На правах рукописи

Мороз Борис Зеликович

# Аналитические задачи в алгебраической теории чисел и диофантовой геометрии

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва – 2018

Работа выполнена в *ФГАОУ ВПО «Московский физико-технический институт (государственный университет)»*.

Официальные оппоненты:

*доктор физико-математических наук,*
*профессор кафедры высшей алгебры*
*и защиты информации*
*Белорусского Государственного Университета,*
*профессор БЕРНИК Василий Иванович*;

*доктор физико-математических наук,*
*член-корреспондент РАН,*
*директор Хабаровского отделения*
*Института прикладной математики ДВО РАН,*
*профессор БЫКОВСКИЙ Виктор Алексеевич*;

*доктор физико-математических наук,*
*ведущий научный сотрудник*
*Математического института*
*им. В.А. Стеклова РАН,*
*профессор РАН КОРОЛЁВ Максим Александрович.*

Ведущая организация: *Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых (физико-математический факультет).*

Защита состоится *23 октября 2018 г.* в *16 часов* на заседании диссертационного совета *Д 002.077.03* при *Институте проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН*, расположенном по адресу: *Большой Каретный пер., д. 19, стр. 1, Москва, 127051.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *ИППИ РАН*, а также на сайте *ИППИ РАН* `http://iitp.ru/ru/dissertation/1371.htm`.

Автореферат разослан _____ *июля 2018 г.*

Ученый секретарь диссертационного совета,
*доктор физико-математических наук,* *Соболевский А. Н.*

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** К началу двадцатого века в теории чисел сложились два основных направления: алгебраическая теория чисел (см., например, монографию Гильберта о полях алгебраических чисел, 1897 г.) и аналитическая теория чисел (см., например, монографию Ландау о распределении простых чисел, 1909 г.). В последующие десятилетия в работах Ландау, Гекке, Артина и других авторов была пострена аналитическая теория числовых полей, так что, например, теорема плотности Чеботарёва получила чисто аналитическое доказательство (ср. §4 гл. I этой работы). Полученные А. Вейлем как следствие доказанного им аналога гипотезы Римана для глобальных полей простой характеристики оценки тригонометрических сумм нашли применение в различных задачах классической теории чисел (ср. гл. IV, §1 и §4). В работах Хооли, Хис-Брауна и других авторов применяются оценки кратных тригонометрических сумм, вытекающие из доказанных Гротендиком и Делинем гипотез Вейля.

Гипотеза Хассе-Вейля о мероморфности арифметических $L$-функций является одной из центральных проблем современной диофантовой геометрии; достаточно заметить, что теорема Ферма есть следствие этой гипотезы для определённых над $\mathbb{Q}$ эллиптических кривых, доказанной в 1990-ые годы (эта гипотеза для эллиптических кривых, определённых над мнимым квадратичным полем, обсуждается в §5 главы IV). Доказанные в гл. I теоремы о непродолжимости эйлеровских произведений показывают, что (в предположении гипотезы Хассе-Вейля) класс арифметических $L$-функций не замкнут относительно "естественной" операции скалярного произведения рядов Дирихле.

Изучение распределения целых и рациональных точек алгебраических многообразий, определённых над кольцом целых алгебраических чисел (например, над $\mathbb{Z}$), есть классическая проблема теории чисел. Как показывает теорема Матиясевича (см., например, гл. IV, §7), эта проблема не допускает "окончательного" решения на языке современной математики. В §3 главы IV изучается распределение рациональных точек на одной кубической поверхности, а в §4 этой главы - распределение целых точек на квадриках; в §4 главы II рассматриваются целые точки аффинных торических многообразий.

Классическая гипотеза Буняковского (1854 г.) утверждает, что неприводимый полином $f(x)$ с целыми рациональными коэффициентами принимает бесконечно много простых значений, коль скоро старший коэффициент этого полинома положителен и

$$\text{н.о.д. } \{f(a) | a \in \mathbb{N}\} = 1;$$

эта гипотеза до сих пор не доказана ни для одного нелинейного полинома. Теоремы, доказанные в третьей главе диссертации, являются в настоящий момент одним из самых сильных результатов в направлении гипотезы Буняковского.

