На правах рукописи

УДК 517.987.5

....

Ефремова Людмила Сергеевна

ДИНАМИКА КОСЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ОТОБРАЖЕНИЙ ИНТЕРВАЛА

01.01.02. – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Нижний Новгород – 2017

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Института информационных технологий, математики и механики ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского".

Официальные оппоненты:

Белых Владимир Николаевич
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой математики
ФГБОУ ВО "Волжский государственный
университет водного транспорта".

Богатый Семеон Антонович
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры общей топологии и геометрии
МГУ им. М. В. Ломоносова.

Жиров Алексей Юрьевич
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры прикладной математики,
информационных технологий и электроники
института № 3 ФГБОУ ВО "Московский
авиационный институт (национальный
исследовательский университет)".

Ведущая организация:

ФГБУН "Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша"
Российской академии наук

Защита состоится « » января 2018 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 002.077.03 на базе ФГБУН ИППИ РАН им. А.А. Харкевича по адресу: Большой Каретный пер., д. 19, стр. 1, Москва, 127051.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИППИ РАН, а также на странице http://iitp.ru/ru/dissertation/

Автореферат разослан « » декабря 2017 года. Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь диссертационного совета,

д. ф.-м. н., профессор РАН Соболевский А.Н.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования.

Проблематика данной работы восходит к классическим исследованиям А. Пуанкаре и Дж.Д. Биркгофа. Так, последние страницы мемуара [1] посвящены рассмотрению системы дифференциальных уравнений $\dot{x}_1 = \alpha$, $\dot{x}_2 = 1$, $\dot{y} = \varphi(x_1, x_2)$ с фазовым пространством $\mathbf{S^1} \times \mathbf{S^1} \times \mathbf{R^1}$, где $\mathbf{S^1}$ – окружность, $\mathbf{R^1}$ – прямая; α – иррациональное число, φ – некоторая функция на торе $\mathbf{S^1} \times \mathbf{S^1}$. При этом отображение последования на цилиндре $x_2 = 0$ представляет собой цилиндрический каскад, то есть косое произведение над иррациональным поворотом окружности с отображениями в слоях $\overline{y}_{x_1} = y + \widetilde{\varphi}(x_1)$, где y – произвольная точка на прямой $\mathbf{R^1}$, x_1 – произвольная точка на окружности $\mathbf{S^1}$, $\widetilde{\varphi}(x_1) = \varphi(x_1, 0)$. А. Пуанкаре сформулировал проблемы о структуре ω-предельных множеств цилиндрических каскадов. Дж. Д. Биркгофу (см. [2]) принадлежит постановка проблемы о глубине центра автономных систем дифференциальных уравнений на многообразиях в $\mathbf{R^n}$ $(n \geq 3)$.

В 30-е – 50-е годы XX века появились работы Л.Г. Шнирельмана, А.С. Безиковича, Дж.А. Хедлунда и У. Готтшалка, посвященные различным аспектам топологической транзитивности цидиндрических каскадов. К этому же периоду времени относятся исследования Н.Н. Крылова, Н.Н. Боголюбова и С. Какутани. Так, в [3] впервые дано описание общей конструкции косых произведений (с мерой) (хотя термин "косое произведение" введен позже в [4]), а в [5] отмечена взаимосвязь марковских процессов с устойчивым распределением и косых произведений.

В 60-е годы вышли основополагающие статьи В.И. Оселедца, А.Б. Катка и А.М. Степина, посвященные метрическим аспектам теории косых произведений.

К 70-м годам XX века относится цикл работ Д.В. Аносова [6] и его учеников по цилиндрическим каскадам. Так, задача существования топологически транзитивных цилиндрических каскадов с аналитической функцией $\widetilde{\varphi}(x_1)$ (и непустым множеством нулевой меры, состоящим из нетранзитивных точек) решена в [7]. Решение проблем А. Пуанкаре о структуре ω-предельных множеств цилиндрических каскадов приведено в [8]. Влияние дифференциальных свойств цилиндрического каскада на структуру его ω-предельных множеств исследовано в [9]. Изучение цилиндрических каскадов и их обобщений продолжается и в настоящее время (см., например, работы [10, 11]).

---

[1] *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.-Л.:ОГИЗ, 1947. – 393 с.

[2] *Биркгоф Дж.Д.* Динамические системы. – М.-Л.:ОГИЗ, 1941. – 320 с.

[3] *Крылов Н.Н., Боголюбов Н.Н.* Общая теория меры в нелинейной механике// Боголюбов Н.Н. Избранные труды, 1. – Киев: Наукова думка. – 1969. – С. 411-463.

[4] *Anzai H.* Ergodic skew product transformations on the torus// Osaka Math. Journ. – 1951. – V. 3, № 1. – P. 83-99.

[5] *Kakutani S.* Random ergodic theorems and Markov processes with a stable distribution// Proc. 2nd Symp. Math. Statist. and Prob. – 1951. – P. 247-261.

[6] *Аносов Д.В.* Об аддитивном функциональном гомологическом уравнении, связанном с эргодическим поворотом окружности// Изв. АН СССР, сер. матем. – 1973. – Т. 37, № 6. – С. 1259-1274.

[7] *Сидоров Е.А.* Топологически транзитивные цилиндрические каскады// Матем. заметки. – 1973. – Т. 14, № 3. – С. 444-452.

[8] *Крыгин А.Б.* Об ω-предельных множествах цилиндрических каскадов// Изв. АН СССР, сер. матем. – 1975. – Т. 39, № 4. – С. 879-898.

[9] *Крыгин А.Б.* Об ω-предельных множествах цилиндрических каскадов// Матем. заметки. – 1978. – Т. 23, № 6. – С. 873-884.

[10] *Nitica V.* A note about topologically transitive cylindrical cascades// Israel Journ. of Math. – 2001. – V. 126, № 1. – C. 141-156.

[11] *Кочергин А.В.* Цилиндрический каскад Безиковича с гельдеровой функцией// Матем. заметки. – 2016. – Т. 99, № 3. – Р. 366-375.

К концу 80-х годов XX века, в основном, завершилось оформление одномерной динамики в самостоятельный раздел теории динамических систем. Этот процесс сопровождался, в частности, переходом к рассмотрению динамических систем с фазовыми пространствами размерности, большей 1, к исследованию которых можно эффективно применять результаты одномерной динамики. Динамические системы класса косых произведений (вместо термина "косое произведение" ряд математиков Чехии, Испании, Италии, Украины используют термин "треугольное отображение") на простейших многообразиях размерности ≥ 2 являются наиболее естественными объектами, изучение которых допускает применение результатов одномерной динамики (см., например, [12]). Первой работой в данном направлении является [13], где классическая теорема А.Н. Шарковского [14] обобщена на случай косых произведений на n-мерных клетках для $n \geq 2$.

Работы Ю.С. Ильяшенко и его учеников, начатые в конце 90-х годов XX века, показали, что нелокальные бифуркации на границе множества обратимых динамических систем Морса-Смейла могут приводить к изучению динамики обратимых косых произведений, заданных на многообразиях размерности ≥ 3 [15, 16].

Таким образом, исследование косых произведений представляет собой многостороннюю теоретическую проблему. Такого рода динамические системы возникают и при изучении расширений групп преобразований [17], неавтономных систем дифференциальных уравнений [18], построении новых примеров аттракторов [19, 20, 21].

Косые произведения различных классов используются при решении прикладных задач таких, как математическое моделирование квазикристаллов [22], изучение динамики популяций [23], сигнальных процессов [24], вполне развитой турбулентности [25] и др.

Обобщение доказанного в данной работе критерия приводимости отображений в плоскости (удовлетворяющих определенным условиям) к косым произведениям отображений интервала позволило исследовать динамику квадратичного отображения $(x,\, y) \to (xy,\, (x-2)^2)$ плоскости в себя [26], возникающего в конкретной физической

---

[12] *Smital J.* Why it is important to understand dynamics of triangular maps?// Journ. Difference Equations Appl. – 2008. – V. 14. P. 597–606.

[13] *Kloeden P.E.* On Sharkovsky's cycle coexistence ordering// Bul. Austr. Math. Soc. – 1979. – V. 20. – C. 171-177.

[14] *Шарковский А.Н.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя// Укр. матем. журнал. – 1964. – Т. 16, № 1. – С. 61-71.

[15] *Ильяшенко Ю.С., Вейгу Ли.* Нелокальные бифуркации, Новые математические дисциплины. – М.:МЦНМО, 2-е изд., 2009. – 416 с.

[16] *Городецкий А.С., Ильяшенко Ю.С.* Некоторые новые грубые свойства инвариантных множеств и аттракторов динамических систем// Функц. анализ и его прил. – 1999. – Т. 33, № 2. – С. 16-30.

[17] *Бронштейн И.У.* Расширения минимальных групп преобразований. – Ин-т математики с вычислит. центром АН МССР. Кишинев: Штиинца, 1975.– 312 с.

[18] *Лерман Л.М., Шильников Л.П.* О классификации двумерных неавтономных систем второго порядка с конечным числом ячеек// ДАН СССР. – 1973. – Т. 209, № 3. – С. 544-547.

[19] *Жужома Е.В., Исаенкова Н.В..* О нульмерных соленоидальных базисных множествах// Мат. сборник. – 2011. – Т. 202, № 3. – P. 47-68.

[20] *Efremova L.S.* Example of the smooth skew product in the plane with the one-dimensional ramified continuum as the global attractor// ESAIM: Proceedings and Surveys. – 2012. – V. 36. – P. 15-25.

[21] *Фильченков А.С.* Косое произведение на n-мерной клетке, имеющее транзитивный n-мерный аттрактор, не обладающий свойством полной топологической транзитивности// Известия ВУЗов. Математика. – 2016. – № 6. – P. 91-100.

[22] *Bjerklöv K.* Positive Lyapunov exponent and minimality for a class of one-dimensional quasiperiodic Schrödinger equation// Ergod. Theory and Dynam. Syst. – 2005. – V. 25. – P. 1015-1045.

[23] *Gukenheimer J., Oster G., Ipaktchi A.* The dynamics of density dependent population models// Journ. Math. Biology. – 1977. – V. 4, № 2. – P. 8-147.

[24] *Davies M.E., Campbell K.M.* Linear recursive filters and nonlinear dynamics// Nonlinearity. – 1996. – V. 9, № 2. – P. 487-499.

[25] *Beck C.* Chaotic cascade model for turbulent velocity distribution// Phys. Rev. – 1994. – E 49. – P. 3641-3652.

[26] *Belmesova S.S., Efremova L.S.* On the Concept of Integrability for Discrete Dynamical Systems. Investigation of Wandering Points of Some Trace Map// Nonlin. Maps and their Applic. Springer Proc. in Math. and Statist. – 2015. – V. 112. – P. 127-158.

задаче нахождения коэффициентов прохождения и отражения плоской волны с заданным импульсом в поле кристаллической решетки с узлами, образующими цепь Тью-Морса [27]; а методы, примененные при изучении Ω-взрыва в косых произведениях с замкнутым множеством периодических точек, (при соответствующей их модификации) нашли применение при классификации взрывов во множестве решений дифференциальных уравнений с частными производными [28].

