ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертационной работе **Ефремовой Людмилы Сергеевны**
«Динамика косых произведений отображений интервала»,
представленной на соискание учёной степени доктора
физико-математических наук по специальности 01.01.02 —
дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное
управление.

Диссертационная работа Л.С. Ефремовой представляет собой итог многолетних исследований автора в области теории динамических систем с дискретным временем, направленных на изучение динамики, порождаемой отображениями плоского прямоугольника вида $F : (x, y) \mapsto (f(x), g_f(y))$. Это класс так называемых косых произведений. Интерес к изучению таких отображений убедительно обоснован автором во введении к диссертации: во-первых обзором обширной литературы, восходящей к классикам теории динамических систем, а во вторых — тем обстоятельством, что при некотором естественном понимании интегрируемости динамической системы с дискретным временем и двумерным фазовым пространством, рассматриваемый класс по существу совпадает с классом интегрируемых систем (теорема 0.0.1).

Сказанное означает несомненную актуальность темы диссертации.

В центре круга вопросов, которым посвящена диссертация, находится классический объект, характеризующий динамическую систему — множество её неблуждающих точек. При различных предположениях об исходном отображении автором проведено глубокое исследование, приведшее к интересным и нетривиальным выводам относительно как самой его структуры, так и относительно структуры множества центральных движений (центра в смысле Биркгофа) динамической системы. Это позволило получить ряд результатов касающихся вопросов устойчивости динамической системы при её возмущениях различных классов гладкости. Речь идёт об Ω-устойчивости, возможных (и невозможных) бифуркациях типа Ω-взрыва. Кроме того, затронут вопрос о классификации систем рассматриваемого класса с точностью до Ω-сопряжённости. В частности — о числе классов Ω-сопряжённости.

Перейдём к анализу содержания диссертации и её основных результатов. Диссертация состоит из Введения и пяти глав. Вместе с тем её логическая структура сложна и нелинейна по причине трудности решения поставленных задач. Расположение материала в тексте («по вертикали») естественно продиктовано последовательностью, в которой он разворачивается в соответствии с правилами логического вывода из предположений, которые приходится делать. В то же время, анализ этого материала представляется естественным провести «по горизонтали», то есть соотнося его с теми вопросами, к которым относятся полученные результаты.

Основных предположений (разделяющих диссертацию по вертикали) два, они накладываются на отображение f:

Предположение A[1]. Множество периодических точек $\mathrm{Per}(f)$ замкнуто. Такие косые произведения рассматриваются в главах 1 и 2.

Предположение B. Отображение f Ω-устойчиво и имеет периодическую точку периода, отличного от степени двойки (главы 3-5), что в силу теоремы Шарковского влечёт «сложность» динамики.

Отдельные результаты устанавливаются при некоторых дополнительных предположениях. Например, предположениях об устойчивости в целом и плотной устойчивости в целом в главе 5 (они относятся к семействам отображений g_f).

Доказательства большинства результатов, а в некоторых случаях и сами их формулировки, сложны. Они основаны на разработанной (в первом параграфе главы 1) технике специальным образом определяемых многозначных функций, определённых на подмножествах интервала, и таких, что с помощью их графиков можно представить неблуждающие множества (центры) косых произведений, а также некоторые их подмножества, которые приходится рассматривать.

Рассмотрим основные результаты в соответствии с их «классификацией по горизонтали».

Множество неблуждающих точек. Его структура описывается в главе 1 (при предположении A) — теоремы 1.2.1, 1.2.2 и в главе 3 (предположение B) — теоремы 3.2.1, 3.2.2, 3.3.1. В том и другом случае описание основано на представлении неблуждающего множества (случай A) или «наиболее существенных» его частей (случай B) в виде топологических пределов последовательностей графиков многозначных функций. В случае B эти описания существенно сложнее. Предварительно множество рассматриваемых косых произведений разбивается на четыре непустых дизъюнктных подмножества, обозначаемые $T^1_{*,i}$) и определяемые свойствами вспомогательных Ω-функций,

[1]Обозначения рецензента.

а структура неблуждающего множества описывается отдельно для случаев, когда косое произведение принадлежит каждому из этих подмножеств. В случае А из теоремы о структуре неблуждающего множества выводится то, что оно совпадает с множеством периодических точек (первое утверждение теоремы 1.3.2, второе её утверждение гласит, что оно совпадает с центром). Это согласно автору означает «простоту» динамики: возвращаемость траекторий может означать только периодичность.

Свойства ω-предельных множеств. К результатам о неблуждающем множестве примыкают результаты о возможных топологических типах ω-предельных множеств траекторий. Они получены в предположении А (глава 2). Охарактеризованы случаи, когда ω-предельные множества устроены просто — периодические орбиты (теорема 2.4.2) и когда среди них имеются одномерные множества (теорема 2.4.1), т.е. динамика в таких «простейших» косых произведений не так уж и проста! Конкретный пример такого косого произведения приведён в п.2.3 главы 2. Указанное его свойство, как и сами упомянутые результаты устанавливаются с помощью разработанной автором техники расходящихся рядов (п.2.2 главы 2).

