

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертационную работу Н. А. Солодовникова
«Некоторые вопросы теории бифуркаций и теории аттракторов»,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Актуальность темы. В диссертации исследованы три сюжета маломерной динамики. В первом сюжете исследована перемежаемость областей притяжения различных компонент связности аттрактора при условии сохранения края многообразия. Найденный новый эффект перемежаемости бассейнов продолжает работу Итгаи Кана 1994 года. Во втором сюжете продолжена работа Дж. Гукенхеймера, Ю. Ильяшенко и И. Щурова по исследованию уточных циклов быстро-медленных систем на двумерном торе. Показано, что количество уток не ограничено геометрией медленной кривой. Третий сюжет посвящен исследованию глобальных бифуркаций векторных полей на двумерной сфере. Исследован случай бифуркации параболического цикла.

Научная новизна и оригинальность. В диссертации установлены множественные новые результаты в маломерной динамике. А именно, получены новые свойства аттракторы Милнора в косых поризведениях, получены новые виды уточных решений в быстро-медленных системах, описаны бифуркации параболического цикла на сфере. Представленные в диссертации чрезвычайно интересны, используемая техника нова и оригинальна. Научный интерес представляют как результаты сами по себе так и используемая техника.

Содержание диссертации. Диссертация состоит из введения и трех глав, каждая посвящена одному из трех названных различных сюжетов маломерной динамики.

В первой главе исследуется перемежаемость областей притяжения аттрактора Милнора. Построена открытая область отображений в пространстве C^2 -гладких диффеоморфизмов со следующим свойством перемежаемости: аттрактора Милнора каждого из отображений области содержит (по меньшей мере) две компоненты связности, при этом область притяжения первой открыта и всюду плотна, а область притяжения второй имеет положительную меру. Доказательство состоит из двух шагов. В разделе 1.2 построен класс косых произведений над линейным диффеоморфизмом Аносова со слоем отрезок. Доказано, что каждое отображение из построенного класса обладает требуемыми свойствами. В разделе 1.3 доказано, что любой C^2 -близкий к указанному классу диффеоморфизм обладает теми же свойствами. Для доказательства в разделе 1.3. используются элементы теории частичной гиперболичности; существенно используется сохранение локального центрально-устойчивого слоения. Три искомым свойства — плотность и открытость первой области притяжения, а также положительность меры второй — следуют из (более чем трех) независимых тре-

бований к конструируемому классу косых произведений. На класс наложены также дополнительные требования, которые обеспечивают сохранение свойства для близких диффео. В этом смысле результат первой главы — компилятивный, итоговые свойства отображений явно следуют из независимых свойств, заложенных в построение класса.

Во второй главе исследуются уточные циклы быстро-медленных систем на двумерном торе. Вторая глава состоит из краткого введения, формулировки основного результата, доказательства результата по модулю трех лемм и затем доказательства (во многом — технического) этих лемм. Цикл называется уточным, если проводит отделенную от нуля долю времени вблизи как устойчивой, так и неустойчивой части медленной кривой. В быстро-медленных системах на двумерном торе уточные циклы возникают неизбежным образом счетное число раз при стремлении параметра системы к нулю. Естественный вопрос: каково количество и расположение уточных циклов при достаточно малых значениях параметра? В работах Дж. Гукенхаймера, Ю. Ильяшенко и И. Шурова подробно исследован случай циклов, которые замыкаются после одного обхода тора вдоль медленного направления. Основной результат второй главы посвящен циклам, которые замыкаются после двух обходов. Исследование циклов сведено к изучению отображения Пуанкаре с «вертикального» сечения тора на себя за один обход вдоль медленного направления; искомые циклы являются периодическими точками периода 2 для такого отображения. В первой и второй леммах построено C^0 - и C^1 -приближение отображения Пуанкаре. В третьей лемме доказано, что можно построить систему с «почти любым» наперед заданным приближающим отображением, а значит и наперед заданным количеством 2-периодических точек отображения Пуанкаре. Последнее означает, что система и близкие к ней будут обладать наперед заданным количеством двубходных циклов. В заключающем разделе главы приведено доказательство первых двух лемм — отображение Пуанкаре разложено в композицию нескольких отображений и проанализировано «по частям». Именно этот раздел содержит основные технические подробности доказательства и занимает чуть менее половины главы.

