Отзыв официального оппонента
на докторскую диссертацию
МОРОЗА БОРИСА ЗЕЛИКОВИЧА
«Аналитические задачи в алгебраической теории чисел
и диофантовой геометрии»,
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.06 –
Математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация Б.З. Мороза посвящена решению весьма актуальных, интересных и сложных задач аналитической и алгебраической теории чисел, а также диофантовой геометрии. Работа состоит из Введения, трех глав, Приложения, Заключения и списка литературы.

В первой главе диссертации автор изучает аналитические свойства скалярных произведений L-рядов Артина-Вейля над полем алгебраических чисел K, т.е. рядов вида

$$L(s) = (L_1 * \cdots * L_r)(s) = \sum_{\mathfrak{n}\in I_0(K)} |\mathfrak{n}|^{-s} a(\mathfrak{n}),$$

коэффициенты $a(\mathfrak{n})$ которых суть произведения $a_1(\mathfrak{n}) \ldots a_r(\mathfrak{n})$ коэффициентов рядов Дирихле

$$L_j(s) = \sum_{\mathfrak{n}\in I_0(K)} |\mathfrak{n}|^{-s} a_j(\mathfrak{n}), \quad j = 1, \ldots, r,$$

над полем K.

Вопросами, связанные с мероморфным продолжением рядов такого вида, занимались в разное время Ю.В. Линник, А.И. Виноградов, О.М. Фоменко, П.К.Й. Драксл, Н. Курокава и другие исследователи. Интерес к такого рода задачам исторически связан со следующей чисто арифметической проблемой. Пусть даны r алгебраических числовых полей $K_1, \ldots, K_r$ степеней $n_1, \ldots, n_r$ соответственно. В каждом из них выделяется класс c_i идеальных чисел, рассматриваемый как решетка в соответствующем n_i-мерном неевклидовом пространстве E_i. В каждом пространстве E_i задается область V_i. Спрашивается, сколько существует простых чисел p, для которых разрешима система

$$p = |N_i \mu_i|, \quad \text{где} \quad \mu_i \in V_i$$

(N_i – соответствующие нормы)? Основным результатом главы является Теорема 1.1.1, согласно которой во всех случаях (кроме $r = 2$ расширений K_i поля K степеней $d_i = [K_i : K] = 2$) соответствующее скалярное произведение мероморфно продолжатся в полуплоскость $\mathbb{C}_0 = \{\operatorname{Re} s > 0\}$, причем мнимая ось является ее естественной границей.

При доказательстве этой теоремы автор существенно пользуется доказанным им обобщением теоремы плотности Чеботарева (Теорема 1.4.1) – утверждением, представляющим и значительный самостоятельный интерес.

Во второй главе автором исследуется распределение целых точек на аффинных торических многообразиях, определенных над кольцом целых рациональных чисел, а также множество целых точек норменных многообразий.

В третьей главе диссертации автор исследует задачу о представлении простых чисел кубическими полиномами от двух переменных.

Еще в середине XIX столетия В.Я. Буняковским была высказана гипотеза о том, что если полином $f(x)$ с целыми коэффициентами, взаимно простыми в совокупности, неприводим, то множество простых чисел p, представимых в виде $p = f(n)$, где n – натуральное число, бесконечно (при условии, что старший коэффициент полинома положителен). Эта гипотеза не доказана до сих пор ни для одного полинома степени 2 и выше. В частности, неизвестно, конечно или нет множество простых чисел вида $n^2 + 1$, где $n \in \mathbb{N}$.

Если $f(x) = ax^m + bx^{m-1} + \ldots + cx + d$, $a > 0$, то количество чисел вида $f(n)$, попадающих в промежуток $(1, X]$ имеет при растущем X порядок $X^{1/m} \ll \sqrt{X}$. Поэтому множество значений многочлена образует очень редкую последовательность. Средствами, способными "уловить" в такой последовательности простые числа, современная наука не располагает. Однако "ослабленный" вариант задачи, в котором многочлен от одной переменной заменяется многочленом от двух переменных (бинарной формой) в некоторых случаях уже поддается решению.

Так, случай бинарной квадратичной формы был рассмотрен еще П.Г.Л. Дирихле. Однако в этом случае множество значений формы имеет положительную плотность и потому "редким" не является. В 1986 г. Дж. Фридлендер и Х. Иванец рассмотрели случай формы $f(x, y) = x^2 + y^4$ и получили асимптотическую формулу для количества простых p вида $x^2 + y^4$, не превосходящих X, $X \to +\infty$. Очевидно, значения этой формы, попадающие на промежуток $(1, X]$, образуют множество с числом элементов порядка $X^{1/2} \cdot X^{1/4} \ll X^{3/4}$. Результат Фридлендера и Иванца стал первым примером того, когда оказалось возможным "уловить" простые числа в столь редкой последовательности[1].

Следующим прорывом в этой тематике стала теорема Д.Р. Хиз-Брауна (2001) о существовании бесконечного множества простых чисел вида $p = x^3 + 2y^3$, $x, y \in \mathbb{N}$. Очевидно, мощность множества значений этого полинома, находящихся на промежутке $(1, X]$ имеет порядок $X^{1/3} \cdot X^{1/3} = X^{2/3}$.

