ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертационной работе Б. З. Мороза

"Аналитические задачи в алгебраической теории

чисел и диофантовой геометрии",

представленной на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук по специальности

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

В диссертации с помощью аналитических методов решено несколько задач диофантовой геометрии и асимптотической теории чисел. Построены целые модели алгебраических торов и аффинных торических многообразий, и изучено распределение целых точек на объектах, задаваемых этими моделями. Доказано несколько новых теорем о представимости простых чисел кубическими многочленами от двух переменных.

В первой главе диссертации изучаются свойства скалярных L-рядов Артина-Вейля над полями алгебраических чисел. Доказаны две теоремы, основанные на технике из многочисленных работ автора середины 80-х годов прошлого века. Представляет интерес история основной проблемы главы, восходящая к работам Ю. В. Линника середины XX века, кандидатской диссертации автора и работам А. И. Виноградова, П. К. Й. Дракслa и Н. Курокавы.

Вторая глава посвящена целым точкам на торических многообразиях, определенных над кольцом целых рациональных чисел. На специальных квадриках распределение целых точек изучалось более 50 лет назад в ранних работах автора. Далее приведены обобщения этих задач и результаты Б. З. Мороза, а также его результаты с соавторами.

Третья глава посвящена проблемам бесконечности числа простых чисел, представимых многочленами третьей степени от двух переменных. Эти результаты получены Б. З. Морозом в соавторстве с Д. Р. Хис-Брауном. Приведем одну из теорем главы.

Рассмотрим неприводимую примитивную бинарную кубическую форму $f(x)$, $x := (x_1, x_2)$, с целыми рациональными коэффициентами. Положим

$$d = d(f) := \text{н.о.д. } \left\{ f(a) \mid a \in \mathbb{N}^2 \right\};$$

можно показать, что $d \in \{1, 2\}$. Пусть

$$X \in \mathbb{R}, \quad X \geq 3, \quad \tau := (\log\log X)^{-1/6}, \quad \eta := (\log X)^{-c_0},$$

где c_0 — фиксированное вещественное положительное число, зависящее лишь от f, и

$$I(X) := \left\{ a \mid a \in \mathbb{Z}^2, \ X < a_1, a_2 \leq X(1+\eta) \right\}.$$

Теорема 3. Пусть $d = 1$ и $f(1,1) > 0$. Тогда

$$\pi_f(X) = \sigma(f) \frac{\eta^2 X^2}{3 \log X} \left(1 + O((\log\log X)^{-1/6})\right) \ c\, \sigma(f) > 0$$

при $X \to \infty$, где

$$\pi_f(X) \ := \operatorname{card} \{ p \mid p \in P, \ (\exists x \in I(X)) \ f(x) = p \}.$$

Хис–Брауном в 2001 году теорема 3 доказана для многочлена $x^3 + 2y^3$. В этом случае $k = Q(\sqrt[3]{3})$. Новые идеи Б. З. Мороза и Хис–Брауна позволили обобщать теорему на произвольные кубические поля.

В четвертой главе содержатся результаты диссертанта, полученные на протяжении 50 лет в различных работах. Здесь и теорема 1961 года о распределении степенных вычетов и невычетов; асимптотическая формула для числа целых точек с взаимно простыми координатами в "звездообразных" множествах; асимптотическая формула для числа рациональных точек ограниченной высоты на проективной поверхности, заданной уравнением

$$X_0^3 = X_1\, X_2\, X_3\,;$$

предложена конструкция диофантовых уравнений, кодирующих доказуемость в формальной математике.

Таким образом, в диссертации проанализированы аналитические задачи, возникавшие в алгебраической теории числе и геометрии чисел на протяжении последних 60 лет. Решены следующие крупные проблемы тематики:

1. Доказана гипотеза Батырева–Манина для одной кубической поверхности (в соавторстве с Хис–Брауном).

2. Получено новое доказательство теоремы Хис–Брауна о представимости достаточно больших натуральных чисел суммой трех квадратично полных чисел.

3. Построен полином, кодирующий доказуемость в теории множеств (в соавторстве с Карлом).

4. Доказано обобщение теоремы плотности Чеботарева.

5. Исследована проблема продолжимости скалярных произведений L-рядов Артина–Вейля.

6. Доказаны теоремы о бесконечности множеств вида

$$\left\{ f(a) \mid a \in \mathbb{Z}^2 \right\} \cap P,$$

где P есть множество простых натуральных чисел, для широкого класса кубических полиномов $f(x)$, $x := (x_1, x_2)$, от двух переменных (в соавторстве с Хис–Брауном).

Это потребовало от автора широкой образованности, недюжинной сообразительности, высочайшей коммуникабельности.

Из недостатков заметим, что в абзаце "Апробация работы" отсутствует Минск, где диссертант выступал в 1996 и 2003 годах.

Считаю, что работа является докторской диссертацией высокого уровня, удовлетворяющей всем требованиям ВАК России. Автор диссертации Мороз Борис Зеликович заслуживает быть доктором физико-математических наук.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических
наук, профессор В.И. Берник

26 сентября 2018 года

Подпись В.И. Берника удостоверяю.

Ученый секретарь Института
математики НАН Беларуси,
кандидат физико-математических наук В.В. Лепин

Государственное научное учреждение "Институт математики НАН Беларуси"

ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь

Тел. +375 17 284 19 61, e-mail: bernik@im.bas-net.by