Отзыв официального оппонента
о диссертационной работе Жуковского Максима Евгеньевича
«Логика первого порядка случайного графа Эрдеша–Реньи»
представленной на соискание степени доктора
физико-математических наук по специальности 05.13.17 —
теоретические основы информатики.

Диссертация относится к теоретическим основам информатики, а именно, к теории случайных графов. Точнее, в ней изучаются законы нуля и единицы для свойств графов, выразимых формулами языка первого порядка сигнатуры $(=, \sim)$ (символом $\sim$ обозначается отношение смежности на вершинах графа). Модели этой сигнатуры естественным образом отождествляются с ориентированными графами. Если $\sim$ интерпретируется симметричным иррефлексивным отношением, то граф является неориентированным графом без петель. В диссертации изучаются именно такие графы.

Пусть $\{p_n\}$ обозначает последовательность действительных чисел, каждое из которых находится на отрезке $[0, 1]$. Мы говорим, что для этой последовательности и для свойства графов S *выполнен закон нуля и единицы*, если следующая последовательность $\{q_n\}$ имеет предел, причем он равен 0 или 1: q_n равно вероятности того, что случайный граф $G(n, p_n)$ удовлетворяет свойству S. Здесь $G(n, p)$ обозначает граф на n вершинах, полученный добавлением для каждой неупорядоченной пары различных вершин i, j ребра $\{i, j\}$ с вероятностью p, причем для разных неупорядоченных пар $\{i, j\}$ это делается независимым образом.

Первый закон нуля и единицы был открыт в 1969 году Ю.В. Глебским, Д.И. Коганом, М.И. Лиогоньким и В.А. Талановым: они доказали, что для любого свойства S, выразимого формулой первого порядка, и постоянного $p_n \equiv p$ выполнен закон нуля и единицы. Более того, их доказательство годится и для случая, когда $\{p_n\}$ и $\{1 - p_n\}$ не слишком быстро убывают ($p_n > n^{-\alpha}$ для любого положительного α для почти всех n и то же самое для $(1 - p_n)$). Для $p_n = n^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1]$, проблема была решена Дж. Спенсером и С. Шелахом, которые установили, что закон нуля и единицы выполнен при иррациональном α и не выполнен иначе.

Довольно неожиданно, что ответ на этот вопрос зависит не от величины α, а от его рациональности. Кажется, что закон нуля и единицы должен быть выполнен как при достаточно малых положительных α, так и для достаточно близких к единице α, независимо от его рациональности. Оказывается, так оно и есть, если ограничиться свойствами графа, выразимыми формулами ограниченной глубины $k > 3$, что является первым достижением диссертации: закон нуля и единицы для формул глубины k выполнен для всех $\alpha < 1/(k-2)$ и всех $1 - 1/(2^k - 2) < \alpha \leq 1$. При этом закон нуля и единицы не выполнен при $\alpha = 1/(k-2)$ и $\alpha = 1 - 1/(2^k - 2)$. Более того, теоремы 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3 и 1.2.4 из первой главы диссертации дают более точный ответ на вопрос, при каких рациональных $\alpha \in (0, 1]$ выполнен закон нуля и единицы для свойств графа, выразимыми формулами ограниченной глубины.

В главе 2 диссертации изучается более подробно, для каких рациональных чисел $\alpha \in (0, 1)$ не выполнен закон нуля и единицы для $p_n = n^{-\alpha}$ для некоторой формулы глубины k. Это множество обозначено через S_k^1 и называется *спектром.* Также рассматривается большее множество S_k^2, состоящее из рациональных чисел $\alpha \in (0, 1)$ таких, что для некоторой формулы глубины k для всех $\varepsilon > 0$ закон нуля и единицы не выполнен для некоторой функции p_n в интервале $(n^{-\alpha-\varepsilon}, n^{-\alpha+\varepsilon})$.

Во второй главе найдены наименьший и наибольший элементы множества S_k^2, коими оказались $1/(k-1)$ и $1-1/(2^k-2)$ (для $k > 3$), найдено множество S_3^2, найдены нижние и верхние оценки наибольшей и наименьшей предельной точек множеств S_k^1 и S_k^2 (при больших k), найдены оценки количества элементов множеств S_k^1, S_k^2 в окрестности наибольшей и наименьшей точки, установлено, что наименьшее k, при котором S_k^1 (или S_k^2) бесконечно, равно либо 4, либо 5 (ранее было известно только, что S_k^1 бесконечно для всех достаточно больших k, что установлено Дж. Спенсером в 1990 г.).

