфере.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Основные результаты заключаются в следующем

1. Доказано, что существует открытая область в пространстве сохраняющих край диффеоморфизмов прямого произведения тора на отрезок в себя со следующим свойством перемежаемости бассейнов. Аттрактор имеет две компоненты связности, при этом бассейн одной из компонент открыт и всюду плотен, а бассейн другой имеет положительную меру.
2. Доказано, что при заданной медленной кривой с двумя вертикальными касательными для любого нечетного наперед заданного числа l существует быстро-медленная система, в которой возникает ровно l двубоковых уточных предельных циклов.
3. Доказано, что существуют два топологически эквивалентных векторных поля на сфере с параболическим циклом, такие что их типичные локальные однопараметрические деформации неэквивалентны (в смысле слабой эквивалентности). Классифицированы однопараметрические деформации полей с параболическим циклом.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты работы носят теоретический характер и могут быть использованы как для дальнейшего изучения быстро-медленных систем, так и в теории нелокальных бифуркаций.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

1. Международная конференция «Динамика, бифуркации и странные аттракторы», Нижний Новгород, 2015. Доклад 19.06.2015 «Bifurcations on the two-sphere».
2. Научный семинар «Динамические системы» (Ю.С.Ильяшенко), МГУ, несколько докладов в разные годы (2013–2016).

Личный вклад автора. Результаты главы 1 получены лично диссертантом, главы 2 — в соавторстве с И. Щуровым, главы 3 — в соавторстве с Ю. Ильяшенко.

Глава 1

Перемежающиеся бассейны

1.1. Введение

1.1.1. Предпосылки и результат

Определение 1. Аттрактором Милнора гомеоморфизма метрического пространства с мерой называют наименьшее по вложению замкнутое множество, которое содержит ω -предельные множества почти всех точек.

Компонентой аттрактора Милнора называется замкнутое инвариантное подмножество аттрактора, которое неразложимо (то есть содержит плотную орбиту) и не имеет других точек аттрактора в некоторой своей окрестности.

Определение 2. Бассейном притяжения компоненты аттрактора называется множество точек, ω -предельные множества которых принадлежат этой компоненте.

Иттай Кан в [11] построил пример эндоморфизма со свойством «перемежаемости» бассейнов. Аттрактор отображения состоит из двух компонент, причем бассейн каждой из компонент пересекает любой открытый шар по ненулевой мере. В работах [17] и [10] построено открытое множество C^2 -гладких диффеоморфизмов с тем же свойством. Основной результат раздела — следующая теорема.

Теорема 1. В классе сохраняющих край C^2 -диффеоморфизмов $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ существует открытое множество отображений со следующими свойствами:

1. Множества $\mathbb{T}^2 \times 0$ и $\mathbb{T}^2 \times 1$ — компоненты аттрактора Милнора.
2. Бассейн компоненты $\mathbb{T}^2 \times 0$ имеет положительную меру.
3. Бассейн компоненты $\mathbb{T}^2 \times 1$ открыт и плотен в $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$.

Замечание 1. Отображение с указанными свойствами было замечено как обратное к отображению с аттрактором Милнора положительной лебеговской меры из работы [3].

1.1.2. Обозначения и схема доказательства

Напомним определение косога произведения.

Определение 3. Косым произведением над отображением $A: B \rightarrow B$ со слоем S называется отображение

$$F: B \times S \rightarrow B \times S, (b, s) \mapsto (A(b), f_b(s)).$$

Множество B называют базой, а S — слоем косого произведения. Отображения $f_b: S \rightarrow S$ называют послойными отображениями.

В разделе 1.2 построен класс «хороших» косых произведений с базой $\mathbb{T}^2$ и слоем $[0, 1]$, для которых верны утверждения Теоремы 1. В разделе 1.3 доказано, что диффеоморфизмы из малой окрестности «хороших» косых произведений удовлетворяют условиям Теоремы 1. Доказательство использует методы теории частичной гиперболичности (см Хирш—Пью—Шуб [2]). В разделе 1.1.3 даны необходимые для доказательства предварительные результаты.

1.1.3. Предварительные результаты

Определение 4. Косое произведение F над ановским диффеоморфизмом A тора удовлетворяет условию доминантного расщепления, если

$$\max_b \text{Lip} f_b < \mu, \quad \max_b \text{Lip} f_b^{-1} < \frac{1}{\lambda},$$

где $\lambda < 1 < \mu$ — константы сжатия и растяжения диффеоморфизма A .

Теорема 2. Пусть косое произведение F над ановским диффеоморфизмом тора A удовлетворяет условию доминантного расщепления. Тогда любое малое C^1 -возмущение F полусопряжено отображению в базе: существует проекция $p: X \rightarrow B = \mathbb{T}^2$ такая, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & X \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{A} & B \end{array}$$

коммутативна, а слои $M_b = p^{-1}(b)$ непрерывно зависят от b и C^1 -гладкие.

Семейство $\{M_b \mid b \in B\}$ образует «центральное слоение», каждый слой которого — график функции $\beta_b: M \rightarrow B$. Теорема 2 утверждает только непрерывную зависимость β_b от b .

Теорема 3 (Городецкий, [16]). В условиях Теоремы 2 функция β_b гёльдерова по b .

Теорема 4 (Ильяшенко—Негут, [9]). Показатель Гёльдера в Теореме 3 стремится к 1, когда C^1 -норма возмущения стремится к нулю.

Обзор гёльдеровых слоений есть, например, в [14].

1.2. Пример косого произведения

Определение 5. *Косое произведение $\mathcal{F}: (b, x) \mapsto (Ab, f_b(x))$ назовем хорошим, если выполнены следующие условия.*

1. *Отображение A имеет точку a периода t такую, что композиция послойных отображений вдоль орбиты точки a сдвигает внутренние точки слоя вверх:*

$$f_{A^{m-1}a} \circ \dots \circ f_a(x) > x \quad \forall x \in (0, 1) \quad (1.1)$$

2. *Точка 0 — отталкивающая для этой композиции:*

$$(f_{A^{m-1}a})'(0) \cdot \dots \cdot (f_a)'(0) > 1. \quad (1.2)$$

3. *Все послойные отображения на интервале $(1/2, 1)$ сдвигают точки вверх:*

$$\forall b \in \mathbb{T}^2 \quad \forall x \in (1/2, 1): f_b(x) > x \text{ и } (f_b)'(1) < 1. \quad (1.3)$$

4. *Компонента границы $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ в среднем притягивает:*

$$\int_{\mathbb{T}^2} \ln(f_b)'(0) db < 0. \quad (1.4)$$

5. *Для любого b послойное отображение близко к тождественному в следующем смысле:*

$$\|(f_b)' - 1\|_C < \frac{1}{4} \quad (1.5)$$

6. *Коэффициенты сжатия и растяжения A достаточно далеки от 1, чтобы $\mathcal{F}$ удовлетворяло условию доминантного расщепления.*

Замечание 2. *Все неравенства в Определении 5 открыты, поэтому хорошие косые произведения образуют открытое множество в классе сохраняющих край гладких косых произведений.*

Обозначим через $B_0(\mathcal{F})$ и $B_1(\mathcal{F})$ множества точек, которые стремятся при итерациях $\mathcal{F}$ к компонентам края $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ и $\mathbb{T}^2 \times \{1\}$ соответственно. Для краткости ниже будем писать

просто B_0 и B_1 .

Теорема 5. *У хорошего косого произведения множество B_1 открыто и всюду плотно, а мера Лебега множества B_0 положительна.*

Диффеоморфизм A ановский, поэтому транзитивен, а значит из Теоремы 5 следует, что компоненты границы X являются компонентами аттрактора, а B_0 и B_1 — соответствующими бассейнами. Следовательно, хорошие косые произведения удовлетворяют требованиям Теоремы 1.

Докажем по очереди три утверждения теоремы 5.

Доказательство Теоремы 5.

Бассейн B_1 открыт. Из свойства (1.3) и транзитивности диффеоморфизма A следует, что $\mathbb{T}^2 \times \{1\}$ — компонента аттрактора и что $\mathcal{F}$ обладает поглощающей областью $\mathbb{T}^2 \times (1/2, 1]$. Следовательно, бассейном притяжения компоненты $\mathbb{T}^2 \times \{1\}$ является множество

$$B_1 = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}^{-n} \{ \mathbb{T}^2 \times (1/2, 1] \}.$$

Множество B_1 открыто как счетное объединение открытых множеств.

Бассейн B_1 плотен в X . Построим плотное в X подмножество W бассейна B_1 .

Рассмотрим итерации действия $\mathcal{F}^m$ на $W = \{b \times (0, 1) \mid b \in w^s(a)\}$, где точка a периодическая периода m , а $w^s(a)$ — ее устойчивое многообразие. При $k \rightarrow \infty$ по определению устойчивого многообразия $A^k(b) \rightarrow a$ и образ $(\mathcal{F}^m)^k(b \times (0, 1))$ лежит в малой окрестности слоя $a \times [0, 1]$. Неравенства в условиях (1.1), (1.2) и (1.3) открыты, поэтому ограничение $\mathcal{F}^m$ на окрестность слоя $a \times (0, 1)$ сдвигает все точки вверх. Следовательно, для любой точки $x \in W$ при достаточно больших k образ $(\mathcal{F}^m)^k(x)$ принадлежит поглощающей области. Следовательно, $W \subset B_1$. Осталось заметить, что многообразие $w^s(a)$ плотно в $\mathbb{T}^2$, поэтому W , а значит и B_1 , плотно в X .

Множество B_1 открыто и плотно в X , поэтому $B_0 \subset X \setminus B_1$ нигде не плотно.

Мера множества B_0 положительна. Построим подмножество $C \subset X$ положительной меры и покажем, что $C \subset B_0$. Для этого оценим послойные отображения с помощью линейных приближений. Рассмотрим интеграл

$$S = S(\mathcal{F}, \delta) = \int_{\mathbb{T}^2} \ln \max_{0 \leq x \leq \delta} (f_b)'(x) db < 0.$$

как функцию параметра δ . Послойные отображения f_b гладкие, поэтому S непрерывна по δ .

По свойству (1.4) $S(0) < 0$. Следовательно, $S < 0$ и при малых значениях параметра. Зафиксируем $\delta > 0$ такое, что $S|_{[0,\delta]} < 0$. Обозначим

$$l_f(b) := \max_{0 \leq x \leq \delta} f'_b(x).$$

Из (1.4) следует, что $\ln l_f(b)$ — измеримая функция. Аносовский диффеоморфизм A эргодичен.

Теорема 6. Пусть $\varphi \in C(\mathbb{T}^2)$, A — аносовский диффеоморфизм двумерного тора, а S — пространственное среднее функции φ :

$$S(\varphi) = \int_{\mathbb{T}^2} \varphi(b) db.$$

Тогда для почти всех (по мере Лебега) точек x тора временные средние

$$\frac{1}{n}(\varphi(x) + \varphi Ax + \dots + \varphi(A^n x))$$

сходятся к пространственному при $n \rightarrow \infty$.

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon, b)$, такой что при $n \geq N(\varepsilon, b)$ для почти всех $b \in \mathbb{T}^2$:

$$\left| \frac{1}{n} (\ln l_f(b) + \ln l_f(Ab) + \dots + \ln l_f(A^{n-1}b)) - S \right| < \varepsilon. \quad (1.6)$$

Зафиксируем $\varepsilon < |S|$ и рассмотрим счетный набор множеств $T_k \subset \mathbb{T}^2$

$$T_k := \{(b, x) \mid N(\varepsilon, b) = k\}.$$

По Теореме 6 множество $\bigcup_{k \geq 0} T_k$ имеет полную меру. Для каждого k определим $\delta_k > 0$ такое, что $(\max_{b \in \mathbb{T}^2} g(b))^k \cdot \delta_k < \delta$ и положим $C_k := T_k \times [0, \delta_k]$, $C := \bigcup_{k \geq 0} C_k$. Мера C положительна, так как мера хотя бы одного из T_k положительна. Осталось доказать, что $C \subset B_0$. Покажем, что $x(\mathcal{F}^n(b, x)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для $(b, x) \in C_k$. При $x \leq \delta$ по теореме Лагранжа о конечных приращениях $f_b(x) \leq l_f(b)x$.

Определение 6. Точка $b \in \mathbb{T}^2$ принадлежит ε -плохому множеству отображения $\mathcal{F}$, $\varepsilon \neq 0$, если $\overline{\lim}_n \frac{1}{n} (\ln l_f(b) + \dots + \ln l_f(A^{n-1}b)) \geq S - \varepsilon$. Обозначим плохое множество через $Z_\varepsilon(\mathcal{F})$.

Утверждение 1. Если $b \in \mathbb{T}^2 \setminus Z_S(\mathcal{F})$, то существует k такое, что точка $b \times \{\delta_k\}$ принадлежит B_0 .

Доказательство Утверждения 1. Рассмотрим $b \in \mathbb{T}^2 \setminus Z_S(\mathcal{F})$,

$$\overline{\lim}_n \frac{1}{n} (\ln l_f(b) + \dots + \ln l_f(A^{n-1}b)) < 0 \quad (1.7)$$

Следовательно, существуют постоянная $c > 0$ и $N = N(b) \in \mathbb{N}$ такие, что при $n > N$

$$\ln x + \ln l_f(b) + \dots + \ln l_f(A^{n-1}b) < \ln x - cn,$$

$$l_f(A^{n-1}b) \cdot \dots \cdot l_f(b) \cdot x < x \cdot e^{-cn} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (1.8)$$

Рассмотрим $x = \delta_N$. Докажем по индукции, что для всех n

$$x(\mathcal{F}^n(b, x)) \leq l_f(A^{n-1}b) \cdot \dots \cdot l_f(b) \cdot x \quad (1.9)$$

При $n \leq N$ утверждение следует из определений l_f и δ_N . Шаг индукции: пусть оценка верна при $n = 0, \dots, j$, $j > N$. Тогда

$$x(\mathcal{F}^{j+1}(b, x)) \leq f_{A^j b}(l_f(A^{n-1}b) \cdot \dots \cdot l_f(b)x).$$

Если $n > N$, то и $l_f(A^{n-1}b) \cdot \dots \cdot l_f(b) \cdot x < x e^{-cn} < \delta$, а значит, по определению l_f ,

$$f_{A^j b}(l_f(A^{n-1}b) \cdot \dots \cdot l_f(b) \cdot x) \leq l_f(A^j b)(l_f(A^{n-1}b) \cdot \dots \cdot l_f(b) \cdot x).$$

Индукция завершена. Из (1.8) и (1.9) следует искомое утверждение. □

Утверждение 2. $C_k \subset B_0$ при любом k .

Доказательство Утверждения 2. Заметим, что N в определении T_k (и C_k) подходит в качестве k в доказательство Утверждения 1. Следовательно, для $b \in T_k$ верно, что $(b, \delta_k) \in B_0$, а значит $C_k \subset B_0$. □

Теорема 5 доказана. □

Следствие 1. Если точки b_1 и b_2 лежат на одном устойчивом многообразии, то их образы сближаются под действием итераций $\mathcal{F}$. Следовательно, множества предельных точек последовательности временных средних в точках b_1 и b_2 совпадают. Значит, $Z_\varepsilon(\mathcal{F})$ и T_k при всех $k \geq 0$ и $\varepsilon \neq 0$ вместе с любой своей точкой содержат ее устойчивое многообразие.

Следствие 2. Обратим Утверждение 1. Если в слое $b \times (0, 1)$ нет точек B_0 , то $b \in Z_S(\mathcal{F})$,

$$\overline{\lim}_n \frac{1}{n} (\ln l_f(b) + \dots + \ln l_f(A^{n-1}b)) \geq 0.$$

1.3. Возмущение косо го произведения

Пусть $\mathcal{G}$ — близкий к $\mathcal{F}$ C^2 -гладкий диффеоморфизм, сохраняющий границу X . По Теоремам 2, 3 и 4 существует $\mathcal{G}$ -инвариантное слоение $\{M_b = p^{-1}b \mid b \in \mathbb{T}^2\}$, причем слои M_b стремятся к вертикальным $b \times [0, 1]$, когда норма $\|\mathcal{G} - \mathcal{F}\|_{C^1} \rightarrow 0$. Обозначим $g_b(x) := x(\mathcal{G}(\tilde{b}, x))$, где $(\tilde{b}, x) \in M_b$. Обозначим, как прежде, через $B_0(\mathcal{G})$ и $B_1(\mathcal{G})$ бассейны притяжения компонент края $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ и $\mathbb{T}^2 \times \{1\}$ под действием $\mathcal{G}$. Покажем, что требования Теоремы 1 выполнены, если $\mathcal{G}$ достаточно близко к $\mathcal{F}$.

1.3.1. Бассейн B_1 открыт и плотен в X

Докажем, что бассейн $B_1(\mathcal{G})$ открыт. По условию (1.3) $f'_b(1) < 1$ при $b \in \mathbb{T}^2$. Значит, при малых $\delta > 0$ существует сохраняющее ориентацию линейное сжатие $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, 1 \mapsto 1$ такое, что для любой точки $(b, x) \in \mathbb{T}^2 \times (1 - \delta, 1)$ сжатие ограничивает снизу действие послойного отображения: $f_b(x) > f_1(x)$. Тор компактен, поэтому, если $\mathcal{G}$ близко к $\mathcal{F}$, при всех $b \in \mathbb{T}^2$ выполняется и оценка $g_b(x) > f_1(x)$. Следовательно, отображение $\mathcal{G}$ имеет открытую поглощающую область $\mathbb{T}^2 \times (1 - \delta, 1]$. Поэтому $B_1(\mathcal{G}) = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{G}^{-k}(\mathbb{T}^2 \times (1 - \delta, 1])$, а значит B_1 открыт как счетное объединение открытых множеств.

Докажем, что бассейн $B_1(\mathcal{G})$ плотен в X . Аносовский диффеоморфизм A структурно устойчив, поэтому $\mathcal{F}|_{\partial X}$ и $\mathcal{G}|_{\partial X}$ сопряжены. Точка a — m -периодическая для A . Следовательно, $\mathcal{G}^m|_{\mathbb{T}^2 \times \{1\}}$ имеет неподвижную точку $\tilde{a} \times \{1\}$, которая близка к $a \times \{1\}$. Рассмотрим замкнутый цилиндр $C = \{b \times [0, 1] \mid b \in Cl(U_\varepsilon(a))\}$ и «кривой цилиндр» $\tilde{C} = \{p^{-1}(b) \mid b \in U_{\varepsilon/2}(\tilde{a})\}$. По свойствам (1.1) и (1.2) $x(\mathcal{F}^m(b, x)) > x$ для $(b, x) \in C$ при достаточно малом ε . Поэтому, если $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}$ достаточно близки, то $\tilde{C} \subset C$ и для $\mathcal{G}$ выполняется соответствующая оценка: $x(\mathcal{G}^m(b, x)) > x$ для $(b, x) \in \tilde{C}$. Итак, $\tilde{C} \subset B_1$.

Заметим, что по определению устойчивого многообразия w^s любая точка из плотного в X множества $\{p^{-1}b \mid b \in w^s(\tilde{a})\}$ под действием итераций $(\mathcal{G}^m)^k, k \geq 0$ приходит в $\{p^{-1}b \mid b \in$

$w^s(\tilde{a}) \cap U_{\varepsilon/2}(\tilde{a})\} \subset \tilde{C}$, а значит принадлежит B_1 . Следовательно, бассейн B_1 плотен в X .

1.3.2. Мера бассейна B_0 положительна

Напомним специальную эргодическую теорему. В более сильной форме она доказана в [12].

Теорема 7 (Салтыков, [19]). Пусть $\varphi \in C(\mathbb{T}^2)$, A — ановский диффеоморфизм двумерного тора. Пусть $L(b)$ — множество предельных точек последовательности временных средних φ под действием диффеоморфизма A , а S — пространственное среднее:

$$S(\varphi) = \int_{\mathbb{T}^2} \varphi(b) db.$$

Положим

$$K_{\varkappa} := \{b \mid L(b) \setminus [S - \varkappa, S + \varkappa] \neq \emptyset\}$$

— множество точек тора, над которыми временное среднее уклоняется от пространственного более чем на $\varkappa$. Тогда $\dim_H K_{\varkappa} < 2$ для всех $\varkappa > 0$.

Определение 7. Назовем ε -плохим множеством $Z_\varepsilon(\mathcal{G})$ диффеоморфизма $\mathcal{G}$ образ $Z_\varepsilon(\mathcal{F})$ под действием сопряжения в $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$.

Строение плохого множества. Утверждение 1, Следствия 1, 2 и Теорема 7 дают достаточное описание $Z_\varepsilon(\mathcal{F})$:

1. $Z_\varepsilon(\mathcal{F})$ при $\varepsilon \neq 0$ с каждой точкой содержит ее устойчивое многообразие.
2. Если $b \in \mathbb{T}^2 \setminus Z_S(\mathcal{F})$, то слой $b \times (0, 1)$ содержит точки $B_0(\mathcal{F})$.
3. $\dim_H Z_\varepsilon(\mathcal{F}) < 2$ при $\varepsilon < 0$.

Утверждение 3. Если $\hat{b} \in \mathbb{T}^2 \setminus Z_{S/2}(\mathcal{G})$, то внутренность слоя $M_{\hat{b}}$ содержит точки $B_0(\mathcal{G})$.