**Цель работы.** Привести несколько примеров эффективности применения аналитических методов в диофантовой геометрии. Исследовать поведение скалярных произведений $L$-рядов Артина - Вейля. Построить естественные целые модели алгебраических торов и аффинных торических многообразий и изучить распределение целых точек этих моделей. Доказать новые теоремы о представимости простых чисел кубическими полиномами от двух переменных.

**Методы исследования.** В первой главе для доказательства основных теорем привлекается весь аппарат аналитической арифметики полей алгебраических чисел. Во второй главе аналитические методы комбинируются с довольно тонкими диофантово-геометрическими рассуждениями. В третьей главе метод решета применяется для изучения трёхмерной арифметики (в смысле Гекке) кубических полей. В первых четырёх параграфах четвёртой главы используется стандартная техника аналитической теории чисел. В пятом параграфе с помощью теории полей классов изучаются двумерные $l$-адические представления групп Галуа на модулях Тэйта эллиптических кривых. В шестом параграфе мы изучаем подмногообразия особых точек алгебраических многобразий, определённых над полем рациональных чисел, пользуясь методами и результатами коммутативной алгебры. Методы седьмого параграфа суть комбинаторно-алгебраические рассмотрения, используемые при решении десятой проблемы Гильберта.

**Научная новизна.** Перечислим основные новые результаты диссертации, выносимые на защиту.

1. Доказана гипотеза Батырева - Манина для одной кубической поверхности (в соавторстве с Хис-Брауном).

2. Получено новое доказательство теоремы Хис-Брауна о представимости достаточно больших натуральных чисел суммой трёх квадратично полных чисел.

3. Построен полином, кодирующий доказуемость в теории множеств (в соавторстве с Карлом).

4. Доказано обобщение теоремы плотности Чеботарёва.

5. Исследована проблема продолжимости скалярных произведений $L$-рядов Артина - Вейля.

6. Построены "естественные" целые модели алгебраических торов и аффинных торических многообразий (в соавторстве с Воскресенским и Кунявским).

7. Доказаны теоремы о распределении целых точек некоторых аффинных торических многообразий.

8. Доказаны теоремы о бесконечности множеств вида

$$\{f(a)|a \in \mathbb{Z}^2\} \cap P,$$

где $P$ есть множество простых натуральных чисел, для широкого класса кубических полиномов $f(x),\ x := (x_1, x_2)$, от двух переменных (в соавторстве с Хис-Брауном).

**Теоретическая и практическая ценность.** Работа носит теоретический характер. Её результаты и методы могут быть использованы в аналитической и алгебраической теории чисел, теории алгебраических групп, диофантовой геометрии и других областях.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах и/или конференциях в следующих городах: Москва, Санкт-Петербург (Ленинград), Владимир, Вильнюс, Паланга, Варшава, Познань, Будапешт, Братислава, Вена, Грац, Женева, Цюрих, Генуя, Барселона, Иерусалим, Тель-Авив, Беэр-Шева, Реховот, Натания, Эйлат, Париж, Бордо, Лилль, Лимож, Люмини, Мец, Страсбург, Гент, Нордвейкерхаут, Копенгаген, Бонн, Бохум, Гейдельберг, Гёттинген, Дармштадт, Лейпциг, Марбург, Мюнстер, Обервольфах, Лондон, Кардифф, Кембридж, Ноттингем, Оксфорд, Монреаль, Токио.

**Публикации.** Диссертация опубликована [44]; основная цель монографии [44] - привлечь внимание широкого круга интересующихся теорией чисел читателей к рассматриваемым в диссертации проблемам. Основные результаты диссертации опубликованы в работах, список которых приведён в конце автореферата. В цитируемых совместных работах вклад соавторов одинаков.