Множество центральных движений изучается в главе 1 (случай А) — теорема 1.3.1 и второе утверждение теоремы 1.3.2 и главе 4 (случай В) — теоремы 4.1.2, 4.1.3, 4.2.2. В случае А центр описывается как топологический предел и отсюда выводится, что он совпадает с множеством периодических точек. В случае В ситуация опять-таки сложнее и опять приходится отдельно рассматривать случаи косых произведений из разных подмножеств, упомянутых выше. В одном случае даётся описание центра в терминах топологического предела. В тёх из четырёх случаев дана оценка его глубины.

Возможность Ω-взрыва. По этому вопросу получены результаты в предположении А (глава 2). Здесь установлена невозможность Ω-взрыва при малых в C^1-метрике возмущениях для гладких косых произведений (теорема 2.1.3). В то же время оказывается, что Ω-взрыв возможен при малых C^0-малых возмущениях. Теорема 2.1.1 даёт необходимые и достаточные условия возможности этого явления.

Классы Ω-сопряжённости. Доказано, что множество классов Ω-сопряжённости косых произведений с условием В по меньшей мере континуально (теорема 3.1.2). Точнее автор чтобы не вдаваться в тонкости, связанными с континуум-гипотезой, утверждает, что его мощность не менее $\aleph_1$.

Ω-устойчивость. По этому вопросу получены результаты для некоторого естественным образом выделенного среди всех косых произведений, удовлетворяющих предположению В. Для косых произведений этого класса установлены необходимые и достаточные условия Ω-устойчивости по отношению к C^1-малым возмущениям (теорема 5.2.1), а также неплотность множества Ω-устойчивых отображений в пространстве всех косых произведений (теорема 5.2.2). Наконец установлены условия, при которых косое произведение можно аппроксимировать Ω-устойчивым (теорема 5.3.3).

Из проведённого анализа содержания работы вытекает, что в ней охвачен широкий круг вопросов, по каждому из которых получены новые и интересные результаты. При в ряде случаев для продвижения по направлению решения поставленных задач автором разработана оригинальная техника. Всё это позволяет говорить о том, что в диссертации заложены основы новой теории систем, порождаемых отображениями типа косых произведений. Эта теория далека от завершения, а потому перспективна для дальнейшей разработки. Л.С. Ефремова с учениками продолжает активные исследования в сформировавшихся направлениях развития этой теории.

В целом диссертационная работа представляется цельным научным исследованием, содержащим существенный вклад в теорию динамических систем. Все высказанные в диссертации утверждения полностью доказаны, текст написан достаточно аккуратно.

Диссертация, конечно не свободна от недостатков. Каких-либо ошибок, либо пробелов, влияющих на правильность результатов, я не обнаружил, однако имеются неточности и оговорки. Например, говоря о возмущениях, автор часто употребляет термин «норма», хотя пространство косых произведений линейным не является и поэтому уместно говорить о метрике или топологии в этом пространстве. Пожалуй можно говорить недостатках в методике изложения, поскольку материал трудный и во многих случаях хотелось бы чтобы изложение в большей степени облегчало его изучение. Впрочем каких-либо конкретных рекомендаций по этому поводу дать не могу кроме отдельных замечаний. Например в теореме 2.4.2 фигурирует некое условие (iii), формулировка которого даётся почти на 20 страниц раньше и к тому же ещё почти на 20 страниц отстоит от находящимися в одном с ним ряду условиями (i) и (ii). Думаю, что можно было облегчить задачу читателя, сославшись на соответствующие страницы. Кстати, в автореферате по причине компактности изложения этого недостатка нет. Подобные замечания, конечно, не влияют на положительную оценку работы.

Результаты диссертации, вынесенные на защиту, являются новыми. Все они получены лично соискателем, строго обоснованы, полностью и своевременно опубликованы более чем в двадцати статьях, большинство из которых вышли в изданиях, рекомендованных ВАК, доложены на многочисленных конференциях и семинарах как в России, так и за рубежом. Автореферат правильно отражает содержание диссертации. Работа носит теоретический характер, полученные результаты и разработанные методы могут быть использованы в научно-исследовательских институтах и университетах (МИАН, МГУ, ННГУ, ИППИ и др.), в которых ведутся исследования по теории динамических систем.

На основании изложенного считаю, что работа Л.С. Ефремовой «Динамика косых произведений отображений интервала» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым «Положением о присуждении учёных степеней» к докторским диссертациям, а её автор несомненно заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Доктор физико-математических наук,
профессор А.Ю. Жиров

5 марта 2018 г.

ПОДПИСЬ ПРОФ. А.Ю. ЖИРОВА ЗАВЕРЯЮ

И.о. начальника отдела УДС МАИ

ФГБОУ ВПО «Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»,
125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д.4
тел. (8499)1419405, e-mail: alexei_zhirov@mail.ru