Доказательство Утверждения 3. См. Доказательство Утверждения 1. Обозначим n -е временное среднее функции f в точке b через $s_n(f, b)$. Пусть $b \times \{0\}$ сопряжено точке $\hat{b} \times \{0\}$. По Теоремам 2, 3, 4

$$\overline{\lim} s_n(l_f, b) - \overline{\lim} s_n(l_g, \hat{b}) \in O(\|\mathcal{G} - \mathcal{F}\|). \quad (1.10)$$

$$S(\mathcal{F}) - S(\mathcal{G}) \in O(\|\mathcal{G} - \mathcal{F}\|). \quad (1.11)$$

Следовательно, если $\hat{b} \in \mathbb{T}^2 \setminus Z_{S/2}(\mathcal{G})$ и $\mathcal{G}$ достаточно близко к $\mathcal{F}$, то $\overline{\lim} s_n(l_g, b) < 0$. Далее доказательство повторяет доказательство Утверждения 1. $\square$

Докажем, что мера $B_0(\mathcal{G})$ положительна. Идея доказательства: проинтегрировать по точкам $b \in \mathbb{T}^2 \setminus Z_{S/2}(\mathcal{G})$ отрезки кривых слоев M_b , которые принадлежат B_0 . Проверим, что мера соответствующего множества положительна.

Теорема 8 (лемма Фальконера, [1]). *Пусть гомеоморфизм $h: X \rightarrow Y$ — гёльдеров с показателем α и хаусдорфова размерность множества $D \subset X$ равна d . Тогда $\dim_H hD \leq \frac{d}{\alpha}$.*

Следствие 3. *По Теореме 7 $\dim_H Z_{S/2}(\mathcal{F}) < 2$. По Теореме 4, если $\mathcal{G}$ близко к $\mathcal{F}$ в C^1 , то показатель гёльдера сопряжения стремится к 1. Следовательно, по Теореме 8, $\dim_H Z_{S/2}(\mathcal{G}) < 2$ и $Leb_2 Z_{S/2}(\mathcal{G}) = 0$.*

Рассмотрим кривую $\gamma \in \mathbb{T}^2 \times \{0\}$, которая трансверсальна устойчивому слоению действия $\mathcal{G}$. В [15] §5 введено понятие *абсолютной непрерывности* слоений: слоение абсолютно непрерывно, если отображение голономии вдоль слоения переводит множества нулевой меры в множества нулевой меры. В той же работе доказана следующая теорема.

Теорема 9 (Аносов, [15]). *Слоение на устойчивые многообразия для действия гиперболического C^2 -диффеоморфизма абсолютно непрерывно.*

Множество $Z_{S/2}$ и его дополнение состоят из устойчивых слоев действия $\mathcal{G}$. Тогда $Leb_1 \gamma \cap Z_{S/2} = 0$, иначе по Теореме 9 $Leb_2 Z_{S/2} > 0$, что невозможно. Следовательно, $Leb_1 \gamma \cap (\mathbb{T}^2 \setminus Z_{S/2}) = 1$.

Обозначим через D насыщение $\gamma \cap (\mathbb{T}^2 \setminus Z_{S/2})$ устойчивыми слоями действия $\mathcal{G}$. В кривом слое M_b над каждой точкой полученного множества согласно Утверждению 3 и Следствию 1 есть точки B_0 . Насытим D отрезками центральных слоев, которые принадлежат B_0 . Отображение $\mathcal{G}$ близко к $\mathcal{F}$, поэтому тоже удовлетворяет условию доминантного расщепления. Следовательно, насыщение D отрезками центральных слоев образует подмножество центрально-устойчивого слоения X .

Теорема 10 (Песин, [18]). *Центрально-устойчивое слоение для действия C^2 -диффеоморфизма абсолютно непрерывно.*

Из Теоремы 10 и Теоремы Фубини следует, что мера насыщения D отрезками центральных слоев положительна. Следовательно, положительна и мера B_0 . Теорема 1 доказана.

Глава 2

Двуобходные уточные циклы в быстро-медленных системах на торе

2.1. Введение

2.1.1. Быстро-медленные системы

Рассмотрим типичную быстро-медленную систему на двумерном торе:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon) \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{T}^2 \cong \mathbb{R}^2 / (2\pi\mathbb{Z}^2), \quad \varepsilon \in (\mathbb{R}_+, 0). \quad (2.1)$$

Функции f и g достаточно гладкие, причем $g > 0$. Динамика системы (2.1) определяется *медленной кривой*:

$$M = \{(x, y) \mid f(x, y, 0) = 0\}.$$

Медленная кривая состоит из неподвижных точек системы (2.1) при $\varepsilon = 0$. Множество отталкивающих точек $f'_x > 0$ кривой M обозначим через M^+ , а притягивающих $f'_x < 0$ через M^- . В этих обозначениях (при $\varepsilon = 0$) кривая M состоит из объединения M^+ , M^- и параболических точек, в которых $f = 0$ и $f'_x = 0$.

На плоскости траектория системы (2.1), которая проходит через точку общего положения, чередует фазы медленного движения вдоль участков медленной кривой и фазы быстрого движения вдоль линий $y = \text{const}$ вблизи точек складок медленной кривой (см. [25]). На торе возможно более сложное поведение траекторий.

Определение 8 (неформальное). *Траектория системы (2.1) называется уточной, если содержит пару дуг, длина которых отделена от нуля равномерно по параметру ε : одна дуга проходит вблизи устойчивой части M^- медленной кривой, а другая вблизи неустойчивой части M^+ .*

Более строгое определение будет дано в Разделе 2.2. Уточные траектории нетипичны на плоскости. Например, чтобы в семействе на плоскости возник притягивающий уточный цикл, необходимо ввести дополнительный параметр (см., например, [26]). Однако для систем на торе уточные циклы типичны. Гипотеза об этом была сформулирована в [20] и подтверждена в [21].

Кратко объясним, почему в системах на торе возникает такой эффект. Предположим, что существует вертикальная трансверсальная векторному полю окружность $\Gamma = \{y = \text{const}\}$. Тогда для $\varepsilon > 0$ можно определить отображение Пуанкаре за один обход тора, $P_\varepsilon: \Gamma \rightarrow \Gamma$. Семейство гладкое, поэтому P_ε — диффеоморфизм окружности. Его число вращения $\rho(\varepsilon)$ непрерывно зависит от параметра. Для типичной системы 2.1 график функции $\rho(\varepsilon)$ есть «канторовская лестница» с горизонтальными ступеньками в рациональных значениях ρ . Если при некотором значении параметра число вращения ρ рационально и равно p/q , то отображение Пуанкаре P_ε имеет периодическую точку периода q , а соответствующее векторное поле — предельный цикл, который замыкается после q обходов тора вдоль медленной координаты y . В частности, целочисленные значения ρ соответствуют «однообходным» предельным циклам.

Рассмотрим, как разрушается цикл при изменении параметра. Число вращения увеличивается и перестает быть рациональным, когда значение параметра переходит границу соответствующей ступеньки канторовской лестницы. Гиперболический цикл при этом становится в крайней точке ступеньки параболическим и исчезает через седло-узловую бифуркацию. Вблизи критического значения производная отображения Пуанкаре в неподвижной точке близка к 1. Это возможно, если цикл проводит сравнимое время вблизи как устойчивой, так и неустойчивой частей медленной кривой. А это и означает, что цикл уточный.

Итак, при $\varepsilon \rightarrow 0$ число вращения ρ стремится к бесконечности, поэтому возникает серия значений $\varepsilon_n \rightarrow 0$, при которой существует уточный цикл.

Следующий естественный вопрос — *сколько* уточных циклов может возникать описанным выше образом в типичной системе (2.1) на торе. Для целочисленных значений ρ , то есть для циклов, которые совершают один обход вдоль медленной координаты, ответ дан в [22].

Теорема 11. *В типичной системе (2.1) на двумерном торе с нестягиваемой связной медленной кривой число предельных циклов, которые совершают один обход вдоль медленной координаты, ограничено числом вертикальных (то есть параллельных быстрому направлению) касательных к медленной кривой. Оценка достигается в открытом множестве систем в пространстве быстро-медленных систем на торе.*

Новый результат касается числа вращения $\rho = 1/2 \bmod \mathbb{Z}$ для связных кривых. При $\rho \in \mathbb{Z}$ геометрия кривой M , а именно количество вертикальных касательных к ней, ограничивает сверху количество уточных циклов. В отличие от этого, при числе вращения $\rho = 1/2 \bmod \mathbb{Z}$ при любой медленной кривой с двумя вертикальными касательными и для любого нечетного числа l существует открытое множество быстро-медленных систем с данной мед-

ленной кривой, таких что при $\varepsilon \rightarrow 0$ в них возникают в точности l двухобходных предельных циклов.

2.2. Основная теорема

Нам интересны только фазовые кривые системы (2.1), поэтому упростим ее: разделим на g и далее будем рассматривать только случай $g \equiv 1$:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = \varepsilon \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{T}^2, \quad \varepsilon \in (\mathbb{R}_+, 0). \quad (2.2)$$

Опишем требуемые условия типичности.

Определение 9. Медленная кривая M называется простой, если она гладкая, связная, и если ее поднятие на плоскость содержится внутри фундаментального квадрата $\{|x| < \pi, |y| < \pi\}$ и имеет только две точки складки при проектировании вдоль быстрого направления.

Будем рассматривать только простые медленные кривые. Точки, в которых кривая имеет вертикальные касательные $\{y = \text{const}\}$, будем называть точками срыва (см. Изображение 2.1). Обозначим точки срыва простой медленной кривой через $G^\pm$. Без ограничения общности, $G^\pm = (0, \mp 1)$. Этого можно достигнуть гладкой заменой координат, которая сохраняет слоение $y = \text{const}$.

Определение 10. Простая медленная кривая M невырождена, если и только если

1. В каждой точке $(x, y) \in M \setminus \{G^-, G^+\}$ выполнено условие невырожденности:

$$\frac{\partial f(x, y, 0)}{\partial x} \neq 0.$$

2. В точках срыва G^- и G^+ выполнено условие невырожденности:

$$\left. \frac{\partial^2 f(x, y, 0)}{\partial x^2} \right|_{G^\pm} \neq 0, \quad \left. \frac{\partial f(x, y, 0)}{\partial y} \right|_{G^\pm} \neq 0.$$

3. Пусть M^+ и M^- — неустойчивая и устойчивая части медленной кривой соответственно, тогда

$$\int_{M^+} f'_x(x, y, 0) dy + \int_{M^-} f'_x(x, y, 0) dy \neq 0.$$

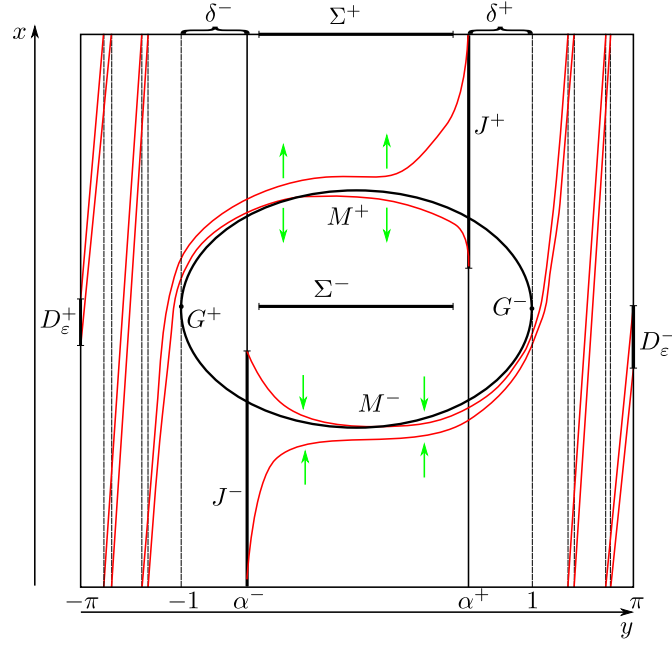


Рис. 2.1. Медленная кривая и точки срыва. На картинке ось x вертикальна и ось y горизонтальна

Дадим формальное определение уточной траектории.

Определение 11. Зафиксируем малое $\delta > 0$. Положим

$$I_\delta = [-1 + \delta, 1 - \delta]$$

$$\Sigma^- = \{(0, y) \mid y \in I_\delta\}, \quad \Sigma^+ = \{(\pi, y) \mid y \in I_\delta\}.$$

Траектория уточная, если пересекает и Σ^+ , и Σ^- .

Определение уточной траектории зависит от выбора δ . Позднее укажем, каким образом следует выбирать δ . Теперь сформулируем основной результат.

Теорема 12. Для любого наперед заданного $l \in 2\mathbb{N} + 1$ существует открытое множество в пространстве быстро-медленных систем на двумерном торе со следующими свойствами:

1. Медленная кривая семейства — простая и невырожденная.
2. Для каждой системы из этого множества существует последовательность накапливающихся к нулю интервалов $\{R_n\}_{n=0}^\infty$ на положительной полуоси параметра, таких что для любого $\varepsilon \in R_n$ система имеет в точности l уточных предельных циклов.

Замечание 3. Оценка на число уточных циклов в Теореме 12 точная, но мы не оцениваем количество не уточных циклов. При замене малого параметра δ в Определении 11 число уточных циклов в Теореме 12 может измениться. Более того, в введенных обозначениях

существует по крайней мере один не уточный цикл, так как векторное поле на торе с $\dot{y} > 0$ не может иметь нечетного числа предельных циклов.

2.3. Доказательство основного результата

Каждый уточный цикл соответствует неподвижной точке отображения Пуанкаре за два обхода. Количество неподвижных точек оценивается с помощью приближений отображения Пуанкаре.

Необходимые для доказательства обозначения введены в Разделе 2.3.1. В Разделе 2.3.3 Лемма 1 и Лемма 2 дают C^0 - и C^1 -приближение для отображения Пуанкаре. Необходимые для формулировки Лемм результаты приведены в Разделе 2.3.2. В Разделе 2.3.4 приведено доказательство Теоремы 12 с использованием Лемм, а доказательство самих Лемм вынесено в Раздел 2.4.

2.3.1. Обозначения

Медленная кривая состоит из четырех подмножеств: дуг устойчивой и неустойчивой частей M^- и M^+ и из двух точек срыва G^- и G^+ :

$$M = M^+ \cup \{G^+\} \cup M^- \cup \{G^-\}.$$

Медленная кривая имеет только две «вертикальные» касательные, поэтому однозначны определены функции $x = M^\pm(y)$, которые задают точку пересечения окружности $\{y = \text{const}\}$ с медленной кривой. Назовем *основной полосой* множество $\Pi = S^1 \times I_\delta$, где $I_\delta = [-1 + \delta, 1 - \delta]$ из Определения 11.

Зафиксируем вертикальный отрезок J^+ , который пересекает неустойчивую часть M^+ медленной кривой достаточно близко к точке срыва G^- и не пересекает M^- . Пусть

$$y(J^+) = \alpha^+ = 1 - \delta^+,$$

где $\delta^+ < \delta$, см. Определение 11. Аналогично, пусть J^- пересекает M^- , не пересекает M^+ и

$$y(J^-) = \alpha^- = -1 + \delta^-,$$

Введем обозначения ориентированных дуг на окружности (см. Изображение 2.2). Пусть a, b — две произвольные точки на ориентированной окружности $\mathbb{S}^1$, тогда обозначим через

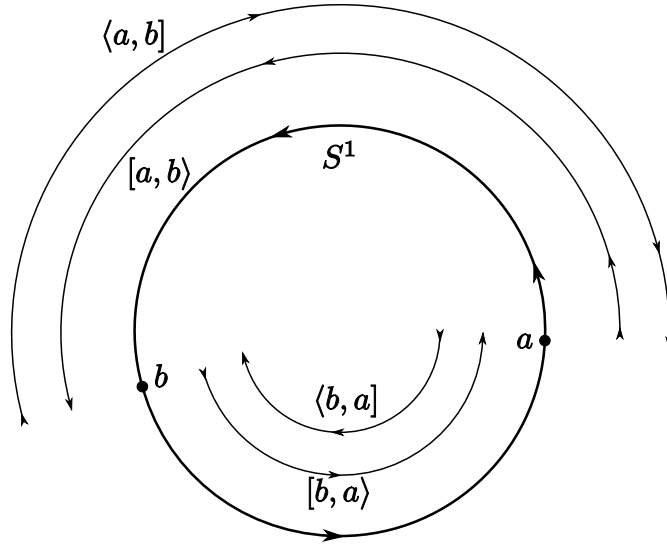


Рис. 2.2. Ориентация дуг

$[a, b)$ с естественной ориентацией на окружности, а через $\langle a, b \rangle$ дугу с обратной ориентацией.

У системы 2.2 во всех точках $\dot{y} > 0$, поэтому для любых $a, b \in \mathbb{S}^1$ корректно определено отображение Пуанкаре с трансверсальной окружности $y = a$ на трансверсальную окружность $y = b$ вдоль траекторий поля. Обозначим это отображение через $P_\varepsilon^{[a, b)}$. Также обозначим отображение Пуанкаре в обратном времени через $P_\varepsilon^{\langle a, b \rangle} = \left(P_\varepsilon^{[a, b)}\right)^{-1}$.

2.3.2. Предварительные результаты

Введем обозначения:

$$D_\varepsilon^+ := P_\varepsilon^{\langle -\pi, \alpha^+ \rangle}(J^+), \quad D_\varepsilon^- = P_\varepsilon^{[\alpha^-, \pi)}(J^-).$$

В [20, 21] доказана (см. Shape Lemmas) асимптотическая оценка на размер отрезков $D_\varepsilon^\pm$, $|D_\varepsilon^\pm| = O(\exp(-C/\varepsilon))$.

Согласно Леммам о монотонности из [20, 21] при $\varepsilon \rightarrow 0$ отрезок D_ε^+ движется «вниз» по трансверсали $y = -\pi \bmod (2\pi)$, а D_ε^- движется по той же трансверсали «вверх». Каждый из отрезков совершает неограниченное число оборотов на трансверсали в своем направлении. Поэтому на оси параметра ε существует множество интервалов

$$\{R_n\}_{n=0}^\infty = \{\varepsilon > 0: D_\varepsilon^+ \cap D_\varepsilon^- \neq \emptyset\}.$$

Согласно [20, 21], интервалы R_n имеют экспоненциально малую длину и накапливаются

к нулю. Для любой последовательности $\{\varepsilon_n \mid \varepsilon_n \in R_n\}_{n=1}^\infty$ точки имеют координаты

$$\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Для некоторого n зафиксируем значение параметра $\varepsilon \in R_n$. Выберем точку q из соответствующего интервалу R_n пересечения $D_\varepsilon^+ \cap D_\varepsilon^-$. Рассмотрим траекторию, которая проходит через точку q .

В прямом времени траектория совершает порядка $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ оборотов вдоль быстрой координаты x , затем «обратным прыжком» попадает в окрестность неустойчивой части M^+ медленной кривой и следует вдоль нее до пересечения с J^+ . В обратном времени траектория через некоторое количество оборотов (того же порядка) попадает в окрестность устойчивой части M^- медленной кривой и следует вдоль нее до пересечения с J^- .

Такую траекторию назовем *гусем*. Заметим, что есть произвол в выборе гуся: для любого значения параметра из интервала R_n для каждой точки из пересечения интервалов D_ε^+ и D_ε^- определена траектория-гусь. В дальнейшем, как правило, для каждого n мы будем рассматривать только одно значение ε и только одного соответствующего гуся.

Теперь приведем оценки для производной отображения Пуанкаре. Рассмотрим дугу U устойчивой (или неустойчивой) части медленной кривой. Рассмотрим интеграл

$$\int_U f'_x dy.$$

Неформально говоря, интеграл описывает меру сжатия (если $f'_x < 0$) или растяжения (в оставшемся случае) пучка траекторий, который проходит вблизи дуги U медленной кривой. Говоря формально, выполняются следующие теоремы:

Теорема 13 (см. [20]). *Рассмотрим дугу $U = [A, B] \subset M^\pm$ и трансверсальный полю отрезок $X = [x_1, x_2] \times \{y(A)\}$, который пересекает медленную кривую в единственной точке A . Тогда выполняется оценка:*

$$\log \left(P_\varepsilon^{[y(A), y(B)]}(x) \right)'_x \Big|_X = \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_U f'_x dy + O(\varepsilon) \right)$$

Более слабая оценка выполняется для траекторий, которые совершают порядка $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ оборотов вдоль быстрой координаты x . А именно, верна следующая теорема.

Теорема 14 (см. [21, 22]). *Рассмотрим дугу $U = [A, G^-] \subset M^- \cup \{G^-\}$ и отрезок X как в предыдущей теореме. Пусть дуга $[1, y_1]$ не содержит точек проекции M на ось y . Тогда*

выполняется оценка:

$$\log \left(P_\varepsilon^{[y(A), y_1]}(x) \right)' \Big|_X = \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_U f'_x dy + O(\varepsilon^\nu) \right),$$

где параметр $\nu \in (0, 1/4]$.

Чтобы получить аналогичный результат для неустойчивой части M^+ медленной кривой, достаточно обратить время.

2.3.3. Приближения отображения Пуанкаре

Для краткости будем использовать следующее обозначение:

$$\lambda^\pm(y) := f'_x(M^\pm(y), y).$$

Определение 12. Для любого $y \in [-1, 1]$ назовем идеальной точкой отрыва точку $\beta(y)$, которая является корнем следующего уравнения:

$$\int_y^1 \lambda^- dy + \int_{-1}^{\beta(y)} \lambda^+ dy = 0. \quad (2.3)$$

Медленная кривая невырождена, поэтому, по Определению 10, функция β корректно определена для всех y , таких что

$$\left| \int_y^1 \lambda^- dy \right| < \int_{-1}^1 \lambda^+ dy$$

Сформулируем основные Леммы о приближенных оценках для отображения Пуанкаре.

Лемма 1. Пусть $\varepsilon \in R_n$ для некоторого n . Тогда отображение Пуанкаре $Q_\varepsilon: \Sigma^- \rightarrow \Sigma^-$ можно разложить в композицию отображений:

$$Q_\varepsilon = Q_\varepsilon^+ \circ Q_\varepsilon^-: \Sigma^- \rightarrow \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^-,$$

и отображения $Q_\varepsilon^\pm$ можно приблизить отображением β :

$$Q_\varepsilon^\pm = \beta(y) + O(\varepsilon^\nu),$$

где $\nu \in (1, 1/4)$, $\beta \in C^2$. Отображение Пуанкаре Q_ε определено в точке y для малого значения параметра ε если и только если в точке y определены функции β и $\beta \circ \beta$ и образы y под

их действием лежат внутри отрезка I_δ .

