ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертационную работу Ефремовой Людмилы Сергеевны «Динамика косых произведений отображений интервала», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Актуальность темы. Известно, что одномерная динамика обладает большим рядом свойств (например, здесь для отображений отрезка или отображений степени 0 или -1 на окружности справедлива теорема Шарковского) существенно отличающих ее от многомерной и даже нульмерной динамик. Это есть следствие единственности пути, соединяющего две точки на отрезке, или двупутности в случае окружности. Уже в случае динамики на прямоугольнике, да и на любой поверхности, ни на какие подобные эффекты расчитывать нельзя (что демонстрируется весьма легкими примерами).

Диссертационная работа Ефремовой Л.С. посвящена динамическим системам с дискретным временем (как обратимым – каскадам, так и необратимым, иногда называемым полукаскадами) на прямоугольнике, которые не сводятся к паре одномерных отображений, т.е. не сводятся к по-координатным произведениям отображений. В работе рассматривается промежуточный между произведениями и общими системами класс динамических систем – косые произведения. Для этого класса систем доказывается ряд содержательных теорем, которые, понятным образом, не могут быть верны для общих двумерных динамических систем. *Косым произведением* называется отображение прямоугольника в себя, которое автономно по одной (первой) переменной. Такие отображения в литературе иногда называются *треугольными*. Видимо, надеяться на возможность построения аналогичной глубокой теории более широкого класса динамических систем на прямоугольнике нельзя. В этом смысле можно сказать, что в диссертации рассматривается самый широкий класс отображений прямоугольника, для которых справедливы аналоги полученных в работе теорем.

Степень обоснованности научных положений, выводов. Научная новизна.

В первой главе рассматриваются отображения $F = (f(x), g(x, y))$, в которых автономная функция f (называемая в работе факторотображением косого произведения) обладает следующим свойством: множество ее периодических точек $\mathrm{Per}(f)$ замкнуто. Именно, теорема 1.2.1

дает структурное описание неблуждающего множества $\Omega(F)$, а теорема 1.3.1 дает структурное описание центра $C(F)$ косого произведения с замкнутым множеством $\mathrm{Per}(f)$. Подчеркнем, что все рассматриваемые отображения предполагаются непрерывными, поэтому соответствующее требование ни здесь, ни далее особо не формулируется. Особенно красивым и простым оказалось описание центра. Если $\mathrm{Per}(f) = \overline{\mathrm{Per}(f)}$, то

$$C(F) = \overline{\mathrm{Per}(F)} = \Omega(F|_{\Omega(F)}) = \overline{\cup_{x \in \mathrm{Per}(f)} \{x\} \times \Omega(\tilde{g}_x|_{\Omega(\tilde{g}_x)})}.$$

Доказательства опираются на аппроксимации конечными итерациями и предельный переход (в метрике Хаусдорфа) в пространстве замкнутых подмножеств второго сомножителя.

В качестве следствия теорем 1.2.1 и 1.3.1 получена равносильность условий:

1) $\mathrm{Per}(F) = \overline{\mathrm{Per}(F)}$;

2) $\mathrm{Per}(F) = \Omega(F)$;

3) $\mathrm{Per}(F) = C(F)$.

Такие отображения называются далее в работе *простейшими*.

Во второй главе дан критерий возникновения $C^0-\Omega$-взрыва и доказана невозможность $C^1-\Omega$-взрыва в C^1-гладких простейших косых произведениях. Исследовано влияние дифференциальных свойств простейшего косого произведения на структуру его ω-предельных множеств (§ 2.2 – § 2.4). В качестве продолжения списка равносильных условий 1)–3) приведем теорему 2.4.2: Для C^1-гладкого косого произведения, удовлетворяющего некоторому дополнительному условию, следующие утверждения эквивалентны:

1) $\mathrm{Per}(F) = \overline{\mathrm{Per}(F)}$;

4) Для всякой точки $x \in I = I_1 \times I_2$ множество $\omega(x)$ является периодической орбитой.

Третья и все последующие главы посвящены изучению косых произведений сложного динамического поведения (с факторотображением типа $\succ 2^\infty$, то есть отображением, имеющим периодическую точку, период которой не является степенью 2). Здесь рассматриваются косые произведения из множества $T^1_*(I) \subset T^1(I)$, состоящего из всех тех косых произведений, фактор каждого из которых Ω-устойчив в пространстве C^1-гладких отображений отрезка I_1 в себя с инвариантной границей.

