«УТВЕРЖДАЮ»

Директор ФГУ «Федеральный исследовательский
центр Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша Российской академии наук»,
член-корреспондент РАН, доктор физ.-мат. наук,
профессор Аптекарев А. И.

"2" марта 2018 года

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

на диссертационную работу Ефремовой Людмилы Сергеевны
«Динамика косых произведений отображений интервала»,
представленную на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук по специальности 01.01.02 –
дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное
управление

Диссертация Л.С. Ефремовой посвящена вопросам топологической и дифференциальной динамики косых произведений отображений интервала. В ней исследованы наиболее важные (для любой динамической системы с компактным фазовым пространством) предельные множества: неблуждающее множество и множество центральных движений (центр) косых произведений отображений интервала.

В работе выделены классы отображений, как с наиболее простой динамикой фактора (случай непрерывных косых произведений с замкнутым множеством периодических точек в базе), так и с наиболее сложной его динамикой (случай C^1гладких косых произведений с Ω-устойчивым фактороотображением типа $\succ 2^\infty$).

Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы.

Во введении приведен очерк исторического развития различных направлений изучения косых произведений, дан библиографический обзор, демонстрирующий актуальность и значимость исследования; сформулированы основные результаты. Здесь же доказан критерий интегрируемости, показывающий, что при весьма общих условиях множество косых произведений отображений интервала совпадает с множеством интегрируемых отображений в плоских областях типа криволинейных трапеций.

В *первой главе* введены многозначные функции, связанные с косым произведением отображений интервала и составляющие основу техники изучения неблуждающего множества и центра. Основными являются Ω- и C-функции, графики которых в фазовом пространстве рассматриваемого отображения совпадают с его неблуждающим множеством и центром соответственно.

Свойство полунепрерывности сверху каждой из указанных функций содержит информацию о топологической структуре неблуждающего множества и центра изучаемых отображений. Однако только $\Omega-$ и $C-$функций недостаточно для описания неблуждающего множества и центра косого произведения отображений интервала. Поэтому автор вводит вспомогательные многозначные функции, как для Ω-функции, так и для C-функции, и подходящие многозначные функции для Ω-функции.

Основное содержание *первой главы* диссертации составляют теоремы о структуре неблуждающего множества и центра непрерывных косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек факторотображения.

В математической литературе имеются результаты о спектральном разложении на транзитивные компоненты неблуждающего множества и свойстве топологической транзитивности (транзитивность представляет собой некоторый специальный случай "сильной"неблуждаемости, связанный с существованием всюду плотной траектории) кусочно монотонных отображений отрезка (А.М Блох, М.Ю. Любич); о топологической транзитивности цилиндрических каскадов (Л.Г. Шнирельман, А.С. Безикович, Дж.А. Хедлунд, У. Готтшалк, Е.А. Сидоров). Имеются также результаты о совпадении множества неблуждающих точек с множеством периодических точек косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек (Дж. Купка – 2006 г., С. Артега (для случая гиперболических периодических точек) – 1995 г.). Результаты двух последних авторов следуют из результатов Л.С. Ефремовой 1990 г.

В настоящей диссертации ставится общая (не расматривавшаяся ранее) задача – выяснить, какой вклад в формирования неблуждающего множества рассматриваемых косых произведений отображений интервала вносят его отображения в слоях и факторотображение. Все полученные здесь результаты являются новыми.

В частности, в диссертации доказано, что неблуждающее множество произвольного непрерывного косого произведения отображений интервала проектируется на неблуждающее множество его факторотображения. В теореме о неблуждающем множестве непрерывного косого произведения отображений интервала с замкнутым множеством $Per(f)$ периодических точек факторотображения указан алгоритм формирования, во-первых, неблуждающего множества сужения $F_{|\Omega(f)\times I_2}$ отображения F на множество $\Omega(f) \times I_2$ (в рассматриваемом случае неблуждающее множество фактора $\Omega(f)$ совпадает с множеством $Per(f)$) и, во-вторых, собственно неблуждающего множества $\Omega(F)$. Неблуждающее множество $\Omega(F_{|\Omega(f)\times I_2})$ совпадает с множеством всех предельных точек некоторой подпоследовательности последовательности образов графиков вспомогательных функций, выделенной множеством периодов периодических точек факторотображения. На формирование множества $\Omega(F)$ оказывают влияние и слои над непериодическими точками фактора. Поэтому при описании множества $\Omega(F)$ используются специальные подпоследовательности последовательности образов расширений графиков вспомогательных функций на окрестности множества $\Omega(f)$.