Таким образом, многосторонние теоретические исследования косых произведений различных классов и многочисленные аспекты применения полученных результатов подтверждают актуальность темы диссертации.

Объект исследования

Рассматриваются *косые произведения отображений интервала*, то есть динамические системы, заданные на замкнутом прямоугольнике $I = I_1 \times I_2$ (I_1, I_2 – отрезки прямой) равенством

$$F(x,\, y) = (f(x),\, g_x(y)), \text{ где } g_x(y) = g(x,\, y),\ (x;\, y) \in I. \tag{0.0.1}$$

Из (0.0.1) следует, что для любого натурального числа n и каждой точки $(x;\, y) \in I$ справедливо

$$F^n(x,\, y) = (f^n(x),\, g_{x,n}(y)), \text{ где } g_{x,\,1} = g_x;\ g_{x,n} = g_{f^{n-1}(x)} \circ \ldots \circ g_x \text{ при } n \geq 2; \tag{0.0.2}$$

$$F^n = F_{n,\,1} \circ F_n, \text{ где } F_n(x,\, y) = (id(x),\, g_{x,\,n}(y)),\ F_{n,\,1}(x,\, y) = (f^n(x),\, id(y)). \tag{0.0.3}$$

Здесь $id(x)$ и $id(y)$ – тождественные отображения отрезков I_1 и I_2 соответственно.

Диссертационная работа посвящена вопросам топологической и дифференциальной динамики косых произведений отображений интервала. При рассмотрении указанных вопросов существенно используются результаты по динамике непрерывных или гладких отображений отрезка в себя.

В силу теоремы А.Н. Шарковского по характеру динамического поведения траекторий все пространство непрерывных отображений отрезка разбивается на 3 подпространства, первое из которых состоит из отображений *типа* $\prec 2^\infty$, то есть отображений, содержащих периодические точки с (наименьшими) периодами $\{1,\, 2,\, 2^2,\, \ldots 2^\nu\}$ при $0 \leq \nu < +\infty$; второе – из отображений *типа* 2^∞, то есть отображений с периодическими точками, имеющими периоды вида $\{1,\, 2,\, 2^2,\, \ldots 2^i,\, 2^{i+1}, \ldots\}$; и третье – из отображений *типа* $\succ 2^\infty$, то есть отображений, содержащих периодические точки с (наименьшими) периодами $\notin \{2^i\}_{i\geq 0}$.

В работе рассматриваются, во-первых, непрерывные косые произведения отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек в базе (факторотображения таких косых произведений содержатся как в первом, так и во втором подпространствах, но C^1-гладкие отображения отрезка с замкнутым множеством периодических точек содержатся только лишь в первом подпространстве) и, во-вторых, C^1-гладкие косые произведения отображений интервала с Ω-устойчивым (в пространстве C^1-гладких отображений отрезка с инвариантной границей) фактором типа $\succ 2^\infty$.

Динамика непрерывных отображений отрезка с замкнутым множеством периодиче-

---

[27] *Avishai Y., Berend D.* Transmission through a Thue-Morse chain// Phys. Rev. B. – 1992. – V. 45. – V. 2717-2724.

[28] *Ефремова Л.С., Сакбаев В.Ж.* Понятие взрыва множества решений дифференциальных уравнений и усреднение случайных полугрупп// ТМФ. – 2015. – Т. 185, № 2. – С. 252-271; англ. пер.: TMPh. – 2015. – V. 185, № 2. – P. 1582–1598.

ских точек является наиболее простой для непрерывных отображений отрезка. Это, в частности, означает, что ω-предельное множество траектории любой точки отрезка есть периодическая орбита. Динамика отображений отрезка типа $\succ 2^{\infty}$ является наиболее сложной для непрерывных отображений отрезка. В этом случае любое квазиминимальное множество содержит счетное всюду плотное множество периодических траекторий с неограниченым множеством (наименьших) периодов; каждая периодическая траектория имеет счетное всюду плотное множество гомоклинических траекторий; существует континуум других квазиминимальных множеств; континуум минимальных множеств.

Цель диссертационной работы

1. Дать описание неблуждающего множества и центра непрерывного косого произведения отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек фактоотображения, используя введенные в работе специальные многозначные функции.

2. Изучить влияние C^0- и C^1-возмущений (класса косых произведений) на неблуждающее множество C^1-гладких косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек.

3. Исследовать влияние дифференциальных свойств косого произведения отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек на структуру его ω-предельных множеств.

4. Получить разложение пространства C^1-гладких косых произведений отображений интервала с Ω-устойчивым фактоотображением типа $\succ 2^{\infty}$ в объединение непустых попарно непересекающихся подпространств, основанное на использовании всех возможностей сочетания свойств непрерывности/разрывности многозначных функций, связанных с косым произведением отображений интервала.

5. Дать описание неблуждающего множества произвольного C^1-гладкого косого произведения отображений интервала с Ω-устойчивым фактоотображением типа $\succ 2^{\infty}$, используя указанное выше разложение рассматриваемого пространства и введенные в работе специальные многозначные функции.

6. Исследовать глубину центра C^1-гладких косых произведений отображений интервала с Ω-устойчивым фактоотображением типа $\succ 2^{\infty}$.

7. Доказать критерий C^1- Ω-устойчивости (относительно гомеоморфизмов – косых произведений) и исследовать аппроксимационные свойства C^1-гладких Ω-устойчивых косых произведений отображений интервала с фактором типа $\succ 2^{\infty}$, используя введенные в работе понятия устойчивости в целом и плотной устойчивости в целом в C^1-норме семейства отображений в слоях.

Методы исследования.

В диссертации используются методы топологической и дифференциальной динамики, теории многозначных функций, функционального анализа, топологии, одномерной динамики.

Научная новизна

1. Доказаны теоремы о структуре неблуждающего множества и центра, во-первых, непрерывных косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек фактоотображения и, во-вторых, C^1-гладких косых произведений отображений интервала с Ω-устойчивым фактоотображением типа $\succ 2^{\infty}$. Доказа-

тельства основаны на использовании специальных многозначных функций, введенных в работе для произвольного непрерывного косого произведения отображений интервала.

2. Доказан критерий C^0- Ω-взрыва в C^1-гладких косых произведениях отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек. Доказана теорема о том, что такого рода косые произведения отображений интервала не допускают C^1- Ω-взрыв.

3. Доказаны теоремы, устанавливающие влияние дифференциальных свойств косого произведения отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек на структуру его ω-предельных множеств.

4. Доказана теорема о разложении пространства C^1-гладких косых произведений отображений интервала с Ω-устойчивым фактороотображением типа $\succ 2^\infty$ в объединение непустых попарно не пересекающихся подпространств $T^1_{*,j}(I)$, где $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

5. С использованием понятия устойчивости в целом в C^1-норме семейства отображений в слоях C^1-гладкого косого произведения отображений интервала с Ω-устойчивым фактором типа $\succ 2^\infty$ доказан критерий C^1- Ω-устойчивости (относительно гомеоморфизмов - косых произведений). Доказана теорема о том что C^1-гладкие Ω-устойчивые косые произведения отображений интервала с фактором типа $\succ 2^\infty$ содержатся в подпространстве $T^1_{*,1}(I)$, но не образуют в нем всюду плотного подмножества.

6. Доказан критерий аппроксимируемости (в C^1-норме) C^1-гладкого косого произведения отображений интервала с Ω-устойчивым фактором типа $\succ 2^\infty$ и плотно устойчивым в целом семейством отображений в слоях Ω-устойчивыми косыми произведениями отображений интервала.

7. Доказана теорема об аппроксимационных свойствах косых произведений из пространства $T^1_{*,4}(I)$ с плотно устойчивым в целом семейством отображений в слоях.

Теоретическая и практическая ценность.

Результаты диссертации имеют теоретический характер. Развитые в работе методы и полученные результаты представляют самостоятельный интерес с точки зрения создания общей теории дискретных динамических систем класса косых произведений. Они могут быть использованы специалистами по теории динамических систем, работающими в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, в ИППИ им. А.А. Харкевича РАН, в МГУ им. М.В. Ломоносова, Национальном исследовательском Санкт-Петербургском государственном университете, Национальном исследовательском университете "Высшая школа экономики", Национальном исследовательском Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского, а также в других ведущих российских и зарубежных научных центрах.

Результаты диссертации могут применяться в решении прикладных задач таких, как изучение математических моделей квазикристаллов, динамики популяций, вполне развитой турбулентности и др..

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"в 2009 - 2013 г.г. (проект НК-13П/13 в 2009 - 2011 г.г.; проект № 14.B37.21.0361 в 2012 - 2013 г.г.), гранта Министерства образования и науки РФ (проект № 14-10 в 2014 - 2016 г.г.), гранта Министерства образования и науки РФ № 1.3287.2017/ПЧ и др.

На защиту выносятся следующие положения диссертации:

1. Теоремы о структуре неблуждающего множества и центра непрерывных косых

произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек фактороотображения.

2. Теоремы о возможности C^0- Ω-взрыва и невозможности C^1- Ω-взрыва в C^1-гладких косых произведениях отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек.

3. Теоремы о влиянии дифференциальных свойств косого произведения отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек на структуру его ω-предельных множеств.

4. Теорема о разложении пространства C^1-гладких косых произведений отображений интервала с Ω-устойчивым фактороотображением типа $\succ 2^\infty$ в объединение четырех непустых попарно не пересекающихся подпространств в зависимости от всех возможных сочетаний свойств непрерывности/разрывности основных многозначных функций, связанных с косым произведением отображений интервала.

5. Теоремы о структуре неблуждающего множества косых произведений отображений интервала каждого из четырех классов, выделенных теоремой о разложении пространства C^1-гладких косых произведений отображений интервала с Ω-устойчивым фактороотображением типа $\succ 2^\infty$.

6. Теоремы о глубине множества центральных движений косых произведений отображений интервала каждого из четырех классов, выделенных теоремой о разложении пространства C^1-гладких косых произведений отображений интервала с Ω-устойчивым фактороотображением типа $\succ 2^\infty$.

7. Критерий C^1- Ω-устойчивости (относительно гомеоморфизмов – косых произведений), теоремы об аппроксимационных свойствах C^1-гладких Ω-устойчивых косых произведений отображений интервала с фактором типа $\succ 2^\infty$ и косых произведений отображений интервала с плотно устойчивым в целом семейством отображений в слоях.

Достоверность результатов.

Достоверность полученных результатов обеспечивается их строгими математическими доказательствами, апробациями на научных семинарах и международных конференциях. Все результаты диссертации опубликованы в рецензируемых научных изданиях.