Теорема 3.1.1 (основная теорема третьей главы) описывает разбиение подмножества $T^1_*(I)$ отображений с фактором типа $\succ 2^\infty$ на четыре части $T^1_{*,1}(I)$, $T^1_{*,2}(I)$, $T^1_{*,3}(I)$, $T^1_{*,4}(I)$, что дает первый шаг описания неблуждающих множеств. Дальнейшее описание имеет свою специфику в каждом из подпространств $T^1_{*,j}(I)$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Четвертая глава посвящена исследованию глубины центра косого произведения. Ранее в доказательстве теоремы 3.1.1 было показано, что всякий конечный или счетный ординал является глубиной центра некоторого косого произведения из $T^1_{*,4}(I)$. Здесь показывается, что глубина $\gamma(F)$ центра косых произведений из $T^1_{*,1}(I)$ и $T^1_{*,2}(I)$ не превосходит 2; оценка $\gamma(F) \leq 2$ верна и для косых произведений из $T^1_{*,3}(I)$, удовлетворяющих некоторому дополнительному условию. Конечно, метод доказательства отличается от случая простейших косых произведений. Рассуждения опираются на интересный аналог теоремы Биркгофа для притягивающего множества $\cup_{(x,y)\in I}\omega_F((x,y))$.

Теорема 4.1.1. Пусть $F \in T^1_{*,1}(I)$. Тогда $\cup_{(x,y)\in I}\omega_F((x,y))$ – замкнутое множество, и для любой его окрестности U существует такое число $m = m(U)$, что время пребывания траектории любой точки из I вне U не превосходит m.

Получен аналог теоремы 1.3.1:

Теорема 4.1.2. Пусть $F \in T^1_{*,1}(I)$. Тогда

$$C(F) = \overline{\mathrm{Per}(F)} = \Omega(F|_{\Omega(F)}) = \overline{\cup_{x\in \mathrm{Per}(f)}\{x\} \times \Omega(\tilde{g}_x|_{\Omega(\tilde{g}_x)})}.$$

В пятой главе в пространствах $T^1_{*,j}(I)$, $j = 1, 2, 3, 4$ выделены некоторые непустые подмножества отображений, для которых исследованы аппроксимационные свойства. Явно эти подмножества косых произведений определены с помощью различных свойств типа устойчивости в целом в C^1-норме семейства отображений в слоях.

Отсюда приведем только один результат, который оттеняет ранее цитированную теорему о глубине центра отображений из $T^1_{*,4}(I)$.

Теорема 5.3.3. Пространство $\tilde{T}^1_{*,4}(I)$ (т.е. дополнительно наложено условие $F(\partial(I)) \subset \partial(I)$) содержит плотное в себе (в C^1-норме) подмножество косых произведений с произвольной счетной глубиной центра такое, что его мощность $\geq \aleph_1$, причем любые два различных отображения из этого множества принадлежат к разным классам Ω-сопряженности, но имеют один и тот же центр.

Результаты диссертации полностью опубликованы в 28 работах (17 из них опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК), они неоднократно обсуждались на крупных международных конференциях и ведущих научных семинарах, получили одобрение специалистов.

Общие замечания по диссертационной работе. Диссертационная работа написана ясным языком. Все утверждения и рассуждения четко формулируются и не вызывают различных толкований. Работа представляет собой единое целое и, можно сказать, что полное целое. В том смысле, что разбираются все проблемы, естественные в рассматриваемой задаче.

Заключение. Диссертация Л.С. Ефремовой является законченным исследованием, содержащим фундаментальные результаты по динамике косых произведений отображений интервала. В диссертации разработана техника исследования, в основе которой лежат специальные многозначные функции, связанные с неблуждающим множеством и центром изучаемых динамических систем. Полученные в диссертации результаты допускают применение к изучению интегрируемых квадратичных отображений в плоскости, возникающих в физике одномерных квазикристаллов. Идеи, методы и результаты данной работы могут применяться к исследованию дифференциальных уравнений в частных производных.

Все представленные в диссертации результаты являются новыми, получены они лично автором. Автореферат правильно и полно отражает содержание работы.

Диссертация Л. С. Ефремовой «Динамика косых произведений отображений интервала» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям, в частности, п. 9 «Положения о присуждении ученых степеней». Считаю, что ее автор, Ефремова Людмила Сергеевна, заслуживает присуждения ей ученой степени доктора наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент:
профессор кафедры общей топологии
и геометрии механико-математического
факультета МГУ им. М.В. Ломоносова
доктор физ.-мат. наук 02. 03. 2018 Богатый С.А.

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова».
Адрес: 119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1
механико-математический факультет МГУ.
Телефон: +7(495) 939-12-44
E-mail: mmmf@mech.math.msu.su

Подпись С. А. Богатого заверяю. Декан мех-мат. факультета В. Н. Чубаринов