ОТЗЫВ
официального оппонента о диссертации М. Е. Жуковского "Логика первого порядка случайного графа Эрдеша–Реньи," представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 05.13.17 — теоретические основы информатики

Актуальность темы.
Диссертация М. Е. Жуковского посвящена решению класса задач в классической и в тоже время динамично развивающейся в настоящей момент области математики — теории случайных графов, а следовательно, соответствует специальности " Теоретические основы информатики". Вероятностные методы доказательства в теории графов и комбинаторике исключительно популярны в настоящий момент. Одним из классических утверждений в вероятностной комбинаторике является *закон* 0 *или* 1: если свойство графа подчиняется этому закону, то вероятность того, что случайный граф (в модели Эрдеша–Реньи $G(n,p)$) удовлетворяет ему, стремится к 0 или 1 с ростом числа вершин n. Несколько более слабым является закон сходимости: он утверждает, что описанная выше вероятность при росте числа вершин случайного графа имеет предел. Исследуются различные распределения вероятности p (в основном, рассматривается случай, когда вероятность проведения ребра в случайном графе равна $p = n^{-\alpha}$, где $-\alpha$ — константа) и различные свойства. В диссертации (везде, кроме главы 6) — это свойства, записываемые с помощью формул первого порядка, использующих переменные (соответствующие вершинам графа), конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию, символы отношений смежности вершин и равенства, а также кванторы. Главные вопросы состоят в том, когда закон 0 или 1 и закон сходимости выполнены. Здесь можно рассматривать различные показатели α и различные виды формул, ограничивая, например, их кванторную губину и количество перемен кванторов.

Ключевыми в диссертации являются понятия k-закона 0 или 1 и закона k-сходимости — говорят, что эти законы выполнены, если соответстввующие утверждения верны для всех свойств, записываемых формулами первого порядка кванторной глубины не более k. Есть немало классических работ в этой теме, авторами которых являются Эрдеш, Спенсер, Шелах, Эренфойхт, Глебский, Лиогонький, Тишкиевич, Райгородский и другие известные математики. В силу изложенного выше тема диссертации, безусловно, является актуальной. И надо отметить, что результаты диссертации М.Е.Жуковского на фоне классических выглядят очень сильно.

Методы, использованные в работе.
Диссертация выполнена на стыке разных областей математики. Формулировки используют язык теории вероятности и математической логики, которые необходимы и в доказательствах. И все же в первую очередь доказательства (обенно в главах 1, 3, 4 и 6) используют различные методы дискретной математики: теории графов и теории игр. Диссертант хорошо освоил классичекие методы доказательств в этой облати и на их основе разработал новые. Опишу методику доказательств более подробно.

Одним из главных инструментов в диссертации является *игра Эренфойхта* — игра двух игроков, Новатора и Консерватора, на паре графов G и H. Игроки выбирают каждым ходом по одной вершине, первым ходит Новатор, а Консерватор отвечает всегда в другом графе. Консерватор стремится, чтобы подграфы G и H на выбранных вершинах были изоморфны. Классическая теорема Эренфойхта, связывает неразличимость двух графов с помощью формул первого порядка кванторной глубины k (так называемую *k-элементарную эквивалентность*) с наличием выигрышной стратегии у Консерватора для этой пары графов. Таким образом, случайный граф $G(n,p)$ удовлеворяет k-закону 0 или 1, если и только если для любой пары независимо выбранных случайных графов при стремлении числа их вершин к бесконечности с вероятностью 1 выигрывает Консерватор. Классическим инструментом доказательства k-закона 0 или 1 для случайных графов $G(n, n^{-\alpha})$ является построение выигрышной стратегии Консерватора, а опровержения закона — построение выигрышной стратегии Новатора. В главе 1 диссертантом разработан целый класс стратегий для Консерватора (стратегия SF и разные ее вариации), а также весьма оригинальные стратегии для Новатора. Этот аппарат применяется потом в главах 3 и 4. В 6 главе теорема Эренфойхта модифицирована под рассматриваемые там задачи. Большое впечатление произвели на меня стратегии для Новатора, придуманные диссертантом — они построены на основе различных графских конструкций, ключевой из которых является конструкция *циклического расширения.*

Однако, это не все методы, применяемые диссертантом. Стоит отметить прямое построение формул первого порядка, опровергающих закон 0 и 1. Фактически эти формулы заставляют граф содержать тот или иной вид подграфа. На этой основе построено часть доказательств в главе 1, а также доказательства в главах 2 и 5.