Апробация диссертационной работы.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на научных семинарах:

- кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа механико-математического факультета ННГУ им. Н.И. Лобачевского под руководством профессора М.В. Долова (1992 - 2002 г.г.); под руководством профессоров Л.М. Лермана и А.Д. Морозова (2005 - 2010 г.г.);

- отдела дифференциальных уравнений Института прикладной математики и кибернетики при ННГУ им. Н.И.Лобачевского под руководством профессора Л.П. Шильникова (1998 г., 2001 г.);

- по нелинейному анализу кафедры высшей математики МФТИ под руководством профессора Г.Н. Яковлева (2006 г.) под руководством профессора Е.С. Половинкина (2007 г);

- по математической физике ИПМ им. М.В. Келдыша РАН под руководством д.ф. - м.н. М.В. Масленникова, д.ф.-м.н. В.В. Веденяпина, д.ф.-м.н. В.А. Дородницына, д.ф.-м.н. Ю.Н. Орлова (2010 - 2014 г.г.);

• по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям в РУДН под руководством профессора А.Л. Скубачевского (2013 г.);

• кафедры дифференциальных уравнений математико-механического факультета Национального исследовательского Санкт-Петербургского государственного университета под руководством члена-корреспондента РАН В.А. Плисса (2013 г.);

• по бесконечномерному анализу на механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством профессора О.Г. Смолянова и профессора Е.Т. Шавгулидзе (2012 г., 2015 г.);

• "Эргодическая теория и динамические системы" под руководством академика РАН Д.В. Аносова и профессора А.М. Степина (2009 - 2014 г.г.);

• "Динамические системы и дифференциальные уравнения" под руководством профессора А.М. Степина и профессора А.А. Давыдова (2015 - 2017 г.г);

• Добрушинской математической лаборатории ИППИ им. А.А. Харкевича РАН под руководством профессора М.Л. Бланка и профессора Р.А. Минлоса (2017 г.);

• кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Института информационных технологий, математики и механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского под руководством профессора Д.В. Баландина (2017 г.).

Результаты диссертации докладывались на международных конференциях:

• на VII международной конференции по качественной теории дифференциальных уравнений, Рига, Латвия - 1989 г.;

• на международной конференции "Современные проблемы теории динамических систем", Нижний Новгород, Россия - 1996 г.;

• на международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина, Москва, Россия - 1998 г.;

• на международной конференции "Прогресс в нелинейной науке", посвященной 100-летию со дня рождения А.А. Андронова, Нижний Новгород, Россия - 2001 г.;

• на международной конференции "Колмогоров и современная математика", посвященной 100-летию со дня рождения А.Н. Колмогорова, Москва, Россия - 2003 г.;

• на регулярных международных конференциях по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, Россия, 2000 - 2016 г.г.;

• на международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", Москва, Россия - 2007 г.;

• на международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Н.Н. Боголюбова, Москва - Дубна, Россия - 2009 г.;

- на VII международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям, Москва, Россия - 2014 г.;

- на международных конференциях "Динамика, бифуркации и странные аттракторы", Нижний Новгород, Россия, 2013, 2015-2016 г.г.;

- на международной конференции "Системы Аносова и современная динамика", посвященной 80-летию со дня рождения Д.В. Аносова, Москва, Россия - 2016 г.;

- на Европейской конференции по теории итераций, Нант, Франция - 2010 г.; Понта Дельгада, Португалия - 2012 г.;

- на Европейской конференции "Нелинейные отображения и их применения", Евора, Португалия - 2011 г.; Сарагоса, Испания - 2013 г. Дублин, Ирландия - 2015 г. и др..

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 263 страницы. Библиография включает 171 наименование, в диссертации имеется 8 рисунков.

Публикации.

Основные результаты по теме диссертации опубликованы в работах [1] – [28], указанных в конце автореферата. Все результаты двух совместных статей с Е.В. Блиновой и С.С. Бельмесовой, включенные в диссертацию, получены лично автором.

Содержание работы

Во **введении** приведен очерк исторического развития различных направлений изучения косых произведений, дан библиографический обзор, изложено краткое содержание диссертации, сформулированы основные результаты. Здесь же доказан критерий интегрируемости отображений в плоских областях специального вида, основанный на сведении отображения к косому произведению отображений интервала [13].

В **первой главе** работы введены многозначные функции, связанные с косым произведением отображений интервала и составляющие основу техники исследования неблуждающего множества и центра косых произведений отображений интервала.

Любое непустое множество $A \subset I$ можно описать, используя его естественную проекцию $pr_1 : A \to pr_1 A$ на ось Ox и срезы $(A)(x)$ вертикальными слоями над всеми точками $x \in pr_1 A$. Срез $(A)(x)$ представляет собой проекцию сечения множества A слоем $x \times I_2$ на ось Oy и определяется в сиду равенства

$$(A)(x) = \{y \in I_2 : (x; y) \in A\}. \qquad (0.0.4)$$

Обозначим через $T^0(I)$ $(T^1(I))$ пространство всех непрерывных (C^1-гладких) отображений вида (0.0.1), а через 2^{I_2} - пространство всех замкнутых подмножеств отрезка I_2 с экспоненциальной топологией. Пусть $\Omega(\cdot)$ $(C(\cdot))$ означает, как обычно, неблуждающее множество (центр) отображения.

Определение 0.0.6. Ω-*функцией (*C*-функцией)* отображения $F \in T^0(I)$ называется функция $\Omega^F : \Omega(f) \to 2^{I_2}$ $(C^F : C(f) \to 2^{I_2})$ такая, что при любом $x \in \Omega(f)$ $(x \in C(f))$

выполнено равенство

$$\Omega^F(x) = (\Omega(F))(x) \quad (C^F(x) = (C(F))(x)),$$

где $(\Omega(F))(x)$ – срез неблуждающего множества $\Omega(F)$ вертикальным слоем над точкой x ($(C(F))(x)$ – срез центра $C(F)$ вертикальным слоем над x) (см. формулу (0.0.4)).

Корректность определения 0.0.6 обеспечивается равенством $\Omega(f) = pr_1(\Omega(F))$ $(C(f) = pr_1(C(F)))$. Таким образом, график Ω-функции (C-функции) в фазовом пространстве I совпадает с неблуждающим множеством (центром) косого произведения.

Для описания неблуждающего множества и центра отображения $F \in T^0(I)$ наряду с Ω-функцией и C-функцией требуются и другие многозначные функции. Предположим, что для факторотображения f косого произведения отображений интервала выполнено равенство $\Omega(f^n) = \Omega(f)$. Для эндоморфизмов отрезка это равенство может не выполняться, но оно верно, в частности, для непрерывных отображений отрезка с замкнутым множеством периодических точек и для C^1-гладких Ω-устойчивых отображений отрезка (в пространстве отображений отрезка I_1 в себя с инвариантной границей). Косые произведения отображений интервала с факторотображениями такого рода рассматриваются в настоящей диссертации.

Определение 0.0.7. *Вспомогательными функциями для Ω-функции (для C-функции)* косого произведения $F \in T^0(I)$ будем называть многозначные функции $\Omega_n^F : \Omega(f) \to 2^{I_2}$ $(C_n^F : C(f) \to 2^{I_2})$ такие, что при любом $x \in \Omega(f)$ $(x \in C(f))$ верно равенство

$$\Omega_n^F(x) = \Omega(g_{x,n}) \quad (C_n^F(x) = C(g_{x,n})),$$

где $\Omega(g_{x,n})$ $(C(g_{x,n}))$ – неблуждающее множество (центр) отображения $g_{x,n} : I_2 \to I_2$ (см. формулу (0.0.2)) при всех $x \in \Omega(f)$ $(x \in C(g_{x,n}))$, $n \geq 1$.

Подходящими функциями к Ω-функции отображения $F \in T^0(I)$ будем называть многозначные функции $\overline{\Omega}_n^F : \Omega(f) \to 2^{I_2}$, графиками которых в I служат замыкания графиков вспомогательных функций Ω_n^F; при этом

$$\overline{\Omega}_n^F(x) = (\overline{\Omega}_n^F)(x) \text{ для каждого } x \in \Omega(f)$$

Здесь $(\overline{\Omega}_n^F)(x)$ – срез графика функции $\overline{\Omega}_n^F$ (или, что то же самое, срез замыкания графика функции Ω_n^F) слоем над точкой x (см. равенство (0.0.4)).

После того, как при всех $n \geq 1$ определены вспомогательные функции Ω_n^F (C_n^F) и подходящие к Ω-функции многозначные функции $\overline{\Omega}_n^F$, каждую точку $(x; y)$, принадлежащую графику Ω_n^F (C_n^F) и графику $\overline{\Omega}_n^F$, следует переместить в точку $(f^n(x); y)$ с помощью прямого произведения $F_{n,1}$ (см. равенство (0.0.3)). Таким образом, естественно возникают многозначные функции $\Omega_{n,1}^F : \Omega(f) \to 2^{I_2}$ $(C_{n,1}^F : C(f) \to 2^{I_2})$, а также $\overline{\Omega}_{n,1}^F : \Omega(f) \to 2^{I_2}$ $(n \geq 1)$, определенные в силу равенств

$$\Omega_{n,1}^F(x) = (F_{n,1}(\Omega_n^F))(x) \qquad (C_{n,1}^F(x) = (F_{n,1}(C_n^F))(x))$$

для любого $x \in \Omega(f)$ $(x \in C(f))$, и

$$\overline{\Omega}_{n,1}^F(x) = (F_{n,1}(\overline{\Omega}_n^F))(x)$$

для любого $x \in \Omega(f)$; здесь Ω_n^F (C_n^F) и $\overline{\Omega}_n^F$ – графики соответствующих многозначных функций в I; $(F_{n,1}(\Omega_n^F))(x)$ $((F_{n,1}(C_n^F))(x))$ – срез множества $F_{n,1}(\Omega_n^F)$ $(F_{n,1}(C_n^F))$ слоем над точкой $x \in \Omega(f)$ $(x \in C(f))$, и $(F_{n,1}(\overline{\Omega}_n^F))(x)$ – срез множества $F_{n,1}(\overline{\Omega}_n^F)$ слоем над точкой $x \in \Omega(f)$.

Если $\Omega(f) \neq I_1$, то многозначные функции Ω_n^F и $\Omega_{n,1}^F$ допускают естественные расширения $(\Omega_n^F)^{ex}$ на отрезок I_1 и $(\Omega_{n,1}^F)^{ex}$ на отрезок $f^n(I_1)$ $(n \geq 1)$ соответственно. Так, для любого $x \in I_1$ выполнено

$$(\Omega_n^F)^{ex}(x) = \Omega(g_{x,n});$$

а для любого $x \in f^n(I_1)$ –

$$(\Omega_{n,1}^F)^{ex}(x) = (F_{n,1}((\Omega_n^F)^{ex}))(x).$$

Основное содержание **первой главы** диссертации составляют теоремы о структуре неблуждающего множества и центра непрерывных косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек факторотображения.

Структура неблуждающего множества непрерывных косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек (названных в диссертации простейшими) исследовалась в [29], а в частном случае гладких косых произведений с гиперболическими периодическими точками – в [30]. Результаты этих работ следуют из результатов о структуре неблуждающего множества непрерывных косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек в базе, опубликованных в [4], [12], [18], [21] и включенных в **первую главу** диссертации. Указанные статьи автора, за исключением [12], содержат оценки глубины центра непрерывных косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек факторотображения.