Исследования автора касаются естественного обобщения последнего результата и связаны с представимостью простых чисел кубическими полиномами достаточно общего вида от двух переменных. Основными результатами главы 3 являются теоремы 3.1.3 и 3.1.4. Первая утверждает, что если $f(x, y)$ – прими-

[1] Следует отметить, что примеры последовательностей "плотности" порядка $X^{1-\delta}$, $\delta > 0$, были известны и ранее, в частности, из работ И.И. Пятецкого-Шапиро и его последователей, однако соответствующие значения величины δ оказываются существенно меньше $\frac{1}{4}$.

тивная неприводимая бинарная кубическая форма, принимающая на $\mathbb{Z}^2$ хотя бы одно нечетное значение, то среди чисел вида $f(x,y)$, $x,y \in \mathbb{Z}$, имеется бесконечно много простых. Если же все значения $f(x,y)$ на $\mathbb{Z}^2$ четны, то указанным свойством будет обладать множество $\frac{1}{2}f(x,y)$, $x,y \in \mathbb{Z}$.

Согласно второй теореме, если бинарная кубическая форма $f(x,y)$ с целыми коэффициентами неприводима, и не существует целого числа $a \neq \pm 1$, делящего все значения $f(x,y)$, $x,y \in \mathbb{Z}$, и если целые числа $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ и d таковы, что полином

$$F(x,y) = \frac{1}{\gamma_0} f(\gamma_1 + dx, \gamma_2 + dy)$$

имеет целые коэффициенты, то среди его значений имеется бесконечно много простых чисел.

В действительности в работе доказано большее: именно, асимптотическая формула для количества $\pi(\mathcal{A}(X))$ простых идеалов некоторой "прямоугольной" области $\mathcal{A}(X)$ (определенной на стр. 119-120). Ее следствием являются и асимптотики для количества простых, представимых заданной формой и лежащих в соответствующих промежутках.

Исследование простых идеалов специальной области начинается применением метода решета Бухштаба (§ 3.4). Стандартным образом величина $\pi(\mathcal{A}(X))$ аппроксимируется суммами специального вида (Лемма 3.4.1), часть из которых оценивается сравнительно просто. Основную трудность доставляет оценка суммы Σ_9 (Предложение 3.4.1), оценке которой посвящен отдельных параграф 3.5. При работе с такой суммой (обозначаемой в § 3.5 через $\Sigma_{10}(V)$) автор применяет достаточно тонкие рассуждения, связанные с арифметикой алгебраических чисел кубического поля, сочетая их с методом большого решета. Итогом этой работы оказывается оценка Предложения 3.5.2, следствиями которой являются все основные утверждения главы.

В Приложении автором собраны ряд независимых друг от друга результатов, в числе которых следует особо отметить очень красивую Теорему 4.3.1 о числе точек на специальной кубической поверхности (являющуюся, по сути, проверкой известной гипотезы Батырева-Манина для этой поверхности), а также ряд теорем о представлении больших натуральных чисел положительно определенными квадратичными формами (в частности, формами от 3 переменных) (Теоремы 4.4.2, 4.4.3).

В тексте работы содержится ряд неточностей и опечаток, не влияющих на правильность полученных результатов. Так, на с. 119 в определении величины a_n вместо $b_1^2+b_2^4$ должно быть $b_1^2+b_2^4 = n$, в правой части формулы (3.2.14) (с. 126) под знаком O пропущен множитель X, на с. 132 в определении множества D_b вместо $a = 0(d)$ должно быть $a = 0(b)$. В п. 127 библиографии (с. 269) пропущена фамилия автора.

Некоторое неудобство при чтении работы в ряде случаев создает то обстоятельство, что автор использует малые латинские буквы для обозначения как многомерных, так и одномерных величин. Кроме того, применяемая автором техника объективно требует большого числа обозначений. В связи с этим хорошим подспорьем читателю был бы перечень всех (или, по крайней мере, большей части) вводимых обозначений с указанием страниц, где введено то или иное понятие. При этом отмеченные недостатки никак не влияют на высокий научный уровень работы.

Все результаты диссертационной работы снабжены полными доказательствами, были своевременно опубликованы в ведущих отечественных и зарубежных рецензированных изданиях и представлены на многочисленных международных конференциях и семинарах. Автореферат полно и правильно отражает содержимое диссертации. Полученные автором результаты и разработанные им методы представляют большой интерес для специалистов по аналитической и алгебраической теории чисел. Сам автор, безусловно, заслуживает присвоения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 - математическая логика, алгебра, и теория чисел.

Доктор физико - математических наук
ведущий научный сотрудник
Отдела теории чисел
ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова
Профессор РАН

М.А.Королёв

Подпись доктора физико-математических наук
Королева Максима Александровича заверяю

Ученый секретарь
ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова
Кандидат физико-математических наук

П.А. Яськов

02.10.2018

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
Адрес: Россия, Москва, 119991, ул. Губкина, д. 9
Телефон: +7 (495) 984 81 41
Сайт: www.mi-ras.ru
E-mail: korolevma@mi-ras.ru