В третьей главе диссертации для данного k изучаются законы нуля или единицы для функции $p_n = n^{-\alpha}$ для произвольного α из интервала (0, 1) (а не только рационального). Основным результатом являются Теоремы 3.2.1 и 3.2.2, в которых для всех натуральных $k \geq 4$ и всех рациональных $\alpha \in (0, 1)$ явно указан интервал слева от α, внутри которого нет ни одной точки множества S_k^2 (поэтому на этом интервале выполнен закон нуля или единицы для формул глубины k).

В четвертой главе диссертационной работы изучается вопрос о существовании предела последовательности (без требования, что он равен 0 или 1) вероятностей $\{q_n\}$ для формул глубины k в случае, когда $p_n = n^{-\alpha}$. Для $k \leq 3$ он всегда существует и равен 0 или 1. В теореме 4.2.1 диссертации доказано, что при $k > 3$ для $\alpha = 1/(k-2)$ хотя и не выполнен закон нуля и единицы, однако предел существует для любой формулы глубины k.

В пятой главе найдено наименьшее число перемен кванторов формулу, для которой для бесконечно многих α не выполнен закон нуля и единицы для $p_n = n^{-\alpha}$ (оно равно 3). Напомним, что в главе 2 установлено, что глубина этой формулы не меньше 4.

В шестой главе рассматривается случай $\alpha \in (1, 2]$ (случай $\alpha \geq 2$ тривиален поскольку с вероятностью стремящейся к единице с ростом n граф не имеет ни одного ребра). При таких α случайный граф называют «сильно разреженным». Для формул первого порядка случай разреженного случайного графа был полностью исследован С. Шелахом и Дж. Спенсером: для α вида $1 + 1/l$ при целом l закон нарушается, а иначе выполняется. Этот результат был усилен Дж. Тишкиевичем, который доказал, что для $\alpha \neq 1 + 1/l$ закон нуля и единицы выполнен даже и для монадических формул. Однако для α вида $1 + 1/l$ оставалось неизвестным соотношение между l и минимальной глубиной k формулы, для которой закон нуля и единицы нарушается. В теореме 6.2.1 получены довольно точные соотношения между l и k как для первопорядковых формул, так и для монадических.

Методы исследований. По методам исследований работа находится на стыке теории вероятностей, теории графов и математической логики. Новым техническим средством, изобретенным автором, является понятие циклического расширения, с помощью которого удобно исследовать графы, в которых мало ребер (так называемые «разреженные графы»). Другими важными новшествами являются понятия m-расширения графа и m-разложения графа.

Научная новизна. Во-первых, все полученные результаты являются новыми и отвечают на естественный вопросы, остававшиеся открытыми. Во-вторых, были разработаны новые методы исследования, благодаря которым и удалось ответить на эти вопросы. Некоторые вопросы о спектрах формул ограниченной глубины остались открытыми и, возможно, разработанная автором техника поможет продвинуться в их решении.

Изложение и оформление. Работа написана понятным языком. Доказательства изложены понятно, неформальное изложение сопровождается точными определениями и формулами.

Недостатки диссертации. В диссертации имеется некоторое количество опечаток, не мешающих чтению. Наиболее значительная из замеченных мной — вопросительный знак в ссылке на работу Спенсера на с. 9

Автореферат правильно отражает содержание диссертации. Все результаты диссертации обоснованы, своевременно опубликованы в ведущих научных журналах.

Заключение. Диссертационная работа Жуковского Максима Евгеньевича «Логика первого порядка случайного графа Эрдеша–Реньи» является законченной научно-квалификационной работой на актуальную тему, и является существенным вкладом в теорию случайных графов. Она соответствует специальности 05.13.17 — теоретические основы информатики и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к докторским диссертациям, ее автор заслуживает присуждения степени доктора физико-математических наук по указанной специальности.

24 ноября 2018 г.

Официальный оппонент
доктор физико-математических
наук, профессор кафедры
математической логики и
теории алгоритмов
МГУ им. М.В. Ломоносова

Николай Константинович
Верещагин

Подпись Н.К. Верещагина удостоверяю.
И.о. декана механико-математического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова,
профессор

В.Н. Чубариков

Сведения об оппоненте:

Николай Константинович Верещагин, гражданин РФ, д.ф.м.н. по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел, профессор, профессор кафедры математической логики и теории алгоритмов МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия, Москва 119991, Ленинские горы 1, тел. +7(495)9393031, e-mail: ver@lpcs.math.msu.su