В заметках [31], [32] приведены примеры непрерывных (но не гладких) косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек в базе, иллюстрирующие влияние отображений в слоях над блуждающими точками фактора на структуру неблуждающего множества. Анализ этих примеров привел к введению понятия "слабо неблуждающих точек относительно семейства отображений в слоях" (см. [12], [15]) и детальному описанию структуры неблуждающего множества, во-первых, непрерывных косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек в базе [12] и, во-вторых, C^1-гладких косых произведений отображений интервала с Ω-устойчивым фактором типа $\succ 2^\infty$ [14], [15].

Определение 1.2.3. Точку $(x, y) \in I$ назовем *слабо неблуждающей относительно семейства отображений в слоях над точками множества* $A \subseteq I_1$ *косого произведения отображений интервала* $F \in T^0(I)$, если $x \in \Omega(f) \bigcap \overline{A}$, и для произвольной окрестности $U_\varepsilon((x, y)) = U_{1,\varepsilon}(x) \times U_{2,\varepsilon}(y)$ точки (x, y) в I можно указать точку $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in U_\varepsilon((x, y))$, где $x_\varepsilon \in A$, и натуральное число $j = j(\varepsilon)$ такие, что при выполне-

---

[29] *Kupka J.* The triangular maps with closed sets of periodic points// Math. Analysis and Appliq. – 2006. – V. 319. – P. 302-314.

[30] *Arteaga C.* Smooth triangular maps of the square with closed set of periodic points// Journ. Math. Analysis and Appliq. – 1995. – V. 196. – P. 987-997.

[31] *Guirao J.L.G., Pelayo F.L.* On skew-product maps with base having closed set of periodic points// Intern. Journ. Comput. Math. – 2008. – V. 85, № (3-4). – P. 441-445.

[32] *Guirao J.LG., Rubio R.G.* Nonwandering Set of Skew Product Maps with Base Having Closed Set of Periodic Points// Journ. Math. Analysis and Appliq. – 2010. – V. 362, № 2. – P. 350-354.

нии $f^j(x_\varepsilon) \in U_{1,\,\varepsilon}(x)$, справедливо

$$g_{x_\varepsilon,\,j}(y_\varepsilon) \in U_{2,\,\varepsilon}(y).$$

Из определения 1.2.3 следует, что слабо неблуждающие точки относительно семейства отображений в слоях косого произведения $F \in T^0(I)$ являются и неблуждающими точками отображения F (хотя $y \in I_2$ может быть блуждающей точкой отображения в слое $g_{x,\,j} : I_2 \to I_2$).

Рассмотрим отображение $F \in T^0(I)$ такое, что его фактор f имеет замкнутое множество периодических точек $Per(f)$. Тогда для множества (наименьших) периодов $\tau(f)$ периодических точек f выполнено равенство $\tau(f) = \{1,\, 2,\, 2^2, \dots,\, 2^\nu\}$, где $0 \le \nu \le +\infty$, $\Omega(f) = Per(f)$. Обозначим $Per(f,\, l_n)$ множество f-периодических точек, (наименьшие) периоды которых делят $l_n = 2^n,\ n \ge 0$ (т. е. $\tau(f|_{Per(f,\,l_n)}) = \{1,\, 2,\, 2^2,\, \dots, 2^n\}$).

Определим многозначные функции

$$(\Omega^F_{l_n})'_{|Per(f,\,l_n)} = \bigcup_{i=0}^{n} \Omega^F_{l_i\,|Per(f,\,l_i)}; \quad (\Omega^F_{l_n,\,1})'_{|Per(f,\,l_n)} = \bigcup_{i=0}^{n} \Omega^F_{l_i,\,1|Per(f,\,l_i)}.$$

Поясним приведенные формулы. Так, например, первое из указанных выше равенств при любом $x \in Per(f,\, l_n)$ следует понимать в естественном смысле

$$(\Omega^F_{l_n})'_{|Per(f,\,l_n)}(x) = (\bigcup_{i=0}^{n} \Omega^F_{l_i\,|Per(f,\,l_i)})(x) = \bigcup_{i=0}^{n} (\Omega^F_{l_i\,|Per(f,\,l_i)})(x) = \bigcup_{i=0}^{n} \Omega^F_{l_i\,|Per(f,\,l_i)}(x),$$

где $(\cdot)(x)$ означает, как обычно, срез множества (графика соответствующей многозначной функции) слоем над точкой x. Если $x \notin Per(f,\, l_i)$ при некотором $1 \le i \le n-1$, то $(\Omega^F_{l_i\,|Per(f,\,l_i)})(x) = \Omega^F_{l_i\,|Per(f,\,l_i)}(x) = \emptyset$.

Положим $(\Omega^F_{l_n,1})^{ex'} = \bigcup\limits_{i=0}^{n} (\Omega^F_{l_i,1})^{ex}$ при всех $x \in \bigcap\limits_{i=0}^{n} f^{l_i}(I_1)$. Символом $\widetilde{g}_x$ будем обозначать отображение $g_{x,\,n}$, если $x \in Per(f)$, а n - (наименьший) период x.

Теорема 1.2.1. *Пусть факторотображение f косого произведения отображений интервала $F \in T^0(I)$ имеет замкнутое множество периодических точек $Per(f)$. Тогда существуют и равны между собой топологические пределы $\underset{n\to+\infty}{Lim}\,(\Omega^F_{l_n,\,1})'_{|Per(f,\,l_n)}$ и $\underset{n\to+\infty}{Lim}\,(\Omega^F_{l_n})'_{|Per(f,\,l_n)}$, причем справедливы равенства:*

$$\Omega^{F_{|Per(f)\times I_2}} = \underset{n\to+\infty}{Lim}\,(\Omega^F_{l_n,1})'_{|Per(f,\,l_n)} = \underset{n\to+\infty}{Lim}\,(\Omega^F_{l_n})'_{|Per(f,\,l_n)}$$
$$= \overline{\bigcup_{x\in Per(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)},$$

где $(\Omega^F_{l_n,\,1})'_{|Per(f,\,l_n)}$, $(\Omega^F_{l_n})'_{|Per(f,\,l_n)}$, $\Omega^{F_{|Per(f)\times I_2}}$ – графики соответствующих многозначных функций в I, $\overline{(\cdot)}$ означает замыкание множества;
более того, если x – периодическая точка f с (наименьшим) периодом $l(x)$, предельная для непериодических точек f, то

$$\Omega^F(x) = (\underset{n\to+\infty}{Ls}\,(\Omega^F_{l(x)n,1})^{ex'}{}_{|U_{1,\,\varepsilon_n}(x)})(x),$$

где $\underset{n\to+\infty}{Ls}(\cdot)_n$ *– верхний топологический предел последовательности множеств,* $(\Omega^F_{l(x)n,1})^{ex'}{}_{|U_{1,\,\varepsilon_n}(x)}$ *– график соответствующей многозначной функции,* $U_{1,\,\varepsilon_n}(x)$ *– произвольная* ε_n*-окрестность точки* $x \in Per(f)$ *такая, что* $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$*,* $(\cdot)(x)$ *– срез множества вертикальным слоем над точкой* x*.*

Определения понятий тологического предела, верхнего (нижнего) топологического предела, имеющиеся в монографии [33], приведены в обзоре [34] (см. раздел "Приложение: используемые топологические понятия").

Механизм формирования множества центральных движений косого произведения $F \in T^0(I)$ с замкнутым множеством $Per(f)$ периодических точек факторотображения f состоит в том, что в этом случае существует топологический предел $\underset{n\to+\infty}{Lim}\, C^F_{l_n|Per(f,\,l_n)}$ последовательности графиков функций $C^F_{l_n|Per(f,\,l_n)}$ в I, причем для графика C-функции в I (обозначенного через C^F) справедливо равенство

$$C^F = \underset{n\to+\infty}{Lim}\, C^F_{l_n|Per(f,\,l_n)}.$$

Теорема 1.3.1. *Пусть факторотображение* f *косого произведения отображений интервала* $F \in T^0(I)$ *имеет замкнутое множество* $Per(f)$*. Тогда центр* $C(F)$ *отображения* F *представим в следующем виде:*

$$C(F) = \overline{Per(F)} = \Omega(F_{|\Omega(F)}) = \overline{\bigcup_{x\in Per(f)} \{x\}\times\Omega(\widetilde{g}_{x|\Omega(\widetilde{g}_x)})}.$$

Из теорем 1.2.1 и 1.3.1 следует, что каждое из условий "$\Omega(F) = Per(F)$" или "$C(F) = Per(F)$" является необходимым и достаточным для замкнутости множества $Per(F)$ периодических точек косого произведения $F \in T^0(I)$. Таким образом, в непрерывных косых произведениях отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек реализуется только наиболее простой тип возвращаемости траекторий: периодичность. По этой причине косые произведения отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек будем называть *простейшими.*

Во второй главе получен критерий возникновения C^0- Ω-взрыва и доказана невозможность C^1- Ω-взрыва в C^1-гладких простейших косых произведениях отображений интервала (§ 2.1); исследовано влияние дифференциальных свойств простейшего косого произведения на структуру его ω-предельных множеств (§§ 2.2 - 2.4).

Явление Ω-взрыва в диффеоморфизмах было обнаружено в первое десятилетие создания гиперболической теории в связи с теоремой об Ω-устойчивости диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A (Дж. Палис, М.У. Хирш, С. Пью).

Важная роль цепно-рекуррентных точек в явлении C^0- Ω-взрыва в дискретных динамических системах отмечалась в [35, 36]. Исследованию цепно-рекуррентных точек про-

---

[33] *Куратовский К.* Топология. – М.: "Мир", т.1, 1966. – 594 с.; т.2, 1969. – 624 с.

[34] *Ефремова Л.С.* Динамика косых произведений отображений интервала// УМН. – 2017. – Т. 72, № 1 (433). – С. 107-192; англ. пер.: Russian Math. Surveys. – 2017. – V. 72, № 1. – P. 101–178.

[35] *Block L., Franke J.E.* The chain recurrent set, attractors, and explosions// Ergod.Theory and Dynam. Sys. – 1985. – V. 5. – P. 321-327.

[36] *Аносов Д.В., Арансон С.Х., Гринес В.З., Плыкин Р.В., Сатаев Е.А., Сафронов А.В., Солодов В.В., Старков А.Н., Степин А.М., Шлячков С.В.* Динамические системы с гиперболическим поведением// Сер. Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики. Фундам. направл. Динамические системы – 9. М.: ВИНИТИ. – 1991. – Т. 66. – С. 6-247.

стейших косых произведений отображений интервала посвящены статьи [37, 38], в первой из которых постороен пример непрерывного (но не гладкого) косого произведения отображений интервала с блуждающей цепно-рекуррентной точкой, все периодические точки которого являются неподвижными; а во второй доказан критерий несовпадения множеств цепно-рекуррентных и периодических точек для простейших косых произведений отображений интервала, который не объясняет влияние топологической структуры множества периодических точек на существование цепно-рекуррентных непериодических точек.

Явление Ω-взрыва в C^1-гладких косых произведениях отображений интервала исследовалось в статьях [5], [11], [20], результаты которых составили содержание § 2.1 главы 2 данной работы.

Пусть $F \in T^0(I)$, $Per(F)$ – замкнутое множество, а K_1, K_2 – различные подмножества множества $Per(F)$.