Здесь же с использованием вспомогательных функций для C-функции исследован механизм формирования центра $C(F)$ непрерывного косого произведения F с замкнутым множеством периодических точек факторотображения. Впервые показано, что центр косого произведения отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек в базе совпадает с замыканием множества периодических точек рассматриваемого отображения, а его глубина не превосходит 2.

Укажем и полученный в *первой главе* (как следствие основных результатов) критерий различения непрерывных косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек. Этот критерий показывает, что для такого рода отображений реализуется только простейший тип возвращаемости траекторий: периодичность. По этой причине косые произведения отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек названы в диссертации *простейшими.*

Во *второй главе* получен критерий возникновения C^0- Ω-взрыва, в основе которого лежат специальные свойства связных компонент множества периодических точек отображения, доказана невозможность C^1-Ω-взрыва в C^1-гладких простейших косых произведениях отображений интервала, указаны особенности бифуркаций удвоения периода периодических точек (в C^3-гладких отображениях); исследовано влияние дифференциальных свойств простейшего косого произведения на структуру его ω-предельных множеств. При изучении структуры ω-предельных множеств в диссертации разработана техника, основанная на использования специальных расходящихся рядов, построенных по исследуемым траекториям.

В *третьей главе* (как и в *двух последующих главах*) рассмотрены C^1-гладкие косые произведения отображений интервала с Ω-устойчивым в пространстве C^1-гладких отображений отрезка с инвариантной границей фактором (пространство таких отображений обозначено через $T^1_*(I)$) в предположении, что фактор имеет тип $\succ 2^\infty$. Основное содержание *третьей главы* составляют, во-первых, теорема о разложении указанного пространства косых произведений отображений интервала в конечное объединение попарно непересекающихся подпространств (обозначенных в работе через $T^1_{*,j}(I)$, $1 \le j \le 4$) и, во-вторых, теоремы о структуре неблуждающего множества отображений каждого из подпространств, приведенных в теореме о разложении.

Теорема о разложении может рассматриваться, как первый этап доказательства теорем о неблуждающем множестве косых произведений из пространства $T^1_*(I)$, фактор каждого из которых имеет тип $\succ 2^\infty$.

Утверждения теорем о неблуждающем множестве отображений из подпространств $T^1_{*,j}(I)$ $(1 \le j \le 4)$ состоят из двух частей, в первой из которых дается формула для неблуждающего множества сужения косого произведения F на множество $\Omega_p(f) \times I_2$, во второй доказывается формула для среза неблуждающего множества отображения F слоями над точками совершенной части $\Omega_p(f)$ неблуждающего множества фактора. При описании неблуждающего множества косого произведения любого из рассматриваемых классов важную роль играет введенное в диссертации понятие слабо неблуждающих точек относительно семейства отображений в слоях (это понятие не совпадает с известным в теории динамических систем понятием слабо неблуждающих точек). Так, например, если $F \in T^1_{*,2}(I)$, то во множестве $\Omega(F_{|\Omega_p(f)\times I_2})$ всюду плотны слабо неблуждающие точки вспомогательных косых произведений F_n, останавливающих движение в базе, относительно семейства отображений в слоях над точками из $\Omega_p(f)$.

В *четвертой главе* доказано, что глубина центра отображений из каждого подпространства $T^1_{*,j}(I)$ при $j = 1$, 2, 3, не превосходит 2, причем для $j = 3$ эта оценка верна в предположении непрерывности Ω-функции сужения F на $\Omega_p(f) \times I_2$. В то же время при доказательстве теоремы о разложении установлено, что в $T^1_{*,4}(I)$ существуют косые произведения с глубиной центра, представляющей собой произвольный не более, чем счетный ординал (решение аналога проблемы Биркгофа, сформулированной для автономных систем дифференциальных уравнений).