**Структура и объём работы.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы, содержащего 171 наименование. Общий объём диссертации составляет 273 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. В первой главе изучаются аналитические свойства скалярных произведений $L$ - рядов Артина - Вейля над полем алгебраических чисел $k$. Обозначим через $I_0(k)$ моноид ненулевых

целых идеалов поля $k$. Будем называть ряд Дирихле

$$(L_1 * \cdots * L_r)(s) := \sum_{\mathfrak{n}\in I_0(k)} N_{k/\mathbb{Q}}\mathfrak{n}^{-s}\prod_{i=1}^{r} a_i(\mathfrak{n})$$

скалярным произведением (формальных) рядов Дирихле

$$L_i(s) := \sum_{\mathfrak{n}\in I_0(k)} a_i(\mathfrak{n}) N_{k/\mathbb{Q}}\mathfrak{n}^{-s},\ 1 \le i \le r,$$

над полем $k$. Положим

$$\mathbb{C}_0 := \{x+iy|(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x>0\}\ \text{ и }\ \mathbb{C}^{(0)} := \{iy|y\in\mathbb{R}\}.$$

При $1 \le i \le r$ рассмотрим (непрерывные) конечномерные нормированные представления

$$\rho_i \colon W(k) \to \mathrm{GL}(d_i, \mathbb{C})$$

группы Вейля $W(k)$ поля $k$ и отвечающие этим представлениям $L$ - функции Вейля $L(\chi_i,\ s),\ \chi_i := \mathrm{tr}\ \rho_i$. Положим

$$L_i(s) := L(\chi_i, s),\ \vec{\chi} := (\chi_1, ..., \chi_r)\ \text{ и }\ L(\vec{\chi}, s) := (L_1 * \cdots * L_r)(s).$$

Предположим, не нарушая общности, что степени $d_i$ представлений $\rho_i$ удовлетворяют следующему условию:

$$r \ge 2\ \text{ и }\ d_1 \ge d_2 \ge ... \ge d_r \ge 2. \tag{1}$$

**Теорема 1.** *Если $d_1 = d_2 = r = 2$, то функция $s \mapsto L(\vec{\chi}, s)$ мероморфна на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$; в противном случае, эта функция мероморфна в полуплоскости $\mathbb{C}_0$, а прямая $\mathbb{C}^{(0)}$ является её естественной границей.*

При $1 \le i \le r$ рассмотрим конечные расширения полей $k_i|k$ степени $d_i := [k_i : k]$, положим $L_i(s) := L(\psi_i, s)$, где $L(\psi_i, s)$ есть $L$ - ряд Гекке поля $k_i$ с характером $\psi_i$; пусть

$$\vec{\psi} := (\psi_1, ..., \psi_r)\ \text{ и }\ L(\vec{\psi}, s) := (L_1 * \cdots * L_r)(s).$$

Предположим, не нарушая общности, что степени $d_i$ расширений $k_i|k$ удовлетворяют условию (1).

**Теорема 2.** *Если $d_1 = d_2 = r = 2$, то функция $s \mapsto L(\vec{\psi}, s)$ мероморфна на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$; в противном случае, эта функция мероморфна в полуплоскости $\mathbb{C}_0$, а прямая $\mathbb{C}^{(0)}$ является её естественной границей.*

Теорема 1 есть основной результат первой главы диссертации; важной технической леммой при доказательстве теоремы 1 является упомянутое выше обобщение теоремы плотности Чеботарёва (ср. [27]). Теорема 2 легко следует из теоремы 1.

Несколько слов об истории проблемы, рассматриваемой в этой главе. В 1950 г. Ю.В. Линник определил скалярное произведение $L$-рядов Гекке над полем рациональных чисел. Весной 1962 года Юрий Владимирович Линник предложил мне заняться изучением свойств скалярных произведений $L$ - рядов Гекке двух квадратичных полей, и я написал кандидатскую диссертацию на эту тему. В 1965 г. А.И. Виноградов продолжил скалярное произведение $L$-рядов Гекке в полуплоскость

$$\mathbb{C}_{1/2} := \{x + iy | (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 1/2\},$$

а в 1971 г. П.К.Й. Драксл усилил результат Виноградова, продолжив эту функцию в полуплоскость $\mathbb{C}_0$. Через несколько лет после этого стало ясно (см., например, [15]), что скалярное произведение $L$ - рядов Гекке двух квадратичных полей над любым полем алгебраических чисел выражается через обычные $L$ - ряды Гекке. С другой стороны, теорема 2 показывает, что в общем случае результат Драксла неулучшаем: за исключением случая двух квадратичных полей, прямая $\mathbb{C}^{(0)}$ есть естественная граница определяемой скалярным произведением $L$ - рядов Гекке (и мероморфной в $\mathbb{C}_0$) функции. Идея доказательства теорем 1 и 2, восходящая к классическим работам Ландау - Вальфиша и Эстермана (ср. [16]), принадлежит Н. Курокава (см. N. Kurokawa, Tokyo Inst. Techn. preprint (1977), Proc. of the Japan Academy, 54A (1978), 163 - 169). Приведённое в диссертации доказательство теорем 1 и 2 использует технику, развитую в моих работам [15], [17], [18], [24], [22], [27] и [28]. В работе Курокава [N. Kurokawa, Proc. LMS, 53 (1986), стр. 1-47 и 209-236] эти теоремы доказаны по-иному.