Следуя Дж. Купке (см. подстрочную ссылку 38), будем говорить, что *множество* K_2 *достижимо из множества* K_1 ($K_1 \to^a K_2$), если найдутся точки $z_1(x,\, y_1) \in K_1$ и $z_2(x,\, y_2) \in K_2$ такие, что для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-цепь относительно сужения $F_{|E}$, где $E = Orb(x,\, f) \times I_2$, соединяющая z_1 с z_2 ($Orb(x,\, f) = \{x,\, f(x), \ldots,\, f^{n-1}(x)\}$, n - период x).

Обозначим через $T^0_1(I)$ подпространство с (C^0-нормой) пространства $T^0(I)$, состоящее из C^1-гладких косых произведений отображений интервала.

Теорема 2.1.1. *Простейшее косое произведение* $F \in T^0_1(I)$, *для которого верно равенство* $F^{-1}(Per(F)) = Per(F)$ ($F^{-1}(\cdot)$ *– полный прообраз множества), допускает* C^0-Ω*-взрыв в том и только том случае, если выполнено одно из следующих двух условий:*
(1) *либо существует связная компонента* K *множества* $Per(F)$ *такая, что при некотором* $x \in Per(f)$ *срез* $(K)(x)$ *не является связным множеством;*
(2) *либо, в противном случае, для любого* $\delta > 0$ *найдется конечный набор компонент связности* $\{K_i\}_{i=1}^{i=m}$ *(где* $m = m(\delta)$, $m > 1$*) множества* $Per(F)$ *таких, что* $K_m \to^a K_1$, *а при всех* $1 \leq i \leq m-1$ *выполнено одно из следующих двух свойств:* $K_i \to^a K_{i+1}$ *или* $d(K_i,\, K_{i+1}) < \delta$.

В то же время C^1-гладкие простейшие косые произведения отображений интервала по отношению к малым C^1-взмущениям (класса косых произведений) демонстрируют совершенно иные свойства.

Теорема 2.1.3. *Пусть* $F \in T^1(I)$ *– простейшее отображение. Тогда* F *не допускает* Ω*-взрыв в пространстве* $T^1(I)$ *(наделенном* C^1*-нормой); причем существует окрестность* $B^1_\varepsilon(F)$ *отображения* F *в* $T^1(I)$ *такая, что любое отображение* $\Phi \in B^1_\varepsilon(F)$ *является простейшим.*

Более того, если простейшее отображение $F \in T^1(I)$ не содержит периодическую точку периода 2^i, то существует ε-окрестность $B^1_\varepsilon(F)$ отображения F в пространстве $T^1(I)$ такая, что любое отображение из окрестности $B^1_\varepsilon(F)$ не содержит периодических точек периода 2^{i+1}, каково бы ни было $i \geq 1$. Таким образом, малые C^1-возмущения простейших косых произведений в пространстве $T^1(I)$ могут приводить лишь к локальным перестройкам множества периодических точек, связанным с бифуркациями удвоения периода периодических точек.

В § 2.1 указаны отличительные особенности бифуркаций удвоения периода перио-

---

[37] *Forti G.L., Paganoni L.* On some properties of triangular maps// Grazer Math. Ber. – 1999. – V. 339. – P. 125-140.

[38] *Kupka J.* Triangular maps with the chain recurrent point periodic// Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.). – 2003. – V. 72, № 2. – P. 245-251.

дических точек C^3-гладких косых произведений отображений интервала, когда первый мультипликатор $\lambda_1((x^0;\, y^0))$ неподвижной точки $(x^0;\, y^0)$ проходит через -1, а второй $\lambda_2((x^0;\, y^0))$ проходит либо через 1, либо через -1 (теоремы 2.1.4 и 2.1.5).

Прежде, чем перейти к изложению результатов §§ 2.2 - 2.4, отметим, что первые примеры непрерывных (но не дифференцируемых) косых произведений отображений интервала, имеющих только лишь неподвижные точки и содержащих траекторию, ω-предельным множеством которой служит невырожденный вертикальный отрезок, приведены в [[39], [40], [41]].

Исследования влияния дифференциальных свойств динамической системы на структуру ее предельных множеств восходят к классическим работам А.Данжуа. Такого рода рассмотрения для простейших косых произведений отображений интервала были начаты в [18] и завершены в [6], где, в частности, разработана техника изучения ω-предельных множеств простейших косых произведений отображений интервала, основанная на использовании специальных расходящихся рядов, построен пример дифференцируемого простейшего отображения с одномерным ω-предельным множеством. В [7] получено интегральное необходимое условие существования одномерных предельных множеств простейших косых произведений. Результаты статей [6], [7] составили основное содержание §§ 2.2 - 2.4 главы 2 настоящей диссертации.

Пусть множество (наименьших) периодов $\tau(F)$ периодических точек косого произведения $F \in T^0(I)$ ограничено. При этом выполнено $\tau(F) = \{1,\, 2,\, \ldots,\, 2^\nu\}$, где $0 \le \nu < +\infty$. Пусть $M = 2^\nu$. Тогда для любой точки $(x;\, y) \in I$ ω-предельное множество $\omega_{F^M}((x;\, y))$ ее траектории относительно отображения F^M есть вертикальный отрезок (возможно, вырожденный), состоящий из неподвижных точек F^M.

Периодическую точку x^0 факторотображения f простейшего косого произведения $F \in T^0(I)$ назовем *исключительной*, если хотя бы одна связная компонента среза $(Per(F))(x^0)$ множества $Per(F)$ слоем над x^0 является невырожденным отрезком.

Обозначим через $Per_e(f)$ множество исключительных периодических точек фактора f отображения $F \in T^0(I)$. Символом $W^s(x^0,\, f^M)$, как обычно, будем обозначать устойчивое многообразие точки $x^0 \in Per(f)$ относительно отображения f^M, то есть множество точек $\{x \in I_1 : \lim\limits_{n\to+\infty} f^{Mn}(x) = x^0\}$.

Теорема 2.2.1. *Пусть отображение $F \in T^0(I)$ имеет ограниченное множество $\tau(F)$, а $g_x(y)$ дифференцируемо по x на I. Тогда для произвольной точки $(x';\, y') \in I$ следующие утверждения эквивалентны:*
(1) ω-предельное множество $\omega_{F^M}((x';\, y'))$ – невырожденный вертикальный отрезок;
(2) существуют точка $x^0 \in Per_e(f)$, связная компонента $[\alpha,\, \beta]$ $(\alpha < \beta)$ среза $(Per(F))(x^0)$ и счетное подмножество $N_{[\alpha,\,\beta]}$ множества $\mathbf{N}$ натуральных чисел такие, что $x' \in W^s(x^0,\, f^M) \setminus \{f^{-Mn}(x^0)\}_{n\ge0}$ (здесь $f^{-Mn}(\cdot)$ – полный прообраз точки относительно отображения f^{Mn}, $W^s(x^0,\, f^M)$ – устойчивое многообразие точки $x^0 \in Per_e(f)$ относительно отображения f^M);

$$N_{[\alpha,\,\beta]} = \{n \in \mathbf{N} : g_{x',\,Mn}(y'),\, g_{x',\,M(n+1)}(y') \in [\alpha,\, \beta]\};$$

---

[39] *Kočen Z.* The problem of classification of triangular maps with zero topological entropy// Ann. Math. Sil. – 1999. – V. 13. – P. 181-192.

[40] *Balibrea F., Garcia J.L., Munos J.I.* Description of ω-limit sets of a triangular map on I^2// Far East Journ. Dynam. Syst. – 2001. – V. 3, № 1. – P. 87-101.

[41] *Balibrea F., Garcia J.L., Munos J.I.* A triangular map on I^2 whose ω-limit sets are all compact interval of $\{0\} \times I$// Discrete ans Continuous Dynam. Syst. – 2002. – V. 8, № 4. – P. 983-994.

а ряд

$$\sum_{k\in N_{[\alpha,\,\beta]}} (f^{Mk}(x') - x^0)\psi(f^{Mk}(x'),\ g_{x',\,Mk}(y'))$$

расходится. Здесь функция ψ определена на прямоугольнике $I_1 \times [\alpha,\, \beta]$ для отображений $g_{x,\,M}(y)$ по отношению к точке x^0 так, что $g_{x,\,M}(y) = y + (x - x^0)\psi(x,\, y)$.

Таким образом, свойство простейшего косого произведения отображений интервала иметь одномерные ω-предельные множества связано с расходимостью специальных рядов, построенных по исследуемой траектории и содержащих информацию о ее асимптотическом поведении.

Пусть $T_d(I)$ есть подпространство пространства $T^0(I)$, состоящее из отображений, каждое из которых имеет C^1-гладкое на отрезке I_1 факторотображение f и отображения в слоях $g_x(y)$ со следующими свойствами: (i) частная производная $\frac{\partial}{\partial y}g_x(y)$ непрерывна на I, (ii) в каждой точке $(x;\, y) \in I$ существует конечная частная производная $\frac{\partial}{\partial x}g_x(y)$, непрерывная всюду, за исключением, быть может, точек множества $Per_e(f) \times I_2$.

Во множестве $T_d(I)$ выделим подмножество простейших отображений, удовлетворяющих следующему естественному дополнительному условию: (iii) любая точка $(\overline{x};\, \overline{y})$, где $\overline{x}$ – непериодическая точка f из некоторого интервала $J^* \subset I_1$, а $\overline{y}$ –неподвижная точка отображения $g_{\overline{x},\,M} : I_2 \to I_2$, обладает окрестностью $U_\delta((\overline{x};\, \overline{y}))$, в которой выполнены условия локальной теоремы существования гладкой неявной функции $x = x^{loc}(y)$.

Множество простейших отображений в пространстве $T_d(I)$, удовлетворяющих условию (iii), непусто.

Теорема 2.4.1. *Пусть $F \in T_d(I)$ – простейшее отображение, удовлетворяющее условию (iii) и такое, что траектория некоторой точки $(x';\, y')$ имеет одномерное ω-предельное множество $\omega_F((x';\, y'))$, представляющее собой орбиту невырожденного вертикального периодического отрезка. Тогда частная производная $\frac{\partial}{\partial x}g_x(y)$ не ограничена в произвольной окрестности каждой точки множества $\omega_F((x';\, y'))$.*

Таким образом, простейшие отображения из пространства $T_d(I)$, удовлетворяющие условию (iii), обладают, в некотором естественном смысле, максимальными дифференциальными свойствами по переменной x среди простейших косых произведений, имеющих одномерные ω-предельные множества.

Теорема 2.4.2. *Пусть $F \in T^1(I)$ удовлетворяет условию (iii) . Тогда следующие утверждения эквивалентны:*
(1) *множество $Per(F)$ периодических точек F замкнуто;*
(2) *ω-предельное множество траектории произвольной точки из I есть периодическая орбита.*

Систематические исследования структуры неблуждающего множества гладких косых произведений отображений интервала с факторотображением типа $\succ 2^\infty$ в настоящее время представлены работами [1], [8], [10], [14], [15], [17], [22], [23], составившими основное содержание главы 3 настоящей диссертации. Вопросы, связанные с мерой неблуждающего множества некоторых диффеоморфизмов-косых произведений над отображением сдвига на топологической марковской цепи с диффеоморфизмами Морса-Смейла на отрезке в качестве отображений в слоях, рассмотрены в [42].