Лемма 2. У условиях Леммы 1 выполняются следующие оценки на производную отображений $Q_\varepsilon^\pm$:

$$\frac{d}{dy}Q_\varepsilon^\pm(y) = \frac{d}{dy}\beta(y) + o(1).$$

Ниже дадим эвристическое доказательство Леммы 1. Оно мотивирует введение в доказательство траектории-гуся. Строгое доказательство Лемм 1 и 2 приведено в Разделе 2.4.

Эвристическое доказательство Леммы 1. Рассмотрим, без ограничения общности, отображение Q_ε^- . Выберем произвольную точку $p = (0, y_0)$ на трансверсали Σ^- . Точка p , как и содержащая ее трансверсаль Σ^- , отделена от медленной кривой для всех значений параметра ε .

Рассмотрим траекторию ψ , которая проходит через точку p . В прямом времени траектория «падает вниз на медленную кривую» — притягивается в течение времени порядка $O(1)$ к устойчивой части M^- медленной кривой. После падения траектория следует вдоль M^- , находясь экспоненциально близко к траектории-гусю, располагаясь «над» ней. Около точки срыва G^+ траектория ψ срывается. По Теореме 14 расстояние между гусем и траекторией ψ после срыва остается экспоненциально малым. Логарифм этого расстояния приблизительно равен $\varepsilon^{-1} \left(\int_{y_0}^1 \lambda^- dy \right) \ll 0$.

После прыжка траектория ψ следует вблизи траектории-гуся, совершает порядка $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ оборотов вдоль быстрой координаты. Далее траектория претерпевает «обратный срыв» и некоторое время следует около траектории-гуся вблизи неустойчивой части M^+ медленной кривой. Чем меньше расстояние между гусем и рассматриваемой траекторией, тем большее время траектория ψ будет находиться вблизи неустойчивой части медленной кривой.

Возможно, что траектория ψ оторвется от траектории-гуся (и, следовательно, от M^+) и вновь упадет на устойчивую часть медленной кривой M^- в пределах основной полосы Π . Поскольку траектория ψ была «над» гусем, то и отрываться она будет «вверх». После падения на M^- траектория окажется «под» гусем. При этом траектория ψ пересечет трансверсаль Σ^+ . Итак, отображение $Q_\varepsilon^-: \Sigma^- \rightarrow \Sigma^+$ определено.

Отрыв может произойти только в окрестности точки $\beta(y_0)$. В самом деле, отрыв происходит тогда, когда накопившееся вдоль неустойчивой части M^+ растяжение компенсирует накопившееся вдоль M^- сжатие. Большое количество оборотов вдоль быстрой координаты, которое происходит вне основной полосы Π , не вносит, согласно Теореме 14, значительного вклада в производную отображения Пуанкаре. А функция β определена именно так, чтобы

растяжение, определяемое интегралом $\int_{-1}^{\beta(y_0)} \lambda^+ dy$, было скомпенсировано сжатием, которое определено интегралом $\int_{y_0}^1 \lambda^- dy$.

Поэтому значение функции Q_ε^- приблизительно равно значению $\beta(y_0)$. Погрешность имеет порядок $O(\varepsilon^\nu)$ и совпадает с погрешностью в Теореме 14. $\square$

2.3.4. Доказательство по модулю Лемм

Из Леммы 1 и Леммы 2 следует, что при малых значениях параметра ε выполняются оценки:

$$Q_\varepsilon = \beta \circ \beta + O(\varepsilon^\nu). \quad (2.4)$$

$$Q'_\varepsilon = (\beta \circ \beta)' + o(1). \quad (2.5)$$

Из условия невырожденности медленной кривой в Определении 10 следует, что возможны только два случая: либо $\int_{-1}^1 \lambda^+ dy > |\int_{-1}^1 \lambda^- dy|$, либо $\int_{-1}^1 \lambda^+ dy < |\int_{-1}^1 \lambda^- dy|$, а равенство интегралов запрещено. Без ограничения общности рассмотрим первый случай. Второй можно получить из первого обращением времени.

По своему определению (см. формулу (2.3)) отображение β — монотонное и меняющее ориентацию,

$$\beta: [-1, 1] \rightarrow [-1, \varkappa], \varkappa < 1. \quad (2.6)$$

Согласно (2.4) и (2.5), неподвижные точки Q_ε соответствуют неподвижным точкам $\beta \circ \beta$. Уточные циклы соответствуют 2-периодическим точкам, количество которых четно, и одной неподвижной точке, поэтому $l \in 2\mathbb{N} + 1$.

Итак, вопрос о количестве уточных циклов сводится к вопросу о количестве неподвижных точек $\beta \circ \beta$.

В Лемме 3 ниже показано, что для «почти любой» функции β можно подобрать быстро-медленную систему (2.2), которая ее реализует. Единственные ограничения на β состоят в граничных условиях на отрезке $[-1, 1]$. Поскольку $\varkappa < 1$ в (2.6), то $\beta \circ \beta$ не может иметь неподвижных точек вблизи границ отрезка $[-1, 1]$.

Итак, доказательство Теоремы 12 по модулю Леммы 3 состоит в следующем. Для любого $l \in 2\mathbb{N} + 1$ можно выбрать отображение $\beta: [-1, 1] \rightarrow [-1, \varkappa]$, $\varkappa < 1$, у которого одна неподвижная точка и $(l - 1)/2$ гиперболических периодических точек периода 2. Все эти точки соответствуют гиперболическим неподвижным точкам отображения $\beta \circ \beta$. Отображение $\beta \circ \beta$, в свою очередь, согласно (2.4) и (2.5) C^1 -близко к отображению Q_ε , поэтому последнее

также имеет в точности l гиперболических неподвижных точек. Каждая из них соответствует гиперболическому циклу. Эти циклы точные, поскольку все пересекают Σ^+ . В силу гиперболичности циклы сохраняются при малых возмущениях системы, поэтому эффект сохранится в открытом множестве систем в окрестности построенной.

Оставшаяся часть Раздела посвящена доказательству Леммы 3. Чтобы определить граничные условия, которые налагаем на отображение β , определим функциональные классы Θ и $B_{\varkappa}$

Обозначим через Θ множество гладких функций $\theta: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

1. $\theta(y) > 0$ для всех $y \in (-1, 1)$,
2. $\theta(\pm 1) = 0$,
3. $\theta'(\pm 1) \neq 0$.

Обозначим через $B_{\varkappa}$ множество гладких функций $\tilde{\beta}: [-1, 1] \rightarrow [-1, \varkappa]$ со следующими свойствами:

1. $\tilde{\beta}$ строго убывает на отрезке $[-1, 1]$,
2. $\tilde{\beta}(-1) = \varkappa$,
3. $\tilde{\beta}(1) = -1, \tilde{\beta}'(1) \neq 0$,
4. Существует функция $\theta \in \Theta$, такая что для любого y в малой окрестности $V = [-1, -1 + \delta_1)$ выполняется функциональное равенство:

$$\tilde{\beta}'(y) = -\sqrt{\theta(y)}.$$

Пару функций λ^+ и λ^- назовем *допустимыми*, если выполнены следующие условия:

1. Для всех $k = 0, 1, \dots$

$$\frac{d^k(\lambda^+)^{-1}}{dx^k}(\pm 1) = \frac{d^k(\lambda^-)^{-1}}{dx^k}(\pm 1) \quad (2.7)$$

2. Для некоторой пары функций $\theta^{\pm} \in \Theta$ верны равенства:

$$\lambda^+ = \sqrt{\theta^+}, \quad \lambda^- = -\sqrt{\theta^-}. \quad (2.8)$$

Быстро-медленная система 2.2 порождает пару функций $\lambda^\pm(y) = f'_x(M^\pm(y), y)$. Легко проверить, что они попадают в класс допустимых. Пара функций $\lambda^\pm$ определяет (см. (2.3)) отображение β класса $B_\varkappa$ для некоторого $\varkappa$.

Теперь проведем построение в обратном порядке. Выберем произвольную (с нужным количеством периодических точек) функцию β из класса $B_\varkappa$ и подберем порождающие ее функции $\lambda^\pm$. По теореме Уитни любая пара допустимых $\lambda^\pm$ может быть реализована некоторой быстро-медленной системой (2.2).

Лемма 3. *Для любого $\varkappa \in (-1, 1)$ и любой функции $\beta \in B_\varkappa$ существуют допустимые λ^+ и λ^- , такие что выполняется уравнение (2.3):*

$$\int_y^1 \lambda^- dy + \int_{-1}^{\beta(y)} \lambda^+ dy = 0.$$

Доказательство. Продифференцируем уравнение (2.3):

$$\lambda^-(y) = \beta'(y) \lambda^+(\beta(y)). \quad (2.9)$$

Итак, для любой функции λ^+ , которая удовлетворяет условию (2.8), формула (2.9) определяет функцию λ^- . Осталось подобрать λ^+ так, чтобы полученная пара функций $\lambda^\pm$ была допустимой.

Проверим, что λ^- удовлетворяет условию (2.8). Содержательная часть проверки происходит на границах отрезка $[-1, 1]$.

Рассмотрим малую правую полуокрестность $V = [-1, -1 + \delta_2]$ точки -1 . Напомним, что, согласно определению класса $B_\varkappa$, для некоторой $\theta \in \Theta$ верно равенство $\beta'(y) = \sqrt{\theta(y)}$. Поэтому равенство (2.9) для любого $y \in V$ эквивалентно следующему:

$$\lambda^-(y) = -\sqrt{\theta(y)} \lambda^+(\beta(y)), \quad \beta(-1) = \varkappa > -1.$$

Если $y \rightarrow -1$, то $\beta(y) \rightarrow \varkappa$ и последний множитель в правой части стремится к положительной константе $\lambda^+(\varkappa)$. А значит в окрестности -1 функция λ^- удовлетворяет условию (2.8).

Рассмотрим малую левую полуокрестность $V = (1 - \delta_3, 1]$ точки 1 . Для любого $y \in V$

$$\lambda^-(y) = \beta'(y) \sqrt{\theta^+(y)}, \quad \beta'(1) \neq 0.$$

А значит в окрестности 1 функция λ^- также удовлетворяет условию (2.8).

Осталось проверить условие (2.7). Рассмотрим последовательность условий:

1. Росток λ^+ в точке $y = \varkappa$ обуславливает (по (2.9)) росток λ^- в точке $y = -1$.
2. Росток λ^- в точке $y = -1$ обуславливает (по (2.7)) росток λ^+ в точке $y = -1$.
3. Росток λ^+ в точке $y = -1$ обуславливает (по (2.9)) росток λ^- в точке $y = 1$.
4. Росток λ^- в точке $y = 1$ обуславливает (по (2.7)) росток λ^+ в точке $y = 1$.

Итак, требования (2.7) и (2.9) накладывают условия на ростки функции λ^+ в точках $y = -1, \varkappa, 1$. Для любой функции λ^+ , которая удовлетворяет (2.8) и этим условиям, определенная уравнением (2.9) функция λ^- будет образовывать вместе с λ^+ пару допустимых функций. Лемма доказана. $\square$

Осталось доказать Леммы 1 и 2.

2.4. Доказательство вспомогательных лемм

2.4.1. C^0 -приближение

В этом разделе приведено (строгое) доказательство Леммы 1. Формулировка и эвристическое доказательство приведены в разделе 2.3.3.

Доказательство. Доказательство проведем в три шага.

Первый шаг. Покажем, что траектория не может оторваться от гуся слишком рано.

Рассмотрим траекторию с начальным условием $\psi(y_0) = 0$. Рассмотрим произвольную точку $\beta_1 \in (\tilde{\alpha}^-, \beta(y_0))$. Из определения отображения β и из монотонности интеграла $\int_{y_1}^{y_2} \lambda^+ dy$ как функции верхнего предела интегрирования следует оценка:

$$\int_{y_0}^1 \lambda^- dy + \int_{-1}^{\beta_1} \lambda^+ dy < 0.$$

Рассмотрим вертикальный отрезок $J_0 = \{y_0\} \times (x_1, x_2)$, который пересекает Σ^- и M^- , но не M^+ . Траектория ψ пересекает отрезок J_0 . Пусть траектория-гусь задана внутри основной полосы графиками функций x_+^{gc} вблизи M^+ и x_-^{gc} вблизи M^- . Вне малой окрестности точек срыва верно равенство:

$$x_{gc}^\pm(y) = M^\pm(y) + O(\varepsilon).$$

$\square$

А значит (при малых значениях параметра) траектория-гусь пересекает отрезок J_0 в точке $x_-^{gc}(y_0) < 0$. Обозначим

$$J'_0 = P_\varepsilon^{[y_0, \pi)}([x_-^{gc}(y_0), 0]).$$

Теорема 14 оценивает длину отрезка J'_0 ,

$$|J'_0| \leq C_1 \exp \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{y_0}^{\pi} f'_x dy + o(1) \right),$$

где C_1 — некоторая постоянная.

Теперь рассмотрим другой вертикальный отрезок $J_1 = \beta_1 \times (x'_1, x'_2)$, который пересекает M^+ и не пересекает M^- . Как и прежде, траектория-гусь пересекает отрезок J_1 в точке $x_+^{gc}(\beta_1)$ при малых значениях параметра. Докажем, что траектория ψ также пересекает и J_1 . Положим

$$J'_1 = P_\varepsilon^{(-\pi, \beta_1]}([x_+^{gc}(\beta_1), x'_2]).$$

Теорема 14 оценивает длину этого отрезка:

$$|J'_1| \geq C_2 \exp \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{-1}^{\beta_1} f'_x dy + o(1) \right).$$

Нижние границы J'_0 и J'_1 совпадают с точкой, в которой траектория-гусь пересекает трансверсаль $\{y = \pi\}$. Из оценок длин J'_0 и J'_1 следует, что $|J'_1| \gg |J'_0|$. Следовательно, отрезки вложены, $J'_0 \subset J'_1$. Траектория ψ пересекает J'_0 а значит пересекает J'_1 , а значит и J_1 .

Второй шаг. Покажем, что траектория оторвется от гуся не слишком поздно.

Покажем, что функция Q_ε^- определена в y_0 и для произвольного $\beta_2 \in (\beta(y_0), \tilde{\alpha}^+)$ при малых значениях параметра выполняется неравенство $Q_\varepsilon^-(y_0) < \beta_2$. Рассмотрим вертикальный отрезок $J_3 = \beta_2 \times (0, \pi)$ справа от $\beta(y_0)$. Обратим время. Тогда, согласно первому шагу, траектория ψ не пересекает отрезка J_3 .

Рассмотрим криволинейную трапецию, которая ограничена окружностями $y = \beta_1$, $y = \beta_2$, отрезком Σ^+ и траекторией-гусем x_+^{gc} . Траектория ψ входит в эту трапецию в точке отрезка $J_1 \subset \{y = \beta_1\}$. При $y > \beta_2$ точка траектории $\psi(y)$ находится вне трапеции. Траектория ψ , согласно предыдущему абзацу, не может пересечь границу $\{y = \beta_2\}$, не может пересечь траекторию-гуся, а значит пересекает отрезок Σ^+ . Следовательно, задающая это пересечение функция Q_ε^- корректно определена в y_0 .

Третий шаг. Теперь докажем, что β приближает Q_ε^- .

Рассмотрим отображение

$$R_\varepsilon^2: \{y = y_0\} \rightarrow \{y = Q_\varepsilon^-(y_0)\},$$

$$R_\varepsilon^2 := P_\varepsilon^{[-\pi, Q_\varepsilon^-(y_0))} \circ P_\varepsilon^{[y_0, \pi]}.$$

Заметим, что

$$\frac{R_\varepsilon^2(0) - R_\varepsilon^2(x_-^{gc}(y_0))}{0 - x_-^{gc}(y_0)} = \frac{\pi - M^+(y_0) + O(\varepsilon)}{0 - M^-(y_0) + O(\varepsilon)}.$$

По теореме о среднем значении производная R_ε^2 в некоторой точке x^* конечна. По Теореме 14 и правилу дифференцирования сложной функции:

$$\log(R_\varepsilon^2)'_x = \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{y_0}^1 \lambda^+ dy + \int_{-1}^{Q_\varepsilon^-(y_0)} \lambda^- dy + O(\varepsilon^\nu) \right).$$

Левая часть, как уже было сказано, конечна, а правая отделена от нуля и от бесконечности только если выполняется следующая оценка:

$$\int_{y_0}^1 \lambda^+ dy + \int_{-1}^{Q_\varepsilon^-(y_0)} \lambda^- dy = O(\varepsilon^\nu).$$

При этом, по определению β ,

$$\int_{y_0}^1 \lambda^+ dy + \int_{-1}^{\beta(y_0)} \lambda^- dy = 0.$$

Функция λ^- в окрестности точки $\beta(y_0)$ отделена от нуля и бесконечности, поэтому, по Теореме об обратной функции, верна оценка

$$Q_\varepsilon^- = \beta(y) + O(\varepsilon^\nu).$$

Лемма 1 доказана.

2.4.2. C^1 -приближение

В этом разделе приведено доказательство Леммы 2. Доказательство техническое: отображение Пуанкаре $Q_\varepsilon^\pm$ раскладывается на композицию 5 более простых отображений, каждое из которых оценить проще. Обозначим координаты на $\Sigma^\pm$ через $y_\pm$. Разложим отображение

Q_ε в композицию Q_ε^+ и Q_ε^- :

$$Q_\varepsilon: y_-^{(1)} \mapsto y_+^{(2)} \mapsto y_-^{(3)}$$

Рассмотрим траекторию, которая пересекает Σ^- в точке $y_-^{(1)}$, затем Σ^+ в точке $y_+^{(2)}$ и снова Σ^- в точке $y_-^{(3)}$. Согласно уравнению (2.9),

$$\beta'(y) = \frac{\lambda^-(y)}{\lambda^+(\beta(y))}.$$

По определению, $\lambda^-(y) = f'_x(M^-(y), y) = f'_x(x_-^{gc}(y), y) + o(1)$. По Лемме 1, $y_+^{(2)} = Q_\varepsilon^-(y_-^{(1)}) = \beta(y_-^{(1)}) + O(\varepsilon^\nu)$. А значит для доказательства Леммы 2 достаточно показать, что выполняются следующие оценки:

$$(Q_\varepsilon^-)' = \frac{f'_x(x_-^{gc}(y_-^{(1)}), y_-^{(1)})}{f'_x(x_+^{gc}(y_+^{(2)}), y_+^{(2)})} \cdot (1 + o(1)), \quad (2.10)$$

$$(Q_\varepsilon^+)' = \frac{f'_x(x_-^{gc}(y_+^{(2)}), y_+^{(2)})}{f'_x(x_+^{gc}(y_-^{(3)}), y_-^{(3)})} \cdot (1 + o(1)).$$

Будем доказывать подробно только первую из оценок, вторая доказывается аналогично. Введем дополнительные трансверсали и разложим Q_ε^- в соответствующую композицию.

Зафиксируем значение параметра $\varepsilon \in R_n$, при котором существует траектория-гусь. Рассмотрим ту часть траектории-гуся, которая проходит вблизи медленной кривой и ограничена пересечениями с трансверсальями J^+ и J^- . В [20] доказана следующая теорема о линеаризации системы вблизи медленной кривой.

Теорема 15. *Семейство (2.1) при малых значениях $\varepsilon > 0$ в окрестности медленной кривой (и вне малой окрестности точек срыва) орбитально топологически эквивалентно семейству*

$$\dot{x} = f'_x(s(y, \varepsilon), y, \varepsilon), \quad \dot{y} = \varepsilon.$$

График отображения $x = s(y, \varepsilon)$ задает истинную медленную кривую. Истинная медленная кривая определена не единственным образом, но все таковые траектории экспоненциально близки друг к другу, поэтому утверждение Теоремы 15 остается верным, если выбрать любую из них. Выберем в качестве медленной кривой отрезки траектории-гуся, $s(y, \varepsilon) = x_-^{gc}(y, \varepsilon)$. Ниже для краткости будем опускать аргумент ε в записи некоторых отображений. В Теореме 15 выберем окрестности точек срыва столь малыми, что множество $\{(M^\pm(y), y) \mid y \in I_\delta\}$ вместе со своей малой окрестностью лежит внутри линеаризованной области. Окончательно выбор размера линеаризованной области будет указан ниже, после

доказательства Утверждения 4.

Рассмотрим две трансверсали $\hat{J}^+$ и $\hat{J}^-$, которые пересекают M^+ и M^- соответственно в окрестности левой и правой точек срыва соответственно. Обозначим их y -координаты через $\hat{\alpha}^\pm = \hat{\alpha}^\pm(\varepsilon)$.