2. Во второй главе изучается распределение целых точек на аффинных торических многообразиях, определённых над кольцом целых рациональных чисел. Простейшие многообразия такого рода - это квадрики вида Spec $\mathbb{Z}[x]/(F(x))$, где $f(x_1, x_2)$ и $g(x_3, x_4)$ суть бинарные положительно определённые квадратичные формы с целыми рациональными коэффициентами и $F(x) := f(x_1, x_2) - g(x_3, x_4)$. Распределение целых точек на таких гиперповерхностях изучалось в моих первых работах [13], [14], [2], [3]. В работах [23], [25], [32] исследуется множество целых точек норменных многообразий; целые точки аффинных торических многообразий изучаются в работах [33] - [36] и в §4 этой главы. Определённое над полем алгебраических чисел торическое многообразие имеет, вообще говоря, много попарно неизоморфных моделей над кольцом целых этого поля. Целые модели алгебраических торов и аффинных торических

многообразий изучаются в совместных работах [6], [7], [9]. В §2 этой главы приводятся некоторые определения и результаты, связанные с теорией алгебраических торов и аффинных торических многообразий, определённых над произвольным полем нулевой характеристики. Рассмотрим алгебраический тор $T$, определённый над полем алгебраических чисел $k$, и обозначим через $\mathfrak{o}$ кольцо целых поля $k$. В §3 строятся естественная явно заданная $\mathfrak{o}$ - целая модель $\mathcal{T}$ алгебраического тора $T$ и соответствующие целые модели аффинных $T$ - торических многообразий. Построенная $\mathfrak{o}$ - схема $\mathcal{T}$ является приведённой строго плоской схемой; более того, если тор $T$ расщепляется над (конечным) алгебраическим расширением поля $k$ без высшего ветвления, то связная компонента единицы схемы $\mathcal{T}$ изоморфна связной компоненте единицы модели Нерона-Рейно тора $T$ [7, теорема 3]. В общем случае гладкую $\mathfrak{o}$ - целую модель тора $T$ можно получить из схемы $\mathcal{T}$ разрешением особенностей. Изложение в §2 и §3 следует нашей совместной с Б.Э. Кунявским работе [9].

3. В третьей главе обсуждаются теоремы о бесконечности числа простых чисел, представимых полиномами третьей степени от двух переменных, и некоторые следствия этих теорем. Упомянутые теоремы (и их следствия) доказаны в двух совместных с Д.Р. Хис-Брауном работах [39], [40].

Рассмотрим неприводимую примитивную бинарную кубическую форму $f(x),\ x := (x_1, x_2)$, с целыми рациональными коэффициентами. Положим

$$\varepsilon(f) := \text{ н.о.д. } \{f(a) | a \in \mathbb{N}^2\};$$

можно показать, что $\varepsilon(f) \in \{1, 2\}$. Пусть

$$X \in \mathbb{R},\ X \geq 3,\ \tau := (\log\log X)^{-1/6},\ \eta := (\log X)^{-c_0},$$

где $c_0$ есть фиксированное вещественное положительное число, зависящее лишь от $f$ (или от $F$ в теореме 4), и

$$I(X) := \{a | a \in \mathbb{Z}^2,\ X < a_1, a_2 \leq X(1+\eta)\}.$$

**Теорема 3.** *Пусть* $\varepsilon(f) = 1$ *и* $f(1,1) > 0$. *Тогда*

$$\pi_f(X) = \sigma(f)\ \frac{\eta^2 X^2}{3\log X}\ (1 + O((\log\log X)^{-1/6}))\ \ c\ \ \sigma(f) > 0$$