Обозначим через $T^1_*(I)$ подпространство пространства $T^1(I)$, состоящее из всех тех косых произведений отображений интервала, фактор каждого из которых Ω-устойчив

---

[42] *Kleptsyn V., Volk D.* Nonwandering sets of interval skew products// Nonlinearity. – 2014. – V. 27, № 7. – 1595.

в пространстве C^1-гладких отображений отрезка I_1 в себя с инвариантной границей.

В третьей главе (как и в двух следующих за ней главах) рассмотрены отображения из пространства $T^1_*(I)$, фактор каждого из которых имеет тип $\succ 2^\infty$. Здесь неблуждающее множество $\Omega(f)$ факторотображения f допускает разложение

$$\Omega(f) = \Omega_r(f) \bigcup \Omega_p(f),$$

где $\Omega_r(f)$ – непустая разреженная часть множества $\Omega(f)$, состоящая из конечного числа гиперболических периодических точек, $\Omega_p(f)$ – непустая совершенная часть множества $\Omega(f)$, состоящая из конечного числа локально максимальных квазиминимальных гиперболических совершенных нигде неплотных множеств [43].

Основное содержание **третьей главы** составляют, во-первых, теорема о разложении рассматриваемого пространства косых произведений отображений интервала в конечное объединение попарно непересекающихся подпространств (выделенных сформулированными далее условиями) и, во-вторых, теоремы о структуре неблуждающего множества отображений каждого из подпространств, приведенных в теореме о разложении.

Нам потребуются сведения о временах возвращения траекторий произвольных окрестностей всех точек множества $\Omega_p(f)$. Значения этих времен определяются элементами множества $\tau(f_{|\Omega_p(f)})$ (наименьших) периодов периодических точек, существующих у $f_{|\Omega_p(f)}$. Найдутся натуральные числа m_*, n_*, i_* такие, что $\{m_* n_* i\}_{i \geq i_*} \subset \tau(f_{|\Omega_p(f)})$ [44]. Положим $l^*_i = m_* n_* i$, где $i \geq i_*$.

Для произвольного отображения $F \in T^1_*(I)$ с фактором типа $\succ 2^\infty$ возможны следующие случаи: (i) последовательность вспомогательных функций $\{\Omega^F_{l^*_i}\}_{i\geq 1}$ (а, следовательно, и последовательность функций $\{\Omega^F_{l^*_i,1}\}_{i\geq 1}$) содержит не более, чем конечное множество разрывных функций; (ii) последовательность вспомогательных функций $\{\Omega^F_{l^*_i}\}_{i\geq 1}$ (а, следовательно, и последовательность функций $\{\Omega^F_{l^*_i,1}\}_{i\geq 1}$) содержит счетное множество разрывных функций, но при этом последовательность подходящих функций $\{\overline{\Omega}^F_{l^*_i}\}_{i\geq 1}$ (а, следовательно, и последовательность функций $\{\overline{\Omega}^F_{l^*_i,1}\}_{i\geq 1}$) содержит не более, чем конечное множество разрывных функций; (iii) последовательность подходящих функций $\{\overline{\Omega}^F_{l^*_i}\}_{i\geq 1}$ содержит счетное множество разрывных функций, при этом Ω-функция отображения F непрерывна; (iv) последовательность подходящих функций $\{\overline{\Omega}^F_{l^*_i}\}_{i\geq 1}$ содержит счетное множество разрывных функций, при этом Ω-функция отображения F разрывна.

В соответствии с перечисленными логически возможными случаями в подпространстве пространства $T^1_*(I)$, состоящем из косых произведений отображений интервала, имеющих факторотображения типа $\succ 2^\infty$, можно выделить следующие подпространства: $T^1_{*,1}(I)$, образованное косыми произведениями, имеющими свойство (i); $T^1_{*,2}(I)$, состоящее из косых произведений, обладающих свойством (ii); $T^1_{*,3}(I)$, образованное косыми произведениями, имеющими свойство (iii); $T^1_{*,4}(I)$, состоящее из косых произведений, обладающих свойством (iv).

В силу определения подпространств $T^1_{*,1}(I)–T^1_{*,4}(I)$ все они попарно не пересекаются.

Теорема 3.1.1. *Любое из подпространств* $T^1_{*,j}(I)$ *(*$1 \leq j \leq 4$*) не пусто, а их объеди-*

---

[43] *Якобсон М.В.* Об отображениях окружности в себя// Матем. сб. – 1971. – Т. 85(127), № 2(6). – С. 163-188.

[44] *Ефремова Л.С.* Периодические движения дискретных полудинамических систем. Диссерт. ... канд. физ.-мат. наук, Горьковский госуниверситет, Горький. – 1981 – 117 с.

нение $\bigcup\limits_{j=1}^{4} T^1_{*,\,j}(I)$ *совпадает с частью пространства* $T^1_*(I)$, *состоящей из косых произведений, фактороотображение каждого из которых имеет тип* $\succ 2^\infty$.

Теорема 3.1.1 может рассматриваться, как первый этап доказательства теорем о неблуждающем множестве косых произведений из пространства $T^1_*(I)$, фактороотображение каждого из которых имеет тип $\succ 2^\infty$.

Для определенности, сформулируем теорему о неблуждающем множестве косых произведений из подпространства $T^1_{*,\,2}(I)$.

Нам потребуется подпоследовательность $\{l_i\}_{i\geq i^*}$ указанной выше последовательности натуральных чисел $\{l^*_i\}_{i\geq i^*}$ при $l_i = m_* n_* i!$. Натуральное число $i!$ при $i > 1$ представимо в виде

$$i! = 2^{j(i)}(2j'(i)+1), \quad \text{где} \quad j(i) \geq 0,\ j'(i) \geq 1.$$

На неблуждающем множестве $\Omega(f)$ фактора f определим многозначные функции

$$(\overline{\Omega}^F_{l_i})' = \bigcup_{\gamma=0}^{j(i)} \overline{\Omega}^F_{2^{-\gamma} l_i}; \quad (\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})' = \bigcup_{\gamma=0}^{j(i)} \overline{\Omega}^F_{2^{-\gamma} l_i,\,1}. \tag{0.0.5}$$

Пусть $Per_p(f)$ – множество периодических точек в $\Omega_p(f)$ (имеем: $\overline{Per_p(f)} = \Omega_p(f)$), а $Per^*_p(f)$ – произвольное инвариантное всюду плотное в $\Omega_p(f)$ подмножество множества $Per_p(f)$ (возможно, совпадающее с $Per_p(f)$). Обозначим через $(\overline{\Omega}^F_{l_i})^{P^*}$ и сужение функции $\overline{\Omega}^F_{l_i}$ на множество $Per^*_p(f)$, и его график в фазовом пространстве I. Положим

$$(\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})^{P^*} = F_{l_i,\,1|Per^*_p(f)\times I_2}((\overline{\Omega}^F_{l_i})^{P^*}).$$

Здесь используются графики функций $(\overline{\Omega}^F_{l_i})^{P^*}$ и $(\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})^{P^*}$.

Обозначим через $Per^*_p(f,\,n)$ конечное множество всех тех точек из $Per^*_p(f)$, (наименьший) период каждой из которых делит $n \in \tau(f_{|\Omega_p(f)})$. Будем использовать следующие сужения функций, определенных равенствами (0.0.5):

$$(\overline{\Omega}^F_{l_i})'_{\;|Per^*_p(f,l_i)} = \bigcup_{\gamma=0}^{j(i)} \overline{\Omega}^F_{2^{-\gamma} l_i\;|Per^*_p(f,\,2^{-\gamma} l_i)};$$

$$((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}_{\;|Per^*_p(f,l_i)} = \bigcup_{\gamma=0}^{j(i)} (\overline{\Omega}^F_{2^{-\gamma} l_i,\,1})^{P^*}_{\;|Per^*_p(f,\,2^{-\gamma} l_i)}.$$

Нам потребуются естественные расширения $(\Omega^F_n)^{ex}$ на отрезок I_1 и $(\Omega^F_{n,1})^{ex}$ на отрезок $f^n(I_1)$ функций Ω^F_n и $\Omega^F_{n,1}$ соответственно. Важную роль будут играть также функции

$$(\Omega^F_{l^*_i,1})^{ex'} = \bigcup_{\gamma=0}^{\overline{j}(i)} (\Omega^F_{2^{-\gamma} l^*_i,1})^{ex},$$

определенные на множестве $\bigcap\limits_{\gamma=0}^{\overline{j}(i)} f^{2^{-\gamma} l^*_i}(I_1)$ (здесь $i = 2^{\overline{j}(i)}(2\overline{j}'(i)+1)$, $\overline{j}(i) \geq 0$, $\overline{j}'(i) \geq 1$).

Положим $\Omega^*_p(F) = \Omega_p(f) \times I_2$.

Теорема 3.2.2. *Пусть* $F \in T^1_{*,\,2}(I)$*, а множество* $Per^*_p(f)$ *- произвольное инвариантное всюду плотное в* $\Omega_p(f)$ *подмножество множества* $Per_p(f)$*. Тогда существует топологический предел* $\underset{i\to+\infty}{Lim}((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,\,l_i)}$*, не зависящий от множества* $Per^*_p(f)$*, и верно:*

$$\Omega^{F^{m_*n_*}_{|\Omega^*_p(F)}} = \underset{i\to+\infty}{Ls}(\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})' = \underset{i\to+\infty}{Ls}((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*} =$$
$$\underset{i\to+\infty}{Lim}((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,\,l_i)} = \overline{\bigcup_{x\in Per^*_p(f)} \{x\} \times WN_{\Omega_p}(\widetilde{g}_x)},$$

здесь $(\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})'$, $((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}$, $((\overline{\Omega}^F_{l_i,\,1})')^{P^*}{}_{|Per^*_p(f,\,l_i)}$ *– графики соответствующих функций в* I*,* $WN_{\Omega_p}(\widetilde{g}_x)$ *– множество точек* $y \in I_2$ *таких, что любая точка* $(x,\,y)$ *является слабо неблуждающей относительно семейства отображений в слоях над точками множества* $\Omega_p(f)$ *косого произведения* F_m *(см. формулу (0.0.3)), где* $m = m(x)$ *– (наименьший) период* x*;*
более того, значение $\Omega^{F^{m_*n_*}}(x)$ Ω*-функции отображения* $F^{m_*n_*}$ *в произвольной точке* $x \in \Omega_p(f)$ *определено в силу равенства*

$$\Omega^{F^{m_*n_*}}(x) = (\underset{i\to+\infty}{Ls}(\Omega^F_{l^*_i,1})^{ex'}{}_{|U_{1,\,\varepsilon_i}(x)})(x)$$

для любых окрестностей $U_{1,\,\varepsilon_i}(x)$ *в* I_1 *точки* x*, где* $\lim\limits_{i\to+\infty} \varepsilon_i = 0$.