Утверждение 4. *Существуют функции $\hat{\alpha}^\pm = \hat{\alpha}^\pm(\varepsilon)$ такие, что выполняются следующие свойства.*

1. При всех $\varepsilon > 0$ точки $\hat{\alpha}^\pm$ равномерно по ε отделены от y -координат точек срыва $y(G^\pm)$.
2. При малых значениях параметра верно равенство

$$\int_{\hat{\alpha}^-}^{\hat{\alpha}^+} f'_x(x^{gc}(y), y, \varepsilon) dy = 0. \quad (2.11)$$

Доказательство. Из уравнения в вариациях следует, что

$$\int_{\hat{\alpha}^-}^{\hat{\alpha}^+} f'_x(x^{gc}(y), y, \varepsilon) dy = \varepsilon \cdot \log \left(P_\varepsilon^{[\hat{\alpha}^-, \hat{\alpha}^+]}(x^{gc}) \right)'_x. \quad (2.12)$$

По Теореме 14 существует функция r класса $O(\varepsilon^\nu)$ такая, что выполняется оценка

$$\varepsilon \cdot \log \left(P_\varepsilon^{[\hat{\alpha}^-, \hat{\alpha}^+]}(x^{gc}) \right)'_x = \int_{\hat{\alpha}^-}^1 f'_x(x_-^{gc}) dy + \int_{-1}^{\hat{\alpha}^+} f'_x(x_+^{gc}) dy + r(\varepsilon). \quad (2.13)$$

Рассмотрим сумму интегралов в правой части. Чтобы доказать Утверждение 4, надо указать, как выбирать пределы интегрирования. Функция $\int_A^B f'_x(x_\pm^{gc}) dy$ непрерывна по аргументам A, B , монотонно убывает по A и возрастает по B , стремится к нулю при $A \rightarrow B$. Пусть α_1^+, α_1^- — две точки на интервале $(-1, 1)$, близкие соответственно к левой и правой точкам границы. Зафиксируем α_1^+ , тогда, если α_1^- достаточно близка к 1, соответствующая (2.13) сумма интегралов положительна:

$$\int_{\alpha_1^-}^1 f'_x(x_-^{gc}) dy + \int_{-1}^{\alpha_1^+} f'_x(x_+^{gc}) dy > 0. \quad (2.14)$$

Аналогично определим пару точек $\alpha_2^\pm$, такую что $\alpha_2^+ \in (-1, \alpha_1^+)$, $\alpha_2^- \in (\alpha_1^-, 1)$, и сумма интегралов отрицательна:

$$\int_{\alpha_2^-}^1 f'_x(x_-^{gc}) dy + \int_{-1}^{\alpha_2^+} f'_x(x_+^{gc}) dy < 0 \quad (2.15)$$

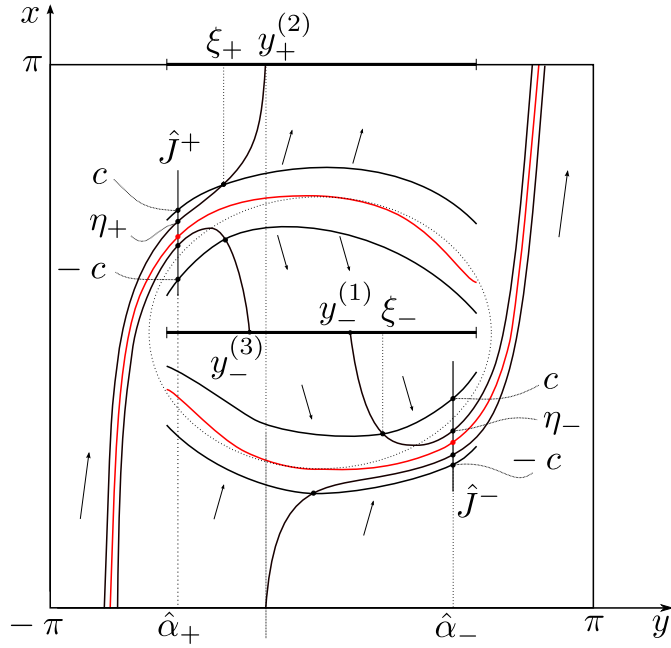


Рис. 2.3. Вспомогательные трансверсали и координаты на них. $\Sigma^\pm$ лежат в пределах отмеченных полужирным горизонтальных отрезков и не пересекают вертикальные линии $y = \hat{\alpha}^\pm$

Пусть постоянная $\hat{c} > 0$ столь мала, что нули в правой части неравенств (2.14) и (2.15) можно заменить на $\hat{c}$ и $-\hat{c}$ соответственно. При достаточно малых значениях параметра

$$\hat{c} > |r(\varepsilon)|. \quad (2.16)$$

Из равенств (2.12), (2.13) и оценок (2.14), (2.15) и (2.16) следует, что

$$\int_{\alpha_1^-}^{\alpha_1^+} f'_x(x^{gc}(y), y, \varepsilon) dy > 0, \quad (2.17)$$

$$\int_{\alpha_5^-}^{\alpha_2^+} f'_x(x^{gc}(y), y, \varepsilon) dy < 0. \quad (2.18)$$

Для параметра $\tau \in [0, 1]$ положим $\hat{\alpha}^\pm(\tau) := \tau\alpha_1^\pm + (1 - \tau)\alpha_2^\pm$. Из неравенств (2.17), (2.18) и соображений непрерывности следует, что существует функция $\tau = \tau(\varepsilon)$, такая что выполнено равенство (2.11). По построению $\alpha_1^\pm$, $\alpha_2^\pm$ отделены от y -координат точек срыва, а значит отделены и построенные $\hat{\alpha}^\pm$. Утверждение 4 доказано. $\square$

Определим положение вспомогательных трансверсалей, см. Изображение 2.3. Выберем по системе (2.1) некоторую пару функций $\hat{\alpha}^{\pm}$. Выберем δ для I_{δ} больше, чем наибольшее из расстояний $dist(\hat{\alpha}^{-}, 1)$, $dist(-1, \hat{\alpha}^{+})$. Затем выберем область линеаризации в Теореме 15 большой настолько, что ей принадлежат отрезки $\hat{J}^{\pm}$.

Обозначим через $\eta_{\pm}$ вертикальную компоненту линеаризующей координаты в окрестно-

стях $M^\pm$. Согласно выбору истинной медленной кривой $s(y, \varepsilon)$ в Теореме 15, фиксированная траектория-гусь задается уравнениями $\eta_\pm = 0$ в окрестностях $M^\pm$. Зафиксируем малую постоянную $c > 0$ и обозначим через $\xi_\pm$ y -координаты на кривых $\{\eta_\pm = c\}$. Разложим отображение Q_ε^- в композицию пяти отображений:

$$Q_\varepsilon^- : \Sigma^- \rightarrow \{\eta_- = c\} \rightarrow \hat{J}^- \rightarrow \hat{J}^+ \rightarrow \{\eta_+ = c\} \rightarrow \Sigma^+,$$

$$Q_\varepsilon^- : y_- \mapsto \xi_- \mapsto \eta_- \mapsto \eta_+ \mapsto \xi_+ \mapsto y_+.$$

Итак, достаточно доказать оценку (2.10) для отображения Q_ε^- . Производная композиции распадается в произведение пяти сомножителей:

$$(Q_\varepsilon^-)' = \frac{dy_+}{dy_-} = \frac{dy_+}{d\xi_+} \cdot \frac{d\xi_+}{d\eta_+} \cdot \frac{d\eta_+}{d\eta_-} \cdot \frac{d\eta_-}{d\xi_-} \cdot \frac{d\xi_-}{dy_-}. \quad (2.19)$$

Оценим каждый из сомножителей.

Постоянная c в определении трансверсали $\{\eta_\pm = c\}$ не зависит от параметра, поэтому траектория проводит время порядка $O(1)$ между трансверсальями $\Sigma^\pm$ и $\{\eta_\pm = c\}$, поэтому

$$\xi_\pm(y_\pm) = y_\pm + \varepsilon K_\pm(\varepsilon, y_\pm), \quad K_\pm \text{ гладкая.}$$

а значит

$$\frac{dy_+}{d\xi_+} = 1 + o(1), \quad \frac{d\xi_-}{dy_-} = 1 + o(1), \quad (2.20)$$

Координаты $(\eta_\pm, \xi_\pm)$ линеаризованы, из Теоремы 15 следует, что

$$\eta_-(\xi_-) = c \exp \frac{1}{\varepsilon} \int_{\xi_-}^{\hat{\alpha}^-} f'_x(x_-^{gc}(y), y) dy,$$

$$\eta_+(\xi_+) = c \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\hat{\alpha}^+}^{\xi_+} f'_x(x_+^{gc}(y), y) dy \right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_-}{d\xi_-} &= -\frac{c}{\varepsilon} f'_x(x_-^{gc}(\xi_-), \xi_-) \exp \frac{1}{\varepsilon} \int_{\xi_-}^{\hat{\alpha}^-} f'_x(x_-^{gc}(y), y) dy, \\ \frac{d\eta_+}{d\xi_+} &= -\frac{c}{\varepsilon} f'_x(x_+^{gc}(\xi_+), \xi_+) \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\hat{\alpha}^+}^{\xi_+} f'_x(x_+^{gc}(y), y) dy \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ниже для краткости будем опускать аргумент y в $x_{\pm}^{gc}$.

Оценим средний множитель в (2.19):

$$\left. \frac{d\eta_+}{d\eta_-} \right|_{(x(y), y)} = \exp \frac{1}{\varepsilon} \int_{\hat{\alpha}^-}^{\hat{\alpha}^+} f'_x(x(y), y, \varepsilon) dy. \quad (2.22)$$

Рассмотрим интеграл в аргументе экспоненты. По построению траектория $x(y)$ пересекает трансверсаль $\{\eta_- = c\}$ в точке $\xi_- < \hat{\alpha}^-$. По Теореме 14 для любого $y \in [1, -1]$ выполняется оценка:

$$(P_{\varepsilon}^{[\xi_-, y]})'_x = \exp \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\xi_-}^1 \lambda^- dy + O(\varepsilon^\nu) \right),$$

$$(P_{\varepsilon}^{[y, \hat{\alpha}^+]})'_x = \exp \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{-1}^{\hat{\alpha}^+} \lambda^+ dy + O(\varepsilon^\nu) \right).$$

Из построения функций $\hat{\alpha}^\pm$ (см. Утверждение 4) и выбора δ следует, что существует постоянная $M > 0$ такая, что выполняется оценка:

$$\int_{\xi_-}^{\hat{\alpha}^-} \lambda^- dy + \int_{\hat{\alpha}^-}^1 \lambda^- dy + \int_{-1}^{\hat{\alpha}^+} \lambda^+ dy < -M.$$

Поэтому для $y \in (\hat{\alpha}^-, \hat{\alpha}^+)$ верна следующая оценка:

$$x(y) - x^{gc}(y) < \exp \left(-\frac{M}{\varepsilon} \right), \quad M = \text{const.}$$

Далее,

$$\int_{\hat{\alpha}^-}^{\hat{\alpha}^+} (f'_x(x(y), y, \varepsilon) - f'_x(x^{gc}(y), y, \varepsilon)) dy < \int_{\hat{\alpha}^-}^{\hat{\alpha}^+} \int_0^{\exp(-M/\varepsilon)} f''_{xx} dx dy = o(\varepsilon). \quad (2.23)$$

Согласно Утверждению 4, левая часть неравенства (2.23) равна $\int_{\hat{\alpha}^-}^{\hat{\alpha}^+} f'_x(x(y), y, \varepsilon) dy$. Поэтому, используя (2.22), можно оценить:

$$\left. \frac{d\eta_+}{d\eta_-} \right|_{(x(y), y)} = 1 + o(1).$$

Согласно уравнениям (2.21), произведение производных $\frac{d\eta_-}{d\xi_-} \cdot \frac{d\eta_+}{d\xi_+}$ содержит множителем экспоненту:

$$\exp \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\xi_-}^{\hat{\alpha}^-} f'_x(x_-^{gc}, y) dy + \int_{\hat{\alpha}^+}^{\xi_+} f'_x(x_+^{gc}, y) dy \right) \quad (2.24)$$

Оценим этот множитель.

Утверждение 5. Пусть траектория $x(y)$ проходит через точки (ξ_-, c) и (ξ_+, c) . Тогда существует траектория $x^*(y)$ такая, что

$$\int_{\xi_-}^{\xi_+} f'_x(x^*(y), y, \varepsilon) dy = 0. \quad (2.25)$$

Доказательство. Траектория-гусь проходит через точки $(\xi_-, 0)$ и $(\xi_+, 0)$. По теореме о среднем значении для отображения Пуанкаре с отрезка $[(\xi_-, 0), (\xi_-, c)]$ на отрезок $[(\xi_+, 0), (\xi_+, c)]$ существует траектория $x^*(y)$ такая, что производная отображения вдоль нее равна отношению длин отрезков.

Из уравнения в вариациях следует равенство (2.25). □

Разложим правую часть (2.25) в сумму трех интегралов:

$$\int_{\xi_-}^{\xi_+} f'_x(x^*(y), y, \varepsilon) dy = \int_{\xi_-}^{\hat{\alpha}^-} + \int_{\hat{\alpha}^-}^{\hat{\alpha}^+} + \int_{\hat{\alpha}^+}^{\xi_+} = 0.$$

Как и прежде, второе слагаемое $\int_{\hat{\alpha}^-}^{\hat{\alpha}^+}$ имеет порядок $o(\varepsilon)$. В первом и третьем слагаемом можно заменить траекторию $x(y)$ на траекторию $x^{gc}(y)$, так как интегрирование происходит в линеаризованной области. Перенесем второе слагаемое в правую часть, тогда

$$\int_{\xi_-}^{\hat{\alpha}^-} f'_x(x_-^{gc}, y) dy + \int_{\hat{\alpha}^+}^{\xi_+} f'_x(x_+^{gc}, y) dy = o(\varepsilon).$$

А значит сумма интегралов в экспоненте (2.24) имеет порядок $o(\varepsilon)$, сама экспонента принадлежит классу $1 + o(1)$.

Наконец, поскольку $\xi_{\pm}(y_{\pm}) = y_{\pm} + \varepsilon K_{\pm}(\varepsilon, y_{\pm})$, в (2.21) можно перейти от координат $\xi_{\pm}$ к $y_{\pm}$: $f'_x(x_{\pm}^{gc}(y_{\pm}), y_{\pm}) = f'_x(x_{\pm}^{gc}(\xi_{\pm}), \xi_{\pm}) + O(\varepsilon)$.

Из (2.20), (2.21) и оценок на $\frac{d\eta_+}{d\eta_-}$ следует:

$$\frac{dy_+}{dy_-} = \frac{f'_x(x_-^{gc}, y_-)}{f'_x(x_+^{gc}, y_+)} \cdot (1 + o(1)) \cdot (1 + O(\varepsilon)).$$

Лемма доказана.

Глава 3

Мелькающие сепаратрисные связки: параболический цикл

3.1. Основные результаты

3.1.1. Векторные поля класса PC

Векторные поля класса PC — это квазитипичные векторные поля с параболическим циклом. Необходимые определения можно найти в [34]. По умолчанию, в тексте ниже *векторными полями* будут называться векторные поля на сфере $\mathbb{S}^2$, а *семействами векторных полей* — семейства векторных полей на $\mathbb{S}^2$.

Определение 13. *Векторное поле принадлежит классу PC , если имеет параболический цикл γ и не имеет других вырождений. А именно, выполняются следующие условия:*

- *все особые точки и предельные циклы, за исключением γ , гиперболичны*
- *векторное поле не имеет седловых связок.*
- *параболический цикл γ имеет кратность 2.*

В [37] доказано, что векторные поля класса PC образуют банахово подмногообразие коразмерности 1 в пространстве $\text{Vect}^2(S^2)$ C^2 -гладких векторных полей. Обозначим это подмногообразие через $\mathcal{PC}$.

3.1.2. Структурная устойчивость

Теорема 16. *Типичная однопараметрическая деформация типичного векторного поля класса PC слабо структурно устойчива.*

Векторные поля из Теоремы 16 должны удовлетворять дополнительному условию типичности в дополнение к указанным в Определении 13 класса PC . Это условие сформулировано в Разделе 3.1.6, где сформулирована улучшенная версия Теоремы 16.

Условие типичности деформаций состоит в *трансверсальности* к $\mathcal{PC}$.

3.1.3. Функция времени

Следующее ниже основано на эвристическом принципе: локальная динамика вблизи неподвижной точки обычно определяет канонические координаты в этой точке.

Для простоты, в текущем разделе векторные поля — бесконечно гладкие. Пусть v — векторное поле класса PC , γ — параболический предельный цикл поля v . Пусть P — росток соответствующего отображения Пуанкаре вдоль предельного цикла,

$$P(x) = x + ax^2 + \dots \quad (3.1)$$

Согласно требованиям типичности, $a \neq 0$. Линейным сжатием (растяжением) и переменной знака координаты x можно добиться $a = 1$.

Теорема 17 (Такенс). *Отображение Пуанкаре имеет бесконечно гладкий генератор, то есть росток векторного поля $u(x) = x^2 + \dots$ в нуле, такой что преобразование фазового потока поля u за единичное время совпадает с P :*

$$P = g_u^1.$$

Гладкий генератор u отображения P единственен.

Пусть Γ — трансверсаль к γ , $O = \Gamma \cap \gamma$, а x — координата на γ такая, что $x(O) = 0$ и P имеет вид (3.1) с $a = 1$. Обозначим через Γ^+ и Γ^- части Γ , где $x > 0$ и $x < 0$ соответственно. Определим с точностью до прибавления постоянной *функции времени* на Γ^+ и Γ^- : зафиксируем малый $x_0 > 0$ и положим

$$T^+(x) = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{u(\xi)} \text{ для } x > 0, \ x \in \Gamma^+,$$

$$T^-(x) = \int_{-x_0}^x \frac{d\xi}{u(\xi)} \text{ для } x < 0, \ x \in \Gamma^-.$$

Это действительно функции времени: $T^\pm(x)$ равно времени движения от $\pm x_0$ до $x \in \Gamma^\pm \setminus \{0\}$ вдоль решений уравнения $\dot{x} = u(x)$.

3.1.4. Большой носитель бифуркации

Бифуркации в локальных однопараметрических семействах, проходящих через поле класса PC , не сводятся лишь к исчезновению и распаду на два гиперболических цикла параболического цикла γ . Также возникают *мелькающие седловые связки*, которые открыли

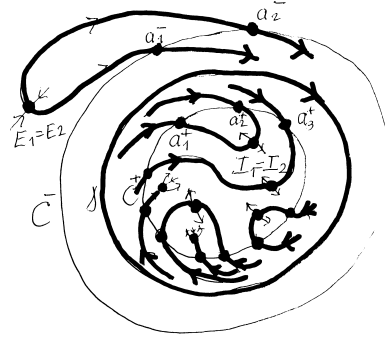


Рис. 3.1. Большой носитель бифуркации векторного поля класса PC (полужирным) и соответствующие размеченные множества

Мальта и Палис. Предположим, что векторное поле v имеет два седла E и I по разные стороны от цикла γ , сепаратрисы седел наматываются на цикл в прямом и обратном времени соответственно. Пусть $V = \{v_\varepsilon\}$ — однопараметрическое семейство, которое трансверсально PC и проходит через v , $v_0 = v$. Пусть γ исчезает при $\varepsilon > 0$. Тогда существует последовательность $\varepsilon_n \searrow 0$ такая, что векторные поля v_{ε_n} имеют сепаратрисную связку между седлами $E(\varepsilon_n), I(\varepsilon_n)$ близкими к E, I . Эти связки называются *мелькающими седловыми связками*.

Это мотивирует следующее определение:

Определение 14. Пусть $v \in PC$. Большим носителем бифуркации поля v назовем объединение параболического цикла γ и замыканий всех сепаратрис гиперболических седел, которые наматываются на γ в прямом или обратном времени.

Замечание 4. Большой носитель бифуркации определен в более общем случае в [32].

Термин мотивирован эвристическим соображением, что все бифуркации, которые происходят в типичном однопараметрическом семействе, проходящем через v , происходят в окрестности большого носителя бифуркации поля v . Это показано ниже для полей класса PC . В общем случае это доказано в [20], работа в подготовке.

Большие носители бифуркаций векторных полей класса PC (в дальнейшем будем опускать упоминание класса) описываются двумя так называемыми *размеченными множествами* на окружности.

3.1.5. Размеченные конечные множества

Большие носители бифуркаций могут быть достаточно сложными, см Изображение 3.1. При этом они допускают простое комбинаторное описание. Отображение Пуанкаре на Γ^- , как и на Γ^+ в координатах $T^\pm$ есть сдвиг на 1:

$$T^\pm(P(x)) = T^\pm(x) + 1.$$

Следовательно, пространство орбит действия P на $\Gamma^\pm$ есть окружность $S_\pm^1 = \mathbb{R}^+/\mathbb{Z}$, с координатами $T^\pm(\bmod \mathbb{Z})$. Обозначим через B^+ множество точек пересечения наматывающихся на γ сепаратрис с полуинтервалом $[x_0, P(x_0))$, $x_0 \in \Gamma^+$. Таким же образом определим множество B^- для $x_0 \in \Gamma^-$. Пусть

$$A^\pm = T^\pm(B^\pm)(\bmod \mathbb{Z}), \quad A^\pm \subset S_\pm^1. \quad (3.2)$$

Определим отношение эквивалентности на B^+ и B^- . Две точки B^+ (или B^-) эквивалентны, если они принадлежат сепаратрисам одного седла. Это порождает отношение эквивалентности на A^+ и A^- со следующим свойством: два класса эквивалентности (a, b) и (c, d) не могут перемежаться на ориентированной окружности. На дуге от a к b лежат либо обе точки c, d , либо ни одна из них.

Определение 15. *Рассмотрим на окружности конечное множество точек со следующим отношением эквивалентности. Каждый класс эквивалентности состоит из одной или двух точек. Два класса, каждый из которых состоит из двух точек, эквивалентны, если они не перемежаются в описанном выше смысле. Такое отношение эквивалентности назовем допустимым. Конечное множество на окружности с допустимым отношением эквивалентности на нем назовем размеченным.*

3.1.6. Условие несинхронизации

Определение 16. *Пара конечных множеств $A^+, A^- \subset S^1$ удовлетворяет условию несинхронизации, если для любого $\varphi \in \mathbb{R}$*

$$\#(A^+ + \varphi) \cap A^- \leq 1. \quad (3.3)$$

Теперь дадим подробную формулировку Теоремы 16.

Теорема 18. *Рассмотрим два конечных множества, которые соответствуют векторному полю $v \in \mathcal{PC}$ и удовлетворяют условию несинхронизации. Тогда любая однопараметрическая деформация поля v , трансверсальная Банахову подмногообразию $\mathcal{PC}$, структурно устойчива.*

Семейства, о которых идет речь в этой теореме, будем называть $\mathcal{PC}$ семействами.