В *пятой главе* в подпространствах $T^1_{*,1}(I) - T^1_{*,4}(I)$ выделены множества отображений с устойчивым в целом в C^1-норме семейством отображений в слоях и с плотно устойчивым в целом в C^1-норме семейством отображений в слоях; изучены аппроксимационные свойства таких отображений. Так, понятие устойчивости в целом семейства отображений в слоях позволило выделить C^1-гладкие Ω-устойчивые косые произведения, доказать их принадлежность пространству $T^1_{*,1}(I)$ и неплотность в $T^1_{*,1}(I)$. Отметим также теорему о несчетности множества классов Ω-сопряженности отображений из подпространства $T^1_{*,4}(I)$ и о возможности C^1-аппроксимации отображений из $T^1_{*,4}(I)$ косыми произведениями с любой допустимой глубиной центра, превосходящей любой счетный ординал.

В заключении перечислены положения, выносимые на защиту. Основные результаты работы своевременно опубликованы. Их научная новизна и практическая значимость не вызывают сомнений. Достоверность подтверждается использованием в работе проверенных теоретических методов. Автореферат адекватно отражает результаты диссертационной работы.

Результаты диссертационного исследования могут быть использованы в учебном процессе при чтении специальных курсов для студентов физико-математических специальностей университетов, таких как МГУ им. М.В. Ломоносова, НИУ ВШЭ, НИУ Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, а также в работах по направлениям, развиваемым в академических институтах, таких как МИРАН им. В.А. Стеклова, ИПМ РАН им. М.В. Келдыша, ИППИ РАН им. А.А. Харкевича.

По работе имеются следующие замечания.

1. В диссертации приняты унифицированные ссылки на работы, в которых опубликованы те или иные теоремы и утверждения, в ней содержащиеся. Однако, поскольку в таких ссылках стоит только номер цитируемого источника, то непосредственно из текста сложно понять, какие из перечисляемых теорем были доказаны собственно в диссертации. Например, на стр. 61 приводится вспомогательное Предложение 1.1.1 о неблуждающем множестве итераций отображений отрезка со ссылкой на работы [128, 129], и это – не работы автора, что, впрочем, следует из текста диссертации, но не непосредственно из указанного фрагмента. На стр. 86 приводится теорема 1.3.1. со ссылкой на работу [61], и это – уже работа автора. Было бы удобнее, если бы при ссылках упоминалась также и фамилия автора доказательства.

2. Следует подчеркнуть, что в диссертации построена весьма общая математическая теория, различные аспекты которой исследованы в ней тщательно и полно. В этой связи о недостаточном раскрытии какой-либо ее части говорить не приходится, но встает вопрос о возможных связях развитой теории с другими разделами математики и о приложениях методов исследования, например, в математической физике. Представляется, что можно было бы указать в тексте на такие возможные приложения.

Несмотря на сделанные замечания, представленная Л.С. Ефремовой диссертация «Динамика косых произведений отображений интервала» является крупным вкладом в развитие теории динамических систем. Диссертационная работа полностью отвечает всем требованиям ВАК "Положения о присуждении ученых степеней", а ее автор, Ефремова Людмила Сергеевна, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Отзыв подготовлен заведующим отделом вычислительной физики и кинетических уравнений ФГУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук» доктором физико-математических наук Ю. Н. Орловым, он обсужден и утвержден на заседании семинара по математической физике ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, протокол № 1 от 13 февраля 2018 г.

Зав. отделом вычислительной физики
и кинетических уравнений
доктор физ.-мат. наук .... Орлов Юрий Николаевич

Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук»

Почтовый адрес: 125047, Москва, Миусская пл., д.4,
ИПМ им. М. В. Келдыша РАН
тел.: +7 499 978-13-14, факс: +7 499 972-07-37
e-mail: office@keldysh.ru
сайт:www.keldysh.ru