В третьей главе исследуются локальные однопараметрические деформации коразмерности 1 параболического цикла кратности 2 на двумерной сфере. Глава начинается с формулировки результатов (5 теорем, из которых интересны лишь 2), затем следует «исследование сценария бифуркации», в процессе которого доказаны заявленные теоремы. Наиболее интересны два результата. Во-первых, доказано, что типичная деформация типичного поля с параболическим циклом структурно устойчива. Во-вторых, проведена классификация деформаций всех векторных полей с параболическим циклом из данного класса орбитально-топологической эквивалентности векторного поля. В разделе 3.1 сформулированы основные результаты. В разделе 3.2 определен инвариант, который позволяет классифицировать однопараметрические деформации. Это «пара размеченных множеств на окружности». Раздел 3.3 посвящен конструкции ЛМФ-графа. Чтобы доказывать эквивалентность семейств, требуется многократно доказывать орбитально-топологическую эквивалентность полей различных семейств при соответствующих значениях параметра. Для доказательства эквивалентности полей в главе использована (нижегородская) техника сведения векторного поля к его ЛМФ-графу — подобно сепаратрисного скелета с дополни-

тельной разметкой на ребрах и вершинах. В разделе 3.4 показано, как построить размеченные множества по семейству и, обратно, как восстановить по паре множеств семейство. Семейства классифицированы в этом разделе. В разделе 3.5 доказана структурная устойчивость типичной деформации.

Основные результаты диссертации.

1. Построена открытая область в пространстве сохраняющих край C^2 -гладких диффеоморфизмов со следующим свойством перемежаемости. Каждое из отображений имеет по меньшей мере две компоненты аттрактора, при этом одна область открыта и плотна, а вторая имеет положительную меру.
2. Показано, что для выпуклой медленной кривой на торе и наперед заданного числа существует быстро-медленная система на торе со следующими свойствами. Во-первых, указанная кривая является медленной кривой системы. Во-вторых, при стремлении параметра системы к нулю счетное число раз рождается в точности заданное число двухобходных уточных циклов.
3. Доказана структурная устойчивость типичной локальной однопараметрической деформации типичного векторного поля коразмерности один с параболическим циклом кратности 2 на сфере. Приведен пример пары орбитально-топологически эквивалентных полей коразмерности один, типичные локальные деформации которых не эквивалентны. Классифицированы локальные однопараметрические деформации полей с параболическим циклом.

Обоснованность научных положений, выводов и рекомендаций Все результаты снабжены подробными доказательствами, достоверность которых не вызывает сомнений. Основные результаты своевременно опубликованы в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных журналов и изданий. Автореферат соответствует содержанию работы.

Рекомендации по дальнейшей разработке и внедрению Результаты и методы приведенные в диссертации Никиты Солодовникова могут быть использованы в фундаментальных и прикладных исследованиях в теории динамических систем. Они могут быть использованы в работе следующих научных институтов и университетов: МИАН, ПОМИ, Московский государственный университет, Санкт-Петербургский Государственный Университет, Нижегородский Государственный Университет, Высшая Школа Экономики и многих других.

Замечания. В первой главе не сказано, содержит ли аттрактор какие-то части помимо указанных двух.

Во второй главе даны эвристическое (Определение 8 на с.17) и формальное (Определение 11 на с.20) определение уточных циклов. Формальное определение зависит от произвола в выборе некоторого параметра «достаточной малости». Доказано, что

сконструированная система имеет нечетное число формально определенных уточных циклов. Система не имеет неподвижных точек при положительных значениях параметра, поэтому устойчивые и неустойчивые циклы должны перемежаться, а общее их количество неизбежно будет четным. Таким образом не найден по крайней мере один цикл (а вообще говоря — нечетное число), который не является формально уточным, но может быть уточным в эвристическом смысле.

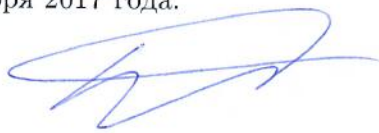
Так же автором не приведено описание связей между быстро-медленными системами и эффектом гистерезиса.

Указанные выше замечания не влияют на общее исключительно положительное впечатление от работы.

Выводы. Полученные в диссертации результаты достоверны. Во всех трех случаях открыты новые свойства или эффекты на границе изученных областей. Тема диссертации соответствует специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Считаю, что диссертационная работа Н. А. Солодовникова «Некоторые вопросы теории бифуркаций и теории аттракторов» удовлетворяет требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор Солодовников Никита Алексеевич заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Тихомиров Сергей Борисович,
доцент образовательной программы “Математика”,
Санкт-Петербургского Государственного Университета,
Доктор физико-математических наук.
13 октября 2017 года.

 (Тихомиров С. Б.)

личную подпись за
начальник отде
Н. И. МАШТЕЛА



Документ подготовлен
в порядке исполнения
трудовых обязанностей