Верна следующая теорема о реализации.

Теорема 19. Пусть $A^\pm$ — пара размеченных не синхронизированных множеств на окружности. Тогда существует векторное поле класса PC такое, что данная пара соответствует полю v , то есть может быть построена по полю v как описано в Разделе 3.1.5.

Теорема 19 доказана в Разделе 3.2.4.

3.1.7. Орбитально-топологически эквивалентные векторные поля класса PC , однопараметрические деформации которых неэквивалентны

Определение 17. Два семейства $V = \{v_\varepsilon\}$ и $W = \{w_\delta\}$ слабо эквивалентны, если существует отображение H тотальных пространств со следующими свойствами:

$$H : B \times S^2 \rightarrow B' \times S^2, (\varepsilon, x) \mapsto (h(\varepsilon), H_\varepsilon(x)), \quad (3.4)$$

где h — гомеоморфизм баз $h(B) = B'$, а H_ε — гомеоморфизм слоев S^2 , который переводит ориентированные траектории поля v_ε в ориентированные траектории поля $w_{h(\varepsilon)}$. Семейства сингулярно эквивалентны, если, кроме названного, H непрерывно на множестве особых точек поля v_0 .

Сингулярная эквивалентность обладает следующим свойством. Пусть $V = \{v_\varepsilon\}$ и $W = \{w_\delta\}$ сингулярно эквивалентны. Для любой особой точки O поля v_0 ($\tilde{O}$ поля w_0) определим $O(\varepsilon)$ ($\tilde{O}(\delta)$) как особую точку поля v_ε (соответственно, w_δ), которая непрерывно зависит от параметра ε (или δ) и такая, что $O(0) = O$, $\tilde{O}(0) = \tilde{O}$. Тогда

$$H_\varepsilon(O_\varepsilon) = \tilde{O}_{h(\varepsilon)}. \quad (3.5)$$

Сингулярная эквивалентность определена ради этого свойства.

Теорема 20. Существуют векторные поля, названные в заголовке текущего раздела. Точнее говоря, существуют топологически эквивалентные поля класса PC такие, что их типичные однопараметрические деформации не сингулярно эквивалентны.

Это единственный результат подобного рода в однопараметрических семействах. Доказательство этого не содержится в диссертации, однако верна следующая теорема:

Теорема 21 (без доказательства). Рассмотрим два квазитипичных поля не из класса PC . Предположим, что они орбитально топологически эквивалентны. Тогда их типичные однопараметрические деформации слабо эквивалентны.

3.1.8. Классификация $\mathcal{PC}$ -семейств

Любой паре нумерованных против часовой стрелки конечных множеств на окружности с координатой

$$A^+ = \{a_1^+, \dots, a_K^+\}, \quad A^- = \{a_1^-, \dots, a_M^-\}$$

соответствует множество попарных расстояний:

$$\Lambda(A^\pm) = \{\tau_{k,m} = \{a_k^+ - a_m^-\} \mid k = 1, \dots, K; m = 1, \dots, M\}. \quad (3.6)$$

Пара множеств $A^\pm$ не синхронизирована тогда и только тогда, когда все элементы $\Lambda(A^\pm)$ попарно различны.

Определение 18. Две пары не синхронизированных конечных множеств $A^\pm$ и $B^\pm$ на окружности эквивалентны, если и только если соответствующие им множества попарных разностей (3.6) $\Lambda(A^\pm)$ и $\Lambda(B^\pm)$ упорядочены одинаково. Говоря более подробно, пусть

$$B^+ = \{b_1^+, \dots, b_K^+\}, \quad B^- = \{b_1^-, \dots, b_M^-\},$$

$$\Lambda(B^\pm) = \{\lambda_{k,m} = \{b_k^+ - b_m^-\} \mid k = 1, \dots, K; m = 1, \dots, M\}.$$

Тогда

$$\tau_{km} > \tau_{k'm'} \Rightarrow \lambda_{km} > \lambda_{k'm'}. \quad (3.7)$$

В теореме ниже использована конструкция пар не синхронизированных множеств, соответствующих в смысле Раздела 3.1.5 векторным полям класса $\mathcal{PC}$.

Теорема 22. 1. Пусть два $\mathcal{PC}$ -семейства сингулярно эквивалентны. Тогда эквивалентны соответствующие пары не синхронизированных размеченных конечных множеств на координатной окружности.

2. Пусть два векторных поля класса $\mathcal{PC}$ орбитально топологически эквивалентны. Пусть также соответствующие пары не синхронизированных размеченных конечных множеств на координатной окружности эквивалентны. Тогда типичные однопараметрические деформации этих полей сингулярно эквивалентны.

Любая пара не синхронизированных размеченных конечных множеств определяет сценарий бифуркации (последовательность бифуркаций) в соответствующем классе $\mathcal{PC}$ -семейств. Опишем подробно этот сценарий.

3.2. Бифуркации в $\mathcal{PC}$ -семействах

3.2.1. Теорема о включении в поток

Теорема Такенса о включении для параболических ростков может быть сформулирована для их деформаций.

Теорема 23 ([35]). *Пусть P_ε — типичная однопараметрическая C^∞ -гладкая деформация параболического ростка*

$$P_\varepsilon(x) = x + x^2 + \varepsilon + \dots$$

Тогда в области $\{\varepsilon \geq 0\} \setminus \{0, 0\}$ семейство P_ε C^∞ -гладко эквивалентно фазовому потоку за время 1 векторного поля

$$u_\varepsilon(x) = \frac{x^2 + \varepsilon}{1 + a(\varepsilon)x}, \quad (3.8)$$

где $a(\varepsilon)$ — C^∞ -гладкая функция.

Координата x_ε , в которой отображение P_ε становится сдвигом за время 1 векторного поля w_ε , называется *нормализующей*. Ниже в качестве координаты на трансверсали Γ для $\varepsilon \geq 0$ выбрана нормализующая координата x_ε .

Замечание 5. *Заметим, что нормализующая координата x_ε C^∞ -гладкая в области $\{\varepsilon = 0\} \setminus \{0, 0\}$. Это означает, что ее можно гладко продлить в некоторую окрестность любой точки этого множества. Отсюда следует, что все производные x_ε в $\varepsilon = 0$ существуют и конечны.*

3.2.2. Кривые без контакта и их канонические координаты

Следующие определения взяты из [29] (восходят к [27]) и адаптированы для случая квазитипичного векторного поля.

Определение 19. *Кривой без контакта векторного поля называется гладкая замкнутая кривая, трансверсальная полю в каждой своей точке.*

Согласно [29, §3.3] и [27], можно выбрать по кривой без контакта для каждого α -/ ω -предельного полицикла, каждого стока, источника и каждой стороны каждого предельного цикла, чтобы выполнялись следующие условия:

1. Рассмотрим область, ограниченную предельным полициклом, стоком (источником) или предельным циклом и соответствующей кривой без контакта. Эта область не содержит ни особых точек, ни предельных циклов, ни других выбранных кривых без контакта.

2. Каждая траектория, стремящаяся к полициклу, стоку (источнику — в обратном времени) или предельному циклу, пересекает соответствующую кривую без контакта в единственной точке. Каждая траектория, которая пересекает выбранную кривую без контакта, стремится к соответствующему стоку (источнику — в обратном времени), полициклу или предельному циклу.
3. Выбранные кривые без контакта попарно не пересекаются и не пересекают петлю сепаратрисы, предельные циклы или связки сепаратрис (если поле имеет что-то из названного).

Рассмотрим векторное поле v класса PC и выберем соответствующую систему кривых без контакта; пусть γ — его параболический цикл, Γ — трансверсаль к γ , $O = \Gamma \cap \gamma$, и

$$P : (\Gamma, O) \rightarrow (\Gamma, O)$$

— росток отображения Пуанкаре. Рассмотрим типичную деформацию $V = \{v_\varepsilon\}$ поля v , $v_0 = v$. Пусть P_ε — соответствующее отображение Пуанкаре поля v_ε , и x_ε — соответствующая нормализующая координата на Γ . Пусть C^+ и C^- — две кривые без контакта, $C^\pm \cap \Gamma = \pm x_0$. Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим зависящую от ε функцию времени на Γ :

$$T_\varepsilon(x) = \int_{-x_0}^x \frac{d\xi}{u_\varepsilon(\xi)}.$$

Пусть

$$\tau(\varepsilon) = T_\varepsilon(x_0).$$

Эту функцию можно вычислить с помощью (3.8):

$$\tau(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \arctan \frac{x_0}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (3.9)$$

Заметим, что T_0 определено только на $\Gamma^- \setminus \{0\}$ и совпадает с T^- . Более этого, на $\Gamma^+ \setminus \{0\}$,

$$T^+(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (T_\varepsilon(x) - \tau(\varepsilon)).$$

Функция времени $T_\varepsilon(x) \pmod{\mathbb{Z}}$ определяет координату на C^- следующим образом. Возьмем точку a на C^- и выпустим из нее в прямом времени траекторию поля v до первого пересечения a' с трансверсалью Γ . Пусть $\varphi_\varepsilon^-(a) = T_\varepsilon(a')$. Заметим, $\varphi_\varepsilon^-(x_0) = 0$, и $\varphi_\varepsilon^-(a) \in [0, 1]$ для всех $a \in C^-$. Таким же образом рассмотрим точку $b \in C^+$, и выпустим в обратном

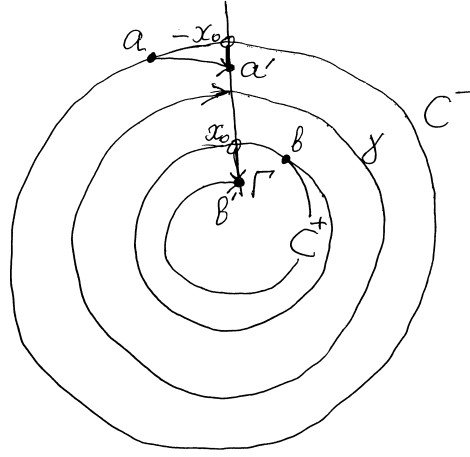


Рис. 3.2. Канонические координаты на кривых без контакта

времени траекторию поля v из точки b до первого пересечения b' с Γ . Пусть

$$\varphi_\varepsilon^+(b) = \int_{x_0}^{b'} \frac{dx}{u_\varepsilon(x)},$$

см Изображение 3.2. Эти зависящие от ε координаты на кривых без контакта $C^\pm$ называются *каноническими*.

Без ограничения общности примем, что цикл γ ориентирован против часовой стрелки. Тогда кривые без контакта $C^\pm$ ориентированы против часовой стрелки каноническими координатами.

3.2.3. Отображение Пуанкаре на кривых без контакта

Рассмотрим малое значение параметра $\varepsilon > 0$. Орбита поля v_ε , которая выходит из точки $a \in C^-$ пересекает C^+ в единственной точке a' . Это определяет отображение Пуанкаре

$$\Delta_\varepsilon : C^- \rightarrow C^+, \quad a \rightarrow a'$$

вдоль орбит поля v_ε .

Утверждение 6. В координатах $\varphi_\varepsilon^\pm$ отображение Пуанкаре $\Delta_\varepsilon : C^- \rightarrow C^+$ есть вращение, обозначаемое тем же символом:

$$\Delta_\varepsilon : S^1 \rightarrow S^1, \quad \varphi_\varepsilon^+(\Delta_\varepsilon(a)) = \varphi_\varepsilon^-(a) - \tau(\varepsilon) \pmod{\mathbb{Z}}. \quad (3.10)$$

Доказательство. Пусть $b = \Delta_\varepsilon(-x_0)$ (для краткости опускаем зависимость b от ε). Пусть b' — точка первого пересечения ориентированной дуги траектории, которая выходит из точки

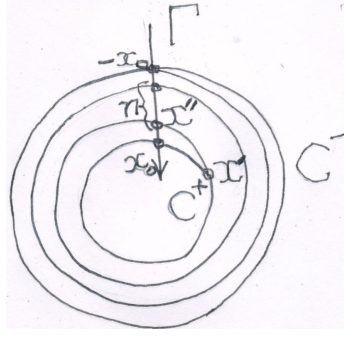


Рис. 3.3. Отображение Пуанкаре на кривых без контакта

b , с трансверсалью Γ . Предположим, что ориентированная дуга траектории от точки $-x_0$ до b' имеет n пересечений с трансверсалью Γ , не считая точки $-x_0$. Тогда $T_\varepsilon(b') = n$. Более этого,

$$\varphi_\varepsilon^+(b) = \int_{x_0}^{b'} \frac{dx}{u_\varepsilon(x)} = T_\varepsilon(b') - T_\varepsilon(x_0) = n - \tau(\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\varphi_\varepsilon^+(\Delta_\varepsilon(x_0)) := \varphi_\varepsilon^+(b) = -\tau(\varepsilon) \pmod{\mathbb{Z}}.$$

Это доказывает (3.10) для $a = x_0$. Для любого другого $a \in C^-$ (3.10) следует из определения координат $\varphi_\varepsilon^\pm$. $\square$

3.2.4. Размеченные множества на кривых без контакта

Обозначим через S^+ множество всех точек пересечения сепаратрис, которые наматываются на цикл γ , с кривой без контакта C^+ . Существует естественная биекция этого множества и множества B^+ из Раздела 3.1.5. Следовательно, множество C^+ размечено. Упорядочим точки C^+ в порядке против часовой стрелки, начиная со следующей за 0 точкой:

$$S^- = \{s_1^-, \dots, s_M^-\}.$$

Любая точка s_m этого множества принадлежит сепаратрисе некоторого седла; обозначим это седло через E_m . Если точки s_m и $s_{m'}$ для различных m и m' эквивалентны, то соответствующие седла совпадают $E_m = E_{m'}$. Канонические координаты отображают это множество в размеченное множество на окружности S^1 :

$$A^- = \varphi^-(S^-), \quad A^- = (a_1^-, \dots, a_K^-), \quad a_k^- = \varphi^-(s_k^-).$$

Таким же образом определены размеченные множества

$$S^+ = \{s_1^+, \dots, s_K^+\}, \quad A^+ = \varphi^+(S^+), \quad A^+ = (a_1^+, \dots, a_K^+)$$

и седла I_k .

3.2.5. Теорема о реализации

Для доказательства Теоремы 19 понадобится следующая лемма.

Лемма 4. Пусть v — поле класса PC , $A^\pm$ — соответствующие размеченные множества на окружностях C^+, C^- . Пусть $B^\pm$ — пара таких не синхронизированных размеченных множеств, что существует гомеоморфизм $h^\pm : C^+ \rightarrow C^\pm$ который переводит $A^\pm$ в $B^\pm$ и сохраняет разметку. Тогда существует векторное поле w , которое орбитально топологически эквивалентно полю v , причем соответствующие ему размеченные множества совпадают с $B^\pm$.

Замечание 6. Пары множеств $A^\pm, B^\pm$ эквивалентны как пары размеченных множеств. Но они могут быть не эквивалентны как пары не синхронизированных конечных множеств в смысле Определения 18.

Доказательство. Гомеоморфизм окружности, который переводит одно в другое два конечных множества точек, легко можно заменить диффеоморфизмом. Продлим h^+ (или h^-) в область S^2 , которая ограничена $C^+(C^-)$ и не содержит C^- (соответственно, C^+). Обозначим эти отображения через H^+ и H^- ; H^+ действует снаружи C^+ и H^- внутри C^- . Возьмем кусочно-непрерывное векторное поле W такое, что:

$$W = \begin{cases} H_*^+ v & \text{вне } C^+ \\ v & \text{между } C^+ \text{ и } C^- \\ H_*^- v & \text{внутри } C^- \end{cases}$$

Изменим гладкую структуру на S^2 так, что W станет гладким векторным полем w на получающемся многообразии. Новое многообразие гладкое и гомеоморфно S^2 . Но на S^2 существует только одна гладкая структура. Следовательно, векторное поле w оказывается гладким векторным полем на новой копии S^2 . Это и есть искомое векторное поле. $\square$

Теперь докажем Теорему 19.

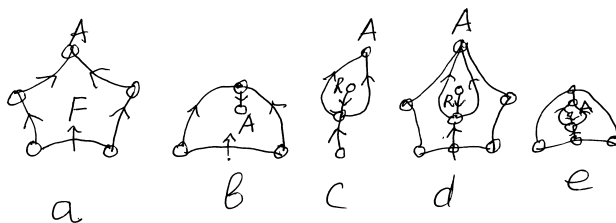


Рис. 3.4. Реализация размеченных множеств

Доказательство. Пусть $B^\pm$ два размеченных множества на координатной окружности. Мы хотим построить векторное поле класса PC , которое порождает эти множества, как это описано в Разделе 3.1.5. Возьмем две непересекающиеся окружности на S^2 и обозначим их через C^- и C^+ . Назовем внутренней областью C^+ (внешней областью C^-) ту компоненту дополнения до $C^+(C^-)$, которая не содержит $C^-(C^+)$. Расположим точку бесконечность внутри внешней области C^- . Построим векторное поле класса PC с размеченными множествами A^+ на C^+ и A^- на C^- такое, что существует гомеоморфизм $C^+ \rightarrow S^1$ ($C^- \rightarrow S^1$) который переводит A^+ to B^+ (A^- в B^-). По Лемме 4 этого достаточно, чтобы доказать Теорему 19. Построение проведем внутри C^+ ; вовне C^- построение аналогично.

a. Любые две эквивалентные точки множества A^+ соединим гладкой дугой, которая трансверсальна C^+ в своих концах, и внутренние точки которой лежат внутри C^+ . Дуги должны быть попарно непересекающимися. Возьмем по точке во внутренности каждой из дуг. Это будут седла поля v . Части дуг от точек на C^+ (будущих вершин усечения) до выбранного седла будут входящими сепаратрисами этих седел, см. Изображение 3.4a.

b. Замыкание внутренней области C^+ разбито дугами из предыдущего пункта на топологические диски. Выберем по точке внутри каждого из этих дисков, это будут аттракторы поля v . Соединим каждое седло с границы топологического диска с аттрактором внутри него гладкой кривой. Это будут исходящие сепаратрисы седел, см. Изображение 3.4b. Теперь у каждого из построенных седел построены четыре сепаратрисы, две входящие и две исходящие.

c. Части, на которые разбита внутренняя область C^+ , имеют одну из двух форм с Изображения 3.4a, b.

Рассмотрим точки A^+ , которые лежат на дугах C^+ в одной из двух названных выше областей. Класс эквивалентности каждой такой точки состоит из нее одной. Добавим к каждой такой точке граф, нарисованный в Изображении 3.4c; аттрактор A на этом изображении должен совпадать с аттрактором A соответствующей области, см. Изображение 3.4d, e. Графы различных точек должны попарно не пересекаться и не пересекать ранее построенных дуг. Построение сепаратрисного скелета поля v окончено. Теперь построим векторное поле

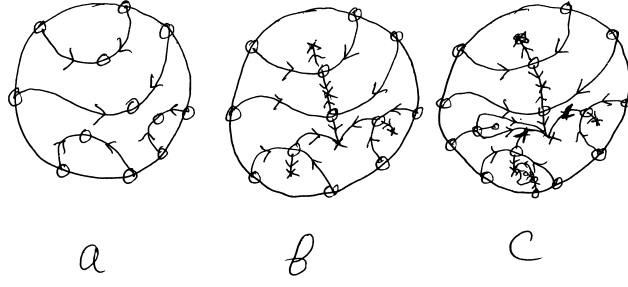


Рис. 3.5. Три шага

с заданным сепаратрисным скелетом внутри C^+ и вонне C^- . Между C^+ и C^- поле v имеет стандартный параболический цикл. Кривые C^+ и C^- являются кривыми без контакта поля v . Построение поля v окончено. Это завершает доказательство Теоремы 19. $\square$

3.2.6. Уравнение связки

В этом и следующем разделах описаны бифуркации семейства класса $\mathcal{PC}$.

Рассмотрим векторное поле класса PC и его деформацию $V = \{v_\varepsilon\}$ класса $\mathcal{PC}$, $v_0 = v$. Пусть E_m (и I_k) — седла вонне (внутри, соответственно) параболического цикла γ поля v , сепаратрисы γ_m^- (γ_k^+) которых наматываются на γ в прямом (обратном, соответственно) времени. Пусть $A^\pm$ — размеченные конечные множества на координатной окружности, как в Разделе 3.1.5.

Векторные поля v_ε имеют седла $E_m(\varepsilon)$, $I_k(\varepsilon)$, которые непрерывно зависят от ε , $E_m(0) = E_m$, $I_k(0) = I_k$. Ростки их сепаратрис также непрерывны по ε . Обозначим через $l_m^-(\varepsilon)$ сепаратрису с ростком $(l_m^-(\varepsilon), E_m(\varepsilon))$, который непрерывен по ε и совпадает с (l_m^-, E_m) для $\varepsilon = 0$. Таким же образом определим сепаратрисы $l_k^+(\varepsilon)$ седел $I_k(\varepsilon)$. Пусть $s_m^-(\varepsilon)$ ($s_k^+(\varepsilon)$) — точки (единственного для малого ε) пересечения $l_m^-(\varepsilon)$ и C^- ($l_k^+(\varepsilon)$ and C^+). Пусть

$$A^-(\varepsilon) = \{\varphi_\varepsilon^-(s_1^-(\varepsilon)), \dots, \varphi_\varepsilon^-(s_M^-(\varepsilon))\}, A^+(\varepsilon) = \{\varphi_\varepsilon^+(s_1^+(\varepsilon)), \dots, \varphi_\varepsilon^+(s_K^+(\varepsilon))\}.$$

Множества $A^\pm(\varepsilon)$ непрерывно зависят от ε и совпадают с $A^\pm$ при $\varepsilon = 0$. Следовательно, если $A^\pm$ — пара не синхронизированных множеств, то и $A^\pm(\varepsilon)$ не синхронизированы при малых значениях ε .

