ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертационную работу Ефремовой Людмилы Сергеевны «Динамика косых произведений отображений интервала», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Актуальность темы. Широкий интерес к теории нетривиальных неблуждающих множеств траекторий динамических систем и их бифуркаций, идущий от А. Пуанкаре и Д. Биркгофа, возник после результата С. Смейла (1960 г.) о грубом диффеоморфизме с бесконечным числом периодических точек (подковы Смейла). Бурное и эффективное развитие этой теории, не теряющей актуальности до настоящего времени, привело к созданию двух основных направлений, объединяющих динамическую и эргодическую теории. Это – 1) странные аттракторы, репеллеры, "запутанные"области притяжения, гиперболичность, инвариантные меры, транзитивность и др.; 2) нетривиальные бифуркации этих множеств. В рамках этих актуальных направлений и выполнена диссертация Л.С. Ефремовой. Ее работа посвящена изучению неблуждающих множеств траекторий косых произведений двух классов: непрерывных косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек в базе (случай простой динамики фактороотображения) и C^1-гладких косых произведений отображений интервала с Ω-устойчивым фактором типа $\succ 2^{\infty}$ (случай, когда фактор содержит периодическую орбиту периода $\notin \{2^i\}_{i\geq 0}$ и имеет сложную динамику). В первой части автор изучает общие свойства неблуждающих множеств при "свободном"условии непрерывности, делающим задачу сложной (допускающим топологические методы, но исключающим анализ устойчивости и бифуркаций). Во второй части условие C^1-гладкости отображений позволило Л.С. Ефремовой решить сложные задачи об Ω -устойчивости, о бифуркации типа Ω-взрыва и исследовать ω-предельные множества траекторий.

Косые произведения не следует рассматривать как узкий класс "треугольных отображений поскольку их неблуждающее множество отражает основные свойства динамики близких отображений с возмущенным фактором, перестающими быть косыми произведениями. Это свойство открывает широкие возможности развития теории и служит дополнительным свидетельством актуальности темы диссертации.

Степень обоснованности научных положений, выводов. Научная новизна.

Во введении к диссертации приведен библиографический обзор, сформулированы основные результаты работы. Здесь же доказан критерий интегрируемости отображений в плоскости, основанный на сведении интегрируемого отображения к косому произведению отображений интервала.

В первой главе работы введены многозначные функции, связанные с косым произведением отображений интервала и составляющие основу техники исследования, в частности, это – Ω-функция, вспомогательные и подходящие функции для Ω-функции. С использованием указанных функций и аналогичных им C-функции и вспомогательных функций для C-функции доказаны теоремы о структуре неблуждающего множества и центра непрерывных косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек фактороотображения.

Вторая глава диссертации посвящена рассмотрению свойств косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек. Здесь с использованием цепно-рекуррентных точек доказан критерий C^0- Ω-взрыва в C^1-гладких косых произведениях отображений интервала, установлена невозможность C^1- Ω-взрыва в таких отображениях, указаны особенности бифуркаций удвоения периода периодических точек (в C^3-гладких отображениях); с применением специальных расходящихся рядов исследовано влияние дифференциальных свойств косого произведения (с замкнутым множеством периодических точек) на структуру его ω-предельных множеств.

В *третьей главе* доказаны, во-первых, теорема о разложении пространства C^1-гладких косых произведений отображений интервала с Ω-устойчивым (в пространстве C^1-гладких отображений отрезка с инвариантной границей) фактором типа $\succ 2^\infty$; и, во-вторых, теоремы о неблуждающем множестве отображений каждого из подпространств, выделенных теоремой о разложении.
При доказательстве теоремы о разложении, в частности, установлено, что существуют косые произведения с глубиной центра, представляющей собой произвольный конечный или счетный ординал. Этот результат дает решение "ограниченной"проблемы Биркгофа о глубине центра, сформулированной Биркгофом для автономных систем дифференциальных уравнений.