*при* $X \to \infty$, *где*

$$\pi_f(X) := card\ \{p | p \in P,\ (\exists\ x \in I(X))\ f(x) = p\}.$$

**Следствие 1.** *Пусть* $\varepsilon(f) = 2$ *и* $f(2,1) > 0$. *Тогда*

$$\pi_{f,1}(X) = \sigma(g)\ \frac{\eta^2 X^2}{3\log X}\ (1 + O((\log\log X)^{-1/6}))$$

*при* $X \to \infty$, *где*

$$\pi_{f,1}(X) := card\,\{p | p \in \mathcal{P},\ (\exists\, b \in \mathbb{Z}^2)\ p = \frac{f(b)}{2},\ (b_1/2, b_2) \in I(X)\}$$

*и*

$$g(y_1, y_2) := \frac{1}{2} f(2y_1, y_2).$$

Рассмотрим кубическое поле $k$, т.е. поле алгебраических чисел под условием $[k : \mathbb{Q}] = 3$, и обозначим через $\mathfrak{o}$ кольцо целых этого поля. Пусть

$$\{\omega_1,\ \omega_2\} \subseteq \mathfrak{o} \setminus \{0\},\ k = \mathbb{Q}(\omega_2\omega_1^{-1}),\ d \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{Z}^2\ \text{ и }\ 0 \le a_1, a_2 < d.$$

Предположим, что н.о.д. $(a_1,\ a_2,\ d) = 1$, введём в рассмотрение идеал

$$\mathfrak{d}(a) := (a_1\omega_1 + a_2\omega_2,\ d\omega_1,\ d\omega_2)$$

кольца $\mathfrak{o}$ и положим

$$F(x) := N_{k(x)/\mathbb{Q}(x)}((a_1 + dx_1)\omega_1 + (a_2 + dx_2)\omega_2) N\mathfrak{d}(a)^{-1}.$$

Ясно, что $F(x) \in \mathbb{Z}[x]$; положим

$$\varepsilon(F) := \text{н.о.д. } \{F(a) | a \in \mathbb{N}^2\}.$$

Можно показать, что $\varepsilon(F) \in \{1, 2, 3, 6\}$.

**Теорема 4.** *Пусть* $\varepsilon(F) = 1$. *Тогда*

$$\pi_F(X) = \sigma(F)\ \frac{\eta^2 X^2}{3\log X}\ (1 + O((\log\log X)^{-1/6}))\ \ c\ \ \sigma(F) > 0$$

*при* $X \to \infty$, *где*

$$\pi_F(X) := card\,\{p | p \in P,\ (\exists\, x \in I(X))\ F(x) = p\}.$$

**Гипотеза 1.** *Пусть* $a \in \mathbb{N}$; *обозначим через* $r(a)$ *ранг эллиптической кривой*

$$x^3 + y^3 = az^3$$

*и через* $R(a)$ *аналитический ранг (т.е. порядок нуля в точке* $s = 1$ *дзета - функции Хассе - Вейля* $L_a(s)$*) этой кривой. Имеет место соотношение*

$$(\forall\, a \in \mathbb{N})\ r(a) = R(a)\ (mod\ \ 2).$$

Гипотеза 1 следует из известной гипотезы Бёрча и Свиннертона-Дайера, но пока не доказана.

**Следствие 2.** *Пусть*

$$\{a_i|0 \le i \le 4\} \subseteq \mathbb{Z}, \quad \prod_{i=0}^{4} a_i \ne 0 \ (mod\ \ 3)$$

*и*

$$(\forall\, p \in \{q|q \in P,\ q = 2\ (mod\ \ 3)\})\ a_i \ne 0\ (mod\ \ p^2)\ \ \textit{при}\ \ 0 \le i \le 4.$$

*Тогда из справедливости гипотезы* 1 *вытекает, что проективная гиперповерхность*

$$H_1 : \sum_{i=0}^{4} a_i x_i^3 = 0 \ \ \textit{в}\ \ \mathbb{P}^4(\mathbb{Q})$$

*удовлетворяет принципу Хассе.*

**Следствие 3.** *Пусть* $\{a,\ b\} \subseteq \mathbb{Z}$*; рассмотрим проективную поверхность*

$$H_2 : x_0^3 + 2x_1^3 + ax_2^3 + bx_3^3 = 0 \ \ \textit{в}\ \ \mathbb{P}^3(\mathbb{Q}),$$