Пусть

$$\tau_{km}(\varepsilon) = \{a_k^+(\varepsilon) - a_m^-(\varepsilon)\} \in [0, 1) \quad (3.11)$$

— длина положительно ориентированной дуги от $a_m^-(\varepsilon)$ до $a_k^+(\varepsilon)$. Для не синхронизированных множеств $A^\pm(\varepsilon)$ все $\tau_{km}(\varepsilon)$ попарно различны. Пара $A^\pm(\varepsilon)$ не синхронизирована, поэтому значения $\tau_{km}(\varepsilon)$ попарно различны. Седла $E_m(\varepsilon)$ и $I_k(\varepsilon)$ образуют связку сепаратрис при

условии

$$a_k^+(\varepsilon) = \Delta_\varepsilon(a_k^-(\varepsilon)).$$

По Утверждению 6, это эквивалентно следующему:

$$a_k^+(\varepsilon) = a_m^-(\varepsilon) - \tau(\varepsilon) \pmod{\mathbb{Z}}$$

или,

$$\tau_{km}(\varepsilon) = -\tau(\varepsilon) \pmod{\mathbb{Z}}.$$

В другой записи:

$$\tau_{km}(\varepsilon) = -\tau(\varepsilon) + n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.12)$$

Это уравнение назовем *уравнением связки*.

Утверждение 7. *При малых ε и достаточно больших n уравнение (3.12) имеет единственное решение.*

Решение уравнения (3.12) обозначим через ε_{kmn} . Доказательство Утверждения 7 хорошо известно, но мы повторим его, так как оно короткое.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon_0 > 0$ столь малым, что функция τ_{km} корректно определена на $[0, \varepsilon_0]$. По Теореме 23 производная этой функции ограничена на всем отрезке. С другой стороны, $\tau'(\varepsilon) \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ по (3.9). Возьмем ε настолько малым, что

$$(\tau(\varepsilon) - \tau_{km}(\varepsilon))' > 0.$$

Следовательно при любом $n > \tau(\varepsilon_0) - \tau_{km}(\varepsilon_0)$, уравнение связки (3.12) имеет единственное решение. □

3.2.7. Бифуркационный сценарий

Сценарий бифуркации однопараметрического семейства — это последовательность бифуркаций, которые происходят при изменениях параметра. Когда ε уменьшается от выбранного выше ε_0 до 0, происходит счетное количество бифуркаций. Опишем их. Пусть последовательность ε_n определена уравнением $\tau(\varepsilon_n) = n$; ε_n корректно определено при достаточно больших n . Действительно, $\tau(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ согласно уравнению (3.9). Без ограничения общности будем считать, что ни одно из $\tau_{km}(0)$ не равно нулю 0. В противном случае немного увеличим x_0 . Тогда $\tau_{km}(\varepsilon) \neq 0$ для малых ε . Когда ε изменяется от ε_{n-1} до ε_n , $\varepsilon_{n-1} \leq \varepsilon < \varepsilon_n$,

разность $n - \tau(\varepsilon)$ монотонно уменьшается от 1 (включительно) до 0 (не включая). Упорядочим τ_{km} по убыванию. Тогда $n - \tau(\varepsilon)$ сначала совпадает с наибольшим из них, а затем и с остальными по очереди. Поскольку все $\tau_{km}(\varepsilon)$ попарно различны, в каждый момент происходит не более одного совпадения. Обозначим решение уравнения

$$\tau_{km}(0) = \tau(\varepsilon) - n, \quad \varepsilon \in [\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$$

через ε_{km}^0 . Порядок этих решений не зависит от n . При малых ε числа $\tau_{km}(\varepsilon)$ упорядочены так же, как и $\tau_{km}(0)$. Более этого, при малых ε, δ

$$\tau_{km}(0) < \tau_{k'm'}(0) \Rightarrow \tau_{km}(\varepsilon) < \tau_{k'm'}(\delta).$$

Значит, при больших n решения ε_{kmn} упорядочены как ε_{kmn}^0 . В частности, их порядок не зависит от n .

Следовательно седловые связки между $E_m(\varepsilon)$ и $I_k(\varepsilon)$ для $\varepsilon \in [\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$ происходят в том же порядке, в котором расположены ε_{kmn} на оси. Этот сценарий циклически повторяется по n , когда ε пробегает полуинтервал $[\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$.

Одна из главных целей достигнута: описан сценарий бифуркации.

3.3. ЛМФ-графы и их связные расширения

3.3.1. ЛМФ-граф как инвариант

Для любого типичного или квазитипичного векторного поля определен ЛМФ-граф, см. определения в [34].

Теорема 24. *Два квазитипичных векторных поля орбитально топологически эквивалентны, если и только если их ЛМФ-графы изотопны.*

Эта теорема в гораздо более строгой форме доказана в [27], [29].

Теорема 25 ([36]). *Образы двух вложений в сферу связного графа S^2 изотопны, если и только если соответствующий изоморфизм образов сохраняет ориентированный против часовой стрелки порядок исходящих из каждой вершины ребер.*

Условие, предъявленное к графу во второй половине этой теоремы, назовем *условием звездочки*, потому что оно наложено на звезды ребер вершин графа.

Чтобы доказать слабую эквивалентность семейств $V = \{v_\varepsilon\}$ и $W = \{w_\gamma\}$, построим ЛМФ-графы M_ε для полей v_ε , и $\tilde{M}_\delta$ для полей w_δ , а затем построим гомеоморфизм

$$h : \varepsilon \mapsto \delta = h(\varepsilon),$$

который осуществляет изотопию графов M_ε и $\tilde{M}_{h(\varepsilon)}$.

3.3.2. Грани ЛМФ-графа

Определение 20. *Гранями ЛМФ-графа назовем связные компоненты дополнения графа.*

Утверждение 8. *Любая грань ЛМФ-графа топологически эквивалентна либо диску, либо кольцу. Грани, которые соответствуют кольцу, могут быть одного из трех видов:*

1. *кольцо между предельным циклом и соответствующей ему кривой без контакта;*
2. *проколотый диск между кривой без контакта и соответствующим ему аттрактором/репеллером;*
3. *кольцо между двумя «пустыми» (то есть не содержащими точек усечения сепаратрис) кривыми без контакта.*

Доказательство. Рассмотрим грань Ω ЛМФ-графа квазитипичного векторного поля v , которая не принадлежит типам 1 или 2 из Утверждения 8. Пусть p — точка из внутренности Ω , $\gamma(p)$ — ее орбита, $\alpha(p)$ и $\omega(p)$ — ее α - и ω -предельные множества. Любая траектория квазитипичного векторного поля имеет α - и ω -предельные множества одного из трех типов:

- предельный цикл,
- источник или сток,
- седло.

Ни одно из множеств $\alpha(p)$ и $\omega(p)$ не может быть седлом, в противном случае $\gamma(p)$ — сепаратриса и принадлежит ребру ЛМФ-графа, что противоречит предположению о выборе p .

По предположению, грань Ω не принадлежит типам 1 или 2 из Утверждения, поэтому кривая $\gamma(p)$ пересекает кривые без контакта C_α и C_ω которые окружают $\alpha(p)$ и $\omega(p)$ соответственно. Пусть $p_\alpha = C_\alpha \cap \gamma(p)$, $p_\omega = C_\omega \cap \gamma(p)$. Тогда определен росток отображения Пуанкаре:

$$P : (C_\alpha, p_\alpha) \rightarrow (C_\omega, p_\omega).$$

Возможны два случая:

1. росток P может быть продлен на всю кривую C_α ;
2. росток P не может быть продлен на всю кривую C_α .

Грани, которые ограничены C_α и C_ω и отличны от Ω , не могут содержать седел. Поэтому в первом случае Ω совпадает с кольцом между C_α и C_ω , то есть относится к третьему типу кольцевых граней.

Предположим теперь, что P можно продлить на дугу $A \subset C_\alpha$, $p_\alpha \in A$. Траектории непрерывно зависят от начального условия, поэтому дуга A открыта. Пусть q принадлежит границе A . Траектория $\gamma(q)$, которая проходит через точку q , не пересекает C_ω . Следовательно, ее ω -предельное множество принадлежит кольцу между C_α и C_ω . Оно не может быть гиперболическим предельным циклом или стоком, потому что их бассейны притяжения открыты, а значит траектории точек из малой окрестности q тоже не пересекали бы C_ω . Следовательно, $\omega(q)$ — седло.

Дуга A может иметь одну граничную точку q , или же две точки q и q' . В первом случае $A = C_\alpha \setminus q$. Рассмотрим второй случай. Рассмотрим последовательность $p_n \in A$, $p_n \rightarrow q$. Обозначим через γ_n дуги фазовых кривых поля v между p_n и $P(p_n) \in C_\omega$. Тогда существует дуга $\gamma = \lim \gamma_n$ в смысле расстояние Хаусдорфа; γ — объединение сепаратрис. В случае квазитипичного векторного поля дуга γ содержит не более одной седловой связки, следовательно не более двух седел. Обозначим точку пересечения дуги γ с кривой C_ω через Q .

Таким же образом определим последовательность $p'_n \in A$, $p'_n \rightarrow q'$ и построим кривую γ' , которая состоит из дуг сепаратрис поля v , с концами $q' \in C_\alpha$, $Q' \in C_\omega$. Пусть B — дуга кривой без контакта C_ω между Q и Q' такая, что $P(A) = B$. Тогда содержащая точку p грань Ω ЛМФ-графа есть топологический диск, ограниченный объединением кривых

$$\partial\Omega = A \cup \gamma \cup B \cup \gamma';$$

здесь мы пренебрегаем ориентацией.

Случай единственной граничной точки $q \in \partial A$ рассматривается аналогично, только последовательности p_n и p'_n сходятся к одной и той же точке q с разных сторон. $\square$

3.3.3. Связные расширения ЛМФ-графов

Утверждение 9. *Любой ЛМФ-граф может быть расширен до связного графа с гладкими ребрами.*

Доказательство. Плоский граф, все грани которого — диски, связан. Следовательно, для доказательства достаточно добавить в каждую кольцевую грань гладкое *фиктивное ребро*, которое превращает кольцо в диск. Для этого используем Утверждение 8.

Для граней типа 1 возьмем гладкое фиктивное ребро, которое соединяет произвольную вершину на кривой без контакта с единственной вершиной на предельном цикле; все внутренние точки фиктивного ребра принадлежат кольцу (это условие накладывается и в следующих двух случаях). Для граней типа 2 возьмем гладкое фиктивное ребро, которое соединяет произвольную вершину на кривой без контакта с особой точкой. Для граней типа 3 возьмем гладкое фиктивное ребро, которое соединяет единственные вершины на «пустых» кривых без контакта.

Во всех трех случаях добавленное ребро превращает кольцевую грань в топологический диск. Следовательно, граф с добавленными фиктивными ребрами связан. $\square$

3.3.4. Связные расширения ЛМФ-графов в $\mathcal{PC}$ -семействах

Рассмотрим локальное семейство $V = \{v_\varepsilon\}$ класса $\mathcal{PC}$; $v_0 = v \in PC$. Обозначим через M_ε ЛМФ-графы векторных полей v_ε . Среди кривых без контакта поля v специально выделим $C^\pm$: они не принадлежат графу M_ε при $\varepsilon > 0$. Все прочие кривые без контакта графа M_0 поля v принадлежат и M_ε . Следовательно, все фиктивные ребра M_0 , отделенные от $C^\pm$, порождают непрерывные семейства фиктивных ребер графов M_ε . Назовем их *наследованным ребрами*.

Утверждение 10. В указанных выше обозначениях при малых $\varepsilon > 0$ граф N_ε , полученный из M_ε добавлением наследованных ребер, связан.

Доказательство. Плоский граф, все грани которого топологически эквивалентны дискам, связан. Из Утверждения 8 следует, что все кольцевые грани графа M_ε наследованы от графа M_0 . Добавление наследованных ребер делает эти грани дисками. Следовательно, граф N_ε связан. $\square$

3.4. Классификация $\mathcal{PC}$ -семейств

В этом разделе доказана Телорема 22. Любое $\mathcal{PC}$ -семейство порождает пару не синхронизированных размеченных множеств, как показано в Разделе 3.1.5. Надо доказать, что два локальных $\mathcal{PC}$ -семейства эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие пары множеств эквивалентны в смысле Определения 18.

3.4.1. От семейств к парам множеств

Лемма 5. *Любая пара сингулярно-эквивалентных локальных семейств порождает пару эквивалентных в смысле Определения 18 размеченных множеств.*

Доказательство. Приведем сначала краткое эвристическое доказательство. Семейства V и W сингулярно эквивалентны, поэтому седловые связки в них происходят одновременно. Следовательно, множества $\Lambda(A^\pm)$ и $\Lambda(B^\pm)$ упорядочены одним образом. Отсюда следует утверждение леммы.

Перейдем к подробному доказательству.

Пусть $A^\pm(\varepsilon)$ — семейство пар конечных множеств, определенных семейством V согласно Разделу 3.2.6. Пусть $B^\pm(\varepsilon)$ — пара таких же семейств для W . Определим $\Lambda(A^\pm(\varepsilon)) = \{\tau_{km}(\varepsilon)\}$ как в Разделе 3.2.6, и

$$\Lambda(B^\pm(\varepsilon)) = \{\lambda_{km}(\varepsilon) = \{b_k^+(\varepsilon) - b_m^-(\varepsilon)\}\},$$

где

$$B^+(\varepsilon) = \{b_1^+(\varepsilon), \dots, b_K^+(\varepsilon)\}, \quad B^-(\varepsilon) = \{b_1^-(\varepsilon), \dots, b_M^-(\varepsilon)\}.$$

Пара $A^\pm$ не синхронизирована, поэтому все элементы множества $\Lambda(A^\pm)$ попарно различны. Это выполняется и для множеств $\Lambda(A^\pm(\varepsilon))$ при малых ε , поскольку семейства $A^\pm(\varepsilon)$ непрерывны по ε . По этой же причине различны все элементы множества $\Lambda(B^\pm(\varepsilon))$.

При уменьшении ε седловые связки в семействе V происходят в порядке, определенном порядком точек $\tau_{km}(\varepsilon)$ на окружности. Этот порядок тот же, что и для точек множества $\Lambda(A^\pm)$.

Семейства V и W сингулярно эквивалентны, поэтому седла $E_m(\varepsilon)$ и $I_k(\varepsilon)$ образуют связку если и только если существует связка между $\tilde{E}_m(h(\varepsilon))$ и $\tilde{I}_k(h(\varepsilon))$. Следовательно, множества $\Lambda(A^\pm(\varepsilon))$ и $\Lambda(B^\pm(h(\varepsilon)))$ упорядочены одинаково при малых ε . А значит одинаково упорядочены и множества $\Lambda(A^\pm)$ и $\Lambda(B^\pm)$. Следовательно, пары $A^\pm, B^\pm$ эквивалентны в смысле Определения 18. $\square$

3.4.2. От пар множеств — к семействам

Неверно, что эквивалентные пары множеств соответствуют эквивалентным семействам. Действительно, два векторных поля класса PC , которые порождают две пары эквивалентных множеств, могут быть сами топологически не эквивалентны. На самом деле эквивалентные пары множеств порождают эквивалентные бифуркации в окрестности большого носителя бифуркации, но мы не будем это доказывать.

Лемма 6. Пусть два векторных поля класса PC орбитально топологически эквивалентны и порождают две пары эквивалентных в смысле Определения 18 размеченных не синхронизированных множеств. Тогда типичные однопараметрические деформации этих полей слабо эквивалентны.

Доказательство. Лемма повторяет второе утверждение Теоремы 22. Она доказывается в оставшейся части раздела.

3.4.3. План доказательства

Пусть v_0 и w_0 — эквивалентные векторные поля класса PC , и $\hat{H}$ — гомеоморфизм, который переводит фазовый портрет v_0 в фазовый портрет w_0 . Пусть V и W — типичные деформации полей v_0 и w_0 соответственно. Пусть M_ε и $\tilde{M}_\delta$ — ЛМФ-графы полей v_ε и w_δ соответственно. Пусть N_ε и $\tilde{N}_\delta$ — связные расширения этих графов. Построим такой гомеоморфизм h баз названных семейств, что графы N_ε и $\tilde{N}_{h(\varepsilon)}$, а значит и M_ε , $\tilde{M}_{h(\varepsilon)}$, удовлетворяют требованиям Теоремы 25. Следовательно, графы N_ε и $\tilde{N}_{h(\varepsilon)}$ изотопны на сфере. Отсюда будет следовать эквивалентность векторных полей v_ε , $w_{h(\varepsilon)}$, а значит и слабая эквивалентность семейств V и W .

Перейдем к подробному доказательству.

3.4.4. Гомеоморфизм баз и соответствие графов

Пусть параболический цикл в обоих семействах исчезает при положительных значениях параметра и разделяется на пару гиперболических при отрицательных. В противном случае обратим один из параметров.

Пусть $\{\varepsilon_{kmn}\}$ — последовательность бифуркационных значений параметра, определенная в Разделе 3.2.6 для семейства V , и $\{\delta_{kmn}\}$ — аналогичная последовательность для семейства W . В Разделе 3.2.7 доказано, что эквивалентные пары множеств порождают одинаковые бифуркационные сценарии. Следовательно, множества $\{\varepsilon_{kmn}\}$ и $\{\delta_{kmn}\}$ одинаково упорядочены на положительных полуосях:

$$0 < \varepsilon_{kmn} < \varepsilon_{k'm'n'} \Rightarrow 0 < \delta_{kmn} < \delta_{k'm'n'}. \quad (3.13)$$

Пусть $h : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ — росток сохраняющего ориентацию гомеоморфизма такого, что

$$h(\varepsilon_{kmn}) = \delta_{kmn}. \quad (3.14)$$

Существование такого гомеоморфизма следует из (3.13). Отсюда следует существование искомого гомеоморфизма баз.

Для любого малого ε построим отображение

$$g_\varepsilon : N_\varepsilon \rightarrow \tilde{N}_{h(\varepsilon)} \quad (3.15)$$

Будем рассматривать его как отображение абстрактных графов. Заметим, что любой элемент расширенного ЛМФ-графа можно рассматривать двумя способами: как подмножество сферы или как элемент абстрактного графа. С первой точки зрения, ребро — континуальное множество; со второй — один элемент. Введем различные обозначения. Ребра как подмножество сферы будем обозначать латинскими буквами, например I . Те же ребра как элементы абстрактного графа будем обозначать полужирным шрифтом $\mathbf{I}$. Так же поступим для вершин, предельных циклов, и кривых без контакта; циклы и кривые без контакта являются конечными объединениями вершин и ребер.

3.4.5. Комбинаторная эквивалентность ЛМФ-графов: кривые без контакта

Определим отображение g_ε на кривых без контакта. Важно, что эти кривые — ребра или конечные объединения ребер ЛМФ-графа.

Пусть $\hat{H} : S^2 \rightarrow S^2$ — определенный выше (Раздел 3.4.3) гомеоморфизм. Пусть α — произвольный источник поля v_0 и $\tilde{\alpha} = \hat{H}(\alpha)$. Тогда $\tilde{\alpha}$ — источник поля w_0 . Пусть $C(\tilde{C})$ — гладкая кривая без контакта, которая окружает α (соответственно, $\tilde{\alpha}$). Можно так изменить гомеоморфизм $\hat{H}$, что $\hat{H}(C) = \tilde{C}$, и $\hat{H}$ по-прежнему сопрягает v_0 и w_0 . Действуя аналогично для каждого стока и предельного цикла, можно принять, что H переводит кривые без контакта поля v_0 в соответствующие кривые без контакта поля w_0 . В частности, $\hat{H}(C^\pm) = \tilde{C}^\pm$.

Заметим, что гиперболические стоки, источники и предельные циклы поля v_0 (w_0) сохраняются, то есть непрерывно зависят от ε (или δ), для всех полей из семейства V (соответственно, W). Соответствующие им кривые без контакта остаются неизменными при малых $\varepsilon \in (\mathbb{R}, 0)$ и $\delta \in (\mathbb{R}, 0)'$. Для $\varepsilon < 0$ параболический цикл γ распадается на два гиперболических цикла. Кривые C^+ и C^- остаются кривыми без контакта для всех близких к нулю ε , и принадлежат ЛМФ-графу v_ε для $\varepsilon \leq 0$; при $\varepsilon > 0$ эти кривые не входят в ЛМФ-граф. Это же верно для $\tilde{C}^\pm = \hat{H}(C^\pm)$ и семейства W .

Для любой кривой без контакта C графа N_0 определим

$$g_0(\mathbf{C}) = \tilde{\mathbf{C}}, \quad \tilde{C} = \hat{H}(C). \quad (3.16)$$

Для любого близкого к 0 значения параметра ε , любая кривая без контакта $C \neq C^\pm$ векторного поля v_0 является и кривой без контакта для поля v_ε , как показано выше. Поэтому

$$g_\varepsilon(\mathbf{C}) = \tilde{\mathbf{C}}, \quad \tilde{C} = \hat{H}(C). \quad (3.17)$$

Для $C = C^\pm$ формула верна для $\varepsilon \leq 0$; при $\varepsilon > 0$ $C^\pm$ являются кривыми без контакта поля v_ε , но не принадлежат графу N_ε .

В малой окрестности U параболического цикла γ поля v_0 бифуркации семейства V эквивалентны бифуркациям семейства W , которые происходят в малой окрестности $\tilde{U}$ параболического цикла $\tilde{\gamma}$ поля w_0 . Существует семейство гомеоморфизмов $H_\varepsilon : U \rightarrow \tilde{U}$ которое сопрягает векторные поля v_ε и $w_{h(\varepsilon)}$ в названных окрестностях.