В *четвертой главе* получена оценка глубины центра косых произведений отображений интервала, принадлежащих подпространствам, выделенным в теореме о разложении. Доказано, что глубина центра отображения, принадлежащего любому из этих подпространств, не превосходит 2. Отметим и доказанную в *четвертой главе* теорему, являющуюся аналогом теоремы о константе Биркгофа для меньшего по включению, чем неблуждающее множество, притягивающего множества.

В *пятой главе* выделены некоторые непустые подмножества отображений, описание которых основано на использовании, во-первых, понятия устойчивости в целом в C^1-норме семейства отображений в слоях и, во-вторых, понятия плотной устойчивости в целом в C^1-норме семейства отображений в слоях C^1-гладкого косого произведения отображений интервала. Основными результатами *пятой главы* являются критерий различения C^1-гладких Ω-устойчивых косых произведений, теорема о неплотности такого рода отображений; критерий аппроксимируемости в C^1-норме косых произведений отображений интервала Ω-устойчивыми косыми произведениями; теорема о мощности множества классов Ω-сопря-женности отображений и существовании плотного в себе множества отображений с любой допустимой глубиной центра (то есть с глубиной центра, представляющей собой произвольный конечный или счетный ординал).

Все результаты диссертации являются новыми. Они полностью опубликованы в 28 работах (17 из которых – в изданиях, рекомендованных ВАК), неоднократно обсуждались на крупных международных конференциях и научных семинарах.

Общие замечания по диссертационной работе. Глубина центра – задача, которая после работы Л.П. Шильникова 1969 года не рассматривалась. Может сложиться впечатление, что эта задача устарела. Однако, это не так. Глубокие результаты Л.С. Ефремовой по решению "ограниченной"задачи Биркгофа могут использоваться, как эффективный критерий сложности динамики системы.

Открывается широкое поле задач, в которых могут быть использованы результаты и техника, развитая Л.С. Ефремовой. Во-первых, следует рассмотреть случай транзитивности отображения в базе. Во-вторых, возможно перенесение результатов на случай отображений, близких к косым произведениям, скажем, для малых возмущений факторотображения, зависящих от обеих координат. Такой пример есть. Это – модельное отображение аттрактора Лоренца (C. Robinson, 1978 г.), для которого мной построено косое произведение, инвариантное множество которого, моделирующее аттрактор Лоренца, топологически сопряжено с неблуждающим множеством отображения с возмущенным фактором.

При решении таких задач можно говорить о появлении нового направления в классе дискретных динамических систем с перспективой использования результатов в прикладных задачах типа "master-slave oscillators".

Заключение. Диссертация Л.С. Ефремовой представляет собой законченное фундаментальное исследование, содержащее глубокие результаты по основным аспектам динамики косых произведений отображений интервала. Основу эффективной техники исследования, разработанной и примененной в диссертации, составляют специальные многозначные функции, связанные с неблуждающим множеством и центром изучаемых динамических систем. Полученные в диссертации результаты могут применяться к изучению интегрируемых отображений в плоскости и, в частности, к изучению специальных полиномиальных отображений (отображений следа), возникающих в физике одномерных квазикристаллов. Идеи, методы и результаты данной работы допускают применение к исследованию дифференциальных уравнений в частных производных.

Все представленные в диссертации результаты являются новыми, получены они лично автором. Автореферат правильно и полно отражает содержание работы.

Диссертация Л. С. Ефремовой «Динамика косых произведений отображений интервала» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям, в частности, п. 9 «Положения о присуждении ученых степеней». Считаю, что ее автор, Ефремова Людмила Сергеевна, безусловно, заслуживает присуждения ей ученой степени доктора наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент:
заведующий кафедрой математики
ФГБОУ ВО "Волжский государственный
университет водного транспорта"
доктор физ.-мат. наук профессор Белых В.Н.

5.03.2018

Подпись профессора В.Н. Белых заверяю.
Ученый секретарь ВГУВТ Домнина О.Л.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение «Волжский государственный университет водного транспорта».
Адрес: 603950, г. Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5
Телефон: +7(831) 419-47-56
E-mail: belykh@unn.ru