*обозначим через* $\bar{y}$ *остаток при делении числа* $y,\ y \in \mathbb{Z}$*, на* 9 *и предположим, что*

$$\textit{н.о.д.}\ (a,b) = 1 \ \ \textit{и}\ \ \{\overline{a+b},\ \overline{a-b}\} \cap \{0\} \ne \emptyset$$

*или*

$$\textit{н.о.д.}\ (a,b) = 1 \ \ \textit{и}\ \ \{\bar{a},\ \bar{b}\} \cap \{2,\ 3,\ 6,\ 7\} \ne \emptyset.$$

*Тогда*

$$H_2(\mathbb{Q}) \ne \emptyset.$$

В работе Хис-Брауна [D.R. Heath-Brown, Primes represented by $x^3+2y^3$, Acta Mathematica, 186 (2001), 1-84] теорема 3 доказана для полинома $x^3 + 2y^3$, в этом случае $k = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$; разработанная в этой работе стратегия доказательства обобщается в наших совместных работах [39], [40] (и в диссертации) на произвольные кубические поля.

4. В четвёртой главе диссертации собраны заметки, написанные в разные годы. Первая заметка "О распределении степенных вычетов и невычетов" есть слегка переработанный вариант моей дипломной работы [1], написанной под руководством Ю.В. Линника. Во второй заметке в предположении гипотезы Римана получена асимптотическая формула для числа целых точек с взаимно простыми координатами в плоских "звёздообразных" множествах (ср. [20]). В третьей заметке получена асимптотическая формула для числа рациональных точек ограниченной высоты на проективной кубической поверхности, заданной уравнением

$$X_0^3 = X_1 X_2 X_3$$

(изложение в этом параграфе основано на совместной работе [37]). В основу четвёртой заметки положена работа [29], задуманная как введение в аналитическую теорию положительно определённых квадратичных форм, см. также [31]. В пятом параграфе обсуждаются $L$ - функции эллиптических кривых, определённых над мнимыми квадратичными полями (здесь мы следуем совместной работе [10]). В шестой заметке изучается множество особых точек полных пересечений; рассмотрения этого параграфа позволяют уточнить формулировку известной теоремы Бёрча о рациональных точках полных пересечений, определённых над полем рациональных чисел (изложение в этом параграфе основано на совместной работе [38]). В последнем параграфе этой главы воспроизводится с небольшими измениями заметка [43]; в этой заметке коротко описывается конструкция диофантовых уравнений, кодирующих доказуемость в формальной математике, ср. [11]. Сформулируем три из доказанных в этой главе теорем.

Пусть $p$ - нечётное простое число; $l|p-1$; $\chi$ - мультипликативный характер степени $l$; $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_s$ - корни $l$-ой степени из единицы; $\Phi(t)$ - неприводимый полином степени $f$ с коэффициентами в конечном поле $\mathbb{F}_p$ из $p$ элементов. Положим

$$E(\varepsilon, \Phi) := \text{card } \{x | x \in \mathbb{F}_p,\ \chi(\Phi(x+i)) = \varepsilon_i \text{ при } 1 \leq i \leq s\}.$$

**Теорема 5.** *Имеет место следующее неравенство:*

$$|E(\varepsilon, \Phi) - \frac{p}{l^s}| < sflp^{1/2}.$$

Эта теорема, доказанная в 1961-м году, обобщает и усиливает более ранние результаты Дэвенпорта.

Рассмотрим открытое множество

$$U : X_0 \neq 0$$

на проективной кубической поверхности

$$S : X_0^3 = X_1 X_2 X_3.$$

Ясно, что

$$U(\mathbb{Q}) = \{[x] | x \in \mathbb{Z}^4,\ x_0 > 0,\ x_0^3 = x_1 x_2 x_3,\ \text{н.о.д. } (x_0, ..., x_3) = 1\},$$

где $[x] := \{tx | t \in \mathbb{Q}\}$ - прямая в $\mathbb{Q}^4$, проходящая через точки 0 и $x$. Положим

$$h([x]) := \max \{|x_i| \, |0 \leq i \leq 3\} \text{ при } [x] \in U(\mathbb{Q})$$

и

$$\mathcal{N}(H) := \text{card } \{y | y \in U(\mathbb{Q}),\ h(y) < H\}.$$

**Теорема 6.** *При $H \to \infty$ имеет место следующая асимптотическая формула:*

$$\mathcal{N}(H) = \frac{H(\log H)^6}{6!} \prod_{p \in P} l_p + O(H(\log H)^5),$$

*где*

$$l_p := (1 - \frac{1}{p})^7 (1 + \frac{7}{p} + \frac{1}{p^2}).$$

Теорема 2, доказанная в совместной работе [37], показывает, что поверхность $S$ удовлетворяет гипотезе Батырева - Манина.