Классические результаты по изучению глубины центра автономных систем дифференциальных уравнений на поверхностях в $\mathbf{R^n}$ (где $n \geq 3$) получены в работах А.Г. Майера и Л.П. Шильникова. В [45] приведен пример непрерывного (но не гладкого) косого произведения отображений интервала с фактором типа $\succ 2^\infty$ и произвольной конечной глубиной центра. Этот пример основан на использовании краевого эффекта отрезка I_2 относительно отображений в слоях.

Изучение глубины центра гладких косых произведений отображений интервала, факторотображение каждого из которых имеет тип $\succ 2^\infty$, основанное на использовании теоремы о разложении пространства такого рода косых произведений, проведено в [17], [25], [27]. Результаты этих работ составили содержание главы 4 данной работы.

В **четвертой главе** получены оценки глубины центра C^1-гладких косых произведений отображений интервала, принадлежащих каждому из подпространств $T^1_{*,\,j}(I)$ при $1 \leq j \leq 3$. Что касается отображений из подпространства $T^1_{*,\,4}(I)$, то при доказательстве теоремы 3.1.1 установлено, что в $T^1_{*,\,4}(I)$ существуют косые произведения отображений интервала с глубиной центра, представляющей собой произвольный конечный или счетный ординал.

Для получения оценок глубины центра косых произведений со сложной динамикой фактора (имеющего тип $\succ 2^\infty$) использован подход, отличный от примененного при получении оценки глубины центра косых произведений с простейшей динамикой фактора (имеющего замкнутое множество периодических точек). Этот подход основан на рассмотрении структуры притягивающего множества $\bigcup\limits_{(x;\,y)\in I} \omega_F((x;\,y))$.

Так, в случае отображений из пространства $T^1_{*,\,1}(I)$ для притягивающего множе-

---

[45] *Kolyada S.F.* On dynamics of triangular maps of the square// Ergod. Theory and Dynam. Syst. – 1992. – V. 12, № 4. - P. 749-768.

ства $\bigcup\limits_{(x;\, y) \in I} \omega_F((x;\, y))$ доказан аналог классической теоремы о константе Биркгофа для неблуждающего множества.

Теорема 4.1.1. *Пусть* $F \in T^1_{*,\,1}(I)$. *Тогда* $\bigcup\limits_{(x;\, y) \in I} \omega_F((x;\, y))$ *– замкнутое множество, и для любой окрестности* U *множества* $\bigcup\limits_{(x;\, y) \in I} \omega_F((x;\, y))$ *существует* $m = m(U)$ *такое, что время пребывания траектории любой точки из* I *вне* U *не превосходит* m.

В то же время установлено, что при любом $j = 2,\ 3,\ 4$ существует косое произведение $F \in T^1_{*,\,j}(I)$ с незамкнутым притягивающим множеством $\bigcup\limits_{(x;\, y) \in I} \omega_F((x;\, y))$.

Техника, разработанная при доказательстве теоремы 4.1.1, позволяет описать структуру и глубину центра отображений из пространства $T^1_{*,\,1}(I)$.

Теорема 4.1.2. *Для множества центральных движений* $C(F)$ *косого произведения* $F \in T^1_{*,\,1}(I)$ *справедливы равенства*

$$C(F) = \overline{Per(F)} = \Omega(F_{|\Omega(F)}) = \overline{\bigcup_{x \in Per(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_{x|\Omega(\widetilde{g}_x)})}.$$

Утверждение теоремы 4.1.2 показывает, что глубина центра $\gamma(F)$ произвольного отображения $F \in T^1_{*,\,1}(I)$ не превосходит 2. Аналогичный результат справедлив и для глубины центра отображений из подпространств $T^1_{*,\,2}(I)$ и $T^1_{*,\,3}(I)$ (в этом последнем случае при выполнении некоторого дополнительного условия на Ω-функцию).

Теорема 4.2.2. *Пусть* $F \in T^1_{*,\,2}(I) \bigcup T^1_{*,\,3}(I)$, *причем, если* $F \in T^1_{*,\,3}(I)$, *то* $\Omega^{F_{|\Omega^*_p(F)}}$ *- непрерывная функция. Тогда* $\gamma(F) \leq 2$.

Подпространства $T^1_{*,\,1}(I) - T^1_{*,\,4}(I)$, выделенные в теореме о разложении пространства C^1-гладких косых произведений отображений интервала с Ω-устойчивым факторотображением типа $\succ 2^\infty$, описаны с использованием всех логических возможностей сочетания свойства непрерывности/разрывности основных многозначных функций, связанных с косым произведением отображений интервала. В этом смысле можно говорить о том, что теорема о разложении дает неявное описание подпространств $T^1_{*,\,1}(I) - T^1_{*,\,4}(I)$.

В главе 5 в подпространствах $T^1_{*,\,1}(I) - T^1_{*,\,4}(I)$ выделены некоторые непустые подмножества отображений, изучены аппроксимационные свойства отображений из этих подмножеств. Явное описание выделенных подмножеств косых произведений основано на использовании, во-первых, понятия устойчивости в целом в C^1-норме семейства отображений в слоях и, во-вторых, понятия плотной устойчивости в целом в C^1-норме семейства отображений в слоях C^1-гладкого косого произведения отображений интервала. Эти понятия введены и исследованы в [16], [17], [19], [24], [26].

Изучению различных аспектов C^1- структурной устойчивости и C^1- Ω-устойчивости диффеоморфизмов посвящены статьи С. Смейла, Д.В. Аносова, Р. Мане, Дж. Палиса; C^1- структурной устойчивости и C^1- Ω-устойчивости эндоморфизмов – например, статья Ф. Пшитыцки.

Некоторые свойства отображений в слоях C^1-гладких Ω-устойчивых косых произведений отображений интервала с факторотображением типа $\succ 2^\infty$ исследовались в работах [2], [19].

Нетипичность свойства Ω-устойчивости C^r-диффеоморфизмов ($r \geq 2$) для размерностей ≥ 3 доказана Р. Абрахамом и С. Смейлом и для размерности 2 следует из работы

Ш. Ньюхауса. Аналогичные вопросы для C^1-гладких Ω-устойчивых косых произведений отображений интервала рассматривались в [3], [16], [17], [24].

Аппроксимационные свойства C^1-гладких Ω-устойчивых косых произведений отображений интервала с фактором типа $\succ 2^\infty$ по отношению к косым произведениям отображений интервала с плотно устойчивым в целом семейством отображений в слоях изучались в [17], [28].

Нам потребуется подпространство $\widetilde{T}^1_*(I)$ пространства $T^1_*(I)$, состоящее из всех отображений, для каждого из которых верно включение $F(\partial I) \subseteq \partial I$, где ∂I – граница прямоугольника I. При любом $1 \le j \le 4$ будем использовать также подпространства $\widetilde{T}^1_{*,\,j}(I) = \widetilde{T}^1_*(I) \bigcap T^1_{*,\,j}(I)$.

Определение 0.0.13. Скажем, что семейство отображений в слоях косого произведения $F \in \widetilde{T}^1_*(I)$ с факторотображением типа $\succ 2^\infty$ *устойчиво в целом в C^1-норме*, если для любого $\delta > 0$ существует окрестность $B^1_\varepsilon(F)$ отображения F в пространстве $\widetilde{T}^1_*(I)$ такая, что для каждого отображения $\Phi \in B^1_\varepsilon(F)$ и произвольного l^*_i ($i \ge i^*$ при некотором $i^* \ge i_*$) существует δ-близкий к тождественному в C^0-норме гомеоморфизм $H^{<l^*_i>} : \overline{\Omega}^F_{l^*_i} \to \overline{\Omega}^\Phi_{l^*_i}$ (здесь $\overline{\Omega}^F_{l^*_i}$, $\overline{\Omega}^\Phi_{l^*_i}$ - графики подходящих функций отображений F и Φ соответственно), принадлежащий классу косых произведений, такой, что вспомогательные отображения $F_{l^*_i\,|\Omega(f)\times I_2}$ и $\Phi_{l^*_i\,|\Omega(\varphi)\times I_2}$ (см. равенства (0.0.3)) Ω-сопряжены с помощью гомеоморфизма $H^{<l^*_i>}$.

Любое косое произведение $F \in \widetilde{T}^1_*(I)$ с факторотображением типа $\succ 2^\infty$ и устойчивым в целом в C^1-норме семейством отображений в слоях содержится в пространстве $\widetilde{T}^1_{*,\,1}(I)$ и имеет непрерывную Ω-функцию.

Теорема 5.2.1. *Отображение $F \in \widetilde{T}^1_*(I)$ с факторотображением типа $\succ 2^\infty$ Ω-устойчиво в C^1-норме в том и только том случае, если его семейство отображений в слоях устойчиво в целом в C^1-норме.*

Таким образом, C^1-гладкие Ω-устойчивые косые произведения отображений интервала с факторотображением типа $\succ 2^\infty$ содержатся в подпространстве $\widetilde{T}^1_{*,\,1}(I)$ и имеют непрерывную Ω-функцию.

Следующее утверждение показывает, что C^1-гладкие Ω-устойчивые косые произведения отображений интервала не образуют всюду плотного подмножества в пространстве $\widetilde{T}^1_{*,\,1}(I)$.

Теорема 5.2.2. *Существует отображение $F \in \widetilde{T}^1_{*,\,1}(I)$ такое, что некоторая его окрестность $B^1_\varepsilon(F)$ в пространстве $\widetilde{T}^1_{*,\,1}(I)$ не содержит Ω-устойчивых отображений.*

Свойство плотной устойчивости в целом (но не устойчивости в целом) семейства отображений в слоях косого произведения с факторотображением типа $\succ 2^\infty$ из пространства $\widetilde{T}^1_*(I)$ означает нарушение свойства устойчивости в целом семейства отображений в слоях такого рода косых произведений над точками замкнутого нигде неплотного подмножества неблуждающего множества $\Omega(f)$ факторотображения.

Определение 0.0.15. Семейство отображений в слоях косого произведения отображений интервала $F \in \widetilde{T}^1_{*,\,j}(I)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) называется *плотно устойчивым в целом (в C^1-норме)*, если существует открытое множество $A(f) \subset I_1$ такое, что $A^*(f) = A(f) \bigcap \Omega(f)$ есть собственное всюду плотное подмножество f-неблуждающего множества $\Omega(f)$, обладающее следующим свойством:
для любого $\delta > 0$ найдется окрестность $B^1_\varepsilon(F)$ отображения F в $\widetilde{T}^1_*(I)$ такая, что для

каждого отображения $\Phi \in B^1_\varepsilon(F) \bigcap \widetilde{T}^1_{*,\,j'}(I)$ $(j' = 1, 2, 3, 4)$ и каждого времени возвращения l^*_i $(i \geq i^*$ при некотором $i^* > i_*)$ можно указать δ-близкий к тождественному отображению в C^0-норме гомеоморфизм - косое произведение $H^{<l^*_i>} : \overline{\Omega}^F_{l^*_i}|_{A^*(f)} \to \overline{\Omega}^\Phi_{l^*_i}|_{A^*(\varphi)}$, для которого вместе с равенством $h_1(A^*(f)) = A^*(\varphi)$ выполнено

$$h^{<l^*_i>}_{2,\,x}{}_{|\overline{\Omega}^F_{l^*_i}{}_{|A^*(f)}(x)} \circ g_{x,\,l^*_i}{}_{|\overline{\Omega}^F_{l^*_i}{}_{|A^*(f)}(x)}(y) =$$
$$\psi_{h_1(x),\,l^*_i}{}_{|\overline{\Omega}^\Phi_{l^*_i}{}_{|A^*(\varphi)}(h_1(x))} \circ h^{<l^*_i>}_{2,\,x}{}_{|\overline{\Omega}^F_{l^*_i}{}_{|A^*(f)}(x)}(y),$$

где $(x,\, y) \in I$ – произвольная точка графика функции $\overline{\Omega}^F_{l^*_i}{}_{|A^*(f)}$.