При $\varepsilon < 0$ две дополнительные кривые без контакта добавляются к множеству кривых без контакта поля v_0 . А именно, две кривые $D_\varepsilon^\pm$ разделяют два родившихся в результате бифуркации гиперболических цикла $\gamma_\varepsilon^\pm$, которые стремятся к γ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Пусть $\tilde{D}_\varepsilon^\pm$ — аналогичные кривые без контакта поля w_ε в окрестности $\tilde{U}$. Гомеоморфизм H_ε можно изменить таким образом, что

$$H_\varepsilon(D_\varepsilon^\pm) = \tilde{D}_\varepsilon^\pm.$$

Пусть

$$g_\varepsilon(\mathbf{D}_\varepsilon^\pm) = \tilde{\mathbf{D}}_\varepsilon^\pm.$$

Этим завершается построение соответствия g_ε на множестве кривых без контакта.

3.4.6. Комбинаторная эквивалентность ЛМФ-графов: вершины

Теперь определим отображение g_ε на вершинах ЛМФ-графа N_ε . Вершинами ЛМФ-графа N_ε являются

- гиперболические особые точки
- точки усечения сепаратрис
- вершины на предельных циклах
- вершины на «пустых» кривых без контакта

Для любой особой точки E поля v_0 существует непрерывное семейство $E(\varepsilon)$, $E(0) = E$ такое, что $E(\varepsilon)$ — особая точка поля v_ε . Это же верно для семейства W , только в обозначениях будет, как прежде, добавлена тильда.

Пусть $\tilde{E} = H(E)$. Положим

$$g_\varepsilon(\mathbf{E}(\varepsilon)) = \tilde{\mathbf{E}}(h(\varepsilon)).$$

Это определяет соответствие g_ε на особых точках полей v_ε и $w_{h(\varepsilon)}$.

Теперь определим это же соответствие на точках усечения сепаратрис. Для этого прежде понадобится определить соответствие сепаратрис. Пусть E — седло поля v_0 , $\tilde{E} = H(E)$. Для любой сепаратрисы l поля E положим $\tilde{l} = H(l)$. Пусть $E(\varepsilon)$ и $\tilde{E}(h(\varepsilon))$ — сопряженные особые точки полей v_ε и $w_{h(\varepsilon)}$. Пусть $l(\varepsilon)$ — семейство сепаратрис $E(\varepsilon)$, ростки которых в точке $E(\varepsilon)$ зависят непрерывно от ε ; $l(0) = l$. Пусть $\tilde{l}(\delta)$ — аналогичное семейство для W . Положим:

$$g_\varepsilon(\mathbf{l}(\varepsilon)) = \tilde{\mathbf{l}}(h(\varepsilon)). \quad (3.18)$$

Если $l(\varepsilon)$ (и $\tilde{l}(h(\varepsilon))$) имеет точку усечения b_ε (соответственно, $\tilde{b}(h(\varepsilon))$), то определим

$$g_\varepsilon(\mathbf{b}(\varepsilon)) = \tilde{\mathbf{b}}(h(\varepsilon)).$$

Лемма 7 (Лемма о соответствии). *В условиях Леммы 6 предположим, что сепаратриса $l(\varepsilon)$ имеет вершину усечения $b(\varepsilon)$. Тогда $\tilde{l}(h(\varepsilon))$ также имеет вершину усечения $\tilde{b}(h(\varepsilon))$ (то есть $\tilde{l}(h(\varepsilon))$ не образует седловой связки). Более этого, если $b(\varepsilon) \in C$, то $\tilde{b}(h(\varepsilon)) \in \tilde{C}$, $\tilde{\mathbf{C}} = g_\varepsilon(\mathbf{C})$. Соответствующие вершины усечения на соответствующих кривых без контакта следуют в одном и том же порядке.*

Лемма о соответствии доказана ниже.

Для любого гиперболического цикла γ поля v_0 определено непрерывное семейство циклов γ_ε векторных полей v_ε , причем $\gamma_0 = \gamma$; аналогично для семейства W . Пусть $\tilde{\gamma} = \hat{H}(\gamma)$. Положим:

$$g_\varepsilon(\gamma_\varepsilon) = \tilde{\gamma}_{h(\varepsilon)}.$$

Теперь выберем непрерывно зависящую от ε вершину $b_\varepsilon \in \gamma_\varepsilon$ ($b_\delta \in \tilde{\gamma}_\delta$) (соответственно, зависящую от δ), и положим:

$$g_\varepsilon(\mathbf{b}_\varepsilon) = \tilde{\mathbf{b}}_{h(\varepsilon)}.$$

Для параболического предельного цикла γ ($\tilde{\gamma}$) и вершин на рождающихся при бифуркации гиперболических циклах $\gamma_\varepsilon^\pm$, $\varepsilon < 0$ ($\tilde{\gamma}_\delta^\pm$, $\delta < 0$) воспользуемся отображением H_ε : для $b^\pm(\varepsilon) \in \gamma_\varepsilon^\pm$ положим:

$$g_\varepsilon(\mathbf{b}^\pm(\varepsilon)) = \tilde{\mathbf{b}}^\pm(h(\varepsilon)), \quad \tilde{b}^\pm(h(\varepsilon)) = H_\varepsilon(b^\pm(\varepsilon)).$$

Аналогично поступим для вершин на пустых кривых без контакта $D^\pm(\varepsilon)$ и $\tilde{D}^\pm(h(\varepsilon))$.

Этим завершается построение отображение соответствия g_ε на множестве вершин.

3.4.7. Комбинаторная эквивалентность ЛМФ-графов: ребра

Ребрами расширенного ЛМФ-графа являются:

- сепаратрисы седел
- дуги ориентированных кривых без контакта между ближайшими вершинами усечения
- предельные циклы как одно ребро
- пустые кривые без контакта как одно ребро
- фиктивные ребра, которые дополняют граф до связного

Отображение γ_ε на ребрах первого, третьего и четвертого типов уже определено. Остаются два класса.

Фиктивные ребра. Пусть f — фиктивное ребро ЛМФ-графа N_0 векторного поля v_0 , отделенное от кривой без контакта $C^\pm$. Пусть $\{f_\varepsilon\}$ — соответствующее семейство наследованных ребер графа N_ε , см. Раздел 3.3.4. Согласно Утверждению 10, все фиктивные ребра связного графа N_ε при $\varepsilon > 0$ могут быть определены таким образом. Пусть $\tilde{f} = \hat{H}(f)$ и $\{\tilde{f}_\delta\}$ — аналогичные семейства фиктивных ребер для семейства W . Положим

$$g_0(\mathbf{f}) = \tilde{\mathbf{f}}, \quad g_\varepsilon(\mathbf{f}(\varepsilon)) = \tilde{\mathbf{f}}(h(\varepsilon)).$$

Согласно Утверждению 10, этим определено соответствие между фиктивными ребрами графов $\mathbf{N}_\varepsilon$ и $\tilde{\mathbf{N}}_{h(\varepsilon)}$.

Дуги кривых без контакта — наиболее тонкая часть построения. Пусть c — дуги кривой без контакта C поля v_ε между двумя вершинами усечения b_1 и b_2 сепаратрис $l_1(\varepsilon), l_2(\varepsilon)$. Следовательно, по Лемме о соответствии, вершины усечения $g_\varepsilon(\mathbf{b}_1), g_\varepsilon(\mathbf{b}_2)$ являются $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$, вершинами усечения сепаратрис $\tilde{l}_1(h(\varepsilon)), \tilde{l}_2(h(\varepsilon))$, которые принадлежат соответствующей кривой без контакта $\tilde{C}$. Пусть $\tilde{c}$ — дуга кривой без контакта $\tilde{C}$ поля $w_{h(\varepsilon)}$ между вершинами усечения $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$. Тогда

$$\tilde{c} = g_\varepsilon(c),$$

и вершины $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ лежат последовательно на $\tilde{C}$.

Этим завершается построение отображения соответствия $g_\varepsilon : \mathbf{N}_\varepsilon \rightarrow \tilde{\mathbf{N}}_{h(\varepsilon)}$.

3.4.8. Проверка условия звездочки и доказательство Теоремы 22 по модулю

Леммы о соответствии

Для любого графа $N_\varepsilon, \tilde{N}_\delta$ на сфере рассмотрим соответствующий абстрактный граф $\mathbf{N}_\varepsilon, \tilde{\mathbf{N}}_\delta$, и вложение $i_\varepsilon : \mathbf{N}_\varepsilon \rightarrow N_\varepsilon$, $j_\delta : \tilde{\mathbf{N}}_\delta \rightarrow N_\delta$. Мы построили отображение $g_\varepsilon : \mathbf{N}_\varepsilon \rightarrow \tilde{\mathbf{N}}_{h(\varepsilon)}$, которое осуществляет изоморфизм абстрактных графов. Докажем, что пара вложений $\mathbf{N}_\varepsilon$:

$$i_\varepsilon : \mathbf{N}_\varepsilon \rightarrow N_\varepsilon \text{ и } j_{h(\varepsilon)} \circ g_\varepsilon : \mathbf{N}_\varepsilon \rightarrow \tilde{N}_{h(\varepsilon)}$$

удовлетворяет условию звездочки. По определению g_ε при $\varepsilon = 0$

$$H_0 \circ i_0 = j_0 \circ g_0.$$

Отображение H_0 — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм, поэтому вложения i_0 , $j_0 \circ g_0$ удовлетворяют условию звездочки. Соответствие оснащений очевидно.

Теперь проверим условие звездочки для i_ε и $j_{h(\varepsilon)} \circ g_\varepsilon := \tilde{i}_\varepsilon$.

Рассмотрим седла поля v_{ε_0} . Любая особая точка поля v_{ε_0} принадлежит непрерывному по ε семейству особых точек полей v_ε . Их сепаратрисы также непрерывно зависят от ε . Отображения i_ε и $\tilde{i}_\varepsilon$ также непрерывны по ε . Поэтому, если они удовлетворяют условию звездочки в гиперболических седлах для $\varepsilon = 0$, то удовлетворяют и при малых значениях параметра.

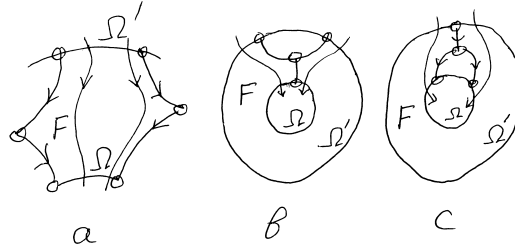
Для звезд вершин на предельных циклах и пустых кривых без контакта условие звездочки при малых значениях параметра следует из этого же условия при $\varepsilon = 0$, даже при наличии фиктивных ребер. Для звезд вершин усечения верен этот же аргумент.

Поэтому вложенные расширенные графы $N_\varepsilon, \tilde{N}_{h(\varepsilon)}$ изотопны по Теореме 25. Следовательно, семейства V и W слабо эквивалентны. Теорема 22 доказана по модулю леммы о соответствии.

3.4.9. Доказательство Леммы о соответствии

Дуги усечения

Рассмотрим кривую без контакта $C \neq C^\pm$ поля v_0 . Как объяснено в 3.4.5, эти кривые являются кривыми без контакта полей v_ε при малых ε . По предположению, C соответствует гиперболическому аттрактору или репеллеру; обозначим его через A . Без ограничения общности примем, что A — аттрактор. Случай репеллера рассматривается аналогично. Ат-

Рис. 3.6. Односвязные грани ЛМФ-графа M_0 .

трактор A гиперболичен (это сток или цикл), а значит непрерывно зависит от параметра ε , то есть определяет непрерывное семейство $A(\varepsilon)$ аттракторов полей v_ε . Объединение бассейнов этих аттракторов открыто в тотальном пространстве x, ε . Значит, вершины усечения поля v_0 на C порождают непрерывное семейство вершин усечения C , которые разбивают C на конечное число непрерывных по параметру ε семейств дуг. Будем называть эти дуги *дугами усечения*.

Определение 21. Назовем дугу усечения поля v_0 параболической, если она соединена траекторией поля v_0 с одной из кривых $C^\pm$ и гиперболической в противоположном случае.

Пусть Ω — дуга усечения кривой без контакта C поля v_0 . Пусть C соответствует стоку или притягивающему циклу A , и F^- — грань, ограниченная C и A . Пусть F — другая грань M_0 , чья граница содержит Ω . Эта грань может быть одного из трех типов, см. Изображение 3.6 и Утверждение 8.

Дуга Ω' принадлежит кривой без контакта C' . Эта кривая отличается от $C^\pm$ для гиперболической дуги Ω , и совпадает с C^+ (C^-) для параболической Ω , когда A является аттрактором.

Те седла поля v_0 , которые принадлежат ∂F , порождают непрерывное семейство седел полей v_ε . Если дуга Ω гиперболическая, то $C' \neq C^+$, и грань F определяет непрерывное семейство граней F_ε графов M_ε , $F_0 = F$.

Теперь опишем гиперболические и параболические дуги по отдельности.

Гиперболические дуги

Утверждение 11. При малом ε гиперболические дуги не содержат точки усечения как внутренние точки.

Доказательство. Как говорилось в конце предыдущего раздела, $\Omega' \subset C'$ и $C' \neq C^\pm$ потому что дуга Ω гиперболическая. Тогда C' соответствует репеллеру R . Он порождает непрерывное по ε семейство репеллеров $R(\varepsilon)$ для $\varepsilon \in (\mathbb{R}, 0)$, и C' является кривой без контакта для каждого

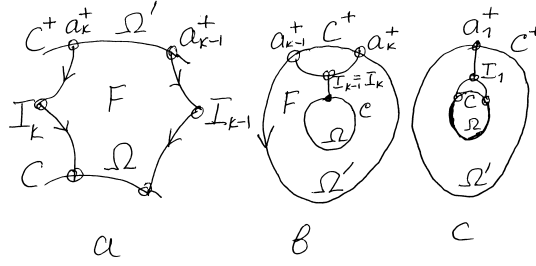


Рис. 3.7. Односвязные грани, прилегающие к параболической дуге Ω .

репеллера из этого семейства. Грани F_ε графа M_ε , определенные в конце Раздела 3.4.9, имеют два непрерывных по параметру семейства ребер: $\Omega(\varepsilon)$ и $\Omega'(\varepsilon)$, $\Omega(0) = \Omega$, $\Omega'(0) = \Omega'$. Отображение Пуанкаре $\Omega'(\varepsilon) \rightarrow \Omega(\varepsilon)$ вдоль траекторий v_ε корректно определено. Пусть p — внутренняя точка $\Omega(\varepsilon)$ и $q = P^{-1}(p) \in \Omega'(\varepsilon)$. Тогда положительная полуорбита P стремится к $A(\varepsilon)$ и отрицательная полуорбита точки q стремится к $R(\varepsilon)$. Следовательно, траектория точки P — не сепаратриса. А значит ни одна из внутренних точек $\Omega(\varepsilon)$ не является вершиной усечения. $\square$

Параболические дуги

Пусть $\Omega \subset C$ — параболическая дуга. Пусть F — грань M_0 , смежная к Ω и описанная в Разделе 3.4.9. Пусть, как прежде, C соответствует аттрактору A . Тогда $\Omega' \subset C^+$, и грань F — одного из трех типов, показанных на изображении 3.7.

Опишем вершины усечения, которые принадлежат $\Omega(\varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$.

Утверждение 12. Пусть $a_k(\varepsilon)$ и $a_{k-1}(\varepsilon)$ — вершины $\Omega'(\varepsilon)$, см. случаи a и b на Изображении 3.7. Тогда внутренние вершины усечения на $\Omega(\varepsilon)$ принадлежат исходящим сепаратрисам седла $E_m(\varepsilon)$ при m таких, что

$$\tau_{(k-1)m}(\varepsilon) < \{-\tau(\varepsilon)\} < \tau_{km}(\varepsilon). \quad (3.19)$$

В случае c это же утверждение верно, если (3.19) заменить на

$$\tau_{1m}(\varepsilon) \neq \{-\tau(\varepsilon)\}. \quad (3.20)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай c . В этом случае есть только одно седло I_1 поля v_0 , сепаратрисы которого наматываются на γ в обратном времени.

Пусть $\{\Omega(\varepsilon)\}$ — семейство дуг усечения поля v_ε , $\Omega(\varepsilon) \in C$, $\Omega(0) = \Omega$. Предположим что точка $\omega(\varepsilon) \in \Omega$ — вершина усечения. Докажем, что она принадлежит сепаратрисе одного из

седла $E_m(\varepsilon)$, и выполняется (3.20).

Предположим противное, пусть $\omega(\varepsilon)$ принадлежит сепаратрисе $l(\varepsilon)$ седла $E(\varepsilon)$, причем ни одна из сепаратрис седла $E(0)$ поля v_0 не наматывается в прямом времени на параболический цикл γ . Тогда все исходящие сепаратрисы седла $E(0)$ стремятся к гиперболическому аттрактору v_0 . Сепаратрисы отделены от кривой C^- . Это же выполняется для сепаратрис поля v_ε , которые исходят из седла $E(\varepsilon)$ при малых ε . С другой стороны, если сепаратриса $l(\varepsilon)$ некоторого седла поля v_ε пересекает Ω в точке $\omega(\varepsilon)$, то:

- $l(\varepsilon)$ пересекает дугу $\Omega' \subset C^+$ в точке $q(\varepsilon) = P^{-1}(\omega(\varepsilon))$;
- $l(\varepsilon)$ пересекает кривую C^- в точке $\alpha(\varepsilon) = \Delta_\varepsilon^{-1}(q(\varepsilon))$.

Это противоречит утверждению предыдущего параграфа и доказывает, что $\omega(\varepsilon)$ принадлежит сепаратрисе одного из седел $E_m(\varepsilon)$. Более этого, неравенство (3.20) выполняется, иначе $l(\varepsilon)$ является входящей сепаратрисой $I_1(\varepsilon)$ и не пересекает дугу Ω , см. Изображение 3.7.

Рассмотрим теперь случаи a и b . Из аргументов, аналогичных приведенным для случая c , следует, что $\omega(\varepsilon)$ принадлежит сепаратрисе некоторого седла $E_m(\varepsilon)$, которая пересекает C^- в точке $a_m^-(\varepsilon)$. Более этого, $\Delta_\varepsilon(a_m^-(\varepsilon)) \in (a_{k-1}^-(\varepsilon), a_k^-(\varepsilon))$. Отсюда следует (3.19). Утверждение доказано. $\square$

Завершение доказательства Леммы о соответствии

Теперь докажем Лемму о соответствии. Пусть $V = \{v_\varepsilon\}, W = \{w_\varepsilon\}$, $h : (\mathbb{R}^1, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^1, 0)$, $\sigma_\varepsilon : M_\varepsilon \rightarrow \tilde{M}_{h(\varepsilon)}$ определены как прежде, см. Разделы 3.4.4 – 3.4.7. Пусть C — кривая без контакта векторных полей v_ε , отличная от $C^\pm$, и $\tilde{C} = \hat{H}(C)$. Надо доказать, что вершины усечения полей v_ε , которые лежат на C , находятся в естественном соответствии с вершинами усечения полей $w_{h(\varepsilon)}$, которые лежат на $\tilde{C}$, а также что соответствующие вершины на C и $\tilde{C}$ следуют в одном и том же порядке.

Начнем с вершин усечения поля v_0 .

Пусть E — седло поля v_0 , l — исходящая сепаратриса седла E , и вершина усечения ω сепаратрисы l принадлежит кривой без контакта C , отличной от $C^\pm$. Тогда C является кривой без контакта для всех полей v_ε семейства V , и существуют непрерывные по параметру семейства $E(\varepsilon), l(\varepsilon), \omega(\varepsilon)$ седла, сепаратрис и вершин усечения соответственно, причем $E(0) = E, l(0) = l, \omega(0) = \omega$.

Пусть $\tilde{E} = \hat{H}(E), \tilde{l} = \hat{H}(l), \tilde{\omega} = \hat{H}(\omega), \tilde{C} = \hat{H}(C)$. Тогда $\tilde{E}$ — седло поля w_0 , $\tilde{l}$ его сепаратриса, $\tilde{C}$ — кривая без контакта w_0 , $\tilde{\omega}$ — вершина усечения сепаратрисы $\tilde{l}$; эта вершина

принадлежит $\tilde{C}$. Пусть $\tilde{E}(\delta), \tilde{l}(\delta), \tilde{\omega}(\delta)$ — соответствующие семейства для w_δ . Тогда, по определению отображений δ_ε ,

$$\delta_\varepsilon(\omega(\varepsilon)) = \tilde{\omega}(h(\varepsilon)).$$

Это доказывает Лемму о соответствии для вершин усечения на кривой без контакта C для векторных полей v_ε , которые соответствуют таковым вершинам поля v_0 .

Отображение σ_ε можно расширить на дуги усечения

$$\sigma_\varepsilon(\Omega(\varepsilon)) = \tilde{\Omega}(h(\varepsilon))$$

если и только если σ_ε переводит вершины $\Omega(\varepsilon)$ в вершины $\tilde{\Omega}(h(\varepsilon))$, и $\hat{H}$ переводит $\Omega(0)$ в $\tilde{\Omega}(0)$. Это отображение переводит гиперболические и параболические дуги полей v_ε на C в гиперболические и параболические дуги $w_{h(\varepsilon)}$ на $\tilde{C}$ соответственно. По определению этих дуг, достаточно проверить последнее утверждение только при $\varepsilon = 0$. При $\varepsilon = 0$ оно следует из того, что $\hat{H}$ переводит дуги фазовых кривых v_0 , которые соединяют дуги усечения с одной из кривых без контакта $C^\pm$ в аналогичные дуги поля w_0 .

Согласно Утверждению 11, внутри гиперболических дуг нет вершин усечения. Поэтому осталось разобрать случай вершин усечения внутри параболических дуг.

Пусть E, l, ω определены как в начале доказательства, но теперь $\omega \in C^-$. Тогда l — исходящая сепаратриса седла E ; случай входящей сепаратрисы аналогичен. Предположим, что $E(\varepsilon)$ и $(l(\varepsilon), E(\varepsilon))$ — непрерывные семейства седел и ростков сепаратрис этих седел. Сейчас все сепаратрисы $l(\varepsilon)$ и их вершины усечения $\omega(\varepsilon)$ не непрерывны по ε ; сепаратрисы образуют мелькающие седловые связки. Предположим, что $\omega(\varepsilon)$ принадлежит параболической дуге Ω кривой без контакта C .