Об основных результатах диссертации.
Считаю результаты диссертации весьма сильными. Самой важной мне преставляется глава 1, в которой помимо доказательства основных теорем о k-законах 0 или 1 (теорем 1.2.1, 1.2.2 и 1.2.4) разрабатывается инструмен-

тарий в виде стратегии Консерватора SF, о которой говорилось ранее. Этот набор стратегий прменяется потом в главах 3 и 4, а в немного измененном виде — в главе 6. Результаты теорем 1 главы существенно дополняют известные ранее результаты о k-законах 0 и 1.

В главе 2 для каждого свойства L графов, записываемого формулой первого порядка, рассматриваются спектры $S^1(L)$ и $S^2(L)$. Первый из них — это множество тех значений $\alpha \in (0,1)$, для которых случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ *не удовлетворяет* закону 0 и 1, второй спектр определяется несколько сложнее. Множества S_k^1 представляет собой объединение спектров $S^1(L)$ для всех свойств первого порядка L, имеющих кванторную глубину не более k, аналогично определяется S_k^2. В главе 2 находится минимум и максимум S_k^1 и S_k^2 при $k > 3$, доказывается, что $S_3^2 = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ и исследуются предельные точки спектров. Результаты представляются весьма сильными, в доказательствах используются как стратегии игры Эренфойхта, так и прямые построения нужных формул первого порядка.

В главе 3 доказывается, что для каждого рационального числа $\frac{t}{s} \in (0,1)$ слева от $\frac{t}{s}$ существует интервал, не содержащий точек спектра S_k^2. Также доказан ряд оценок на длины таких интервалов. И в этой главе доказательства используют инструменты из главы 1 — описанные там стратегии.

Вся достаточно длинная глава 4 посвящена всего одной теореме о законе сходимости. Известно, что при $k \geq 3$ и $\alpha \in (0, \frac{1}{k-2})$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k-закону 0 или 1, а при $\alpha = \frac{1}{k-2}$ — не подчиняется. Мне представляется чрезвычайно интересным вопрос — а что же происходит в этой пограничной точке, где закон 0 и 1 перестает работать? Теорема 4.2.1 на него отвечает — там выполнен k-закон сходимости. Это вполне естественно и очень интересно. Такая простая на первый взгляд формулировка, но при этом очень сложное доказательство, основанное опять же на идеях главы 1.

В главе 5 рассматривается вопрос о том, какое наименьшее число перемен кванторов может быть в формуле первого порядка, имеющей бесконечный спектр. В теореме 5.1.1 дается ответ на этот вопрос — должно быть не менее 3 перемен. Тот факт, что при двух переменах кванторов спектр всегда конечен, кажется весьма неочевидным, но он доказан диссертантом.

Наконец, глава 6 стоит особняком от предыдущих — это единственная глава, где рассматриваются свойства сильно разреженных случайных графов $G(n, n^{-\alpha})$ при $\alpha > 1$. В случае $\alpha > 2$ в таких графах с асимптотической вероятностью 1 просто нет рёбер и рассматривать их нет смысла. А при $\alpha \in (1,2)$ в главе 6 доказывается несколько интересных утверждений. Рассматриваются не только свойства первого порядка, но и так называемые *монадические свойства* — в записи которых могут использоваться переменные, соответствующие унарным предикатам. Отметим, что такое естественное свойство графа, как связность, не может быть записано формулой первого порядка, но может быть записано монадической формулой, что стимулирует изучение таких формул. Соответственно определяется монадический k-закон 0 или 1. Известно, что ему подчиняется случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ при всех $\alpha > 1$, кроме чисел вида $1 + \frac{1}{\ell}$, где ℓ — натуральное число. Именно случай таких $\alpha = 1 + \frac{1}{\ell}$ исследуется в теореме 6.2.1 — основном результате главы 6.

Считаю, что с результатами диссертации обязательно следует ознакомиться специалистам по вероятностной комбинаторике и теории графов, они могут найти для себя много интересного, в том числе направление для дальнейших исследований.

Научная новизна и достоверность результатов.
Все результаты диссертации являются новыми. В работе даны полные, математически корректные доказательства. Достоверность результатов также подтверждается тем, что они изложены на многочисленных конференциях (среди которых много международных) и на семинарах (в том числе в МФТИ, НИУ ВШЭ, ИППИ РАН, ПОМИ РАН). Результаты диссертации опубликованы в 20 работах в рецензируемых журналах, из которых 18 — в изданиях, рекомендованных ВАК РФ. Из них 11 работ написаны диссертантом без соавторов.