Будем называть натуральное число $n$ квадратично полным, если

$$(\forall\, p \in P)\ p|n \ \Rightarrow\ p^2|n.$$

**Теорема 7.** *Любое достаточно большое натуральное число есть сумма двух квадратов и квадратично полного числа.*

В работе [31] эта теорема, впервые доказанная Хис-Брауном, выводится из общей теории положительно определённых квадратичных форм.

# Работы автора по теме диссертации

## Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК


[1] Б.З. Мороз, О распределении степенных вычетов и невычетов, *Вестник ЛГУ,* 16 (1961), no. 19, 164 - 169. 1.

[2] Б.З. Мороз, Композиция бинарных квадратичных форм и скалярное произведение рядов Гекке, *Труды МИАН СССР,* 80 (1965), 102 - 109.

[3] Б.З. Мороз, О распределении пар простых дивизоров двух квадратичных полей I, II, *Вестник ЛГУ,* 19:4 (1965), 47 - 57 и 1:1 (1966), 64 - 79.

[4] Б.З. Мороз, Распределение целых точек на многомерных гиперболоидах и конусах, *Записки научных семинаров ЛОМИ,* 1 (1966),
84 - 113.

[5] Б.З. Мороз, О дзета-функциях полей алгебраических чисел, *Математические заметки,* 4:3 (1968), 333-339.

[6] Б.Э. Кунявский, Б.З. Мороз, О целых моделях аффинных торических многообразий, *Труды СПбМО,* 7 (1999), 116-123.

[7] В.Е. Воскресенский, Б.Э. Кунявский, Б.З. Мороз, О целых моделях алгебраических торов, *Алгебра и анализ,* 14 (2002), вып. 1, 46-70.

[8] Б.З. Мороз, Скалярные произведения рядов Дирихле и распределение целых точек на торических многообразиях, *Записки научных семинаров ПОМИ,* 322 (2005), 135-148.

[9] Б.Э. Кунявский, Б.З. Мороз, О целых моделях алгебраических торов и аффинных торических многообразий, *Труды СПбМО,* 13 (2007), 97-119.

[10] L.V. Dieulefait, M. Mink, and B.Z. Moroz, On an elliptic curve defined over $Q(\sqrt{-23})$, *Алгебра и Анализ,* 24:4 (2012), 64 - 83.

[11] M. Carl, B.Z. Moroz, On a Diophantine representation of the predicate of provability, *Записки научных семинаров ПОМИ,* 407 (2012), 77 - 104.

[12] Т. Клебергер, Б.З. Мороз, Группы Андре Вейля и распределение простых идеалов, *Труды МИАН,* 296 (2017), 140-149.

# Публикации в других изданиях


[13] Б.З. Мороз, Аналитическое продолжение скалярного произведения рядов Гекке двух квадратичных полей и его применение, *ДАН СССР,* 150:4 (1963), стр. 752-754.

[14] Б.З. Мороз, О продолжимости скалярного произведения рядов Гекке двух квадратичных полей, *ДАН СССР,* 155:6 (1964), стр. 1265-1267.

[15] B.Z. Moroz, On the convolution of $L$-functions, *Mathematika,* 27 (1980), 312 - 320.

[16] B.Z. Moroz, Euler products (variation on a theme of Kurokawa's), *Astérisque,* 94 (1982), 143 - 151.

[17] B.Z. Moroz, Scalar product of $L$-functions with Größ encharacters: its meromorphic continuation and natural boundary, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* 332 (1982), 99 - 117.

[18] B.Z. Moroz, Vistas in analytic number theory, *Bonner Mathematische Schriften,* 156 (1984), Universität Bonn.