Пусть $\tilde{E}(\delta), \tilde{l}(\delta), \tilde{\omega}(\delta), \tilde{C} = \hat{H}(C), \tilde{\Omega}(\delta)$ — соответствующие объекты для векторных полей w_δ . Надо доказать, что, во-первых, $\tilde{\omega}(h(\varepsilon)) \in \tilde{\Omega}(h(\varepsilon))$, и, во-вторых, что вершины усечения на $\tilde{\Omega}$ следуют в том же порядке, как соответствующие им вершины на Ω . Докажем первое утверждение.

Пусть F — смежная с Ω грань, как и в Утверждении 12, см. Изображение 3.7.

Пусть Ω' — ребро грани F , противоположное ребру Ω . Рассмотрим сначала случай c . В этом случае граничные точки Ω' совпадают и равны $a_1^+(\varepsilon)$. Из Утверждения 12 следует, что требование $\omega(\varepsilon) \in \Omega$ эквивалентно следующему: седло E — одно из седел E_m , сепаратриса которого (например, l) наматывается в прямом времени на параболический цикл γ поля v_0 ,

и

$$\tau_{1m}(\varepsilon) \neq \{-\tau(\varepsilon)\}.$$

По построению отображения h , отсюда следует

$$\lambda_{1m}(h(\varepsilon)) \neq \{-\lambda(h(\varepsilon))\}.$$

Это означает, что вершина усечения $\tilde{\omega}(h(\varepsilon))$ принадлежит внутренности $\tilde{\Omega}(h(\varepsilon))$. Утверждение доказано.

Точки $\omega_m(\varepsilon)$ расположены на Ω в том же порядке, в котором точки

$$a_n^-, a_{n+1}^-, \dots, a_M^-, a_1^-, \dots, a_{n-1}^- \quad (3.21)$$

расположены на C^- ; здесь n такое, что

$$\tau_{1n} = \min \{ \tau_{1m} | \tau_{1m} > \{-\tau(\varepsilon)\} \}.$$

По определению h , из требования

$$\tilde{\lambda}_{1\tilde{n}} = \min \{ \lambda_{1m} > \{-\lambda(\varepsilon)\} \}$$

следует, что $\tilde{n} = n$. Значит, точки $\tilde{\omega}_m(h(\varepsilon))$ расположены на $\tilde{\Omega}$ в том же порядке, как точки

$$\tilde{a}_n^-, \dots, \tilde{a}_M^-, \tilde{a}_1^-, \dots, \tilde{a}_{n-1}^-$$

расположены на $\tilde{C}^-$; но этот порядок совпадает с порядком в (3.21), так как $\hat{H}(a_m^-) = \tilde{a}_m^-$.

Случаи a и b рассматриваются аналогично.

Сепаратриса $l_m(\varepsilon)$ седла $E_m(\varepsilon)$ пересекает внутренность дуги $(a_{k-1}^+(\varepsilon), a_k^+(\varepsilon))$ в точке $\omega_m(\varepsilon)$ если и только если

$$\tau_{(k-1)m}(\varepsilon) < \{-\tau(\varepsilon)\} < \tau_{km}(\varepsilon).$$

По определению h , отсюда следует, что:

$$\lambda_{(k-1)m}(h(\varepsilon)) < \{-\lambda(h(\varepsilon))\} < \lambda_{km}(h(\varepsilon)).$$

Следовательно, сепаратриса $\tilde{l}_m(h(\varepsilon))$ седла $\tilde{E}_m(h(\varepsilon))$ пересекает внутренность дуги $b_{k-1}^+(h(\varepsilon)), b_k^+(h(\varepsilon))$ в точке $\tilde{\omega}_m(h(\varepsilon))$. Точки $\omega_m(\varepsilon)$ расположены в том же порядке, что и

$a_m^-(\varepsilon)$, а значит в том же, что и $b_m^-(h(\varepsilon))$, что и $\tilde{\omega}_m(\varepsilon)$. Это доказывает лемму для вершин усечения на параболических дугах.

Соответствующие гиперболические и параболические дуги расположены на C и $\tilde{C}$ в одном и том же порядке. А значит таковы и вершины усечения. Доказательство Леммы окончено. $\square$

3.5. Структурная устойчивость

В этом разделе доказана Теорема 18, а значит и Теорема 16.

3.5.1. Сведение к классификационной теореме

Утверждение 13. *Для C^4 -близких векторных полей v, w соответствующие множества $A^\pm(v), A^\pm(w)$ близки.*

Это утверждение доказано в двух следующих разделах. Сейчас проверим, что два близких локальных семейства класса PC удовлетворяют предположениям Леммы 6. Из этого будет следовать Теорема 18.

Пусть V — деформация поля v : $V = \{v_\varepsilon | \varepsilon \in (\mathbb{R}, 0)\}$, $v_0 = v$. Пусть поле $w \in PC$ настолько близко к v , что применима теорема Сотомайора: w орбитально топологически эквивалентно v . Более этого, пусть v и w близки настолько, что соответствующие пары не синхронизированных множеств $A^\pm(v), A^\pm(w)$ тоже близки, см. Утверждение 13. Тогда они эквивалентны в смысле Определения 16. Теперь пусть W — деформация поля w класса PC . Все требования Леммы 6 к семействам V и W удовлетворены. Следовательно, семейства эквивалентны. А значит семейство V структурно устойчиво.

3.5.2. Теорема Такенса с параметром

Главный шаг в доказательстве Утверждения 13 — проверить, что канонические координаты на кривых без контакта близки для близких векторных полей класса PC . Для этого достаточно проверить, что функции времени $T^\pm$, определенные в 3.1.5, близки, если векторные поля близки. Для этого, в свою очередь, достаточно проверить, что близки генераторы близких параболических ростков.

Утверждение 14. *Предположим, что два параболических ростка C^4 близки. Тогда их генераторы близки в C . Другими словами, для любого параболического ростка существует*

представитель P со следующим свойством. Пусть U — область определения P . Тогда существует окрестность $V \subset U$ точки 0 такая, что любое отображение Q , достаточно C^4 -близкое к P в области U , имеет генератор, который C -близок к генератору P в области V .

Доказательство. Пусть P и Q — два C^4 -близких параболических ростка в области $(\Gamma, O) = (\mathbb{R}, 0)$:

$$P : x \mapsto x + x^2 + (a+1)x^3 + \dots, \quad Q : x \mapsto x + (1+\alpha)x^2 + \dots,$$

параметр α мал. Линейной заменой координаты x во второй формуле: $y = (1+\alpha)x$ можно получить:

$$Q : y \mapsto y + y^2 + (b+1)y^3 + \dots$$

y, b близки к x, a . Пусть u_a — векторное поле, определенное формулой

$$u_a = \frac{x^2}{1-ax},$$

g_a — преобразование фазового потока поля u_a за время 1; u_b и g_b определим аналогично, заменив a на b . Тогда

$$P(x) = g_a(x) + R(x), \quad Q(y) = g_b(y) + \tilde{R}(y).$$

Из простого вычисления следует, что $R(x) = O(x^4)$, $\tilde{R}(y) = O(y^4)$. Функции R и $\tilde{R}$ близки в C^4 . Напомним и воспользуемся известным способом поиска генераторов отображений P и Q с помощью решения уравнения Абеля, см. для примера [31]. Правые части этих уравнений будут выбраны достаточно близкими. Поэтому близки будут и решения. Обозначим через W генератор отображения P . Сначала найдем его для $x > 0$ в специальной координате t_a :

$$t_a = -\frac{1}{x} + a \ln x.$$

Отображения P и g_a в этой координате обозначим через $\hat{P}$ и $\hat{g}_a$. Заметим, что $\hat{g}_a$ — просто сдвиг на 1: $\hat{g}_a(t) = t + 1$. Пусть

$$\hat{P} : t \mapsto t + 1 + \Phi(t).$$

Функция Φ убывает как t^{-2} на бесконечности, потому что $R(x) = O(x^4)$. Найдем отображение

$t \mapsto t + h(t)$, которое сопрягает $\hat{P}$ и $t + 1$:

$$(\text{id} + h) \circ \hat{P} = \text{id} + h + 1,$$

или, что то же самое,

$$h = h \circ \hat{P} + \Phi$$

Ниже оценим, как решения этого уравнения зависят от Φ . Заметим, что генератор $\hat{P}$ есть

$$\hat{W} = (\text{id} + h)_*^{-1} \frac{\partial}{\partial t_a}.$$

По известной формуле, отображение h записывается как

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi \circ \hat{P}^k.$$

Пусть $\hat{Q}$ — это отображение Q в координате t_b :

$$t_b = -\frac{1}{x} + b \ln x,$$

$$\hat{Q}(t_b) = t_b + 1 + \hat{\Phi},$$

$$\tilde{h} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\Phi} \circ \hat{Q}^k.$$

Тогда генератор $\hat{Q}$ есть

$$\hat{U} = (\text{id} + \tilde{h})_*^{-1} \frac{\partial}{\partial t_b}.$$

Следовательно,

$$W = (t_a^{-1})_* \hat{W}, \quad U = (t_b^{-1})_* \hat{U}.$$

Поскольку P и Q C^4 -близки, функции Φ и $\tilde{\Phi}$ близки в C , это же выполняется для h и $\tilde{h}$, h' и $\tilde{h}'$, $\hat{W}$ и $\hat{U}$, W и U . Утверждение 14 доказано. $\square$

3.5.3. Близость размеченных множеств

В этом разделе завершено доказательство Утверждения 13.

Пусть v и w — два близких векторных поля класса PC , γ и $\tilde{\gamma}$ — их (близкие) параболические циклы, и $C^{\pm}$ — общие для обоих полей кривые без контакта, которые соответствуют параболическому циклу. Как показано выше, поля v и w орбитально топологически эквива-

лентны. Пусть $E_m, \tilde{E}_m$, $m = 1, \dots, M$ и $I_k, \tilde{I}_k$, $k = 1, \dots, K$ — седла полей v и w соответственно, чьи сепаратрисы наматываются на γ и $\tilde{\gamma}$, как описано выше; E_m и $\tilde{E}_m$, I_k и $\tilde{I}_k$ близки друг к другу.

Тогда близки точки пересечения сепаратрис этих седел с кривой без контакта $C^\pm$. Но надо доказать, что эти точки близки на координатной окружности в координатах $\varphi^\pm, \tilde{\varphi}^\pm$, которые определены функциями времени, которые соответствуют отображениям Пуанкаре P для γ и v и Q для $\tilde{\gamma}$ и w . Последнее утверждение следует из Утверждения 14.

Итак, Утверждение 13 доказано, а значит завершено доказательство Теорем о структурной устойчивости 16 и 18.

3.6. Носитель бифуркации и большой носитель бифуркации

В [28] Арнольд впервые ввел понятие *носителя бифуркации*. Новый термин, как он объяснил, мотивирован следующим: надо определить такое подмножество фазового портрета вырожденного векторного поля, что все бифуркации, которые происходят при деформациях этого поля, случаются в окрестности подмножества-носителя. Следующая теорема показывает, что носителя бифуркации недостаточно для обозначенной цели. Приведем цитату из Арнольда.

Хотя даже локальные бифуркации в высоких коразмерностях (начиная с трех) на диске полностью не исследованы, тем не менее, полезно затронуть вопрос о нелокальных бифуркациях в многопараметрических семействах векторных полей на двумерной сфере. При их описании возникает необходимость выделения множества траекторий, определяющих перестройки в семействе.

Определение 22. Конечное подмножество фазового пространства называется несущим бифуркацию, если существует сколь угодно малая его окрестность и (зависящая от нее) окрестность бифуркационного значения параметра такие, что вне этой окрестности множества деформация (при значениях параметра из второй окрестности) топологически тривиальна.

Определение 23. Носителем бифуркации называется объединение всех минимальных несущих бифуркацию множеств (минимальное — не содержащее собственного подмножества, несущего бифуркацию).

Определение 24. Две деформации векторных полей с носителями бифуркаций Σ_1 и Σ_2 называются эквивалентными или слабо эквивалентными на носителях, если существу-

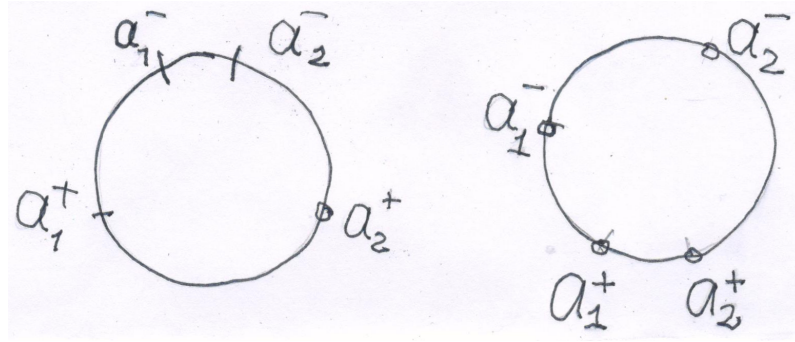


Рис. 3.8. Пример неэквивалентных пар размеченных множеств

ют такие сколь угодно малые окрестности носителей и (зависящие от них) окрестности бифуркационных значений параметров, что ограничения семейств на эти окрестности носителей топологически эквивалентны или слабо эквивалентны над этими окрестностями бифуркационных значений.

Конец цитаты.

Теорема 26. *Существуют два орбитально топологически эквивалентных векторных поля класса PC такие, что их типичные однопараметрические деформации эквивалентны в окрестности носителей, но не сингулярно-эквивалентны на всей сфере.*

Это усиленная версия Теоремы 20.

Доказательство. Рассмотрим векторное поле v класса PC . Малым носителем бифуркации является любая точка параболического цикла γ этого поля. Носителем бифуркации является сам параболический цикл γ . При деформации поля v цикл γ на одной полуоси параметра распадается на два гиперболических цикла, а на другой полуоси исчезает. Любые два векторных поля класса PC имеют эквивалентные деформации на своих носителях.

Рассмотрим два поля класса PC , у которых не эквивалентны пары соответствующих не синхронизированных множеств, см. для примера Изображение 3.8. По Теореме 22, деформации этих полей не сингулярно эквивалентны. $\square$

Теорема 26 доказана, значит и Теорема 20 тоже доказана.

Публикации автора по теме диссертации

1. Solodovnikov N. Boundary-preserving mappings of a manifold with intermingling basins of components of the attractor, one of which is open / N. Solodovnikov // Transactions of the Moscow mathematical society. 2014. Vol 75. P. 69–76.
2. Schurov I., Solodovnikov N. Duck Factory on the Two-Torus: Multiple Canard Cycles Without Geometric Constraints / N. Solodovnikov // Journal of Dynamical and Control Systems. 2017. Vol 23, Iss.3. P. 481-498.
3. Goncharuk N., Ilyashenko Yu., Solodovnikov N. Global bifurcations in generic one-parameter families with a parabolic cycle on the two-sphere // [Электронный ресурс]. — Working papers of Cornell University, 2017. — arXiv:1707.09779 — Режим доступа: <https://arxiv.org/abs/1707.09779>.

Список литературы

1. Falconer K. Fractal Geometry. // John Wiley, 1990.
2. Hirsch M. W., Pugh C. C., Shub M. Invariant manifolds // Lecture Notes in Mathematics. 1977. Vol. 583.
3. Ilyashenko Yu. Thick attractors of boundary preserving diffeomorphisms // Indag. Math. (N. S.) 2011. Vol. 22, No 3–4. P. 257–314.
4. Kleptsyn V., Volk D. Physical Measures for Nonlinear Random Walks on Interval // Moscow Mathematical Journal. 2014. Vol. 14, no. 2. P. 339–365.
5. Okunev A. Milnor Attractors of Skew Products with the Fiber a Circle. // Journal of Dynamical and Control Systems. Подана в печать.
6. Van der Pol, B., On relaxation-oscillations. // The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. and J. of Sci., 2:7 (1927), P. 978–992
7. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний — 2-е издание. — 1959. — С. 727–855. — 914 с.
8. Железцов Н. А. К теории разрывных колебаний в системах второго порядка. // Изв. высших учебных заведений. Радиофизика 1:1 (1958), С. 67–78.
9. Ilyashenko Yu., Negut A. Hölder properties of perturbed skew products and Fubini regained // Nonlinearity. 2012. Vol. 25, No 8. P. 2377–2399. ArXiv: 1005.0173v1.
10. Ilyashenko Yu., Kleptsyn V., Saltykov P. Openness of the set of boundary preserving maps of an annulus with intermingled attracting basins // J. Fixed Point Theory and Appl. 2008. Vol. 3, No 2. P. 449–463.
11. Kan I. Open sets of diffeomorphisms having two attractors, each with an everywhere dense basin // Bull. AMS. (N. S.) 1994. Vol. 31. P. 68–74.
12. Kleptsyn V., Minkov S., Ryzhov S. Special ergodic theorems and dynamical large deviations // Nonlinearity. 2012. Vol. 25, No 11. P. 3189–3196.
13. Palis J. A global perspective for non-conservative dynamics // Annales Inst. Poincaré. 2005. Vol. 22. P. 485–507.
14. Pugh C., Shub M., Wilkinson A. Hölder foliations, revisited. // ArXiv: 1112.2646.
15. Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 90. С. 3–210.
16. Городецкий А. С. Регулярность центральных слоёв частично гиперболических множеств и приложения // Изв. РАН. Сер. матем. 2006. Т. 70, No 6. С. 19–44.
17. Клепцын В. А., Салтыков П. С. О С 2 -устойчивых проявлениях перемежаемости аттрак-

- торов в классах сохраняющих границу отображений // Тр. ММО. 2011. Т. 72, No 2. С. 249–280.
18. Песин Я. Б. Лекции по теории частичной гиперболичности и устойчивой эргодичности. // М.: МЦНМО, 2006.
 19. Салтыков П. С. Специальная эргодическая теорема для диффеоморфизмов Аносова на дву- мерном торе // Функц. анализ и его прил. 2011. Т. 45, No 1. С. 69–78.
 20. J. Guckenheimer, Yu. S. Ilyashenko. The Duck and the Devil: Canards on the Staircase. // Moscow Math. J., Volume 1, Number 1, 2001, pp. 27–47.
 21. I. Schurov. Ducks on the torus: existence and uniqueness. // J. of Dynamical and Control Systems. 16:2 (2010), 267–300. See also: arXiv:0910.1888v1.
 22. I. V. Shchurov. Canard cycles in generic fast-slow systems on the torus. // Transactions of the Moscow Mathematical Society, 2010, 175–207
 23. N. Fenichel. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. // J. of Diff. Eq., 31 (1979), pp. 53–98.
 24. Kleptsyn V. A, Romaskevich O. L., Schurov I. V. Josephson effect and slow-fast systems.// Nanostructures. Mathematical Physics and Modelling. 8:1 (2013), pp. 31–46 (in Russian). See also arXiv:1305.6755.
 25. E. F. Mishchenko and N. Kh. Rozov. Differential equations with small parameters and relaxation oscillations. // Plenum Press, 1980.
 26. M. Krupa, P. Szmolyan. Extending geometric singular perturbation theory to nonhyperbolic points — fold and canard points in two dimensions. // SIAM J. Math. Anal., Vol 33, No 2, pp. 286–314.
 27. Andronov AA, Leontovich EA, Gordon II, Maier AG. Qualitative theory of dynamical systems of second order. // J Wiley. 1966.
 28. Arnold, V. I.; Afrajmovich, V. S.; Ilyashenko, Yu. S.; Shilnikov, L. P. Bifurcation theory and catastrophe theory. Translated from the 1986 Russian original by N. D. Kazarinoff. // Reprint of the 1994 English edition from the series Encyclopaedia of Mathematical Sciences [Dynamical systems. V, Encyclopaedia Math. Sci., 5, Springer, Berlin, 1994; Springer-Verlag, Berlin, 1999. viii+271 pp.
 29. R. M. Fedorov. Upper Bounds for the Number of Orbital Topological Types of Planar Polynomial Vector Fields “Modulo Limit Cycles”.// Nonlinear analytic differential equations, Collected papers, Tr. Mat. Inst. Steklova, 254, Nauka, Moscow, 2006, 254–271; Proc. Steklov Inst. Math., 254 (2006), 238–254
 30. N. Goncharuk, Yu. Ilyashenko. Large bifurcation supports. // in preparation

31. Yu. Ilyashenko. Nonlinear Stokes Phenomena. // p. 1-55 in the book Nonlinear Stokes Phenomena, series “Advances in Soviet Mathematics”, v.14, Amer. Math. Soc., 1993, 287 p.
32. Yu. Ilyashenko, Towards the general theory of global planar bifurcations. // in the book “Mathematical Sciences with Multidisciplinary Applications, In Honor of Professor Christiane Rousseau. And In Recognition of the Mathematics for Planet Earth Initiative”, Springer 2016, pp 269 – 299.
33. Yu. Ilyashenko, Yu. Kudryashov and I. Schurov. An open set of structurally unstable families of vector fields in the two-sphere. // arXiv:1506.06797 [math.DS]
34. N. Goncharuk, Yu. Ilyashenko, N. Solodovnikov. Global bifurcations in generic one-parameter families with a separatrix loop on S^2 .// in preparation
35. Yu. Ilyashenko, S. Yakovenko. Nonlinear Stokes Phenomena in smooth classification problems. // p.235-287, in the book Nonlinear Stokes Phenomena, series “Advances in Soviet Mathematics”, v.14, Amer. Math. Soc., 1993, 287 p.
36. McLane S., Adkisson V.W. Extensions of homeomorphisms on the spheres // Michig. Lect. Topol. Ann Arbor, 1941. P. 223–230.
37. Sotomayor J. Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds //Publications Mathématiques de l’IHÉS, 43 (1974), p. 5–46