Стиль и оформление работы.
Введение, исторический обзор, рассуждения о смысле тех или иных утверждений теорем написаны очень хорошо — четко и ясно, в хорошем стиле, такой текст приятно читать. К сожалению, я не могу сказать этого о доказательствах. Доказательства в диссертации написаны корректно и безошибочно, но в недружественном к читателю стиле — в некоторых местах явно не хватает подробностей, которые, возможно, почти что очевидны автору. Однако, почти все результаты диссертации весьма сложны, и столь экономное описание подробностей значительно затрудняет прочтение и без того непростых доказательств.

Автореферат в целом хорошо отражает содержание диссертации.

Недостатки работы.
Большинство недостатков работы происходит, на взгляд рецензента, от чрезмерной краткости изложения. Конечно, при качественном изложении доказательств длина диссертации бы увеличилась, но зато время, необходимое на понимание текста, наоборот, значительно сократилось.

В работе имеются опечатки, приводить которые нет смысла. Разве что отмечу, что в нескольких местах при изложении стратегий перепутаны Новатор и Консерватор, например на странице 76, 9 строка снизу. Есть и другие смысловые опечатки: так, в разборе случаев в доказательстве теоремы 1.2.2 в пункте 1.5.4.1 сказано "Случай $b = 2$", а в пункте 1.5.4.2 — "Случай $b > 2$" — в то время, как должно быть $b = 1$ и $b > 1$, соответственно.

Отмечу наиболее существенные недостатки.

1. В работе вообще нет иллюстраций. Между тем, в некоторых местах, где автор определяет весьма нетривиальные графские конструкции, это бы существенно облегчило понимание. Например, на странице 80, где в доказательстве теоремы 1.2.2 на полстраницы определяется весьма туманный на первый взгляд объект — двухпроходный граф. Только вчитавшись в дальнейшее доказательство и, кстати, нарисовав на полях недостающие картники, начинаешь понимать, что имеется в виду. Типичный момент для диссертации — формально говоря, ошибки нет, но автор не прикладывает никаких усилий к тому, чтобы хоть немного облегчить понимание конструкции.

2. В работе нет выделенных определений — все объекты определяются в тексте. Это сильно затрудняет поиск понятий, определения которых читатель в некоторый момент позабыл, а все их одновременно в голове удержать непросто.

3. Во многих местах рассуждения выписаны недостаточно подробно. Например, на странице 52 сказано, что в цепочке потроения с помощью m-расширений графа $\mathcal{H}_m$ достаточно ровно одного расширения третьего типа, причем на последнем шаге. Конечно, доказательство этого утверждения несложно, но его никак нельзя заменить словом "очевидно".

4. В нескольких местах (например, перед весьма технически сложным доказательством теоремы 1.2.4) автор кратко описывает, какие стратегии и каким образом он будет применять. Такие описания должны быть и перед началом других сложных доказательств. Более того, лучше было бы снабдить пояснение чем-то вроде блок-схемы алгоритма, так было бы намного легче воспринимать пояснение!

Отмеченные недостатки говорят о невнимательности автора при оформлении работы и портят настроение читателю, но никоим образом не снижают научной ценности работы. А результаты доказаны весьма сильные и содержательные. Они заслуживают того, чтобы когда-нибудь автор подробно изложил их доказательства не только для узких специалистов. Считаю, что принципиального характера выявленные недочеты не имеют.

Заключение.

Диссертация М. Е. Жуковского "Логика первого порядка случайного графа Эрдеша–Реньи" является законченным научным исследованием на актуальную тему, вносящим существенный вклад в теорию случайных графов и, следовательно, соответствует специальности 05.13.17 — теоретические основы информатики. Эта диссертационная работа полностью соответствует требованиям ВАК РФ, предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор М. Е. Жуковский безусловно заслуживает присуждения ему степени доктора физико-математических наук по специальности 05.13.17 — теоретические основы информатики.

Старший научный сотрудник
лаборатории математической логики
ПОМИ им. В.А.Стеклова РАН,

доктор физико-математических наук Д. В. Карпов

29 ноября 2018 г.

Сведения об оппоненте: Карпов Дмитрий Валерьевич, гражданин РФ, д.ф.м.н по специальности 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика, старший научный сотрудник лаборатории математической логики Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А.Стеклова Российской академии наук, 191023, Санкт-Петербург, наб. Фонтанки д. 27, телефон: +7812 5714392, адрес электронной почты: dvk0@yandex.ru.

Подпись руки Карпова
Дмитрия Валерьевича
УДОСТОВЕРЯЮ
Помощник директора
по кадрам ПОМИ РАН В.Э. Владимирова
«30» ноября 2018 г.