Отметим, что при любом $j = 1,\, 2,\, 3,\, 4$ существует отображение $F_j \in \widetilde{T}^1_{*,\,j}(I)$, имеющее плотно устойчивое в целом в C^1-норме семейство отображений в слоях.

Перейдем к описанию аппроксимационных свойств косых произведений отображений интервала из некоторых подмножеств пространства $\widetilde{T}^1_*(I)$.

Теорема 5.3.2. *Пусть $F \in \widetilde{T}^1_{*,\,j}(I)$ $(j = 1, 3$ или $4)$ – косое произведение отображений интервала с плотно устойчивым в целом (в C^1-норме) семейством отображений в слоях.*
Отображение F можно аппроксимировать с любой степенью точности C^1-гладкими Ω-устойчивыми косыми произведениями отображений интервала в том и только том случае, если для каждого локально максимального квазиминимального множества $K(f)$ фактороотображения f и каждого $i \geq i^*$ существует компонента связности $C_{K(f),\,i}$ пространства C^1-гладких Ω-устойчивых отображений отрезка I_2 в себя, для которой верно включение

$$\{g_{x,\,l^*_i}\}_{x \in K(f)} \subset \overline{C}_{K(f),\,i}.$$

Косые произведения отображений интервала из пространства $\widetilde{T}^1_{*,\,4}(I)$ с плотно устойчивым в целом семейством отображений в слоях проявляют исключительные динамические свойства.

Теорема 5.3.3. *Множество классов Ω-сопряженности отображений из пространства $\widetilde{T}^1_{*,\,4}(I)$ несчетно и имеет мощность $\geq \aleph_1$ (где $\aleph_1$ – мощность множества счетных ординалов.*
Более того, $\widetilde{T}^1_{*,\,4}(I)$ содержит плотное в себе (в C^1-норме) подмножество косых произведений с произвольной допустимой глубиной центра (то есть с глубиной центра, представляющей собой произвольный конечный или счетный ординал).

В доказательстве теоремы 5.3.3 построено множество косых произведений мощности $\geq \aleph_1$ такое, что любые два различных отображения из этого множества принадлежат различным классам Ω-сопряженности, но имеют один и тот же центр.

Содержание главы 5 составляют результаты работ [2], [3], [16], [17], [19], [24] - [28].

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК:

1. *Ефремова Л.С.* О понятии Ω-функции косого произведения отображений интервала// Труды междунар. конф., посвящ. 90-летию Л.С.Понтрягина, **6**: Динамич. сист., М.: ВИНИТИ. Итоги науки и техники, сер. Современная матем. и ее приложения. Тематич. обзоры. – 1999. – 67. – С. 129-160; англ. пер.: Journ. Math.Sci.(New York). – 2001. – 105. – P. 1779-1798.
2. *Efremova L.S.* New set-valued functions in the theory of skew products of interval maps// Nonlinear Analysis. – 2001. – V. 47, № 8. – P. 5297-5308.
3. *Ефремова Л.С.* Ω-устойчивые косые произведения отображений интервала не плотны в $T^1(I)$. Дифференц. уравн. и динамич. сист. Труды математич. ин-та им. В.А. Стеклова. – 2002. – Т. 236. – С. 167-173; англ. пер.: Proceedings of the Steklov Inst. of Math. – 2002. – V. 236. – P. 157-163.
4. *Ефремова Л.С.* О неблуждающем множестве и центре некоторых косых произведений отображений интервала// Известия ВУЗов. Математика. – 2006. – № 10. – С. 19-28; англ. пер.: Russian Math. – 2006. – V. 50, № 10. – P. 17-25.
5. *Блинова Е.В., Ефремова Л.С.* Об Ω-взрывах в простейших C^1-гладких косых произведениях отображений интервала// Труды междунар. конф. по диф. уравн. и динамич. системам (Суздаль 2006). Соврем. мат. и приложения, **53**. Тбилиси: Ин-т кибернетики АН Грузии. – 2008. – С. 71-81; англ пер.: Journ. Math. Sci. (New York). – 2009. – V. 157, № 3. – P. 456-465.
6. *Ефремова Л.С.* Дифференциальные свойства и притягивающие множества простейшего косого произведения отображений интервала// Матем. сб. – 2010. – Т. 231, №6. – С. 93-130; англ. пер.: Sbornik: Math. – 2010. – V. 231, №6. – P. 873-907.
7. *Ефремова Л.С.* Об интегральном условии существования одномерных притягивающих множеств простейшего косого произведения отображений интервала// Труды МФТИ. – 2010. – Т. 2, № 3. – С. 9-15.
8. *Ефремова Л.С.* О пространстве C^1-гладких косых произведений отображений интервала// ТМФ. – 2010. – Т. 164, № 3. – С. 447-454; англ. пер.: TMPh. – 2010. – V. 164, № 3. – P. 1208-1214.
9. *Efremova L.S.* Example of the Smooth Skew Product in the Plane with the One-dimensional Ramified Continuum as the Global Attractor// ESAIM: Proceedings and Surveys. – 2012. – V. 36. – P. 15-25.
10. *Ефремова Л.С.* Теорема о разложении пространства C^1-гладких косых произведений со сложной динамикой факторотображений// Матем. сб. – 2013. – Т. 204, № 11. – С. 55-82; англ. пер.: Sborn.: Math. – 2013. – V. 204, № 11. – P. 1598-1623.
11. *Ефремова Л.С.* Отсутствие C^1- Ω-взрыва в пространстве гладких простейших косых произведений// СМФН. – 2013. – Т. 48. – С. 36-50; англ. пер.: Journ. Math.Sci.(New York). – 2014. – V. 202, № 6. – P. 794-808.

12. *Efremova L.S.* Remarks on the nonwandering set of skew products with a closed set of periodic points of the quotient map// Nonlinear Maps and their Applic. Springer Proc. in Math. and Statist. – 2014. – V. 57. – P. 39-58.

13. *Belmesova S.S., Efremova L.S.* On the Concept of Integrability for Discrete Dynamical Systems. Investigation of Wandering Points of Some Trace Map// Nonlinear Maps and their Applic. Springer Proc. in Math. and Statist. – 2015. – V. 112. – P. 127-158.

14. *Ефремова Л.С.* Многозначные функции и неблуждающее множество некоторых косых произведений отображений интервала со сложной динамикой фактороотображения// Известия ВУЗов. Математика. – 2016. – № 2. – С. 93-98; англ. пер.: Russian Math. – 2016. – V. 60, № 2. – P. 77-81.

15. *Ефремова Л.С.* О неблуждающем множестве C^1-гладких косых произведений отображений интервала со сложной динамикой фактора// Проблемы матем. анализа. – 2016. – Т. 85. – С. 83-94; англ пер.: Journ. Math. Sci. (New York). – 2016. – V. 219, № 1. – P. 86-98.

16. *Efremova L.S.* Stability as a whole of a family of fibers maps and Ω-stability of C^1-smooth skew products of maps of an interval// Journ. Phis.: Conf. Ser. – 2016. – V. 692, 012010. – 10 p.

17. *Ефремова Л.С.* Динамика косых произведений отображений интервала// УМН. – 2017. – Т. 72, № 1 (433). – С. 107-192; англ. пер.: Russian Math. Surveys. – 2017. – V. 72, № 1. – P. 101–178.

Статьи в других изданиях:

18. *Ефремова Л.С.* О неблуждающем множестве и центре треугольных отображений с замкнутым множеством периодических точек в базе// Динамические системы и нелинейные явления. Ин-т матем. АН Украины, Киев. – 1990. – С. 15-25.

19. *Efremova L.S.* Set-valued Functions and Dynamics of Skew Products of Interval Maps// Progress in Nonlinear Science. Intern. Conf. Dedicated to the 100-th Anniversary of A.A.Andronov. Nizhny Novgorod. Russia. July 2-6, 2001. Proceedings: Math. Problems of Nonlinear Dynamics. – 2002. – V. 1. – P. 219-224.

20. *Ефремова Л.С.* О C^0- Ω-взрывах в гладких косых произведениях отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек// Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского. – 2012. – № 3(1). – С. 130–136.

Тезисы научных конференций

21. *Ефремова Л.С.* Расслоенные динамические системы с непустым множеством периодических точек// VII конф. по качеств. теории дифф. уравнений. Рига, 3-7 апреля 1989 г. Тезисы докладов, Рига. – 1989. – С. 92.

22. *Efremova L.S.* On the nonwandering sets of the smooth skew products of interval maps// International Conference on Contemporary Problems in Theory of Dynamical Systems (CPTDS'96), July, 1 - 6, 1996, Nizhni Novgorod. Abstracts. Nizhni Novgorod University. – 1996. – P. 17-18.

23. *Efremova L.S.* On the concept of Ω-function for the skew product of interval maps// International Conference Dedicated to the 90th Anniversary of L.S. Pontryagin, August, 31 – September, 6, 1998, Moscow. Abstracts. Differential Equations. M.: МИАН, МГУ. – 1998. – P. 32-33.

24. *Efremova L.S.* Differential Dymamics of Skew Products of Interval Maps// International Conference "Kolmogorov and Contemporary Mathematics" (Moscow, June 16-21, 2003) Abstracts. – 2003. – P. 35-36.

25. *Efremova L.S.* L.P. Shil'nikov's Paper "On the Work of A.G. Maier on Central Motions" and Dynamics of Skew Products// "Dynamics, Bifurcations and Strange Attractors". International Conference dedicated to the memory of L.P. Shil'nikov (1934-2011), Nizhni Novgorod, Russia, July 1-5, 2013. Book of Abstracts. – 2013. – P. 32.

26. *Efremova L.S.* Concept of Stability as a Whole of a Family of Fibers Maps for C^1-Smooth Skew Products and Its Generalization// Book of Abstracts of Intern. Conf. "Dynamics, Bifurcations, and Strange Attractors" Nizhni Novgorod, Russia, 20.07.2015 -24.07.2015. – 2015. – P. 7.

27. *Efremova L.* Birkhoff Problem on the Depth of the Center for Skew Products of Maps of an Interval// International Conference-School "Dynamics, Bifurcations and Chaos-2016" (DBC III), Nizhny Novgorod, Russia, July 18 – 22, 2016. Book of Abstracts. – 2016. – P. 51.

28. *Efremova L.S.* Main subspaces of the space of C^1-smooth skew products of interval maps// International Conference "Anosov Systems and Modern Dynamics" dedicated to the 80-th anniversary of Dmitry Anosov, Moscow, December 19-23, 2016. Abstracts. – 2016. – P. 33-36.