[19] B.Z. Moroz, On the distribution of integral and prime ideals with equal norms, Annales de l'Institut Fourier, 34 (1984), fasc. 4, 1-17.

[20] B.Z. Moroz, On the number of primitive lattice points in plane domains, *Monatshefte für Mathematik,* 99 (1985), 37 - 42.

[21] W.-Ch.W. Li, B.Z. Moroz, On ideal classes of number fields containing integral ideals of equal norms, *Journal of Number Theory,* 21 (1985), 185-203.

[22] B.Z. Moroz, Produits eulériens sur les corps de nombres, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris),* Série I, 301 (1985), no. 10, 459-462.

[23] B.Z. Moroz, Integral points on norm-form varieties, *Journal of Number Theory,* 24 (1986), 272-283.

[24] B.Z. Moroz, Analytic arithmetic in algebraic number fields, *Lecture Notes in Mathematics,* 1205 (1986), Springer - Verlag.

[25] B.Z. Moroz, On the number of integral points on a norm-form variety in a cube-like domain, *Journal of Number Theory,* 27 (1987), 106-110.

[26] B.Z. Moroz, Estimates for character sums in number fields, *Israel Journal of Mathematics,* 60 (1987), 1-21.

[27] B.Z. Moroz, Equidistribution of Frobenius classes and the volumes of tubes, *Acta Arithmetica,* 51 (1988), 269 - 276.

[28] B.Z. Moroz, On a class of Dirichlet series associated to the ring of representations of a Weil group, *Proceedings of the London Mathematical Society,* 56 (1988), 209 - 228.

[29] B.Z. Moroz, Recent progress in analytic arithmetic of positive definite quadratic forms, *MPIM Preprint,* 89-50 (1989).

[30] B.Z. Moroz, Scalar product of Hecke $L$-functions and its application, *Advanced studies in pure mathematics,* 21 (1992), 153-171.

[31] B.Z. Moroz, On the representation of large integers by integral ternary positive definite quadratic forms, *Astérisque,* 209 (1992), 275 - 278.

[32] B.Z. Moroz, On the distribution of integral points on an algebraic torus defined by a system of norm-form equations, *Quarterly Journal of Mathematics,* 45 (1994), 243-253.

[33] B.Z. Moroz, Exercises in analytic arithmetic on an algebraic torus, Israel Mathematical Conferences Proceedings (F. Hirzebruch Festband), 9 (1996), 347-359.

[34] B.Z. Moroz, On the integer points of some toric varieties, *Quarterly Journal of Mathematics,* 48 (1997), 67-82.

[35] B.Z. Moroz, On the distribution of integer points in the real locus of an affine toric variety, Lecture Notes of the London Mathematical Society, 237 (1997), 283-292.

[36] B.Z. Moroz, On the integer points of an affine toric variety (general case), *Quarterly Journal of Mathematics,* 50 (1999), 37-47.

[37] D.R. Heath-Brown, B.Z. Moroz, The density of rational points on the cubic surface $X_0^3 = X_1X_2X_3$, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* 125 (1999), 385 - 395.

[38] A.G. Aleksandrov, B.Z. Moroz, Complete intersections in relation to a paper of B.J. Birch, *Bulletin of the London Mathematical Society,* 34 (2002), 149-154.

[39] D.R. Heath-Brown, B.Z. Moroz, Primes represented by binary cubic forms, *Proceedings of the London Mathematical Society (3),* 84 (2002), 257-288.

[40] D.R. Heath-Brown, B.Z. Moroz, On the representation of primes by cubic polynomials in two variables, *Proceedings of the London Mathematical Society (3),* 88 (2004), 289-312.

[41] Б.З. Мороз, О представлении простых чисел полиномами (обзор последних результатов), *Труды института математики НАН Беларуси,* 13:1 (2005), 114-119.

[42] Б.З. Мороз, *Диофантовы уравнения и доказуемость в математике,* МЦНМО, Москва, 2008.

[43] M. Carl, B.Z. Moroz, A polynomial encoding provability in pure mathematics (outline of an explicit construction), *Bulletin of the Belgian Mathematical Society,* 20 (2013), 181-187.

[44] Б.З. Мороз, *Аналитические задачи в алгебраической теории чисел и диофантовой геометрии,* МЦНМО, Москва, 2017.